

məktəbli kitabxanası

Riyaziyyat

Ensiklopediyası

I hissə

- 9924 -
Azərbaycan Respublikası Prezidentinin
İşlər İdarəsi
PREZİDENT KİTABXANASI

ÇAŞIOĞLU
2011

22.192
R-67

Tərtib edənlər:

Hüseynov İlham Heydər oğlu – *Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi*

Kərimov Məhəmməd Ağahəsən oğlu – *Respublikanın əməkdar müəllimi*

Riyaziyyat ensiklopediyası. I hissə.
Bakı: Çaşıoğlu, 2011. –400 s.

ISBN 978–9952–27–335–9

© Çaşıoğlu nəşriyyatı, 2011

ÖN SÖZ

Riyaziyyat insanlara nə verir? Onu nə üçün öyrənmək lazımdır? O nə vaxt və hansı səbəbdən yaranmışdır? Gəlin bu haqda danışaq.

Çox yerdə oxumaq olar ki, riyaziyyat çox qədimdövrlərdə insanların praktik tələblərindən yaranmışdır. Riyaziyyatın qədimiliyi haqqında heç kim mübahisə etməsə də, insanların riyaziyyatla məşğul olması haqqında fikirlər müxtəlifdir. Onlardan biri belədir: riyaziyyat poeziya, rəssamlıq, musiqi, teatr və ümumiyyətlə incəsənət kimi, insanların bəlkə də, axıra qədər dərk etmədikləri gözəlliyi dərk etmək cəhdləri kimi, mənəvi tələbatıdır.

Elm tarixində ilk riyaziyyatçı yunan taciri, səyyahı və filosofu Falesi (b.e.ə. VII əsrdə doğulmuşdur) hesab edirlər. Əlbəttə, bundan xeyli qabaq, Misir və Babil mənbələri vardı ki, onlarda hesab və həndəsənin müxtəlif məlumatları göstərilirdi. Lakin onların heç birində göstərilənlərin isbatına aid bir eyham belə yox idi. İlk riyazi teoremləri onun adı ilə bağlayırlar. Fales təkcə «sırf» riyaziyyatçı yox, həm də tətbiqi məsələlər həll edirdi. Misir piramidasının və payanın kölgələrini ölçüb, özünün oxşarlıq teoremini tətbiq etməklə piramidanın hündürlüyünü hesablaya bilmişdi.

XIX əsrin axırlarına qədər insanların az bir qismi riyaziyyatla məşğul olurdu. İndi isə yüz minlərlə insan öz ömürlərini riyaziyyata həsr edirlər. Onların bir hissəsini riyaziyyatın tətbiqi, digərlərini riyaziyyatın gözəlliyi və harmoniyası, üçüncülərini isə hər iki aspekt cəlb edir.

"Gözəllik? Riyaziyyatda hansı gözəllik ola bilər?" – deyə hələ riyaziyyatı bir fənn kimi sevməyən şagird anlaşılmaz şəkildə soruşur. – "İncəsənət tam başqa işdir".

Əlbəttə, riyaziyyatla təzəcə tanış olan hər bir adam belə fikir söyləyə bilər. Lakin riyaziyyat haqqında ayrı-ayrı dövrlərin görkəmli filosofları, riyaziyyatçıları, şairləri və digər sənət adamlarının dediklərinə nəzər salsaq, bu fənnin nə olduğunu daha yaxşı dərk etmək olar:

"Həndəsə – bütün mövcud olanların dərk olunmasıdır."

Platon

"Riyaziyyat... qaydaları, simmetriyanı və müəyyənliyi aşkar edir. Bu isə ən gözəl olanın vacib şəklidir."

Aristotel

"Həndəsənin möhtəşəm bağında hər bir kəs öz zövqünə uyğun buketi tapa bilər."

David Hilbert

"Müəyyən qədər şair olmayan riyaziyyatçı, heç zaman həqiqi riyaziyyatçı ola bilməz."

Karl Veyerştras

"Ədədlər dünyanı idarə etmirlər, lakin onlar dünyanın necə idarə olunmasını göstərirlər."

Höte

Coşqu hissi həndəsədə olduğu kimi, poeziyada da lazımdır."

A.S. Puşkin

"Sirlərin açılmasında keçirdiyimiz hisslər, bizim keçirəcəyimiz narahatlıq hisslərinin ən gözəlidir. Yalnız belə bir hissiyyat əsl incəsənətin, əsl elmin beşiyi başında durur."

Albert Eynşteyn

İnsanların həyatında riyaziyyatın verdiyi töhfələr həddindən çoxdur. Bir çox tanınmış riyaziyyatçılar (o cümlədən Jozef Furye, Anri Puankare) riyaziyyatın əsas rolunu təbiət qanunlarının izah olunmasına köməklik göstərməsində görürdülər. Təsadüfi deyil ki, Qaliley deyirdi: "Təbiətin ən böyük kitabı riyaziyyat dilində yazılmışdır".

Bütün böyük texniki nailiyyətlər – binaların və körpülərin tikintisi, atom elektrik stansiyalarının qurulması, səsdən sürətli aviasiyanın yaranması, kosmik uçuşlar, müasir həyatımızın demək olar ki, ayrılmaz tərkib hissəsi olan kompyuter texnikası – riyaziyyatsız mümkün ola bilməzdi.

Ona görə də "riyaziyyatı nə üçün öyrənirlər?" sualına hələ XIII əsrdə ingilis filosofu və təbiətşünası Rocer Bekon belə cavab vermişdi: "Riyaziyyatı bilməyən adam heç bir digər elmi öyrənə bilməz. O hətta öz qanmazlığını da aşkar edə bilməz."

Riyaziyyatın daha mühüm rolu ondan ibarətdir ki, o, insanın intellektual və yaradıcılıq qabiliyyətini inkişaf etdirir.

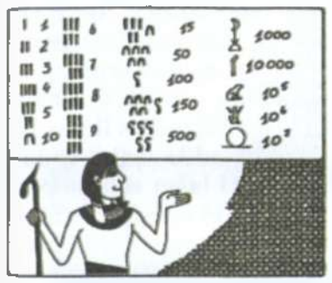
Təqdim olunan iki cildlik "Riyaziyyat ensiklopediyası" kitabı da siz məktəbliləri sirli və ecazkar riyaziyyat dünyasına aparmaq üçündür. Ümid edirik ki, siz, nəinki riyaziyyat dərslərindən faydalanacaqsınız, həmçinin onun gözəlliyindən zövq alacaqsınız.

ƏDƏDLƏRİN QƏDİM YAZILMA SİSTEMLƏRİ

Bəşər yaddaşı təkərin və ya dulusçu çarxının ixtiraçısının adını bizim dövrə gətirib çatdıra bilməmişdir. Bu, heç təəccüblü də deyil, çünki insanların əkinçilik, heyvandarlıq və sadə məişət əşyalarının istehsalı ilə ciddi məşğul olmağa başlamalarından artıq 10 min ildən çox vaxt keçmişdir. Ona görə ilk dəfə olaraq "neçə" sualını verən dahinin adını çəkmək də mümkün deyil.

Daş dövründə insanların meyvə topladıqları, balıq tutduqları və heyvanları ovladıqları zaman saymağa olan tələbat od əldə etməyə olan tələbat kimi təbii idi. İbtidai insanların məskənlərində arxeoloqların aşkar etdikləri tapıntılar da bunu təsdiq edir. Məsələn, 1937-ci ildə Vestonisada (Moraviyada) belə məskənlərdən birində üstündə 55 dərin kərtik olan canavar sümüyü tapılmışdır. Daha sonra alimlər başqa yerlərdən də üstündə üç-üç və ya beş-beş qruplaşdırılmış nöqtə, xətt olan qədim daş əşyalar tapmışlar. Rəqəmlərin belə yazılma sistemi vahidli sistem adlanır, çünki bu sistemdə istənilən ədəd vahidi təmsil edən işarənin təkrarı nəticəsində yaranır. Qruplaşdırma və köməkçi işarələr isə yalnız böyük ədədləri qavramağı yüngülləşdirmək üçün istifadə edilir.

İbtidai insanların mağaraların divarlarında çəkdikləri çubuqların və ya heyvanların sümükləri üzərində və ağacların budaqlarında açdıqları kərtiklərlə verilən vahidli say sistemi indi də yaddan çıxmayıb. Hərbi məktəbin kursantının neçənci kursda oxuduğunu necə bilmək olar? Bunun üçün paltarının qoluna tikilmiş zolaqları sayın. Usta təyyarəçinin hava döyüşündə vurduğu düşmən təyyarələrinin sayını bilmək üçün onun təyyarəsinin fyüzelyajındakı ulduzların sayına diqqət yetirin.



Əşyaların sayı çox olmadıqda onları bir-bir saymaq rahatdır. Bu qayda ilə böyük miqdarda olan əşyaları saymaq darıxdırıcı və yorucu olduğundan, vahidləri qruplara birləşdirmək ideyası yarandı. Bununla da "hesabdarın" əlindəki və ayağındakı barmaqların sayına görə beşlik, onluq, iyirmilik say sistemləri meydana gəldi.

QƏDİM MİSİRLİLƏRİN HEROQLİF SİSTEMİ

Yeni eradan təxminən 3-2,5 min il əvvəl misirlilər öz ədədi sistemlərini icad etmişlər. Burada əsas ədədlər olan 1,10, 100 və s. xüsusi işarələrlə - heroqliflərlə göstərilir. Misirlilər onları sərdabələrin divarlarında, qarğı qələmlərlə lülə şəkilli papirusun üzərində yazırdılar.

Ədədləri yazmaq üçün onlar aşağıdakı heroqliflərdən istifadə edirdilər:



Bütün digər ədədlər isə bu əsas heroqliflərdən toplama əməlinin köməyi ilə tərtib olunurdu. Məsələn,



yazısı üç minlik, üç yüzlük, iki onluq və altı təklik kimi açıqlanırdı.

Ədədin qiyməti onun heroqlifin sistemdə yazılışını göstərən işarələrin tərtibindən asılı deyil. Bu işarələri sağdan sola, birini digərinin altında, qarma-qarışıq yazdıqda belə, ədəd dəyişmir.

Sadələşdirmə və üslub dəyişməsi hesabına çox sonra əl ilə yazmanı yüngülləşdirən şərti işarələr yarandı. Bu işarələr ieratik (yunan sözü ieratikos – "müqəddəs") yazının əsası oldu.





Ədədlərin bu yazı sisteminə çox gec Misir papiruslarında rast gəlmək olar. Qədim Misir hesabının sirrini açan iki riyazi papirus aşkar edilmişdir. Onlardan biri "Raynd papirusu", digəri isə "Moskva" (bu haqda "Qədim Misir" məqaləsində daha ətraflı danışılır) papirusu adlanır.

ROMA RƏQƏMLƏRİ

Müxtəlif dövrlərdə, müxtəlif xalqların tarixində heroqlif hesablama sistemlərinin çox olmasına baxmayaraq, onlardan yalnız birindən hələ də istifadə edilir. Onun rəqəmlərinin 2,5 min ilə yaxın yaşı olsa da hamıya tanışdır. Bu rəqəmlərə saat siferblatında, qədim və müasir binaların frontonlarında, abidələrdə, kitablarda rast gəlirik. Əlbəttə, söhbət Roma say sistemindən gedir.



Demək olmaz ki, Roma rəqəmləri zamanla dəyişikliyə uğramamışlar. Əgər qədim Roma sakini Moskvadakı "Rimskaya" metrostansiyasının üstündə yazılmış açılma tarixini oxumağa çalışsa, ağla gəlməyən çətinliklə üzləşmiş olacaq. Səbəb isə yalnız I, V, X rəqəmlərinin zaman keçdikcə dəyişməz olaraq qalması, qalan rəqəmlərin isə qədimdə tamamilə başqa cür yazılmasıdır.

Alimlər belə fərz edirlər ki, 100 ədədini ifadə etmək üçün yazılan heroqlif rus Ж hərfinə bənzər olmuşdur, 50 ədədi isə bu heroqlifin yuxarı yarım hissəsi şəklində olub. Sonradan bu heroqlif L heroqlifinə transformasiya olunmuşdur: → → L

100 ədədini isə C hərfi ilə işarə ediblər ("centum" latın sözünün baş hərfi).

500 və 1000 ədədləri üçün simvollar da uzun təkamül yolu keçmişlər. Əvvəlcə 1000 ədədini ifadə etmək üçün işarələrindən istifadə edilirdi. Məsələn, məşhur fransız riyaziyyatçısı və filosofu Rene Dekartın, 1637-ci ildə çap olunmuş kitabının üzərində ΦDCXXXVII tarixi göstərilmişdir. Bu yazıda bizə məlum olan I, V, X, C rəqəmləri ilə yanaşı Φ=1000, D=500 qədim Roma heroqliflərindən də istifadə edilmişdir. Onları əvəz edən M və D işarələri latın sözləri olan mille – "min" və demimille – "yarım min", "beş yüz" – sözlərinin baş hərflərindən meydana gəlmişlər.

Qədim romalılar mindən böyük olan ədədləri də bir işarə ilə ifadə etməyi bacarırdılar. Məsələn, 10 000 ədədi üçün onlar işarəsini, 100 000 ədədi üçün işarəsini tətbiq edirdilər. Vaxt keçdikcə sonuncu heroqlifdəki kənar qövslər birləşib "tag" oldu ki, bu da xüsusi şəkilli Π çərçivəsinin əksi oldu. Belə çərçivəyə yerləşdirilən rəqəm 100 000-ə vurulurdu. Beləliklə, X yazılışı 1000000 demək idi.

Orta əsrlərdə bu ənənənin özünəməxsus davamı oldu. Ədədin 1000-ə vurulduğunu göstərmək üçün, onun üstündə xətt qoyulurdu. Məsələn, IV VI yazısı $4 \cdot 1000 + 6 = 4006$ demək idi.

Roma rəqəmlərini necə oxumaq lazımdır? Roma rəqəmlərinin yazılma qaydalarından birində deyilir: "Əgər böyük rəqəm kiçikdən öndə dursa, onlar toplanır, əgər kiçik böyükdən əvvəl dursa (bu halda kiçik rəqəm təkrar edilə bilməz), bu zaman kiçik rəqəm böyükdən çıxılır". Məsələn VII=5+1+1=7; IX=10-1=9. bu qaydadan istifadə edərək "Rimskaya" metrostansiyasının açılış tarixini oxumaq olar: MCMXCV= =1000+(1000-100)+(100-10)+5=1995.

İndi Roma rəqəmlərindən istənilən bir ədəddə üç dəfədən çox yazmaq qadağandır. Buna görə də VIIII, XXXX və s. yazıları yanlışdır. Amma qədim romalılar bu məhdudiyyətlərdən xəbərsiz olduqları üçün yəqin ki, 1995 ədədini MDCCCCLXXXXV kimi yazardılar.

Beləliklə biz, rum rəqəmləri "cəmiyyətində" maraqlı fenomenlə üzləşdik: yeni rəqəmlərin yığılmasında hörgü kərpici kimi istifadə edilən rəqəmlərə toplanmaqdan başqa çıxılmağa da icazə verdiyimiz halda onları vacib olan bir riyazi xüsusiyyətdən – yeganəlik təsəvvüründən məhrum etdik. Məsələn, indi "Rimskaya" metrostansiyasının açılış tarixini MVM və ya MDVD kimi yazmağa nə mane olur?

Əgər Roma rəqəmləri ilə yazılmış bir sıra müasir və qədim yazıları təhlil etsək görərik ki, bu rəqəmləri ədədlərə çevirən müəlliflər bir sıra aşkarlanmayan qaydalardan istifadə etmişlər. Amma Roma rəqəmlərinin dəqiq və yeganə yazı prinsipləri hələ də işlənməyib. Bir neçə maraqlı təklif mövcuddur. Onlardan biri müasir amerikalı alim Stiven Şvarsmanın təklif etdiyi Roma ədədlərinin Beynəlxalq standartıdır (ISRN – International Standart Roman Numerals) ki, bunun əsasında onun tərəfindən seçilmiş altı qayda durur.

Roma ədədlərinin hələ təsdiq edilməmiş beynəlxalq standartlara tam uyğun olmağını istəyirsinizsə, sizə burada verilən cədvəl kömək edər.

Bu cədvəl 1-dən 3999-a qədər bütün ədədləri işarə etməyə imkan verir. Bunun üçün əvvəlcə ədədi onluq say sistemində yazın. Sonra cədvəldə minlik, yüzlük, onluq və təklik mərtəbələrindəki rəqəmlər üçün cədvəldə uyğun kod qrupunu seçin. Məsələn, 3999 ədədi belə görünəcək: MMMC MXCIX.

Ədədlərin Roma rəqəmləri ilə ifadəsi



I = 1	V = 5	X = 10	L = 50	C = 100	D = 500	M = 1000				
I 1	XI 11	XXI 21	XXXI 31	XLI 41	LI 51	LXI 61	LXXI 71	LXXXI 81	XCI 91	CI 101
II 2	XII 12	XXII 22	XXXII 32	XLII 42	LII 52	LXII 62	LXXII 72	LXXXII 82	XCII 92	CCXII 212
III 3	XIII 13	XXIII 23	XXXIII 33	XLIII 43	LIII 53	LXIII 63	LXXIII 73	LXXXIII 83	XCIII 93	CCCLIII 353
IV 4	XIV 14	XXIV 24	XXXIV 34	XLIV 44	LIV 54	LXIV 64	LXXIV 74	LXXXIV 84	XCIV 94	CDIV 484
V 5	XV 15	XXV 25	XXXV 35	XLV 45	LV 55	LXV 65	LXXV 75	LXXXV 85	XCV 95	DLV 555
VI 6	XVI 16	XXVI 26	XXXVI 36	XLVI 46	LVI 56	LXVI 66	LXXVI 76	LXXXVI 86	XCVI 96	DCCCXLVI 846
VII 7	XVII 17	XXVII 27	XXXVII 37	XLVII 47	LVII 57	LXVII 67	LXXVII 77	LXXXVII 87	XCVII 97	CMXXVII 927
VIII 8	XVIII 18	XXVIII 28	XXXVIII 38	XLVIII 48	LVIII 58	LXVIII 68	LXXVIII 78	LXXXVIII 88	XCVIII 98	MVIII 1008
IX 9	XIX 19	XXIX 29	XXXIX 39	XLIX 49	LIX 59	LXIX 69	LXXIX 79	LXXXIX 89	XCIX 99	MCMXCIX 1999
X 10	XX 20	XXX 30	XL 40	L 50	LX 60	LXX 70	LXXX 80	XC 90	C 100	MMCDXX 2420

SAYLAR BİZƏ NƏ DANIŞA BİLƏR

Natural ədədlərin yaranması üçün tarixi bir yol keçilmişdir. İnsanlar tədricən müxtəlif çoxluqları saymağa başlamış və bu prosesdə sayılan cisimlərin ümumi cəhətləri meydana çıxmışdır. Məsələn, "beş adam", "beş ağac", "beş dağ", "beş dəniz" və s. Burada işlədilən "beş" sözü getdikcə onun bağlandığı "adam", "ağac", "dağ", "dəniz" kimi cisimlərin mahiyyətindən ayrılmış və mücərrədləşmişdi. Deməli, qədim insanlar cisimlərin konkret keyfiyyətlərindən, xassələrindən uzaqlaşaraq, onların saylarını göstərən əlamətləri öyrənmək nəticəsində bu gün bizə hazır vəziyyətdə gəlib çatmış natural ədədləri yaratmış və öz ehtiyaclarına tabe etmişlər.

Milyon həddinə qədər olan ədədləri yazmaq lazım gəldikdə milyonluq qrupunu göstərən işarəni ayırmaq üçün sətirüstü yaxud sətiraltı xəttdən istifadə etmək olar və ya minlik qrupunu m hərfi ilə nişanlamaq olar, məsələn 273847 = CCLXXIII DCCC XLVII (yada salaq ki, m hərfi latınca "mille" – "min" sözünün baş hərfidir) Qədimdə rum rəqəmlərini belə yazmaq da qəbul olunmuşdu.

DİGƏR HEROQLİF SİSTEMLƏRİ

Ədədlərin Misir və Roma heroqlif sistemləri ilə yanaşı bu sistemə finikiya, palmir, krit, Suriya, yunanların nüktəli və ya Herodian sistemləri də aiddir (məhz II-III əsrlərdə yaşamış qramatik Herodianın məlumatından sonra Qərbi Avropa alimləri bu sistemlərin varlığını bilmişlər). Qədim Çin, qədim hind, astek heroqlif sistemləri də məlumdur. Bu sistemlərdə də, Misir və Roma sistemlərində olduğu kimi, heroqliflərlə işarə olunan açar ədədlər daxil edilir. Qalan bütün ədədlər isə bir açar sözün sağ və ya sol tərəfinə digər açar ədədləri, mümkün təkrarlarla, yazmaqla alınır.

Maraqlıdır ki, bir çox xalqlarda 1 ədədini işarə etmək üçün şaquli xətt tətbiq olunurdu. Bu ədəd bəşər tarixində ən qədim ədəddir. O, torpaq üzərində çəkilən adi cızıqdan, ağacda və ya sümükdə çəkilən kərtikdən yaranıb.



ƏLİFBA SİSTEMLƏRİ

Qədimdə heroqlif sistemləri ilə yanaşı, ədədlərin hərflərin köməyi ilə də ifadə edilməsindən geniş istifadə edilirdi. İonik adı altında tanınan yunan əlifba sayı da məhz belə idi. O, b.e.ə. II əsrdə nüktəli sistemi əvəz etdi. Xristianlıqla yanaşı bu nömrələmə öncə cənub, sonra isə şərq slavyanlarına keçdi.

Aşağıda slavyan əlifbasının 27 hərfi və onların ədədi mənası göstərilmişdir. Rəqəmləri ifadə edərkən hərflərin üzərində "titlo" adlanan xüsusi işarə qoyulurdu. (Əlifba burada tam olaraq əks etdirilməmişdir).



Bu cədvəlin köməyi ilə 1-dən 999-a qədər istənilən tam ədədi göstərmək mümkündür.

1000, 2000 və s. ədədlərini elə 1,2 ədədlərini ifadə etdikləri hərflərlə ifadə edərək, soldan aşağıda "min" işarəsi qoyurdular:

$\overset{\prime}{А} = 1000, \overset{\prime}{В} = 2000, \ldots \overset{\prime}{Ф} = 9000.$

On minliklər də əlifbanın birinci hərfləri ilə qeyd edilirdi, amma titlosuz və hərflər dairəyə alınırdı:

Yüz minliklər oxşar formada təsvir edilirdi, lakin dairə nöqtələr hesabına düzəlirdi:

Ⓐ=100000, Ⓑ=200000, Ⓘ=900000

Nəhayət, milyonlar xətlər hesabına düzələn dairə ilə qeyd olunurdu:

Ⓐ=1000000, Ⓑ=2000000, Ⓘ=9000000

Dairə daxilində hərflərlə işarə olunan ədədlərin xüsusi adları var idi:

Ⓐ– zülmət; Ⓐ– legion; Ⓐ – leodor

Qədim slavyan nömrələmə sistemində 4210000 ədədini necə verməli?

$4 \cdot 10^6 =$ Ⓐ, $2 \cdot 10^5 =$ Ⓑ, $1 \cdot 10^4 =$ Ⓐ.

olduğundan 4210000 = Ⓐ Ⓑ Ⓐ.

Yuxarıda təsvir olunan nömrələmə "kiçik ədəd" adı alıb. Burada mövqeli sistemin ulu rüşeymi aydın görünür, çünki müxtəlif mərtəbələrin vahidlərini işarə etmək üçün eyni simvollar tətbiq olunur.

Buna bənzər, yəni hərflərin bəzən rəqəm kimi meydana gəldiyi hesablama sistemləri, qədimdə ərəblərdə, yəhudilərdə, gürcülərdə də mövcud olmuşdur.

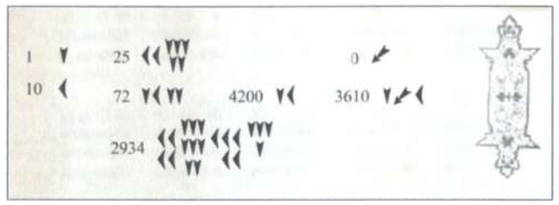
ALTMIŞLIQ (BABİLİSTAN) SİSTEMİ

Ədədlərin əlifba nömrələməsində yazılışı heroqliflərlə yazılışından qısa olur. Lakin ədədlərin bu sistemlərin hər ikisində ya- zılışının mühim çatışmazlığı var: belə ədədlər üzərində hesab əməlləri çox zəhmət tələb edir. Mövqeli say sistemlərində belə narahatlıq yoxdur. Rəqəmlərə ədədin yazılışında tutduğu mövqedən asılı olaraq müxtəlif qiymətlər vermək ideyası ilk dəfə olaraq eramızdan əvvəl III minillikdə Mesopotamiyada, qədim Şumerlərdə meydana gəlib. Onlardan da Mesopotamiyanın yeni sahibi olan babillilərə keçib və buna görə də tarixə Babilistan say sistemi kimi daxil olub.



Üzərində qədim babillilərin yazıları həkk olunmuş yüzlərlə bişmiş kərpic lövhələr bizə gəlib çatmışdır. Onların sistemində ən sadə ədəd iki işarə ilə verilirdi: ▼ şaquli çivi 1-i işarə etmək üçün, ◄üfüqi çivi isə 10-u işarə etmək üçün, 1-dən 59-a qədər ədədlər, adi heroqlif sistemində olduğu kimi, bu iki işarənin köməyi ilə yazılırdı.

▼▼ =2, ◄▼=11, ◄◄◄=30



60 ədədi yenə, 1 kimi, ▼ ilə işarə olunur. 60-ın başqa qüvvətləri $3600=60^2$, $216\,000=60^3$ və s. də belə işarə olunurdu.

Babil sistemində müxtəlif ədədlərin necə yazılması aşağıdakı misallardan görünür.

▼◄▼▼ ◄◄◄▼▼▼◄◄

72=1·60+12, 2000=33·60+20

Lakin, sıfır olmadığına görə bu yazı sistemi birqiymətli olmurdu. Mətndən asılı olaraq bir yazı eyni zamanda iki müxtəlif ədədi göstərə bilərdi.

Məsələn, $72 = 1 \cdot 60 + 12$,

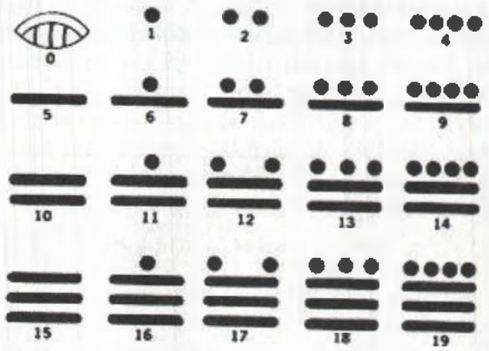
$4320 = 1 \cdot 60^2 + 12 \cdot 60$ və ya $1\frac{1}{5} = 1 \cdot 60^0 + 12 \cdot 60^{-1}$ və s.

Altmışlıq say sistemi İntibah dövrünə qədər astronomik hesablamalarda tətbiq olunub. II əsrdə yunan riyaziyyatçısı və astronomu Klavdi Ptolomey sinusların bizə gəlib çatan cədvəlini tutarkən bu sistemdən istifadə edib.

MAYA HİNDULARININ HESAB VƏ RƏQƏMLƏRİ

Mərkəzi Amerikanın ərazisində yaşayan hindu xalqı maya, yeni eranın başlanğıcında ədədləri şumerlər kimi təsvir edirdilər. Mayalar oxşar ədədi sistem daxil etmişlər, ancaq onların sisteminin əsası beşlik-iyirmilik idi. Onlarda ən sadə rəqəmlər-xətlər və nöqtələr idi ki, bunların köməyi ilə 1-dən 19-a qədər olan ədədləri yazırdılar.

Nöqtələrlə onlar 1-dən 4-ə qədər olan vahidləri, xətt ilə 5-i işarə edirdilər. Məsələn, ••• yazısı 8, ⁼⁼ yazısı 19 demək idi.



Maya sistemində əsas rolu təhrif edilmiş iyirmilik sistem oynayırdı. Əgər babil sistemi 60 ədədinin müxtəlif dərəcələrinə əsaslanırdısa, mayalarda açar ədədlər 20, $18x20$, $18x20^2$, $18x20^3$, $18x20^4$ və s. idi. Ədədin yazılışında rəqəm-kərpiccıklər biri digərinin altında yazılırdı, belə ki, yuxarıdakı rəqəm böyük olurdu. Məsələn ⁼⁼ ya ••• ya ⁼ .

zılışı Maya sistemində $19 \cdot 18 \cdot 20 + 13 \cdot 20 + 11 = 7111$ (burada açar ədədlər altından xətt çəkilənlərdir) ədədini göstərir.

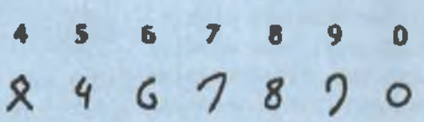
Sıfırı işarə etmək üçün işlətdikləri işarə  yarıyumulu gözü xatırladır. Onda yazısı $2 \cdot 20 + 0 = 40$ ədədini göstərir.



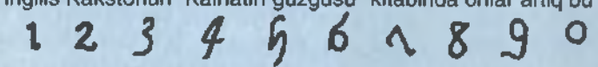
Rəqəmlərin tarixindən

Zaman rəqəmlərin xarici görünüşünü dəyişmişdir. XII əsrdə mavritan dövlətlərində qəbul edilmiş rəqəmlər aşağıdakı görünüşə malik idilər:

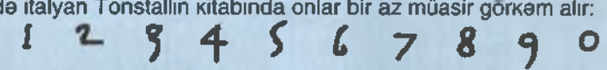
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



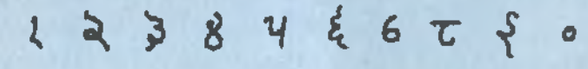
Artıq 1480-ci ildə ingilis Kakstonun "Kainatın güzgüsü" kitabında onlar artıq bu cür təsvir edilirdi:



Yalnız 1522-ci ildə italyan Tonstallın kitabında onlar bir az müasir görkəm alır:



Maraqlıdır ki, Hindistanda da rəqəmlər dəyişikliyə uğrayaraq XX əsrin əvvəlində aşağıdakı kimi görünüş almışdırlar:



XVI əsrdən başlayaraq Avropada artıq kitab nəşri inkişaf etməyə başladı. Bir çox rəssamlar müxtəlif topoqrafiya şrifti, rəqəm və hərflər üzərində işləməyə başlayır. Onlar rəqəm və hərflərə göz oxşayan görkəm verməyə çalışırdılar. Amma rəqəmlərin tarixi bununla bitmir. Məsələn, bu yaxınlarda bir sıra ölkələrdə

1234567890

kimi yazı istifadə olunmağa başladı.

Bu rəqəmlərin adi rəqəmlərdən nəyi yaxşıdı? Sadəcə olaraq cüt rəqəmlərin quyruğu yuxarı, tək rəqəmlərin quyruğu isə aşağı doğru gedir. İndi məsələn, 5 və 2-ni səhv salmaq çətindir. Doğrudur, bu yenilik elə də geniş istifadə edilmədi.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Bu rəqəmləri mikrokalkulyator və elektron əl saatlarında görə bilərik. Yeddi parçadan ibarət kəsikdən yığılmış rəqəmlər yetərincə tanınır.

Texnikanın tələbi ilə rəqəmlərin təsvirini poçt zərflərinin üzərində görə bilərik.



Burada rəqəmlərin təsvirində artıq doqquz kəsik iştirak edir. Rəqəmlər korrespondensiyanı çeşidləyən elektron maşınlar üçün nəzərdə tutulmuşdur. İndeksin üzərində olan yağlı xətlər yazılan indeksi dəqiq təyin etməyə yardım edir.



MÖVQELİ ONLUQ SİSTEMİ

Qədimdən məlum olan mövqeli onluq sistemin yazılışı Hindistanda tapılmış və 595-ci ilə aiddir. Bizə yaxşı məlum olan sıfırın meydana gəlməsi təkcə Hindistanda deyil, həmçinin Çində də tətbiq edilən say sistemləri tərəfindən hazırlanmışdır. Bu qədim sistemdə eyni ədədli vahidlərin, onluqların, yüzlüklərin və ya minliklərin yazılması üçün eyni simvollardan istifadə edilir, amma əlavə olaraq dərəcələri göstərilirdi. Zaman keçdikcə gördülər ki, hətta dərəcələr göstərilmədiyi halda belə, rəqəmi oxumaq mümkündür, çünki hər dərəcənin öz yeri - mövqeyi var. Əgər mövqe boşdursa, onu xüsusi sıfır işarəsi ilə qeyd etmək olar. Sonuncu babil mətnlərində belə işarə görünməyə başlasa da, rəqəmin sonunda ondan istifadə edilmirdi. Yalnız *IX* əsrdə Hindistanda sıfır öz yerini tam tutaraq, sonradan bütün dünyaya yayıldı.

Hindistan ədəd sistemi ilk olaraq Ərəbistana, sonra isə Qərbi Avropaya keçdi. Onun haqqında ətraflı olaraq orta asiyalı riyaziyyatçı əl-Xarəzmi danışır. İstənilən qədər böyük ədədlərin daha sadə və rahat çıxma və toplama qaydaları onu, xüsusilə, məşhurlaşdırdı. Əl-Xarəzminin əsəri müsəlman aləmi üçün ümumi olan ərəb dilində yazıldığı üçün Avropada Hindistan rəqəmləri sistemi - "ərəb" rəqəmləri sistemi kimi tanındı.

QƏDİM ŞƏRQ RİYAZİYYATI

QƏDİM MİSİR

Ən qədim riyazi mətnlər iki böyük sivilizasiyadan – Misir və Mesopotamiya və ya Çayarasından – qalmışdır. Gündəlik həyatda həlli tələb olunan ilk riyazi məsələlər məhz orada meydana gəlmişdir. Hesablamalar aparmadan nə möhtəşəm saray, nə də buğda anbarı tikmək olar. Bəs hesab qaydalarını bilmədən qohumlar arasında torpağı, tacirlər arasında gəliri necə bölmək və ya dənizdə, səhrada doğru yolu necə tapmaq olar?

Minilliklər boyunca Misir mədəniyyəti heç bir xarici təsir olmadan inkişaf etmişdir, onun özünəməxsusluğu da bununla izah edilir. Qədim Misir riyaziyyatının səviyyəsi çox yüksək idi. Nailiyyətləri ilə müasir elmin əsasını qoyan yunanlar özlərini misirlilərin tələbələri adlandırırlar. B.e.ə. *V* əsrdə tanınmış yunan tarixçisi Herodot bu haqda yazırdı:



Taxıl dənələrini sayan misirli.
Misir heykəli.
B.e.ə. 2040-1785-ci illər

"Misir kahinləri deyirdilər ki, hökmdar torpağı düzbucaqlı sahələrə bölərək, misirlilərə paylayırdı və müvafiq vergi qoyaraq gəlir əldə edirdi. Əgər payın hansısa hissəsini daşqın nəticəsində su basardısa, ora bir dəstə adam gedər, batmış hissənin sahəsini ümumi hissədən çıxaraq vergi təyin edərdilər. Məncə həndəsə belə yaranaraq Misirdən Elladaya keçmişdir".



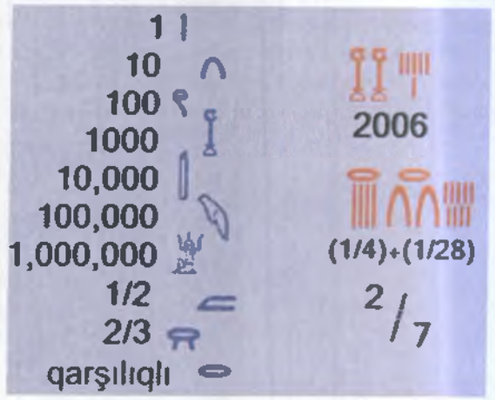
Raynd papirusunun fraqmenti

İLK DƏRSLİKLƏR

Qədim Misirin ictimai quruluşu uzun müddət dəyişməz qalmışdır. Elmi biliklər də dəyişməz olaraq qalmışdır. Buna görə də alimlər bu və ya digər ixtiranın tarixini dəqiq müəyyənləşdirməkdə çətinlik çəkirlər. Həm də qədim misirlilərin riyazi səviyyələrindən xəbər verən mənbələr olduqca azdır. Onlardan ən məşhurlarının adlarını çəkək.

Bu ilk olaraq, öz sahibinin şərəfinə adlandırılmış Rayndın papirusudur. O, 1858-ci ildə tapılmış, 1870-ci ildə isə şifrəsi açılaraq nəşr edilmişdir. Bu əlyazma 84 məsələdən ibarət ensiz (33 *sm*) və uzun (5,25 *m*) papirus zolağı idi. İndi bu papirusun bir hissəsi İngiltərədə London muzeyində, digər hissəsi isə Nyu-Yorkda saxlanılır.

İkinci, 1888-ci ildə rus misirşünası Vladimir Semyonoviç Qolenişev tərəfindən Luksorada əldə edilmiş – Moskva papirusu adlanan papirusdur. Hal-hazırda papirus A.S.Puşkin ad. Dövlət təsviri incəsənət muzeyinə məxsusdur. 5,44 *m* uzunluğunda və 8 *sm* eni olan bu büküdə 25 məsələ yerləşdirilmişdir.



Misir rəqəmləri və ədədləri

Və nəhayət 1927-ci ildə böyük çətinliklərlə hamarlanmış və misirlilərin riyazi biliklərini işıqlandıran "Misir riyaziyyatının dəri büküməsi"adlı papirusdur. Hal-hazırda o Britaniya muzeyində saxlanılır.

Bu əlyazmalar Orta səltənət dövrünə (b.e.ə. *XX-XVII* əsrlər) aiddir. Moskva papirusu b.e.ə. 1800 və 1600 illər arasında, bir tələbə tərəfindən, daha qədim, 1900 ilə aid olan bir əlyazmadan köçürülmüşdür. Raynd papirusu isə b.e.ə. təxminən 1650-ci ildə xəttat Axmes tərəfindən köçürülmüşdür. Orijinalın müəllifi məlum deyil, sadəcə mətnin b.e.ə. *XIX* əsrdə yarandığı müəyyən edilmişdir. "Dəri büküm" isə b.e.ə. *XIX-XVIII* əsrlərə aid edilir.

Bu qəbildən olan papiruslar çox güman ki, dərslik rolunu oynayırdı. Axmesin əlyazmasında deyildiyi kimi o, "bütün əşyaların əsaslı və mükəmməl tədqiqinə, onların məğzinin öyrənilməsinə, sirlərinin açılmasına" həsr edilmişdir. O dövrdə riyazi biliklər bax belə yüksək qiymətləndirilirdi! Papiruslarda hesablamalara aid misallar – riyazi əməllərin aparılmasına dair nümunələr, əmlakın bölünməsinə, anbar və ya səbətin həcminin, tarlanın sahəsinin tapılmasına dair məsələlər var. Bəs görəsən bu dərsliklər kimin üçün nəzərdə tutulmuşdur?

Rayndın papirusu aşağıdakı sözlərlə bitir: "Zərərvericiləri, siçanları ovla; alaq otlarını əvvəlcədən təmizlə; bol iplik əldə et. Ra allahından istilik, külək və su arzu et". Buna görə də bəzi tədqiqatçılar fikirləşirdilər ki, bu büküm əkinçilərə ünvanlanmışdır. Amma diqqətlə baxdıqda görmək olar ki, orda verilən məsələlərin bir çoxu kəndlilərə heç də lazım deyil. Fironlar ölkəsində bu biliklərə tələbatı olan bir qrup adam var idi, bu da mirzələrdir. Mirzə - çox məsuliyyətli və həddən artıq şərəfli bir sənət idi. O, istənilən məsələni həll etmək üçün müxtəlif riyazi biliklərə malik olmalı idi.

HESABLAMA ÜSULLARI

Qədim misirlilərin bütün hesablama qaydaları toplama, çıxma, ikiyə vurma və kəsri vahidə qədər tamamlama qabiliyyətinə əsaslanırdı.

Vurma və bölməni xüsusi əməliyyatınıkiyə çoxqat vurma və ya ikiyə çoxqat bölmə nəticəsində cəmləməyə gətirməklə yerinə yetirirdilər.

Kəsrlər üçün xüsusi işarələr mövcud idi. Misirlilər $1/n$ kəsrindən istifadə edirdilər, burada n- natural ədəd idi. Belə kəsrlər alikvot adlanırlar. Miçirlilərin qeyri-alikvot kəsr kimi "tanıdıqları" yeganə kəsr $\frac{2}{3}$ idi. Bəzən $m:n$ bölməsi əvəzinə $m\cdot\frac{1}{n}$ vurması aparılırdı. Bunun üçün xüsusi cədvəllər tətbiq edilirdi. Qeyd etmək lazımdır ki, kəsrlər üzərində əməllər Misir hesabının xüsusiyyəti idi və bu hesabda ən sadə hesablamalar bəzən çox mürəkkəb məsələyə çevrilirdi.

Misir papiruslarında az bir qism məsələ ən sadə bir dəyişənli məsələni həll etməyə gətirilir, məsələn Raynd papirusunda 33-cü məsələ belədir: "Bir kəmiyyət, onun $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$ və $\frac{1}{7}$-inin cəmi 37-dir. Bu kəmiyyət neçədir?". Məsələnin $16\frac{2}{97}$ cavabı alikvot kəsrlərlə yazılıb:

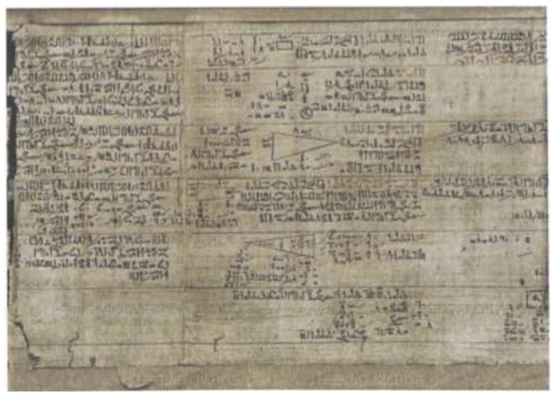
$$16+\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}.$$

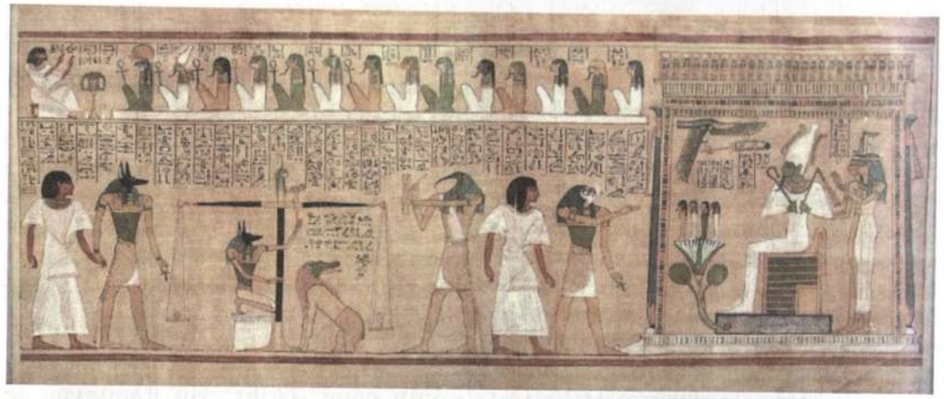
Buna bənzər məsələlərin həllində məchulu göstərmək üçün "qalaq" mənasını verən xüsusi heroqlifdən istifadə edirdilər. Eyni üsulla həll edilən "qalaq" tipli məsələlərdə cəbrin tənliklər haqqında elm kimi yaranmasını görmək mümkündür.

Misir papiruslarında həm ədədi silsiləyə, həm də həndəsi silsiləyə aid məsələlərə rast gəlmək olur. Bu isə bir daha qədim riyaziyyatın yalnız praktiki deyil, həm də nəzəri xarakterini təsdiq edir.

PİRAMİDALAR ÖLKƏSİNİN HƏNDƏSƏSİ

Misirlilərin kifayət qədər primitiv, amma çox nəhəng hesablar əsasında, həndəsədə nəzərə çarpan nailiyyətlər əldə etmələri çox





heyrətamizdir. Onlar düzbucaqlı, üçbucaq, trapesiya formalı sahələri dəqiq tapmağı bacarırdılar.

Məlumdur ki, b.e.ə. I minilliyin ortalarında misirlilər düzbucaqlı üçbucaq qurmaq üçün düyünlərlə 12 bərabər hissəyə bölünmüş kəndirdən istifadə edirdilər. Kəndirin uclarını düyünləyib üç tərəfə dartırdılar. Əgər tərəflər 3:4:5 nisbətində olurdularsa, deməli, düzbucaqlı üçbucaq alınırdı. Və bu qədim Misirdə məlum olan yeganə düzbucaqlı üçbucaq idi. Papiruslarda Pifaqor teoremi ilə bağlı heç bir məsələnin olmamasına baxmayaraq, riyazi mətnlərin şifrəsinin açılmasına qədər misirlilərin onunla tanış olduqları barədə mülahizələr yürüdülürdü.

Misirlilərin həndəsə elminin ən mühüm nailiyyətlərindən biri, diametri d olan dairənin sahəsini göstərən

$$S=\left(d-\frac{1}{9}d\right)^2=\left(1-\frac{1}{9}\right)^2 d^2.$$

düsturundan π ədədi üçün çox yaxşı təqribi qiymətin alınmasıdır. Rayndın papirusundakı 50-ci məsələdən bu qaydaya əsasən $\pi=4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2\approx 3{,}1605$ qiyməti uyğun gəlir. Ancaq düsturun özünü necə aldıqları mətndən aydın olmur.

Moskva papirusunda daha bir maraqlı məsələ var: " ağzı $4\frac{1}{2}$ " olan zənbilin səthi hesablanır. Mətndə zənbilin hansı formada olduğu göstərilmədiyindən, tədqiqatçılar onu müxtəlif şəkildə izah edirlər. Ancaq hamı eyni fikirdədir ki, burada da π ədədi üçün $4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^2$ təqribi qiyməti götürülür. Qeyd edək ki, bütün Qədim Şərqdə hesablamalarda $\pi=3$ qiymətindən istifadə olunurdu. Hətta Bibliyada da ona göstəriş var. Beləliklə, bu barədə misirlilər başqa xalqları çox qabaqlayıblar.

Fəza cisimləri içərisində piramidanı ən çox "misirli" hesab etmək olar, çünki fironların sərdabələri bu formadadır. Belə məlum olur ki, kubun, paralelepipedin, prizmanın və silindrin həcmini hesablamaqla bərabər, misirlilər oturacaqları a və b tərəfli kvadratlar, hündürlüyü h olan kəsik piramidanın həcmini hesablamağı bacarırdılar. Bunun üçün onlar

$$V=\frac{\left(a^2+ab+b^2\right)h}{3}$$

düsturunu tətbiq edirdilər. Bu düstur qədim Misir riyaziyyatının ən yüksək nailiyyəti hesab olunur.

Yekun olaraq belə nəticəyə gəlirik ki, Qədim Misir riyaziyyatı aralarında dəqiq sərhəd olmayan biliklər toplusu idi. Bu biliklər, praktik əhəmiyyəti olan konkret məsələləri həll etmək qaydaları idi. Bu məsələlər tədricən və çox ləng, ümumiləşdirildi və mücərrəd şəkil aldı.



ÇAYARASI

Qədim Mesopotamiyanın (Çayarasının) ilk mədəniyyət ocaqları Fars körfəzinin sahilində meydana gəlmişdir. Məhz Dəclə və Fərat çaylarının deltasında b.e.ə. *IV* minillikdə şumerlər yaşamışlar; onlar Ur və Uruk (bu şəhərin adı İncildə Erex kimi çəkilir), Laqaş və Larsa şəhərlərini salıblar. Şimalda isə akkadlar-semitlər yaşayırdı.

Artıq b.e.ə. *IV* minilliyin ortalarında Şumerlərdə yazı mövcud idi. Yazı üçün material kimi ilkin olaraq daş və gil lövhələrdən istifadə edirdilər. İti alətlərlə onların üzərində yazılar cızılırdı. Sonra isə yaş gil lövhələrin üzərində bambuk və ya sümük çubuqlarla yazaraq, lövhəni qurudurdular və ya yandırırdılar. Gil lövhənin üzərinə basarkən çubuq çapıqlar şəklində izlər buraxırdı və bu çapıqların müəyyən sayı bu və ya digər anlayışı ifadə etmək üçün vasitə olurdu.

B.e.ə. *II* minillikdə semitlərin qərbdən gəlmiş yeni tayfaları Çayarasının sahibi oldular. Burada iki güclü dövlət yarandı – şimalda Assuriya (paytaxtı Nineviya) və Babilistan (paytaxtı Babilistan). Şumer-akkad yazısı babilistanlılar, assuriyalılar, eləcə də qonşu – xett, fars və urartu xalqları tərəfindən mənimsənilmişdir.

XIX əsrdə aparılan arxeoloji tədqiqatlar nəticəsində çapıq yazılı gil lövhələr Avropaya gətirilməyə başladı. Beləcə, 1849-1850-ci illərdə Nineviyanın xarabalıqları altında saray kitabxanası aşkar edilmişdir, 1853-cü ildə isə b.e.ə. *VII* əsrdə hökmranlıq etmiş Assuriya şahı Aşşurbanipalın kitabxanası aşkarlanmışdı. Britaniya muzeyində bu qazıntılardan əldə edilmiş 20 min lövhə saxlanılır. Dünyada 500 minə yaxın çapıq yazılı lövhə mövcuddur.



Zəbt olunmuş kənddən ələ keçirilmiş qənimətin iki yazar tərəfindən qeydə alınması. Nineviyadakı Sinaherib sarayının relyefi. B.e.ə. VII əsr



Aşşurbanipalın kitabxanası

Babilistan şahlığında bütün hesablamalarla yüksək təbəqəyə aid olan mirzələr məşğul olurdular. Hökmdarların övladlarının bu peşəni seçmələri heç də nadir hal sayılmırdı. Mirzələrin təhsil aldıqları məktəb "Lövhələr evi" adlanırdı. Tələbələrdən biri öz dostuna yazırdı: "Mirzə aydın yazmağı, hesablamağı, torpağı ölçməyi, mübahisə edənləri barışdırmağı bacarmalıdır". Belə məktəblər üçün xüsusi riyazi lövhələr müəyyən edilirdi. Onların mətnini iki: cədvəl və məsələlərə bölmək olar.

Müxtəlif cədvəllərin geniş tətbiqi Babilistan riyaziyyatının xarakterik cəhətidir. Vurma cədvəlindən başqa, natural ədədlərin kvadratları, kublar, kvadrat köklər (altmışlıq kəsrlərdə) və hətta n^3+n^2 şəkilli ədədlərin də cədvəlləri mövcud idi. M ədədini n-ə bölmək üçün babillilər bölənin tərsi olan $m=1/n$ ədədini götürür və m ədədini M-ə vururdular. Buna görə də tərs kəmiyyətlərin çoxlu cədvəlləri mövcud idi. Bölməyə belə yanaşma müasir riyaziyyatda, məsələn matrislər cəbrində qalıb.



Məsələlərin mətnlərinə gəldikdə isə, maraqlısı o idi ki, məsələlərin çoxu kvadrat tənliklərin həllinə gətirilirdi. Bu fakt cəbrin yaranması-

nı əvvəl düşünüldüyü kimi b.e.ə. *V* əsrə deyil, b.e.ə. *XVIII* əsrə, yəni 13 əsr əvvələ aid etməyə imkan verir. Bu haqda bir qədər sonra.

BABİLİSTANDA HANSI MƏSƏLƏLƏRİ HƏLL EDİRDİLƏR

Çapıqlarla yazılı lövhələr üzərindəki hesablama tipli məsələlər içərisində ədədi və həndəsi silsiləyə aid məsələlərə rast gəlinir ki, onlar haqqında mesopotamiyalıların təsəvvürü misirlilərə nisbətən çox inkişaf etmişdi. Belə məsələlərin həlli mütənasib asılılıq və ədədi orta ideyasına əsaslanırdı. Babilli mirzələr ədədi silsilənin n həddinin cəmini tapmaq qaydasını bilirdilər:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.$$

Çapıqlarla yazılı mətnlərdə faizlə əlaqəli ilk məsələlər var – axı Babilistan ticarət yollarının kəsişməsində yerləşirdi və burada pul vahidləri və kredit başqa dövlətlərə nisbətən daha tez yaranmışdı. Babillilərin kvadrat köklərin təqribi hesablanması üçün qaydaları da mövcud idi.

Məsələlərin əksəri bir və ya iki dərəcəli tənliklər sistemi ilə əlaqəli idi. Onları simvolsuz, xüsusi terminlərlə yazırdılar. Babillilərin danışıq dili akkad dili idi, amma elmdə termin olaraq şumer sözlərindən istifadə edirdilər. Belə sözlərin hər biri bir işarə ilə göstərildiyi üçün hecalı yazı mətninin ümumi fonunda seçilirdilər.

Eramızdan əvvəl *XVIII* əsrdə, Hammurapinin çarlığı dövründə tənlikləri həll etmək məharəti yüksək səviyyəyə çatdı. Müxtəlif şərtlərlə tərtib olunan bu məsələlərdə adətən "eni" və "uzunluğu" və ya "vurulan" və "vuranı" tapmaq tələb olunurdu. Uzunluqla enin hasilinə "sahə" deyilirdi. Kub tənliklərə (belələri də var idi) gətirilən məsələlərdə üçüncü məchul – "dərinlik" meydana gəlirdi və üç kəmiyyətin hasili "həcm" adlanırdı.

Terminologiyaya görə məsələlərin həndəsi mənşəli olduğuna baxmayaraq, babillilər onları sadəcə ədəd kimi qəbul edirdilər və bu səbəbdən də uzunluqla sahəni toplayırdılar. Qədim yunan riyaziyyatında bunu etmək (uzun müddət sonralar da) olmazdı.

Cəbri üsulların inkişafını tələb edən başqa növ məsələlər - qeyri-müəyyən tənliklər (iki və ya ikidən artıq məchulu olan tənliklər belə adlanır) də mövcud idi. Ən qədim və məşhur qeyri-müəyyən tənliyə misal olaraq:

$$x^2 + y^2 = z^2 \qquad (*)$$

tənliyini göstərmək olar.

Bir çox çapıq yazılı mətnlərdə bu tənliyin (x, y, z) rasional ədədlərlə həllindən söhbət gedir – daha sonralar onları "Pifaqor üçlüyü" adlandırmağa başladılar. Babillilərin onun həllinin ümumi düsturunu bilib-bilmədikləri haqqında aydın məlumat olmasa da, onlara məsələn (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17) və s. üçlükləri məlum idi. Hətta rasional "Pifaqor üçlüklərinin" cədvəli belə saxlanılmışdır, amma onun necə əldə edildiyini müəyyən etmək mümkün deyil.

Qədim babillilər daha bir qeyri-müəyyən tənliyi nəzərdən keçirirdilər:

$$u^2 + v^2 = 2w^2 \qquad (**)$$

tənliyinə baxırdılar.

Onun rasional həlli (u, v, w) "babilistan üçlüyü"nü yaradır, məsələn (1,7,5) belə üçlükdür.

Baxılan tənliyin də həndəsi mənası var. Belə tənlik babillilərin mətnlərində tez-tez rast gəlinir: verilmiş trapesiyanı oturacağa paralel olan xətlə iki müadil (sahələri bərabər) hissəyə bölməli (şəkil 1).



Hammurapi adlı şahın hökmranlığı dövründə torpaqları ölçmə

Alt oturacağı v, üst oturacağı u ilə, bölən parçanı w ilə işarə etsək, asanlıqla görmək olar ki, onlar üçün (**) tənliyi doğru olacaq. Babillilər bu tənliyin sonsuz sayda həllərini tapmağı bacarırdılar.

Babillilər həm də bilirdilər ki, (*) və (**) tənlikləri bir-biri ilə bağlıdır: əgər (x, y, z) üçlüyü (*) tənliyinin həlli isə, $u=x-y$, $v=x+y$, $w=z$ üçlüyü (**) tənliyinin həllidir.

Qədim babillilərin cəbrdən nailiyyətləri bunlar idi. Həndəsədə nəaliyyətləri isə az idi və birinci növbədə fiqurların ölçülməsi ilə bağlı idi. Misirlilərin həndəsəsində rast gəlinən kub, paralelepiped, prizma, silindrlə yanaşı babillilər bəzi düzgün çoxbucaqlıları, dairənin seqmentini, kəsik konusu öyrənirdilər. Çox ehtimal ki, onlara kəsik piramidanın həsmini hesablamaq qaydası məlum idi. Çevrənin uzunluğunu hesablamaq üçün diametrin üçqatını götürürdülər, yəni π-nin qiymətini 3 götürürdülər. π-nin bu qiyməti ilə dairənin sahəsini hesablayırdılar.



Həndəsi məsələləri əks etdirən Babilistan gil lövhəsi. B.e.ə. II əsrin əvvəli. Verilmiş ölçülərin kvadratı müxtəlif fiqurlara bölünmüşdür. Şagird bu fiqurların sahələrini hesablamalıdır.

Ən böyük kəşflərdən biri, özü də ümumi hal üçün, sonralar Pifaqor teoremi adlanan teoremin yaranması idi. İlk dəfə bu teoremə Hammurapinin çarlığı dövrünün çapıqlı mətnlərində rast gəlinir.

* * *

Qədim Misirdə olduğu kimi, Mesopotamiyada da riyazi mətnlər doqmatik şəkildə ifadə olunurdu. Qaydalar bir növ resept rolunu oynayırdı (mərhələlər üzrə nə etmək lazım olduğu göstərilirdi) və müzakirə olunmadan yerinə yetirilirdi. Ciddi iyerarxiya və despotik dövlətlərdə avtoritar düşüncə forması hökm sürürdü. Alimlər öz fikirlərini nəticələrə əsaslanaraq müdafiə edə bilmirdilər, bu da təbii ki, elmin inkişafına mane olurdu.

Buna baxmayaraq Cayarasının riyaziyyatçılarının riyazi ixtiraları öz miqyasları ilə indi də insanları təəccübləndirir. Məhz burada ilk mövqeli say sistemi yaranıb və bunun nəticəsində yunanların hesablama texnikasından güclü hesablama texnikası sistemi yaranıb. İlk dəfə burada xətti və kvadrat tənliklər cəbri yaradılmış və həndəsi məsələlərdən meydana gələn ilk qeyri-müəyyən tənliklərə baxılmışdır. Həndəsi məsələlərin cəbri məsələlərlə, ədədlər nəzəriyyəsi ilə sıx əlaqəsi Babilistan riyaziyyatının əsas xüsusiyyətlərindəndir.

Qədim yunanlar öz tədqiqatlarına babilistanlıları maraqlandıran məsələlərin təhlilindən başlayıblar. Babilistan ənənələrinə Heron və Diofantın, daha sonra isə əl-Xarəzminin və ərəb Şərqinin cəbr məktəbinin təməlini qoyan digər alimlərin əsərlərində rast gəlmək olar. Antik dövrün alimlərinin başlıca işi riyaziyyatın ayrı-ayrı hesablama və



Heron



Diofant

Azərbaycan Respublikası Prezidentinin
PREZİDENT KİTABXANASI

qaydalarını ciddi əsaslandıran düzgün məntiqi sistem yaratmaq olmuşdur.

QƏDİM ÇİN

Bizə gəlib çatan Çin riyazi mətnlərindən ən qədimi b.e.ə. *I* minilliyə aiddir. B.e.ə. *II* minillikdə riyazi-astronomik "Ölçü çubuğu haqqında traktat" və "Riyaziyyat doqquz kitabda" yazılmışdır. Daha sonra *VII* əsrdə hər iki əsər, "On klassik traktat" toplusuna daxil edildi. Məcmuəyə: Lyu Xueyanın əlçatmayan əşyalara qədər olan məsafənin və onların ölçülərinin müəyyənləşdirilməsi haqqında olan "Dəniz adası haqqında traktat" (*III* əsr); Sun-Szının riyazi cədvəllər, cəbri və həndəsi məsələlərdən, xətti tənliklərdən ibarət "Riyazi traktat"; praktiki məsələlərdən ibarət anonim "Beş təsisatda riyazi traktat" daxil idi.



Lyu Xueyan



Sun-Szı

"Riyaziyyat doqquz kitabda" əsəri əsas elmi əsər sayılırdı. O, yerölçənlər, mühəndislər, məmurlar, tacirlər, bir sözlə, riyazi biliklərə ehtiyacı olan hər kəs üçün nəzərdə tutulmuşdur. Əslində bu məcmuə giriş mətni və ilkin izah olmayan 246 məsələdən ibarət məcmuədir. Hər dəfə məsələ qoyulur, sonra cavab verilir və müxtəsər şəkildə həlli yolu göstərilir.

HESAB

Çox qədim zamanlardan Çində hesabı onluqlarla aparırdılar. Təxminən b.e.ə. *IV* əsrdən başlayaraq xüsusi çubuqların köməyi ilə saymağa başladılar. Onlardan təxminən 1,5 min il istifadə etdilər. Çubuqları, sətir və sütunlara bölünmüş hesab lövhəsində düzürdülər. Ədəddə hər hansı mövqe olmadıqda uyğun hücrə boş qalırdı. Hesablama çubuqlarının köməyi ilə Çin nömrələməsi mövqeli onluq say sistemində ən qədim sistemdir.

Eramızdan əvvəl *III* əsr ərəfəsində ədədlərin digər işarə olunma forması – heroqlif meydana gəldi. Məsələn, minliklər, yüzlüklər, onluqlar və vahidlərdən ibarət olan ədədi yazmaq üçün əvvəlcə minliklərin sayını yazırdılar, sonra sağdan və ya altdan minliyi göstərən heroqlif, yüzlüklərin sayı, ondan sonra yüzlüyü göstərən heroqlif, onluqları göstərən işarə və nəhayət, vahidlərin sayı yazılırdı.

1×1 –dən 9×9-a qədər olan vurma cədvəlini əzbər bilirdilər. Onu dərslərdə deklamasiya edirdilər və ya hətta oxuyurdular. Ədədlərin kvadratlarını, kublarını və dördüncü dərəcələrini göstərən cədvəllər də var idi.

Ta qədimdən Çində kəsrlər məlum idi. Bəzilərinin hətta öz adları belə var idi. İkidə bir "ban", üçdə bir "şao ban" ("kiçik yarı"), üçdə iki isə "tay ban" ("böyük yarı") adlanırdı. Daha sonralar dörddə bir üçün də xüsusi – "zəif yarı" adı da meydana gəldi. Onluq kəsrlərdən də istifadə edirdilər.

Bəzi məsələlərin həllində kiçik ədəddən böyük ədədi çıxmaq lazım gəlirdi. Beləliklə də b.e.ə. *II* əsrdə mənfi ədədlər meydana gəlir. Hesab lövhəsində onları başqa rəngli və ya formalı çubuqlarla, əlyazmada isə başqa rəngli mürəkkəb və ya əyri xətlə qeyd edirdilər. Mənfi ədədlər "fu", müsbət ədədlər isə "çjen" adlanırdı. Tədricən "fu" ədədlər borc, çatışmazlıq kimi izah olunurdu.

Mənfi ədədləri və onların toplanma qaydalarını daxil etməyi Çin alimlərinin ən böyük kəşfi saymaq olar. Yunan riyaziyyatında bunu *III* əsrin ortalarında Diofant etdi, hind riyaziyyatında isə mənfi ədədlər yalnız *VII* əsrdə peyda olur.

CƏBR VƏ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

"Riyaziyyat doqquz kitabda" traktatında iki ədəd cəminin kubunun və kvadratının düsturlarının köməyi ilə kvadrat kökalma, kubkökalmanı necə etmək izah olunur. Çin riyaziyyatçıları hesablamanı lövhə üzərində apardığından, onların üsulunun bəzi xüsusiyyətləri var idi. Sonra bu

üsul istənilən dərəcədən kök almaya və n-dərəcəli tənliyin ədədi həllinə ümumiləşdirildi. Bu üsulu çinlilər "tyan-yuan" (hərfi mənası – "səmavi element") adlandırırdılar, çünki onlar naməlum kəmiyyəti belə işarə edirdilər. Tyan-yuan üsulunu *XIII-XIV* əsrlərdə Çinin cəbr alimləri inkişaf etdirdilər (Avropada bu üsul *XIX* əsrdə Ruffini-Hörner üsulu kimi məlum olub).



Ruffini

n məchullu n xətti tənliklər sistemini həll etmək üçün fan çen üsulu tətbiq edilirdi. Üsulun adı "ədədlərin hücrələrə düzülməsi" (əlbəttə, hesab lövhəsində) demək idi. Üsul matrislər və deferminantlar üzərində əməlləri xatırladır. Avropada xətti tənliklərin ilk həll üsulu Leonardo Pizalının (1202) və Cerolamo Kardanonun (1545) işlərində verilir.



Leonardo Pizalı



Cerolamo Kardano

Ədədlər nəzəriyyəsinə aid olan məsələlər içərisində Sun-Szının "Riyazi traktat"ının sonuncu kitabında verilən məsələni yada salmaq lazımdır: "Sayı məlum olmayan əşyalar var. Onları üç-üç saysaq qalıq 2, beş-beş saysaq qalıq 3, yeddi-yeddi saysaq qalıq 2 olar. Soruşulur: neçə əşya var?" Başqa sözlə 3-ə, 5-ə və 7-yə böldükdə qalıqda, uyğun olaraq, 2,3 və 5 verən ədədi tapmaq tələb olunur. Axtarılan ədəd 23-dür. Ola bilsin ki, bu məsələnin daha qədim mənşəyi var və "Riyaziyyat doqquz kitabda" əsərinə ona görə düşməyib ki, bu əsərin heç bir bölməsinin mövzusuna uyğun deyildi. Sun-Szının kitabında da belə tipli məsələ yeganədir. Qeyd edək ki, bu məsələ xalq arasında geniş yayılmışdı və adlarının eyni olmasına görə ona sərkərdə Sun-Szının xüsusi müdrikliyinin nümunəsi kimi baxılırdı.





Sun-Szı

Belə məsələlərin ümumi həll üsulu formalaşmamışdır. O yalnız on əsrdən sonra Tsin Tsu-Şaonun "Riyaziyyatdan doqquz kitab" əsərində (*XIII*) meydana çıxır. Onun tətbiq etdiyi terminlər "Dəyişikliklər kitabı" (b.e.ə. *VIII-VII* əsrlər) adlanan konfusian görücülük terminologiyasından mənimsənilmişdir. Boymadərən saplağının ixtiyari olaraq ayrı-ayrı hissələrə bölünərək düzülməsi ilə gələcək müəyyən edilirdi. Bu çubuqlarla manipulyasiya nəticəsində meydana gəlmiş yuxarıda adı çəkilən nəzəri-ədədi məsələ ilə Tsin Tsu-Şao neokonfusianlığa töhfə olaraq öz əsərini başlayır (Ədədlərin nəzəriyyəsinə dair digər məsələlər görücülüklə əlaqədar deyil, onlar əsasən təqvimlərin tərtibi nəticəsində meydana gəlib).

Avropada isə bu məsələyə Leonardo Pizalıda, *XIV* əsr bir Bizans əlyazmasında, *XV* əsr alman əlyazma hesabında və *XVII* əsr rus riyazi əlyazmalarında rast gəlinir. Belə məsələlərin həllinin ümumi üsulu yenidən 1740-cı ildə Leonard Eyler və 1801-ci ildə Karl Qauss tərəfindən işlənmişdir.

HƏNDƏSƏ

Qədim Çində həndəsə qədim Yunanıstanda olduğu kimi sərbəst elm kimi inkişaf etməmişdir. "Riyaziyyatdan doqquz kitab" əsərinin birinci kitabında düzbucaqlının, üçbucağın, trapesiyanın, halqanın, dairənin, sektor və seqmentinin sahəsinin ölçülməsi üçün xüsusi qaydalar göstərilmişdir.

Beşinci kitabda oturacağı kvadrat olan düz paralelepipedin, oturacağı trapesiya olan düz prizmaların və oturacağı üçbucaq, kvadrat və düzbucaqlı olan piramidanın və digər həndəsi fiqurların həcmləri nəzərdən keçirilir.

"Ölçü dirəyi haqqında traktat" əsərinə görə tərəfləri 3; 4; 5 olan düzbucaqlı üçbucaq üçün Pifaqorun teoremi bizim eradan 1100 il əvvəl, ümumi hallar üçün isə bizim eradan əvvəl *VI* əsrdə məlum idi. İsbatlar tərəfi katetlərin cəminə bərabər olan kvadratın sahəsinin səkkiz bərabər üçbucağın və tərəfi katetlər fərqinə bərabər olan kvadratın sahələri cəminə bərabər olmasına asaslanırdı.

Asanlıqla görmək olar ki, tərəfi $a+b$ olan kvadratın sahəsi, tərəfi c olan kvadratın və katetləri a; b olan dörd düzbucaqlı üçbucağın sahələri cəminə bərabərdir:

$$(a+b)^2 = c^2 + 2ab$$

Digər tərəfdən elə bu çertyojda bütün qədim sivilizasiyalarda məşhur olan

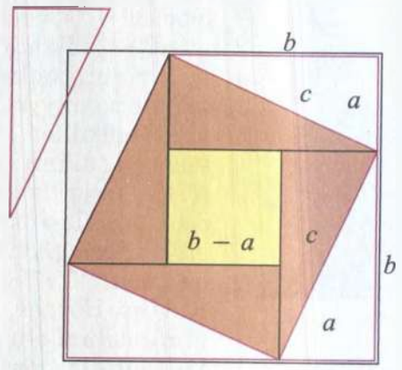
$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

cəbri eyniliyinin sübutunu görmək çətin deyil və buradan da

$$c^2 = a^2 + b^2$$

alınır.

İsbatın rekonstruksiyasının bu variantı məşhur riyaziyyatçı B.L.Vander-Vardenə məxsusdur. Qeyd edək ki, başqaları da mövcuddur.



* * *

XIV əsrə qədər Çində riyaziyyat hesab, cəbr və həndəsə məsələlərinin həlli üçün nəzərdə tutulmuş ciddi qaydalar sistemi kimi inkişaf edirdi. Çin riyaziyyatının Hindistan, Orta Asiya, Yaxın və Uzaq Şərq elmindən təcrid olunmaması bir çox məsələlərin və onların həlli yollarının oxşarlığı ilə təsdiqlənir. Bu ölkələrin köməyi ilə Çin riyaziyyatı orta əsr Avropa elminə təsir göstərdi. Buna baxmayaraq, Çin alimlərinin bəzi ixtiraları Avropada bu nəticələr sərbəst əldə edildikdən sonra məlum olmuşdur.

ANTİK DÖVRÜN RİYAZİYYATI

FALES VƏ İLKİN SÜBUTLAR

Bizim fikrimizə görə riyaziyyatın elm kimi meydana gəlmə tarixini dəqiq müəyyən etmək mümkündür – b.e.ə. *VI* əsr. Keçmiş 20-30 əsr ərzində qədim Şərq xalqları cəbrdə, həndəsədə, astronomiyada bir çox ixtiralar etsələr də, vahid riyaziyyat elmini yaratmamışlar. Yunanlar isə bunu cəmi bir əsrə etdilər və bu indiyə kimi möcüzəyə bənzər bir ixtira sayılır.

B.e.ə. *VIII* əsrdə yunanlar əsl mədəni inqilab yaşadılar. Sait hərfləri olan əlifba meydana çıxdı. Elə həmin dövrdə "İlliada" və "Odisseya" əsərləri yazıldı. Homerin eposu hətta oxuma və yazması olmayanların da mədəni həyatın axarına düşməsinə kömək etdi. Axı şeiri əzbərləmək asan idi. O dövrlərdə Olimpiya oyunları silsiləsi yaradıldı. Bu oyunlarda hər dörd ildən bir Elladanın (yunanlar öz ölkələrini belə adlandırırdılar) şəhərlərinin ən aktiv və maarifli vətəndaşları görüşürdü.

B.e.ə. *VIII* əsrin ortalarından əsasən dənizətrafı koloniyalarda şəhərlərin sayı sürətlə artmağa başladı. Kənd təsərrüfatı üçün əlverişli torpaqlar tapmaq ümidi ilə yüzlərlə ailə dənizin o tayına yollanır, Aralıq və Qara dəniz sahillərində yerli aborigenlərlə qonşuluqda yaşamalı olurdular. Ellinlər qonşu xalqların mədəniyyəti ilə tanış olur, onlardan nə isə öyrənir və öyrətməyə çalışırdılar. Şəhər – respublikaların sakinləri küçə və meydanlarda: məhsulu, yerli sakinlərin əhvalından tutmuş gəlmə tacirlərin gətirdiyi xəbərlərə qədər, onları narahat edən məsələləri müzakirə edirdilər.

Ən maraqlı xəbərlər Yaxın Şərqdən – Misir və çarlığın süqutundan sonra – Babilistan və Midiya torpaqlarına bölünən Assuriyadan gəlirdi. B.e.ə. *VI* əsrin ortalarında bütün bu torpaqlar, öz nəhəng imperiyalarında möhkəm sülhü bərqərar edən farsların əsarəti altına düşdü. İndi bir çox ellinlər Fars imperiyasının torpaqlarına – kimi ticarət, kimi də misirlilərin və ya babilistanlıların müdrikliyinə yiyələnmək üçün səyahət edirdilər.

Evinə qayıtmış belə səyahətçi öz qonşuları tərəfindən böyük maraqla qarşılanırdı. Amma onun hər sözünə də inanmırdılar. Məsələn, o, Misirdə qədim şahların sərdabələri olan, 200 və ya 300 dirsək hündürlüyündə daş təpələrin olduğunu deyə bilərdi. Məgər onların hündürlüyünü o özü ölçüb? Necə? Qoy sözlərinin həqiqət olduğunu sübut etsin! Səyahətçi müdrik misirlilərin Günəşin və Ayın növbəti tutulmasının vaxtını müəyyən edə bildiklərini deyirdi. Qoy onların bunu necə etdiklərini izah etsin! Bəs biz öz şəhərimizdə növbəti tutulmanı nə zaman görəcəyik?

Yəqin ki, yunanlardan bu suallara ən dolğun cavab verməyi bacaran ilk səyahətçi Fales oldu.



Fales
(b.e.ə. 625-547-ci illərdə)

Fales (b.e.ə. 625-547-ci illərdə) Milet (Kiçik Asiyada qədim yunan mərkəzi idi) şəhərində doğulmuşdur, ona görə də onu Miletli Fales adlandırırlar. Fales yunan malları ilə yüklənmiş şəxsi gəmisində Aralıq dənizində üzürdü. Zeytun yağının ticarəti uğurlu getdiyindən, o böyük sərvət əldə etmişdi. Fales Misirə, Assuriyaya, Babilistana səyahət edərkən riyaziyyat və astronomiya ilə tanış oldu. O, öz boş vaxtını məhz bu elmlərə həsr edirdi. Bundan başqa o, həmçinin filosof və qanunverici idi. O, qədim dövrün – yunan mədəniyyətinin və elminin əsasını qoyan ilk yeddi müdrikdən biri sayılır.

B.e.ə. 585-ci ildə Fales günün tutulmasını müəyyən etdi. Həmin dövrdə müharibə gedirdi və onun günün tutulması proqnozu gerçəkləşəndə (tarixçi Herodotun sözləri ilə desək "gün gecəyə çevrildi"), döyüşçülər qorxu içində silahlarını atıb qaçmağa başladılar. Günün batması işarə kimi qəbul edildi və müharibə dayandırıldı.

Falesin sevimli məşğuliyyəti astronomiya deyil, riyaziyyat oldu. O, həndəsi məsələləri isbat edən ilk alimlərdən oldu və məhz belə cəhdlər həndəsəni praktiki qaydalar məcmuəsindən əsl elmə çevirdi.

İki qarşılıqlı bucağın bərabər olmasını istənilən qədər ölçərək əmin olmaq olar. Əgər onlardan biri 60°-dirsə, deməli, ikincisi də onunla bərabərdir, əgər biri 42° 30′ isə, deməк o birisində də o qədərdir. Bəs ölçülməsi mümkün olmayan bucaqlarda belə deyilsə necə? Amma (indi isə sübut adlandırdığımız) ağlabatan fikirlər təsdiq edir ki, bu bütün bucaqlar üçün məqbuldur.

Fales öz sübutlarını hansı yolla gətirirdi? Bu məqsədlə o "hərəkətdən" istifadə edirdi. Əgər iki fiqur hərəkət zamanı tamamən uyğun olarsa, deməli, bu fiqurlar eynidir.

Fales məhz bu yolla ilkin həndəsi teoremləri isbat etdi. Əgər müstəvini hər hansı bir *O* nöqtəsi ətrafında bərk cisim kimi yarım dairə qədər (180°) döndərsək, o zaman *OA* şüası *OC* şüası kimi onun davamına çevriləcək. Aydındır ki, bu zaman qarşılıqlı bucaqlardan birinin tərəfləri digərinə keçəcək və bu bucaqlar eyniləşəcək. Deməli, qarşılıqlı bucaqlar bərabərdir (şəkil 1). Fales elə bu yolla diametrin dairəni yarıya böldüyünü sübut etdi, yəni iki yarım dairə bərabərdir.

Əlbəttə indi həndəsə ilə hər bir şagirdin tanış olduğu dövrdə, hər şeyin aydın olduğu görünür. Halbuki Falesə qədər sübut sadəcə yox idi! İndi dulusçunun da fırlanan dəzgahın köməyi ilə dairəvi qab düzəltməsi adi görünür.

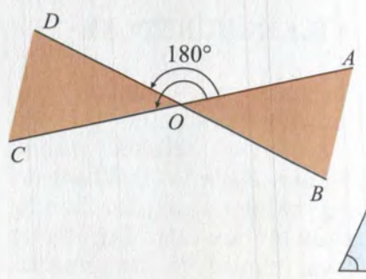
Amma bunu ixtira edən insan təbii ki, öz dövrü üçün böyük bir möcüzə yaratmışdır.

Fales bərabərtərəfli üçbucağın bucaqlarının bərabərliyini sübut etdi. O belə fikirləşirdi: bərabərtərəfli üçbucaq təpə bucağının tənbölənə görə simmetrikdir, deməli çertyoju qatlayan zaman oturacağa bitişik bucaqlar da üst-üstə düşəcək (şəkil 2).

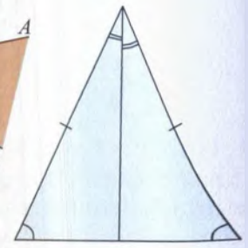
O, üçbucaqların bərabərliyi haqqında daha bir əlamət müəyyən etmişdir: əgər iki üçbucağın bərabər tərəfi varsa və bu tərəfə bitişik iki bucağı bərabərdirsə, (şəkil 3) deməli, bu üçbucaqlar bərabərdir. Deyilənlərə görə o bu üsulu dənizlərdə olan gəmilərə qədər məsafəni ölçmək üçün tətbiq edirdi.

Əlbəttə ki, indi Fales teoremi adlandırdığımız müddəanı qeyd etmək lazımdır. Əgər bucağın bir tərəfində bərabər parçalar ayırsaq, sonra isə bu bölgü nöqtələrindən paralel xətlər keçirilsə, bucağın ikinci tərəfində də bərabər parçalar əmələ gəlir (şəkil 4).

Falesin teoremi necə isbat etdiyini yalnız fərz etmək olar. Yəqin ki, o elə burda da

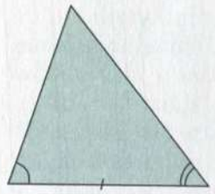


Şəkil 1

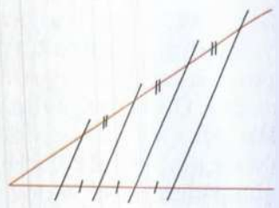


Şəkil 2

üçbucaqların bərabərlik əlamətindən istifadə etmişdir.



Şəkil 3



Şəkil 4

* * *

Beləliklə, Fales qədim və müqəddəs elmi mübahisə mövzusuna çevirmişdir. İdman yarışlarından həzz alan yunanlar, o dövrə qədər şahmat kimi intellektual oyunu tanımırdılar. Falesin təşəbbüsü ilə həndəsə belə oyunlardan birincisinə çevrildi. Tezliklə o fəxri məşğuliyyətə, siyasət və ya Olimpiya oyunları ilə yanaşı milli idman növünə döndü. Həndəsədə Falesdən də irəli gedən ustadlar meydana gəldi və onlar öz xələflərinin heç yuxusuna girməyəcək ixtiralar etməyə başladılar.

PİFAQOR VƏ ONUN MƏKTƏBİ

Dahi qədim yunan alimi Pifaqor b.e.ə. *VI* əsrdə Samos adasında anadan olmuşdur. Cavanlıqda Misirdə kahinlərin yanında dərs almışdır. Deyilənlərə görə o Misirin gizli məbədlərində olmuş, xaldey müdrikləri və fars sehrbazları ilə görüşmüşdür. Pifaqor Cənubi İtaliyadakı yunan koloniyasına –

Krotona köçür və burada Pifaqor ittifaqı (və ya Kroton qardaşlığını) yaradır. İttifaqın üzvlərinin maraq dairəsinə elmi tədqiqatlar, dini-fəlsəfi axtarışlar, siyasi fəaliyyət daxil idi. Onlar sərt həyat tərzi keçirir, onlar üçün hər şeydən öndə özünü idarə, cəsurluq və kollektiv nizam-intizam dururdu. Pifaqorçular bir yerdə yaşayırdılar, onların ümumi mülkiyyətləri var idi, hətta ixtiralar belə ümumi hesab edilirdi.



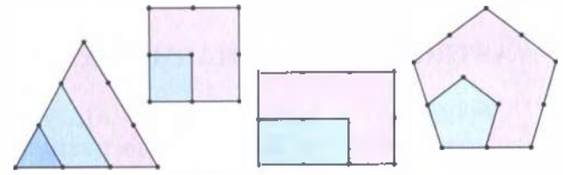
Pifaqor

İttifaqın fəaliyyəti sirr idi, bu üzdən ilkin pifaqorçuların fəaliyyətini əks etdirən heç bir mətn qalmamışdır. Bundan əlavə onlar bütün ixtiralarını, haqqında əfsanələr gəzən Pifaqorun adı ilə bağlayırdılar. Bu və ya digər ixtiranın və ya nəticənin müəllifinin dəqiq kim olduğu məlum deyil.

Pifaqorçular öz tədqiqatlarını "matemata", "elmlər" adlandırır və onları 4 hissəyə: hesab, həndəsə, astronomiya və harmoniyaya (musiqi haqqında təlim) bölürdülər. Hesab onların arasında əsas elm sayılırdı. O, həndəsənin də, astronomiyanın da, harmoniyanın da əsasında dururdu.

HESAB

Pifaqorçular ədədləri, qumun üstündə həndəsi konfiqurasiyalar əmələ gətirən daşlar təbirində - nöqtələrin küllisi kimi qəbul edirdilər. Beləliklə, ədəd deyərkən "çoxlu vahidlər" (yunanca "artimos") nəzərdə tuturdular və yalnız tam, müsbət (yəni natural) ədədləri nəzərdə tutur, onları tək və cüt saylara ayırırdılar (Sonralar Platon deyəcək ki, hesab tək və cütlüklər haqqında elmdir).



Fiqurlu ədədlər.
Üçbucaq, kvadrat, düzbucaqlı və beşbucaqlı

Pifaqorçular bölünmə nəzəriyyəsinin birinci teoremini sübut etdilər: heç olmasa biri cüt olan iki ədədin hasili cüt olar. Onlar hətta mükəmməl ədədlərin (yəni öz bölənlərinin cəminə bərabər ədədlər ("Mükəmməl və dost ədədlər" məqaləsinə bax) tapılması məsələsini də qaldırdılar. Bir bölünməz sayılır onun "payı" yoxdur. Bunun əvəzində pifaqorçular tam ədədlərin nisbətlərini də nəzərdən keçirirdilər. Məsələn, 4-ün 6-ya nisbəti eynilə 2-nin 3-ə nisbəti kimidir və s. Müasir dillə desək, onlar cütlüklər nəzəriyyəsi kimi rasional ədədlər nəzəriyyəsini qurdular. Onun ifadəsi bizə Evklidin "Başlanğıclar" (b.e.ə. *III* əsr) kitabında çatmışdır.

HƏNDƏSƏ

Hələ də pifaqorçuların öz həndəsələrinin əsasına hansı və neçə aksiom qoymaları məlum deyil, amma onların hamısının düzxətli fiqurların planimetriyasına aid olduğu dəqiqdir. Üçbucaqların, düzbucaqlıların, paraleloqramların və digər müstəvi fiqurların xüsusiyyətləri öyrənilir, sahələri müqayisə edilirdi. Sübutların tacı isə əvvəllər xüsusi hallar üçün fakt kimi məlum olan Pifaqor teoreminin təsdiqi idi. Pifaqor teoreminin qiymətini artırmaq çətindir ("Sadə və tükənməz üçbucaq" məqaləsinə bax). Onun ümumiləşdirilməsi indi də bütün metrik məkanların müəyyənləşdirilməsinin əsasında durur.

Pifaqorçuların stereometriyada da gözəçarpan uğurlar əldə etdiyini iddia etmək olar. *V* əsr tarixçisi və filosofu Proklun yazdığına görə məhz onlar beş düzgün: tetraedr, kub, oktaedr, dodekaedr, ikosaedr ("Çoxüzlülər" məqaləsinə bax) çoxüzlüləri qurmuşlar. Düzdür, bir çox müasir tədqiqatçılar hesab edirlər ki, Pifaqora yalnız kub, tetraedr və dodekaedr məlum idi, oktaedr və ikosaedr isə Feodr Kirenski və Platonun istedadlı tələbəsi olan Teetet tərəfindən ixtira edilmişdir.

ASTRONOMİYA VƏ HARMONİYA

Pifaqorçular hesab edirdilər ki, Yer kürə şəklindədir və Kainatın mərkəzində yerləşir: axı onun hər hansı bir tərəfə dartılması haqqında heç bir əsas yox idi. Günəş, Ay və başqa digər beş planet (Merkuri, Venera, Mars, Yupiter və Saturn) Yerin ətrafında fırlanır. Yerlə planetlərin arasındakı məsafə yeddisimli arfa şəklindədir və onların hərəkətindən Kainat musiqisi yaranır. Adətən həyatın qarmaqarışıqlığı ucbatından insanlar bu musiqini dinləyib həzz ala bilmirlər. Pifaqor isə onu eşidirdi.

Arfanın quruluşu riyaziyyatın qanunlarına uyğun olmalıdır. Pifaqorçular müəyyən etdilər ki, uzunluqları nisbəti 1:2, 2:3 və 3:4 olan eyni köklənmiş simlər cütünün səslənməsinə oktava, kvinta və kvarta kimi musiqi intervalları uyğundur.

Bütün bu ixtiralar pifaqorçuları "hər şey ədəddir" fikrinə gətirib çıxarır, yəni təbiətin qanunları – tam ədədlər və onların nisbətindən başqa bir şey deyil.

İRRASİONALLIĞIN KƏŞFİ

Əvvəlcə pifaqorçular hesab edirdilər ki, istənilən fiziki və həndəsi fərqi tam ədədlərlə ifadə etmək olar. Onlar belə hesab edirdilər ki, bütün hissələr ölçülə biləndir, yəni *AB* və *CD* parçalarının uzunluğu nə qədər uzun olursa-olsun, *AD* və *CD* parçasının uzunluğuna uyğun olan (parçalarının hər birinin üzərində tam ədəd sayda yerləşdirmək mümkün olan) *e* parçası var, deməli, həndəsəni cəbrə uyğunlaşdırmaq olar.

Amma tezliklə pifaqorçular onların bütün görüşlərini alt-üst edən bir kəşf etdilər: onlar sübut etdilər ki, diaqonalın kvadratın tərəflərinə olan nisbətini tam ədədlərin nisbəti ilə ifadə etmək olmaz.



Pifaqor musiqili şkala ilə. Rafaelin "Afina məktəbi" freskasından fraqment. 1511

Daha sonra başqa müqayisə olunmayan parçalar da tapıldı. Feodor Kirenskiy müəyyən etdi ki, sahəsi 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 olan kvadratların tərəfi vahid kvadratın tərəfi ilə müqayisə oluna bilinməz. Teetet isə sübut etdi ki, əgər kvadratın sahəsi heç bir tam ədədin kvadratına bərabər olmayan tam N ədədilə ifadə edilərsə, onun tərəfləri vahidlə müqayisə oluna bilinməz. Başqa sözlə desək, müəyyən edilmişdir ki, əgər $N \neq a^2$, onda $\sqrt{N}$ heç bir rasional ədədlə ifadə edilə bilməz - o irrasionaldır ("İrrasional ədədlər" məqaləsinə bax).

Və o zaman qədim Misir alimləri cəbrin həndəsə üçün əsas ola bilməyəcəyi nəticəsinə gəldilər. Onlar qərara aldılar ki, həndəsi çoxluqlar ədədlər və nisbətlərindən daha ümumi təbiətə malikdirlər. Deməli, cəbrin əsasına həndəsəni qoymaq lazımdır.

HƏNDƏSİ CƏBR VƏ SONSUZLUQ ANLAYIŞI

Həndəsi libas riyaziyyata qeyri-adi gözəllik və monolitlik bəxş etdi. Tənliklərin həlli təlimi, elə cəbrin özü də həndəsi forma aldı. Antik riyaziyyatın parçaların və sahələrin hesablanması ilə məşğul olan hissəsini məhz həndəsi cəbr adlandırırıq.

Bu elmin əsasları Evklidin "Başlanğıclar" əsərində açıqlanmışdır. Burda parçalar nəzərdən keçirilir və onların üzərində aparılan cəbri əməliyyatlar müəyyənləşdirilir. Məsələn, iki parçanı toplayıb, böyük hissədən balaca hissəyə bərabər hissəni çıxırdılar. İki parçanın hasili onlar üzərində qurulan düzbucaqlı, üç parçanın hasili isə düzbucaqlı paralelepiped adlanırdı.

Təbii ki, düzbucaqlı və parçanın cəmindən danışmağa dəyməz. Buna görə də cəbri həndəsədə müəyyən edilmiş hesablama "pilləli" idi. Birinci pillə parçalardan, ikinci – sahələrdən, üçüncü isə həcmlərdən ibarət idi. Dörd və ya daha çox parçaların hesablanmasından söhbət gedə bilməzdi, çünki üç ölçüdən artıq fiquru təsəvvür etmək mümkün deyildi. Həndəsi cəbrdə qurmaların yalnız pərgar və xətkeşin köməyilə yerinə yetirilməsinə icazə verilirdi.

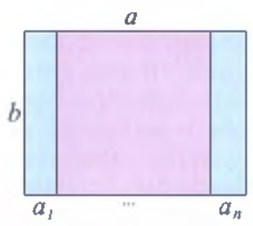


Evklidin "Başlanğıclar" kitabından fraqment

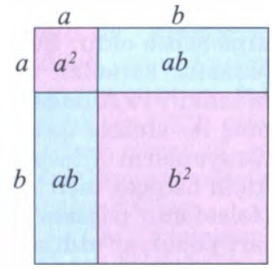
"Başlanğıclar"ın ikinci kitabının birinci cümləsində vurmanın paylama (distributivlik) qanununun həndəsi isbatı verilmişdir: əgər düzbucaqlı *a* və *b* (şəkil 1) parçalarından qurulmuşdursa və əgər onlardan biri $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ olarsa, o zaman $ab = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)b = a_1b + a_2b + \ldots + a_nb$ olacaq.

Həndəsi dilə keçmə ilk dəfə bəzi cəbri eynilikləri, məsələn hamıya məlum olan $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (şəkil 2.) cəmin kvadratı düsturunu ilk dəfə isbat etməyə imkan verdi.

Aydındır ki, $a+b$ tərəflərindən ibarət kvadratın sahəsi iki kvadratın (*a* və *b* tərəfli), həmçinin onların üzərində qurulan iki düzbucaqlının sahələrinin cəmindən ibarətdir. İstənilən *a* və *b* parçaları üçün onların qiymətlərindən və ortaq ölçülü olub-olmamasından asılı olmayaraq, eynilik doğrudur.



Şəkil 1



Şəkil 2

Kvadrat tənliklərə ekvivalent məsələlər, həndəsi forma almışdır. Burada söhbət "sahələrin əlavə edilməsindən" gedirdi.

1) verilən düzbucaqlını kvadrata çevirmək, yəni $x^2 = ab$ (parabolik məsələ) tənliyini həll etmək;

2) verilən *a* parçasına verilən *S* sahəli düzbucaqlını elə əlavə etmək lazımdır ki, "çatışmazlıq" kvadrat olsun: $x(a - x) = S$ (elliptik məsələ);

3) verilən *a* parçasına verilən *S* sahəli düzbucaqlını elə əlavə etmək lazımdır ki, "qalıq" kvadrat olsun: $x(a + x) = S$ (hiperbolik məsələ).

Pərgarın və xətkeşin köməyi ilə kvadrat tənliklərə ekvivalent olan, müsbət köklü məsələləri həll etmək olar. Bu üsullar əmsalının əvvəlki tənliyin kökündən asılı olduğu bəzi ardıcıl kvadrat tənlikləri həll etməyə imkan verir.

Çox az bir vaxtdan sonra digər: kubun ikiqatı, bucağın trisektriyası, dairənin kvadraturasına dair məsələlər meydana çıxacaq ("Qədim dövrün üç məşhur məsələsi" məqaləsinə bax). Burada həndəsi cəbr gücsüz idi. Amma bu məsələləri həll etmə cəhdlərinin özü belə böyük nəticələrə səbəb oldu. Yada salaq ki, kubun ikiqatlığı haqqında məsələni

tədqiq edərkən, iki min il sonra astronomiyada mükəmməl tətbiqini tapmış konik xətlər - əyrilər icad edilmişdir ("Görkəmli əyrilər" məqaləsinə bax). Qədim dövrün məşhur məsələlərinin həlledilməzliyini yalnız *XIX* əsrdə sübut etmək mümkün oldu.

SONSUZLUĞUN DƏRK EDİLMƏSİ

Yunan riyaziyyatında ortaq ölçüsüz kəmiyyətlərin icadı ilə yanaşı, sonsuzluq anlayışı da meydana gəldi. Bu anlayışla bağlı çətinliklər antik riyaziyyatın dərin böhranına səbəb oldu. Bu, elmin hələ bərkiməmiş binasını sarsıdan ilk böyük fırtına oldu. Müzakirəyə Anaksaqor və Demokritdən tutmuş Aristotelə qədər bütün məktəblərin və cərəyanların filosofları qoşuldu. Platonun kiçik həqiqət tacirləri adlandırdığı Sofistlər (fəlsəfənin peşəkar müəllimləri) bu məsələləri populyar etdilər.



Zenon Eleyalı (b.e.ə. 490-430)

Kəsilməzlik və sonsuzluq anlayışlarında gizli olan əsl çətinlikləri aşkar edərək və bununla da onlar haqqında fərziyyələrin nə qədər mükəmməl olmadığını göstərmək onları paradoks və ya aporiy (yunan dilində "aporiya" – "çətinlik", "çıxılmazlıq") şəklində formalaşdıran Zenon Eleyalı (b.e.ə. 490-430) nail oldu. Artıq 25 əsrdir ki, onlar həm riyaziyyatçıların, həm də filosofların diqqətini cəlb edirlər.

Zenon – eleatlar məktəbinin başçısı (Eley şəhərinin adı ilə bağlıdır), fəlsəfəni ilk dəfə olaraq məntiqi mülahizələr üzərində quran Parmenidin sevimli tələbəsi idi. Parmenidi hətta məntiqin banisi hesab edirlər. Eleatlar sübutlardan, onları absurda gətirib çıxardaraq istifadə edirdilər. "İkidillik" dialektikasına ustalıqla malik olan Zenon da belə edirdi.

Qədimdə Zenonun qırxa yaxın aporiyi məlum idi, bizə isə yalnız doqquzu gəlib çatmışdır. Onlardan bizə çatanların ən məşhurları: "Dixotomiya", "Axilles və tısbağa", "*Ox*" və "*Stadion*" dörd hərəkət aporisidir və onları Aristotel öz "Fizika"sında geniş şəkildə müzakirə edir.

Öz aporiyalarına Zenon aşkar fiziki anlam vermişdir: o, onları hərəkətin imkanının əksinə çevirmişdir. Amma cisimlərin hərəkəti bizim gözlərimiz önündə hər gün baş verir. Nə baş verir?

Anaksaqor (b.e.ə. V əsr) tərəfindən irəli sürülmüş nəzər nöqtəsi yunan riyaziyyatında ümumiliklə qəbul edildi. O, elan etmişdir ki, "kiçikdə ən kiçik yoxdur, amma hər zaman daha kiçik vardır". Nəticədə bölünmə zamanı yenə də bölünən hissələr əldə edəcəyik və heç bir zaman bölünməz hissələrə çatmayacağıq. Bu isə o deməkdir ki, parça nöqtələrdən ibarət deyil, nöqtələrin "həndəsi yeridir".

Riyaziyyatın yeni əsasları – nisbətlər haqqında ümumi təlimlər və limit keçidlərin ciddi metodu Yevdoks (b.e.ə. 408- 355) tərəfindən yaradılmışdır.

Yevdoks sadəcə dahi riyaziyyatçı deyildi, həm də dahi astronom, coğrafiyaçı, filosof və natiq idi. O, Kniddə (Kiçik Asiyanın cənubi-qərbində) anadan olmuşdur və cavanlıqda bir çox ölkələrdə olmuşdur. Siciliyada o tibbi, Yunanıstanda o dövrün məşhur alimi Arxit Tarentskinin rəhbərliyi altında riyaziyyatı öyrənmişdir. Əgər Feodr Kirenskini və Teeteti cəbr alimi adlandırmaq olarsa, Arxit və Yevdoks bizim günlərdə məhz riyazi təhlil adlandırılan elmə aid olan məsələlərin həlli ilə məşğul olurdular.

Yevdoks, Yunanıstanın əsas mədəniyyət mərkəzi olan Afinaya köçəndə iyirmidən bir az artıq yaşı var idi. Başqa gənclər kimi, onu da qapısında "Həndəsəni bilməyənə giriş qadağandır" sözləri yazılan, Platonun tanınmış Akademiyası cəlb edirdi. Akademiyada elmi və fəlsəfi problemlər geniş


Yevdoks Platon (b.e.ə. 428-348-ci illər)


Arxit Tarentski (b.e.ə. 400-365)

müzakirə edilirdi. Məhz burada Yevdoks Platonun qoyduğu: sferaların bərabər dairəvi hərəkəti zamanı Günəşin, Ayın və planetlərin görünən hərəkətini almaq üçün konstruksiyanın qurulması məsələsi ilə maraqlandı və bunu uğurla yerinə yetirdi. Tezliklə Yevdoks Mərmərə dənizinin cənub sahillərində, Kizikdə öz elmi məktəbinin əsasını qoydu. Elə orada Elladada ilk rəsədxana tikildi.

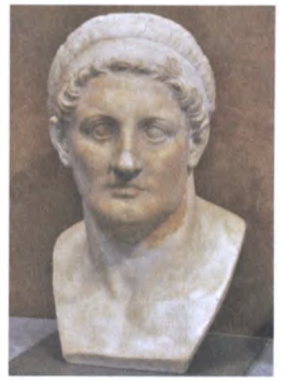
Amma Yevdoksun daha əsaslı tədqiqatları hal-hazırda sonsuz kiçik cisimlərin təhlilinə giriş adlanan sahəyə aid edilir. Əslində isə o tarixdə ilk olaraq həqiqi ədəd nəzəriyyəsini (nisbətlər nəzəriyyəsi) qurmuş və əyrixətli fiqurların sahələrini ölçərkən istifadə edilən hesablama üsulunu yaratmışdır. Bu üsul sonsuz keçidlərin ciddi yerinə yetirilməsinin əsasına çevrildi və antik sonluq (limit) nəzəriyyəsinin əsası oldu. Demək lazımdır ki, *XVII-XVIII* əsrlərdə icad edilmiş inteqral hesablama üsulları ciddiliyinə görə Yevdoksun üsulundan geri qalırdı. Ciddi üsullar isə yalnız *XIX* əsrdə meydana gəldi.

İlkin mərhələdə Babilistanın hesablama cəbri ilə müqayisədə üstünlüklər qazanan həndəsi cəbr müəyyən mərhələdə antik riyaziyyatın inkişafını ləngitdi. O, zirehli çanaq kimi canlı orqanizmin hərəkətlərini məhdudlaşdırır və onu düzgün inkişaf etməyə qoymurdu. Məsələn, dördüncü və daha yüksək dərəcəli tənliklər heç nəzərdən belə keçirilmirdi. Həndəsi cəbrdə mənfi ədədlər üçün yer yox idi. Həndəsi dildən etiraz edib, yeni daha ümumi və elastik dil axtarmaq lazım idi. Bu dil yalnız yeni eranın ilk əsrlərində - ellinizm dövründə tapıldı.

ELLİNİZM DÖVRÜ VƏ ANTİK DÖVRÜN QÜRUBU

Antik tarixin yeni dövrü – ellinizm dövrü – Makedoniyalı İsgəndərin qələbələri ilə başladı. B.e.ə. 332-323-cü illərdə o, Misiri, Babilistanı, İranı, Soqdianı, Baktriyanı və hətta Hindistanın yarısını zəbt etdi. İsgəndərin ölümündən sonra nəhəng imperiya süquta uğradı. Onun sərkərdələri zəbt edilmiş ölkələri öz aralarında bölüşdürdülər: Misir Ptolomeylərin, Mesopotamiya və Suriya isə Selevkilərin hakimiyyəti altına keçdi, Makedoniyada isə - Antiqon və onun sələfləri hökmranlıq etməyə başladı. Hətta Hind vadisində belə yunan knyazları hökmranlıq edirdilər. Ellinizm dövrü b.e.ə. 30-cu illərdə sonuncu yunan koloniyası – Misir romalılar tərəfindən fəth edildiyi zaman bitdi.

İncəsənətdə, elmdə, mədəniyyətdə, bir sözlə, hər bir sahədə ellin (yunan) nümunələrinə bənzətmə bu dövrün xarakterik cəhəti idi. Dövlət dili, deməli həm elmin və mədəniyyətin də dili hər yerdə yunan dili idi. Alimlər indi daha asan ünsiyyət qururdular və müxtəlif ölkələrin elmlərində qorunub saxlanılmış ənənələri qəbul edirdilər.


Çar Ptolomey I Soter (b.e.ə. 305-283)

Çar Ptolomey *I* Soter Misirdə b.e.ə. 305-283-cü illərdə hökmdarlıq etmişdir. Paytaxt olaraq, b.e.ə. 331-ci ildə Makedoniyalı İsgəndər tərəfindən salınmış və onun şərəfinə İsgəndəriyyə adlandırılan şəhəri seçmişdir. Burada Ptolomey ellinizm dövrünün elmi fikrinin mərkəzi olan Museyonu (Museyon – Muzaların məbədi deməkdir; yunan əsatirində elm və incəsənətə himayədarlıq edən ilahələr muza adlanırdılar) ucaltdı. Museyonun tərkibinə

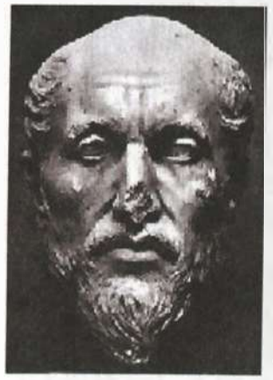

PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATE
In Latinum Conuerſæ, & Commentarijs
Illuſtratæ.
VENETIIS.
Apud Franciſcum de Franciſcis Senenſem.
M. D. LXXXIX.
Papp İsgəndəriyyəlinin əsərinin titul vərəqi

700 min əlyazmasının saxlanıldığı zəngin İsgəndəriyyə kitabxanası da daxil idi. Deyilənlərə görə onun əsası Aristotelin kitabxanasından ibarət idi. Bütün dünyadan bilik arzusunda olan gənclər məhz bura can atırdılar.

B.e.ə. *III-II* əsrdə dəqiq elmlər sürətlə inkişaf edirdi. Bu isə təəccüblü deyil, çünki o dövrlərdə adları əsrlərlə məşhur olan – Evklid, Arximed, Apolloniy kimi dahilər yaşayıb yaradırdılar. Arximeddən başqa bütün məşhur alimlər İsgəndəriyyədə işləyirdilər.

Evklid *I* Ptolomeyin müasiri idi. Bu, onun haqqında məlum olan yeganə həqiqi informasiyadır. Onun harada anadan olması, harada və kimin yanında təhsil alması haqqında heç bir informasiya yoxdur. Hətta bəzi alimlər belə hesab edirdilər ki, Evklid adı (arxasında bir qrup müəllifin saxlandığı fransız riyaziyyatçısı Nikola Burbaki və ya rus yazıçısı Kozma Prutkov kimi uydurulmuş personajdır) bir qrup İsgəndəriyyə aliminin qəbul etdiyi təxəllüsdür. Amma bizim əlimizdə Evklidin real şəxsiyyət olduğuna şübhə etməyə əsas verəcək tutarlı dəlil yoxdur, buna yunan alimləri də şübhə etmirdilər.

Öz əsərlərinin birində Papp İsgəndəriyyəli (*III* əsr) Evklidi ləyaqətli, sakit və təvazökar, təkəbbür və eqoizmdən uzaq olan bir insan kimi təsvir etmişdir. Amma riyaziyyatı öyrənən məsələlərə gəldikdə o, artıq dərəcədə ciddi və sərt idi. Tarixçi və filosof Proklun (*V* əsr) dediyi kimi bir dəfə çar Ptolomey Evkliddən "Başlanğıclar"ı əzbərləmədən həndəsəni öyrənməyin daha qısa və rahat bir yolun olmasını soruşur. Alim çox cəsarətlə cavab verir: "Həndəsədə şah yolu yoxdur!". Digər tarixi lətifədə deyilir ki, bir cavan "Başlanğıclar"ın ilk cümləsini əzbərlədikdən sonra Evkliddən "mən bunu öyrəndikdən sonra nə qazanacağam" deyə soruşur. Evklid qulluqçusunu çağırıb deyir: "bu bədbəxtə üç obol ver, o öz biliyi ilə qazanc əldə etmək istəyir" (obol xırda gümüş qəpikdir).



Proкl Diadox

Evklid – iki min ildən çox tarixi olan "Başlanğıclar" kitabının müəllifidir. Əgər ondan bütün zaman və xalqların riyaziyyatçıları dərs alıblar desək, heç də yanılmarıq. Bu kitab hələ də aktuallığını itirməmişdir. Onun mətni elementar həndəsə ilə tamamlanmır. Burada 300 illik antik riyaziyyatın inkişafının yekunu nəzərdən keçirilir və bununla da növbəti tədqiqatlar üçün möhkəm baza yaradılır. Proкl iddia edirdi ki, Evklid "Başlanğıclar" əsərini tərtib edərkən, ora "Yevdoksdan götürdüyünü, Teetetdən mükəmməlləşdirdiyini daxil edərək, xələflərinin ciddi göstərə bilmədiklərinə təkzibedilməz sübutlar vermişdir". Evklidin dövründən riyaziyyat çox böyük dəyişikliklərə uğrasa da, sonrakı riyaziyyatçıların hamısı "Başlanğıclar" əsərinin daha dolğun və dayanıqlı olan təkliflərinə istinad edirlər (Bu haqda "Evklidin "Başlanğıclar" əsəri" məqaləsində danışılır).

Amma "Başlanğıclar" Evklidin yeganə əsəri deyildi. Ona həmçinin Proкl və Pappın yazılarına görə "Başlanğıclar" əsərinə əlavə olan "Verilənlər"; "Kanonun kəsiyi" (musiqiyə dair traktat); konik kəsiklər haqqında itirilmiş "Səth üzərində həndəsi yerlər" əsəri; yalnız ərəb dilində olan tərcüməsi bizə çatan fiqurların bölünməsi haqqında traktat; "Tədqiqatlar" ("Porizmlər") və optika, mexanika və astronomiyaya dair traktatlar da məxsus idi.



Evklid

Ellinizm dövrünün digər görkəmli alimi, haqqında saysız əfsanələr gəzən Arximed idi. Bu dahinin yaradıcılığı uzun əsrlər boyu elmin taleyini, sonra isə bəşəriyyətin taleyini müəyyən etdi.

Arximedin mexanika, hidrostatika və optikaya olan marağına baxmayaraq, onun həyatının əsas işi riyaziyyat idi. Tanınmış tarixçi Plutarxın (*I-II* əsr) sözlərinə görə alim riyaziyyatla nəfəs alırdı, çox zaman yemək barədə unudur və özünə qayğı göstərmirdi. Onun "Dairənin ölçülməsi", "Kürə və silindr haqqında", "Qum dənəciklərinin hesablanması" və b. əsərləri orijinal fikirləri, hesablama texnikasının ustalığı və isbatla-



Arximed (b.e.ə. 287-212-ci illər)

rın ciddiliyi ilə adamı heyran qoyur. Bundan başqa Arximedin riyazi nəticələri İsgəndəriyyə alimlərinə ünvanlanan və hər biri ayrı-ayrılıqda tamamlanmış elmi memuarı xatırladan məktublarında da göstərilmişdir.

Arximedin bəzi əsərləri yalnız *IX* əsr Bağdad alimi Sabit ibn Kurrun ərəb dilinə olan tərcümələrində saxlanılmışdır. Bu, "Lemmalar", "Yeddibucaqlı haqqında" və "Toxunan çevrələr haqqında" əsərləridir. "Lemmalar" əsərində başqa məsələlər arasında bucağın trisekisiyası məsələsinin əlavənin köməyi ilə ("Qədim dövrün üç məşhur məsələsi" məqaləsinə bax) həlli göstərilmişdir.

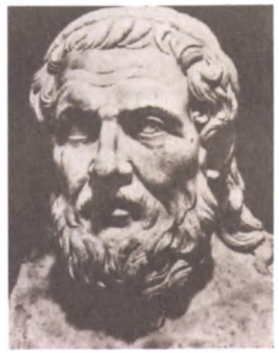


Sabit İbn Kurra (836-901)

"Yeddibucaqlı haqqında" əsərdə kub tənliklərin ekvivalenti olan məsələlərə baxılır. Arximedin ərəblərə məlum olan əsərlərinin sırasında "Paralel xətlər haqqında" traktatın da adı çəkilir. Bəlkə də Arximed Evklidin beşinci postulatını ("Lobaçevskinin həndəsəsi" məqaləsinə bax) isbat etməyə çalışan ilk alimlərdən idi.

Arximedin riyaziyyatın inteqral hesabı adlanan sahəsində əməyi böyükdür. Onun müstəvi fiqurların sahəsini və cisimlərin həcmini öyrənən tədqiqatları heyf ki, qədim dövrdə inkişaf etməmişdir. Bəşəriyyət Arximedi iki dəfə kəşf etmişdir və alimlər iki dəfə daha irəli getməyə çalışmışlar. Birinci dəfə bu orta əsrlərdə ərəb Şərqində, ikinci dəfə isə *XVI-XVII* əsrlərdə Avropada baş vermişdir. Onun əsərlərinin mahiyyətini ən yaxşı diferensial və inteqral hesabının banisi Qotfrid Vilhelm Leybnits açıqlamışdır: "Arximedin əsərlərini diqqətlə oxuyarkən, həndəsənin bütün müasir ixtiralarına təəccüblənmirsən" ("Arximed" məqaləsinə bax).

Ellinizm dövrünün üçüncü görkəmli yunan riyaziyyatçısı Kiçik Asiyanın Perqam şəhərində anadan olmuş Apolloniy idi. Onun həyatı haqqında təzadlı məlumatlar vardır. Bəzi tədqiqatçıların fikrincə Apolloniy b.e.ə. 260-cı ildə anadan olmuşdur və bizim eradan 170 il əvvəl onun hələ sağ olmasına əsaslar var.



Apolloniy Perqli (b.e.ə. 260-170 ci illər)

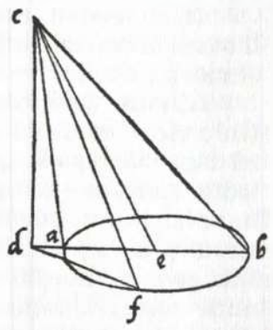
Alimin fəaliyyətinin çiçəklənmə dövrü İsgəndəriyyədə işlədiyi zamana – b.e.ə. *III* əsrə təsadüf edir. Onun həyatının böyük bir hissəsi bu şəhərdə keçmişdir. Apolloniy bura yeniyetmə vaxtında gəlmiş, Evklidin riyaziyyatçılar məktəbində təhsil aldıqdan sonra riyaziyyatı tədris etmişdir. "Konik kəsiklər" əsərinin birinci kitabının ön sözündə Apolloniy yazırdı ki, onu bu əsəri yazmağa İsgəndəriyyədəki mühazirələrinin dinləyicisi odan həndəsə alimi Navkrates sövq etmişdir.



Perqam

Görünür Apolloniy Kiçik Asiyanın mədəniyyət mərkəzi olan Perqam şəhərinə sonralar köçmüşdür. Perqam kitabxanasında 200 minə qədər bükmə saxlanılırdı, əlyazmalarının sayına görə o yalnız İsgəndəriyyə kitabxanasından geri qalırdı.

Apolloniy səkkiz kitabdan ibarət "Konik kəsiklər" əsəri ilə məşhurdur. İlk dörd kitabın orijinalı , növbəti üç kitab Sabit ibn Kurrun ərəb dilinə olan tərcüməsində bizə çatmışdır, sonuncu kitab isə itirilmişdir. Öz traktatında Apolloniy ikinci dərəcəli (yəni ellipsin, parabolanın və hiperbolanın; "Görkəmli əyrilər" məqaləsinə bax) əyrilərin, yunan riyaziyyatına o zamanlar hələ məlum olmayan cəbri simvollardan, hətta "sıfır" və "mənfilik" anlayışlarından da istifadə etməyərək tamamlanmış nəzəriyyəsini qurmuşdur. Apolloniyin bütün isbatları sırf həndəsi xarakter daşıyır, bu mənada onun əsərini yunan həndəsi cəbrinin əldə etdiyi ən yüksək zirvə hesab etmək olar.



Apoloniyin "Konik kəsiklər" kitabından şəkil. Boloniya. 1566-cı il

Konus kəsiklərini Yunanıstanda b.e.ə. *IV* əsrdə öyrənməyə başlayıblar. Onları Yevdoksun tələbəsi Menehm kubun iki mislinin artırılmasını öyrənərkən icad etmişdir. O, onları ox kəsiyi düzbucaqlı, korbucaqlı və itibucaqlı üçbucaq olan fırlanma konuslarının doğurana perpendikulyar müstəvi ilə kəsiyi kimi təsəvvür etmişdir. Apolloniy öz kitabında konus kəsiklərinin daha ümumi stereometrik tərifini vermişdir. Birincisi, o, ixtiyari dairəvi konusu nəzərdən keçirirdi. İkincisi, hiperbolanın iki şaxəsini də öyrənməyə imkan verən hər iki tərəfini nəzərə alırdı. Və nəhayət o kəsiyi doğuranla istənilən bucaq əmələ gətirən müstəvi ilə keçirirdi.

Üç konus kəsiyini müəyyən etdikdən və qurduqdan sonra Apolloniy onların əsas xüsusiyyətlərini, asimptotlarını, toxunanlarını, fokuslarını, qoşma diametrlərini və s. tədqiq edirdi. *V* əsrə qədər Apolloniyin əsərlərinin öyrənilib və şərh edilməsinə baxmayaraq, təəssüf ki, onun əyriləri tədqiq üsulları qədimdə inkişaf tapmadı. Konus kəsiklərindən isə kub tənlikləri tədqiq etmək üçün istifadə edirdilər. Beləliklə, Apolloniy konus kəsikləri nəzəriyyəsini, onlar tələb olunandan daha tez yaratdı.

Yalnız *XVII* əsrdə Rene Dekart, Pyer Ferma, İsaak Nyuton və digər alimlər Apolloniyin əsərlərinə müraciət etdilər. Konus kəsiklərinin nəzəriyyəsi əsasən mexanika və astronomiyada öz geniş tətbiqini tapdı. İohann Kepler müəyyən etdi ki, Günəş sisteminin planetləri fokuslarından birində Günəşin yerləşdiyi ellipslər üzrə hərəkət edirlər. Qalileo Qaliley isə göstərdi ki, boşluqda atılmış daş və ya mərmi parabola üzrə uçacaq. 80-ci illərdə İsaak Nyuton, Apolloniyin nəticələrinə əsaslanaraq, özünün məşhur "Natural fəlsəfənin riyazi əsasları" əsərini yaratdı.


İsaak Nyuton (1643-1727)

ANTİK RİYAZİYYATIN SON YÜKSƏLİŞİ

Evklid, Arximed və Apolloniyin yaradıcılığı yunan riyaziyyatının son zirvəsi idi. Növbəti iki yüzillikdə aparılan tədqiqatlar, onların tədqiq etdikləri problemlərdən kənara çıxmırdı. Nə yeni bir ideya, nə də yeni bir nəzəriyyə meydana gəlmirdi. Şübhəsiz ki, bu, dünyada yaranmış siyasi vəziyyətlə də əlaqədar idi.


Plutarx

Artıq *III* əsrin sonundan romalıların fəthedici müharibələri başlandı. Yunan koloniyalarındakı iqtisadi və mədəni həyat sanki dondu. Əzablardan təngə gəlmiş insanlar,

başqa bir həyat vəd edən dinə meyl etməyə başladılar. Abstrakt təfəkkür, məntiqi düşüncə ikinci plana keçdi.

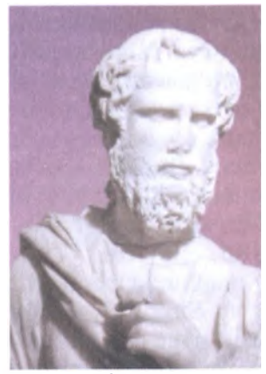
B.e.ə. *II-I* əsrlər Romanın sürətlə inkişafetmə dövrü oldu. B.e.ə. 30-cu ildə sonuncu ellinist dövlət – Misir süqut etdi və Roma imperiyası yarandı. Nəticədə keçmiş yunan koloniyalarının həyatı köklü şəkildə dəyişdi. Bir tərəfdən müflisedici müharibələrin və talanların ara verməsi nəticəsində iqtisadi vəziyyət stabilləşdi. Digər tərəfdən isə ellinist dövlətlər azadlıqlarını itirdi, Plutarxın sözləri ilə desək, sakinlər daima hiss edirdilər ki, onlar "Roma çəkməsinin" altındadırlar.


Lukian

Amma yenə də yunan mədəniyyəti oyanırdı. *I-II* əsrlərin sonunu adətən "yunan intibahı" adlandırırlar, belə ki, bu dövrlərdə Plutarx və Lukian kimi dahi yazıçılar yaşayıb yaratmışdılar. Təbiət elmləri də yüksəliş dövrünə qədəm qoydu. Yeni eranın ilk əsrlərində İsgəndəriyyə qədim dövrün mədəniyyət və elm mərkəzi olaraq qalırdı. Bu məsələdə Roma onunla heç vaxt rəqabət apara bilməzdi. O, öz şairləri, tarixçiləri, hüquqşünasları ilə şöhrət tapsa da, ellinist elmi təfəkküründə dərinliklərinə dala bilməmişdir.

I əsrdə İsgəndəriyyədə buxarın hərəkət qüvvəsini icad edən, gözəl riyaziyyatçı və istedadlı ixtiraçı- mühəndis Heron işləyirdi. Əsrin sonunda burada ilk qeyri-Evklid həndəsəsinin ("Sfera üzərində fiqurlar" məqaləsinə bax) – sferik həndəsə və triqonometriya sistemlərinin yaradıcısı, riyaziyyatçı və astronom Menelay da yaşamışdır. *II* əsrdə tanınmış İsgəndəriyyə astronomu və riyaziyyatçısı Klavdiy Ptolomey dünyanın *XV-XVI* əsrə qədər mövcud olan geosentrik modelini yaratmışdır.

Bu alimlərin əsərlərində həndəsi cəbrdən imtina edərək, hesablama riyaziyyatına dönüş, ədəd anlayışının genişləndirilməsi tendensiyaları nəzərə çarpırdı. Yeni istiqamət iki elmin: cəbr və diofant təhlilinin əsasını qoymuş isgəndəriyyəli Diofantın yaradıcılığında daha parlaq təzahür tapmışdı. Qədim dövrün sonuncu böyük riyaziyyatçısı olmaq onun taleyinə yazılmışdı. Dio- fantdan sonra az və ya daha istedadlı şərhçilər meydana gəldi.


Menelay İsgəndəriyyəli (I-II əsrlər)


Klavdiy Ptolomey (90-160-cı illər)

Yeni eranın ilk əsrlərində meydana gəlmiş xristianlıq bütpərəstlik mədəniyyəti və elminə əks gedirdi. Dünya fatehləri – romalılar da abstrakt elmlə məşğul olmağa rəğbət bəsləmirdilər. Bu qeyri münbit mühitə baxmayaraq, İsgəndəriyyə məktəbi daha üç əsr yaşadı. *III* əsrdə və *IV* əsrin əvvəllərində Papp adlı məşhur alim yaşayıb yaratmışdır. Onun "Riyaziyyat toplusu" əsəri, alimin klassik antik həndəsəni gözəl bildiyindən xəbər verir. *IV* əsrin sonunda Xristian kilsəsi elmə qarşı təşkilatlanmış bir hərəkata başladı. 391-ci ildə İsgəndəriyyə kitabxanasının xeyli hissəsi yandırıldı. Qalan əlyazmaları isə üç əsrdən uzun bir müddət ərzində davamlı olaraq məhv edilirdi.

Bu dövrün alimlərindən İsgəndəriyyəli Teonun və onun qızı, tarixdə ilk riyaziyyatçı qadın Hipatiyanın adını çəkmək olar. Hipatiya Apolloniy və Diofantın əsərlərinə yazılmış şərhin müəllifidir. Bu əsrarəngiz qadın ağılı və natiqlik bacarığı ilə şöhrət tapmışdır.


Diofant III əsr

Onun faciəvi həyatından tarixi romanlar yazılmışdır. 418-ci ildə Hipatiya fanat-xristianlar kütləsi tərəfindən, bütpərəstlikdən əl çəkmək istəmədiyi üçün qətlə yetirilmişdir.

V əsrdə alimlər İsgəndəriyyəni tərk edərək Afinaya köçürdülər. Burada Evklidin "Başlanğıclar" kitabına şərh və Evklidə qədər Falesin həndəsəsinin tarixinə qısa icmal vermiş Proкl (410-485) işləyirdi. *VI* əsrdə Afinadan qovulmuş məşhur şərhçilərin sonuncuları – Yevtokiy və Simplikiy İrana köçməyə məcbur oldular. Antik elm və mədəniyyət bütün antik cəmiyyətin ölümü ilə süquta uğradı.

EVKLİDİN "BAŞLANĞICLAR" ƏSƏRİ

Bəlkə də Evklid Fales və Arximed kimi riyaziyyat novatorlarının sırasına daxil deyil. Amma onun tayı-bərabəri olmayan sistemləşdirici, pedaqoq və elmin populyarlaşdırıcısı olmasına heç bir şübhə yoxdur. Evklid öz dərslikləri ilə (yəni "Başlanğıclar" əsərinin kitabları) Platon dövrünün bütün elementar riyaziyyatını əhatə edə bilmişdir.

"Başlanğıclar" ("Elementlər" sərlövhəsinin digər tərcüməsidir)bizə gəlib çatmamış bir sıra riyazi əsərlərin nəticəsidir. Məsələn, "Başlanğıclar" əsərinin beşinci kitabında Yevdoksun nisbətlər nəzəriyyəsi, onuncu kitabında Teeteta nəzərən irrasionallıq nəzəriyyəsi, on üçüncü kitabda yenə gedib Teetea çıxan düzgün çoxbucaqlılar nəzəriyyəsi şərh edilir.

Təbii ki, Teetetin, Yevdoksun və özünün başqa sələflərinin ixtiralarını şərh edərkən Evklid əlavələr edərək, əvvəllər müəyyən edilməyən bir çox şeyi sübut etmişdir. "Başlanğıclar" əsərində Evklidə aid olan tapıntılar da var. Belə tapıntıların ən parlaq nümunəsi – sadə ədədlər çoxluğunun sonsuz olması haqqında teoremdir.

"Başlanğıclar" əsərinin quruluşu haqqında bir neçə kəlmə. Öz müəllimi Aristotelin məntiqi sisteminə uyğun olaraq, Evklid həndəsəyə aksiomatik şərh verməyə cəhd edir. Bunu aşağıdakı kimi izah etmək olar.

Əgər bəzi teoremlərin isbatlarına fikir versək, o zaman onların hansı sadə faktlardan yarandığını görə bilərik. Bu sadə faktlar öz növbəsində daha sadə faktlardan əmələ gəlirlər. Həndəsənin bütün teoremlərini belə təhlil etdikdən sonra aşağıdakı xassələrə malik olan sadə faktlar siyahısını əldə etmiş olacağıq: birincisi, onlar tamamən aydındırlar və heç bir isbata ehtiyacları yoxdur, ikincisi, geriyə nəzər salsaq, həndəsənin bütün teoremlərini çıxarmaq olar. Belə sadə faktlar aksiomlar adlanır, həndəsənin digər faktları teorem adlanır və hər bir teoremi aksiom və ya daha əvvəl isbat edilmiş teoremin köməyi ilə isbat etmək olar. Beləliklə, həndəsə binası aksiomlardan ibarət özülün üstündə ucaldılıb.



Evklid. Andrea Pizanonun işi. 1334-1340-cı illər

Evklid aksiom və postulatları ayırırdı. O, həndəsi qurmalarda rəhbər tutulan tələbləri postulat adlandırırdı. Məsələn, postulatların birində deyilir: "İstənilən mərkəzdən, istənilən radiusla çevrəni təsvir etmək olar". Evklid tərəfindən müəyyən edilmiş postulatların arasında: "İki nöqtədən düz xətt keçirmək olar" "İki düz xətt fəzanı nəticələndirə bilməz" (bunu həm də əgər iki düz xəttin, iki ortaq nöqtələri varsa, onlar bərabər olmalıdır kimi də başa düşmək olar) kimiləri də var idi.

Anlayışlarla da vəziyyət analojidir. Məsələn, çevrə müstəvidə verilən O nöqtəsindən (mərkəzdən) verilən *r* məsafədə yerləşən nöqtələrin həndəsi yeri kimi başa düşülür. Beləliklə, çevrəni müəyyənləşdirən zaman "nöqtə", "məsafə", "müstəvi" və s. nə demək olduğunu bilmək lazımdır. Nəhayət, başqa anlayışları müəyyənləşdirən bir sıra sadə anlayışlar sadalamaq olar. "İlkin" anlayışlar isə o qədər sadədir ki, onları müəyyən etmək belə lazım deyil.

Evklid hətta ən sadə anlayışları belə tərifsiz qoymaq istəmirdi. O, belə yazırdı: "Nöqtə hissələri olmayan bir şeydir. Amma hissələrin olmamasının nə demək olduğu aydın deyil". (Çox güman ki, Evklid sadəcə nöqtənin ölçüsünün olmadığını anlatmaq istəyir). Təəccüblü deyil ki, bu dumanlı tərifdən Evklid artıq heç bir yerdə istifadə etmir.

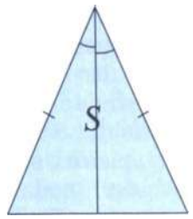
"Başlanğıclar" əsərində ilk isbatların necə aparıldığını izləmək maraqlıdır. Evklidə görə iki fiqur yalnız bütün nöqtələri üst-üstə düşərsə, bərabər adlanar (yəni fiquru bərk cisim kimi hərəkət etdirərək ikinci fiqurun üzərinə qoymaq olar). Amma Evklid "uyğunlaşdırmaq" anlayışının nə olduğunu müəyyən etmir. Beləliklə, onun, fiqurların bərabərliyi haqqında "tərifi" əslində bizim gündəlik bərk cisimlərin yerdəyişməsi təcrübəmizdir. Daha sonra Evklid bu "tərifin" köməyi ilə üçbucaqların bərabərlik əlamətlərini isbat edir. Sonrakı mülahizələrində o fiqurların vəziyyətindən istifadə etmir, artıq üçbucaqların bərabərliyinin formalaşmış əlamətlərinə istinad edir. Məsələn, bərabəryanlı üçbucağın bucaqlarının bərabərliyini isbat etmək üçün Evklid təpədəki bucağın tənbölənini keçirir və göstərir ki, alınan "yarılar" birinci əlamətə görə bərabərdirlər. "Yarım üçbucaqlarda" əks tərəflərdə bərabər bucaqlar var, deməli, verilmiş bərabəryanlı üçbucağın oturacağa bitişik bucaqları bərabərdir (şəkil 1).

Ümumilikdə Evklidin əsəri möhtəşəmdir. Onun yaratdığı həndəsənin şərhi sistemi o qədər mükəmməl idi ki, iki min ildən artıq mövcud oldu. XX əsrə qədər Avropa ölkələrində məktəblərdə həndəsə dərsi Evklidin "Başlanğıclar" əsərinin tərcümələri əsasında tədris edilirdi.

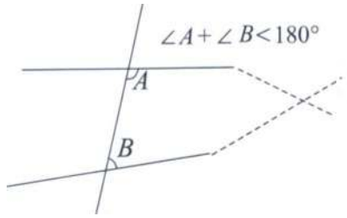
Amma sonrakı nəsillərin riyaziyyatçıları bütövlükdə Evklidin aksiom və tərifləri sistemi ilə razılaşmırdılar və onu daha da təkmilləşdirməyə çalışırdılar. Məsələn, bütün düz bucaqların bərabər olması haqqında aksiom lazımsız oldu, bu təklifi digər aksiomların köməyi ilə isbat etmək mümkün oldu.

Evklidin digər aksiom və postulatları da şübhələr doğurdu. Xüsusilə də iki düz xətt üçüncü düz xətlə kəsişdikdə daxili birtərəfli bucaqların cəmi iki düz bucaqdan kiçik olarsa, verilən düz xətlərin uzantılarının məhz üçüncü xəttin daxili bucaqların cəmi 180°-dən kiçik olan tərəfində mütləq kəsişəcəklərinə aid olan beşinci postulat narazılıq yaradırdı (şəkil 2).

Bu postulat haqqında "o sadədir və isbat tələb etmir" demək mümkün deyil. Həndəsədə daha aydın və sadə faktları ifadə edən teoremlər vardır, məsələn, bərabəryanlı üçbucağın oturacağındakı bucaqların bərabər olması haqqında teorem. Təəccüblü deyil ki, əsrlər boyu bir çox riyaziyyatçılar Evklidin beşinci postulatını teorem kimi isbat etməyə çalışırdılar.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

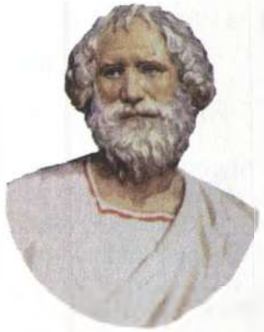
Bu aksiomun, başqa cür səslənən, amma beşinci postulatın ekvivalenti olan digər ifadə tərzləri də tapılmışdır. Onlardan biri belə səslənir: verilən düz xəttə aid olmayan nöqtədən verilənə paralel olan (yəni onunla kəsişməyən) yalnız bir düz xətt keçirmək olar. Müasir məktəb dərsliklərində paralellik haqqında aksiomlar məhz bu formada təqdim edilir.

Bəs beşinci postulatı qalan aksiomların köməyi ilə isbat etmək mümkündürmü? Əgər olarsa, onda bu aksiom lazım deyil, yəni həndəsi şərhləri sadələşdirmək olar. Əgər mümkün olmazsa?... Riyaziyyatçılar bu suala Evkliddən yalnız iki min il sonra cavab verə bildilər ("Lobaçevskinin həndəsəsi" məqaləsinə bax).

ARXİMED

Şübhəsiz ki, Arximed (b.e.ə. 287- 212-ci illər) – qədim Yunanıstanın ən dahi alimidir. O, Nyuton, Qauss, Eyler, Lobaçevski kimi bütün zamanların riyaziyyatçıları ilə bir pillədə durur. Onun əsərləri yalnız riyaziyyata həsr edilməmişdir. O, mexanikada əsrarəngiz ixtiralar etmişdir, astronomiyanı, optikanı, hidravlikanı yaxşı bilir və sözün əsl mənasında əfsanəvi şəxsiyyət idi. Günəş və Ayın diametri haqqında əsər yazan astronom Fidiyanın oğlu Arximed Siciliyada Sirakuza şəhərində anadan olmuşdur. O, çar *II* Hiyeronun və onun oğlunun-varisinin yaxınlarından idi.

Hiyeronun tacı haqqında hekayə çox məşhurdur. Arximedə çar üçün düzəldilmiş tacın xalis qızıldan, yəni qatqısız olduğunu yoxlamaq tapşırılmışdı. Bu haqda düşünə-düşünə vannaya girən Arximed, onun bədənin ağırlığı altında sıxışdırılan suyun qabın kənarından dağıldığını görür. Və o,



Arximed (b.e.ə. 287-212)

"Evrika, evrika!" (yəni "Tapdım, tapdım!") qışqıraraq eksperiment aparmağa atılır.

Arximedin ideyası çox sadə idi. Suya batırılmış cisim sadəcə öz həcmi qədər mayeni çıxarır. Tacı silindrik qaba yerləşdirib nə qədər maye çıxardığını müəyyən edərək, onun həcmini bilmək olar. Həcm məlum olduqda isə, tacı çəkərək onun hazırlandığı metalın xüsusi çəkisini hesablamaq və həqiqəti üzə çıxarmaq olar. Axı qızıl ağır metaldır, əlavə qatqılar, boşluqlar isə bəzəyin xüsusi çəkisini azaldır.

Amma Arximed bununla kifayətlənmədi. "Üzən cisimlər" əsərində o, "Mayeyə batırılmış cisim öz çəkisində, sıxışdırılaraq çıxarılan maye qədər itirir" kimi səslənən qanun formalaşdırdı. Arximedin qanunu (digər qanunlar ilə yanaşı), mayelərin hərəkət və tarazlıq qanunlarını öyrənən elmin – hidravlikanın əsasını təşkil edir. Məhz bu qanun, içərisində boşluq olmayan polad kürə batdığı halda, taxta parçasının suyun üzünə çıxmasını aydınlaşdırır. Birinci halda kürənin çəkisindən az miqdarda su sıxışdırılır, yəni onu suyun üzündə saxlamaq üçün qüvvə çatmır. Amma ağır yüklənmiş müəyyən vater-xəttə qədər suya girən metal gəmi batmır. Çünki gəminin korpusunda hava ilə doldurulmuş yetərincə boş yer vardır, itələmə qüvvəsi gəmini suyun üzərində saxlayır. Arximed qanunu əsasında, həmçinin isti hava və ya qaz ilə doldurulmuş şarın uçma səbəbi də aydınlaşır.

Hidravlika sahəsində bilikləri Arximedə su çəkən vintli nasosu ixtira etməyə imkan verdi. Belə nasos elə yaxın dövrlərə qədər ispan və Meksika gümüş mədənlərində tətbiq edilirdi.

Fizika kursundan hamıya Arximed lingi haqqında qayda məlumdur. Əfsanəyə görə alimə sonralar dillərə düşən: "Mənə dayaq nöqtəsi verin, Yer kürəsini qaldırım!" frazası məxsusdur. Əlbəttə, Arximed lingdən istifadəni nəzərdə tuturdu, amma o bir az özündən razı idi, çünki dayaq nöqtəsindən başqa ona fantastik ölçülərdə, əyilməyən oxu olan ling lazım olardı.

Məlumatlara görə Arximed bir çox maraqlı maşın və qurğular icad etmişdir.

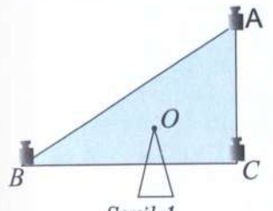
Çar Hiyeron nəhəng "Sirakosiya" gəmisini tikməyi əmr edir. Amma o, ağır olduğundan çoxsaylı döyüşçülər onu yerindən tərpədə bilmədilər. Bu zaman Arximed onu bir nəfərin köməyi ilə yerindən tərpədə bilməsinə imkan verən mexanizmi qurur. Çar özü gəmini suya endirdi və heyrətə gələrək əmr etdi: "Bundan sonra Arximedin hər sözü həqiqət olaraq qəbul edilsin!".

Romalılar onun doğma şəhəri Srakuzanı fəth edəndə, Arximed yetmiş yaşlı qoca kişi idi. Şəhər sakinlərinin müdafiəsi üçün, o hərbi maşınları icad etdi. Güclü katapultlar ağır daşları Roma legionlarının üzərinə atır, düşməni daş parçaları ilə atəşə tuturdu. Qala divarlarının üstündə qurulan, xüsusi sahil kranları, romalıların gəmilərinə qarmaq ilişdirərək onları çevirirdilər. Öz mexaniklərindən narazılıq edən Roma sərkərdəsi Marsell, "dənizi Roma gəmiləri ilə qaşıqlayan" Arximedə heyran qalırdı. Legionerlər isə qala divarlarında bir şalban və ya ip gördükləri zaman "Arximed bizi məhv etmək üçün yeni maşın icad edib" deyərək, vahimə içində qaçmağa başlayırdılar.

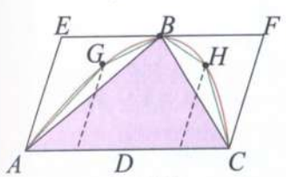
Böyük Roma gəmisinin hücumunu dəf etmək üçün Arximed yunan döyüşçülərinə metal qalxanları parıldayana qədər cilalamağı və sahil boyu düzməyi əmr etdi. Sonra isə onun göstərişi ilə döyüşçülər günəş şüalarını gəminin göyərtəsində bir nöqtədə fokuslaşdırdılar. Gəminin taxta üzlüyü yüksək temperatura qədər qızaraq alışdı – gəmidə yanğın başladı.

Amma alimin özü üçün bu hərbi ixtiralar sadəcə elmi icadlarının kiçik praktiki əlavələri idi. Ling qaydası və cisimləri üzməyə vadar edən itələmə qüvvəsindən başqa Arximed, cisimlərin ağırlıq mərkəzləri təlimini yaradaraq, onun köməyi ilə indi onun şərəfinə adlandırılan üçbucağın medianları haqqında teoremi isbat etdi.

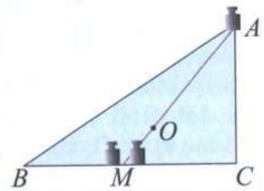
Arximed belə düşünürdü: Üç eyni kütləni *ABC* üçbucağının təpəsinə yerləşdirək, *O* – bu kütlələrin ağırlıq mərkəzi olsun, yəni əgər üçbucaq bu nöqtədə bərkidilsə, o tarazlıq vəziyyətində olacaq (şəkil 1). İndi isə bu kütlələrdən ikisini *BC* tərəfinə, yəni bu kütlələrin ağırlıq mərkəzinə keçirək. Nəticədə hər üç kütlənin ümumi ağırlıq mərkəzinin yeri dəyişməz qalır (şəkil 2). Aydın olur ki, *O* nöqtəsi *AM* medianı üzərində yerləşir və onu 2:1 nisbətində bölür (*A* təpəsindən hesablasaq). Bu mülahizə istənilən digər mediana da uyğun gəlir. Deməli, hər üç median *O* nöqtəsindən keçir. Beləliklə, Arximed istənilən üçbucaqda medianların bir nöqtədə (üçbucağın ağırlıq mərkəzində) kəsişdiyini sübut etdi.



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

Arximed ağırlıq mərkəzi nəzəriyyəsinə bir sıra digər həndəsi tətbiqlər də tapdı; bu haqda isə o, "Müstəvi fiqurların tarazlığı" əsərində yazmışdır.

Amma onun ən mükəmməl icadları sahə və həcmlərin hesablanması üsulları ilə bağlıdır. Bu üsullar faktiki olaraq 18 əsr sonra Nyuton və Leybnitsi inteqral və diferensial hesabını icad etməyə sövq etdi.

Yevdoksun metodundan istifadə edərək, Arximed parabolanın ixtiyari seqmentinin sahəsini hesabladı. Müasir mənada bu mülahizələri aşağıdakı kimi ifadə etmək olar.

Parabolanın *AC* vətəri ilə bölünmüş seqmentini nəzərdən keçirək (şəkil 3) və fərz edək ki, parabolanın AS vətərinə paralel olan düz xətt parabolaya B nöqtəsində toxunur. *ABC* üçbucağı sahəsinə görə parabolanın nəzərdən keçirilən seqmentindən kiçikdir. İndi isə parabola üzərində, *AD* və *DC* parçalarının ortasına proyeksiyalanan iki *G*, *H* nöqtələrini götürək. *ABC* üçbucağına *ABG*, *BGH* üçbucaqlarını əlavə edərək sahəsi, parabolanın seqmentinin sahəsinə daha yaxın olan *AGBNC* çoxbucaqlısını alırıq. İndi *AG*, *GB*, *BH*, *HC* vətərlərində yeni üçbucaqlar qurmaq olar. Nəticədə biz parabolanın seqmentini daha dəqiq öyrənəcəyik.

Daha sonra Arximed özünün əsrarəngiz çıxarışlarını göstərir. O, alınan çoxbucaqlıların sahələrini hesablayır (*AGBHC* və digər) və faktiki olaraq bu sahələrin çatmaq istədiyi həddi tapır, yəni parabolanın seqmentini tapır. Aydın olur ki, o *AEGC* paraleloqramının sahəsinin 2/3 hissəsini təşkil edir.

Bu nəticəni Arximed iki üsulla alır. Birinci halda o, ağırlıq mərkəzləri haqqında təlimdən istifadə edərək: sanki parabolanın seqmentini nazik şaquli zolaqlara bölür, qarışdıraraq lingin köməyi ilə parabolanın seqmentini və hansısa üçbucağı tarazlaşdıraraq onların ilkin və qarışdırılmış vəziyyətdə ağırlıq mərkəzlərini tapır. İkinci üsul – tamamən hesablama üsuludur:

$$3(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) = n^3 + n^2 + (1 + 2 + \ldots + n)$$

düsturunun köməyi ilə seqmentin daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlıların sahələrinin ifadəsini verir. Təbii ki, Arximed onu söz formasında ifadə edir.

Zolaqlara və ya qatlara ayırmanı Arximed həmçinin kürə və kürə qatının həcm və səthini, fırlanma paraboloidinin həcmini və digər cisimləri (şəkil 4) öyrənərkən tətbiq edir.

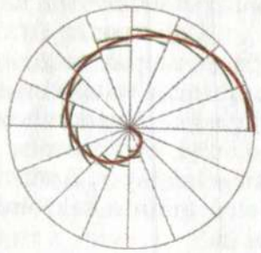
Arximedə bir çox gözəl həndəsi ixtiralar məxsusdur. O, daxilə çəkilmiş düzgün yeddibucaqlının tərəfinin uzunluğunu hesablaya bildi, konusun maili kəsiyinin ellips olduğunu sübut etdi. Tərəflərinin uzunluğuna görə üçbucağın sahəsinin hesablandığı $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ düsturunu Heron düsturu adlandırırlar, amma Arximed onu daha əvvəldən bilirdi.

Bundan başqa Arximed indi onun şərəfinə adlanan spiralı qurdu (şəkil 5). O, müəyyən etdi ki, əgər düz xətt öz *O* nöqtəsi ətrafında bərabər sürətlə fırlanarsa, bu zaman düz xətt üzrə bərabərsürətli hərəkət edən nöqtə spiral cızır. Bu spiral üçün Arximed polyar koordinatlarında tənlik qurdu, ixtiyari nöqtədə toxunanı, iki radius və onların buruqları arasındakı sahəni tapdı. Həmçinin belə spiralın bir sıra mexaniki tətbiqini təsvir etdi.

Maraqlıdır ki, Arximed əvvəlcə heç bir isbat vermirdi, arzulayırdı ki, "hər bir riyaziyyatçı bu nəticəni sərbəst olaraq özü almaq imkanından məmnun olsun". Bundan əlavə, o, bəzi həqiqi olmayan mülahizələr



Şəkil 4.



Şəkil 5. Arximed spiralı

əlavə edərək "kim ki, əsassız olaraq tapılmayanı tapdığını iddia edərsə, sübutsuz hər şeyi özü tapdığını söyləsə tələyə düşsün" deyə, ona qibtə edənləri qayğılandırmağı sevirdi.

Qədim yunanlar masanın üstünü qum ilə örtərək, "bu qum lövhədə" çertyojlar çəkirdilər. Belə masanın arxasında, öz dərin fikirlərinə dalan Arximed də oturmuşdu. Bu zaman, yunanların müdafiəsini qıran bir legioner içəri soxulur. "Mənim çertyojlarıma toxunma!" – deyə alim qışqırır. Legioner hiddətlənir. Onun qarşısında Roma gəmilərini batıran, onun dostlarını qətlə yetirən daşları atan iblis maşınlarını yaradan düşmən durmuşdu. Sərkərdə Marsellin qadağasına baxmayaraq o, qocanı qılıncla vurdu. Qan itirən Arximed bəlkə də yeni bir elmi ixtiranı təsvir edən çertyojlarının üstünə yıxıldı...

Bu, b.e.ə. 212-ci ildə baş vermişdir. Marsell Arximedi şərəflə dəfn etməyi əmr etdi, qəbir daşında isə silindr və onun daxilinə çəkilmiş kürə təsvir etməyi əmr etdi.



Arximedin ölümü

Bu fiqurların həcmləri nisbətinin 3:2 olduğunu kəşf etməsilə fəxr edən alim özü belə istəmişdi.

DİOFANTIN "HESABI"

Bizim dövrə kimi Diofantın tam olmayaraq iki əsəri gəlib çatmışdır. Bu, "Hesab" (on üç kitabdan altısı) və "Ədədlər haqqında" əsərləridir. Amma müəllifin özü haqqında demək olar ki, heç bir məlumat yoxdur. Fransız riyaziyyat tarixçisi Pol Tanneri, dolayı faktlara əsaslanaraq, Diofantın *III* əsrin ortalarında yaşamasını müəyyən edir. Amma Diofantın əsərlərini Vatikanda aşkar etmiş intibah dövrünün alimləri onun yaşama dövrünü *II* əsrə aid edirlər. Bizə gəlib çatmış epitafiyanın (qəbirüstü daşdakı yazı) mətnindən hansısa bir məlumatı əldə etmək və bunun əsasında, bir dərəcəli bir məchullu tənliyi həll edərək, Diofantın 84 il yaşamasını müəyyən etmək olar.

Onun "Hesab"ı riyaziyyatın və ədədlər nəzəriyyəsinin inkişafında dönüş nöqtəsi oldu. Məhz burada həndəsi cəbrdən qəti imtina baş verirdi. Diofantın hərfi simvolikasının sayəsində cəbr yeni, həndəsənin ("Hərfi simvolikanın yaranması" məqaləsinə bax) dilindən daha operativ və rahat dil qazandı.

"Hesab" – Evklidin "Başlanğıclar" və Apolloniyin "Konik kəsiklər" əsəri kimi nəzəri əsər deyil. Bu hərəsi bir və ya bir neçə lazımi həll, yaxud da izahla təchiz edilmiş məsələlər (cəmi 189) toplusu idi.

Öz əsərinin başlanğıcında Diofant cəbrin əsaslarının ilk ifadəsi olan kiçik giriş yerləşdirmişdir. Burada rasional ədədlər meydanı qurulur və hərfi simvolika verilir. Elə buradaca çoxhədlilər və tənliklərlə əməllərin qaydaları formalaşır. Qeyd etməliyik ki, məsələlərin həllinin təhlili göstərir ki, "Hesab"da girişdə verilənlərdən daha geniş nəzəri əsaslar təqdim edilmişdir. Bu, hər şeydən öncə ədədlər sahəsinə aiddir.

Xatırladaq ki, klassik antik riyaziyyatda vahidlər çoxluğu (yəni natural ədədlər) ədədlər adlanırdı. Diofant isə ədədin tərifini versə də, bütün kitablar boyu öz məsələlərinin müsbət rasional həllini "ədəd" adlandırır.

Amma, yalnız müsbət kəsrlərdən ibarət olan riyaziyyatı qurmaq yetərli deyil və



Pinturikkio. Hesab. Freska.
1492–1495-ci illər

Diofant həlledici addım ataraq – mənfi ədədləri təqdim edir. Bunun üçün o, indi aksiomatik kimi tanınan üsulu seçir: "Mənfini mənfiyə vuranda müsbət alınır; Mənfini müsbətə vurduqda isə mənfi alınır". "İşarələrin qaydalarını" aşağıdakı kimi ifadə edə bilərik:

$$(-)\times(-)=(+)$$

$$(-)\times(+)=(-)$$

Diofant yeni ədədlər üçün toplama və çıxma qaydaları şərh etmir, onlardan sadəcə öz kitablarında istifadə edir. Amma yenə də mənfi ədədləri Diofant ara hesablamalarda tətbiq edir, həll üçün isə həmişə müsbət rasional ədədləri seçir.

Diofantın təklif etdiyi hərfi simvolikada işarələmə məchulun həm mənfi, həm də müsbət olaraq onun ilk altı dərəcəsi üçün tətbiq edilir. Yəni Diofant üçün bu ədədlər əvvəllər olduğu kimi həndəsi məna daşımırlar. Məchulun dərəcələrinə görə vurma qaydaları formalaşdıqdan sonra bərabərlik işarəsi olan xüsusi ("bərabər" mənasını verən yunan sözü olan "isos" ilk hərfləridir) və qeyri-müəyyən kvadratın işarəsi tətbiq edildikdən sonra, Diofant ilk dəfə riyaziyyatda tənliklər və ya tənliklər sistemini yazma imkanı əldə edir. Əlbəttə, onun yazma forması, riyazi əsərlərdə nəzərə çarpan müasir formaya uyğun gəlmir. Düzünü desək, Diofanta qədər heç bir nə müəyyən, nə də qeyri-müəyyən tənliklər yox idi. Tənliyə bənzər məsələlər nəzərdən keçirilirdi, vəssalam.

Nəhayət, girişdə Diofant tənliklərin çevrilmələrinin iki əsas qaydasını formalaşdırır: tənliyin həddinin bir tərəfdən, digər tərəfə əks işarə ilə keçirilməsi və oxşar ədədlərin islahı qaydası. Nəticədə bu qaydalar ərəb sözləri "əl-cəbr" və "əl-mukabala" kimi məşhurdur ("Ərəb Şərqinin ölkələri" məqaləsinə bax).

"Hesab" – məsələlər toplusu olduğu üçün Diofantın ümumi üsul yaratmadan, ayrı-ayrı məsələlərin həlli üçün rahat üsullar tapması fikri yarana bilər. Amma diqqətlə oxuduqda əmin olmaq olar ki: məsələlərin diqqətlə seçilməsi və qoyulması müəyyən ümumi üsulların tətbiqinin illüstrasiyasına yönəlmişdir.

Birinci kitab bir və iki dərəcəli müəyyən tənliklərin həllinə, bütün qalan kitablar isə qeyri-müəyyən tənliklərin və sistemlərin həllinə həsr edilmişdir. Diofantın həllərini diqqətlə araşdırarkən onun faktiki olaraq aşağıdakı teoremi isbat etdiyini görmək olar: əgər iki məchullu və rasional əmsallı iki dərəcəli tənlik heç olmasa bir dənə rasional həllə malikdirsə, o zaman bu tənlik sonsuz sayda belə həllərə malikdir. Bundan başqa, x və y məchullarını bir parametrdən asılı $x=\varphi(\kappa)$, $y=\psi(\kappa)$ rasional funksiyaları ilə vermək olar. Üç və daha yüksək dərəcəli tənliklər üçün bu müddəa doğru deyil.

Diofant iki dərəcəli iki məchullu tənlikləri tamamilə təhlil etmişdir. Daha yüksək dərəcəli tənlik və sistemlərin həlli üçün o, yeni dövrün bir çox Avropa riyaziyyatçılarının diqqətini cəlb edən daha incə və mürəkkəb üsullar hazırlamışdır. Bu metodlardan birinin köməyi ilə Diofantın ən məşhur məsələsi həll edilir: "Verilən kvadratı iki kvadrata ayırmaq". Bu, on iki əsr sonra onun üzərində düşünən fransız riyaziyyatçısı Pyer Fermanı onun məşhur teoremini ("Böyük Ferma teoremi" məqaləsinə bax) formalaşdırmağa sövq etdi.

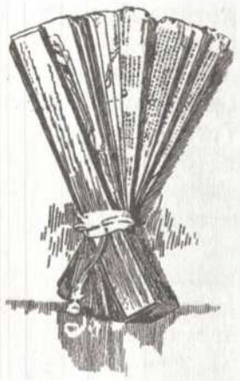
Diofantın əsərləri cəbr və ədədlər nəzəriyyəsinin inkişafı üçün fundamental məna daşıyırdı. Problemləri ilə Leonard Eylerin, Karl Yakobinin və digər müəlliflərin məşğul olduğu – cəbri həndəsənin yaranması və inkişafı bu alimin adı ilə bağlıdır. Diofantın metodları *XIX* əsrin sonu *XX* əsrin əvvəllərində məşhur olan riyaziyyatçı Anri Puankarenin əsərlərində daha dərin tətbiqini tapdı. Bu metodların əsasında *XX* əsrin sonunda intensiv şəkildə inkişaf edən sahə olan – cəbri əyrilərin riyaziyyatı qurulur.

ORTA ƏSRLƏR VƏ İNTİBAH DÖVRÜ

ORTA ƏSRLƏR HİNDİSTANI

Artıq b.e.ə. *III* əsrin ortalarında Hind çayının vadilərində inkişaf etmiş sivilizasiya mövcud idi. O dövrün bilikləri haqqında arxeoloji qazıntıların nəticələri əsasında mülahizə yürütmək olar. Məsələn, qazıntılar zamanı üstündə bölgülər olan xətkeş və dünyada ən qədim kubşəkilli oyun zərləri tapılmışdır. Zərlərin hər tərəfində çalalarla 1-dən 6-ya qədər rəqəmlər qeyd edilmişdir. O dövrdə tacirlər müxtəlif ölçülü çəki daşlarından istifadə edirdilər. Arxeoloqlar çoxlu sayda həndəsi fiqurlara rast gəlmişlər. Çevrəni qurmaq üçün hindlilər, çox güman ki, müasir pərgəra oxşayan alətdən istifadə edirdilər.

Bir çox xüsusiyyətlər Hind vadisinin sivilizasiyasını digər qədim – Misir və Çayarası ölkələrinin mədəniyyəti ilə yaxınlaşdırır. Hər yerdə eyni problemlər meydana çıxırdı: sarayların, məbədlərin, yaşayış evlərinin, buğda anbarlarının, hərbi tikililərin tikintisi zamanı hesablamalar aparmaq, ölçüləri müəyyən etmək, material və ərzaqların kəmiyyətini nəzərə almaq, bir sözlə, bənzər riyazi məsələləri həll etmək lazım gəlirdi.



Pulisa · Siddxanta

Bizim eradan əvvəl *II-I* əsrlərdə dini-fəlsəfi kitablar – vedalar meydana çıxdı. Veda ədəbiyyatının bir bölməsi "Şulba-sutra" ("Kəndir qaydaları") adlanır. B.e.ə. *VII-V* əsrlərdə tərtib edilmiş bu traktat qurban səcdəgahlarının və məbədlərin tikintisində istifadə edilən kəndirin köməyi ilə ölçmə qaydalarından ibarətdir.

Yeni eranın ilk əsrlərində astronomiya və riyaziyyata aid əsərlər – siddxantlar ("təlimlər") meydana çıxır. İlk sidxantlarda göstərilmiş faktlar qədim yunanlardan mənimsənilmişdirlər. "Pulisa-siddxanta" əsərini İsgəndəriyyə astronomu Paulosun adına yazırlar. "Romaka-siddxanta" sərlövhəsi mənbənin yunan mənşəli olduğunu göstərir. (Şərqi Romanın sakinlərini adətən romeya adlandırırdılar). Siddxantlarda bəzi yunan terminlərdən istifadə edilmişdir. Hindistan və Yunanıstan arasında elmi əlaqələr hələ antik dövrlərdən mövcud olmuşdur.

Orta əsrlərdə Ariabaxata (*V-VI* əsrlər), Braxmaqupta (*VII* əsr), Maqavira (*IX* əsr), Şridxara (*IX-X* əsrlər), Bxaskara (*XII* əsr), Nilakanta (*XV-XVI* əsrlər) kimi hind riyaziyyatçıları və astronomları yaşayıb yaratmışlar.



Ariabaxata (475-?)



Bxaskara (1114-1185)



Braxmaqupta (598-660)

Hindlilərin traktatlarının böyük əksəriyyəti müxtəlif ləhcələrdə danışan alimləri birləşdirən elmi dildə – sanskrit dilində yazılmışdır. Əsərlərin bir çoxu qaydaların daha tez əzbərlənməsinin mümkünlüyü üçün nəzm formasında yazılmışdır. Elmi mətnlər əsasən hər bir qaydanın hərtərəfli aydınlaşdırıldığı ətraflı şərhlərlə müşayiət edilirdi.

HİNDİSTAN SAYI

Qədim dövrlərdən Hindistanda onluq say sistemi tətbiq edilirdi. Təkliklər üçün xüsusi işarələr mövcud idi, onluq və yüzlükləri həmin rəqəmlərlə, amma digər mövqedə yazırdılar. Rəqəmlərdən başqa ədədlərin həmçinin sözlü ifadəsi də var idi. Beləliklə, sıfırı "boş", "səma" və ya "dəlik"; 1-i – tək əşyaların adı ilə "Ay", "Yer"; ikini – cüt əşyalarla "əkizlər", "gözlər", "burun dəlikləri", "dodaqlar" və s. ifadə edirdilər.

Məhz Hindistan mövqe nömrələnməsi öyrəşdiyimiz say sisteminin təməlidir. Hindlilər bu nömrələməyə əsaslanan riyazi əməllərin qaydalarını (ilk dəfə onları Ariabxata tətbiq etmişdir) işləyib hazırlayırlar. Onlar toplamağı, çıxmağı, vurmağı, bölməyi, ədədləri kvadrata, kuba yüksəltməyi, kvadrat və kub köklərini çıxarmağı bilirdilər. Avropalılar 1-dən 9-a qədər olan rəqəmləri, ərəblərdən mənimsədikləri üçün ərəb rəqəmləri adlandırırlar. Amma ərəblər bu ədədləri hind rəqəmləri, onluq sisteminə əsaslanan hesabı isə hind hesabı adlandırırlar.

Hindlilərin riyazi qaydaları müasir məktəblilərin öyrəndiyi qaydalardan o qədər də fərqlənmir. Bxaskara vurma əməliyyatını belə təsvir etmişdi: "Eyni mövqelərdə duran ədədləri düzünə və tərsinə topla" (düzünə toplamada təkliklərdən başlayır, tərsinə qaydada yüksək mərtəbə vahidlərindən). Çıxma əməlini Bxaskara belə müəyyən etdi: "Eyni mövqelərdə duran ədədləri düz və tərs qaydada çıx". Kəsrlərin toplama, çıxma və vurma qaydaları isə belədir "Kəsrləri eyni məxrəcə gətirdikdən sonra surətləri topla"; "Kəsrləri eyni məxrəcə gətirdikdən sonra surətlər arasında fərqi götür"; "Məxrəclərin hasilinə bölünmüş surətlərin hasili iki və ya daha çox kəsrin vurulmasının nəticəsidir".

VII əsrdən başlayaraq hind alimləri mənfi ədədlərdən istifadə edirdilər. müsbət ədədləri onlar "dxana" və ya "sva" ("əmlak"), mənfi ədədləri isə - "rina" və ya "kşaya" ("borc") adlandırırdılar. Braxmaqupta mənfi ədədlərlə aparılan riyazi əməllərin qaydalarını göstərərək, hələ ki, kvadrat kökün ikiqiymətliliyi haqqında heç bir şey demir, amma *IX* əsrdə Maqavira artıq ona işarə edir.

CƏBR VƏ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

Hind riyaziyyatçıları cəbrin inkişaf etmiş simvollar toplusunu yaratdılar. İlk dəfə olaraq Hindistanda məchul kəmiyyətləri, tənliyin hədlərini, dərəcələrini əsas riyazi əməlləri ifadə edən işarələr meydana gəldi. Simvolların əksər hissəsi sanskritin sözlərinin ilk hecaları idi. Məsələn, məchulu hindlilər "yavat-tavat" ("bir qədər") adlandıraraq, "ya" hecası ilə işarə edirdilər. Əgər bir neçə məchul olarsa, onlar müxtəlif rənglərlə ifadə edilirdi: qara – "kalaka", mavi – "nilaka", sarı – "pitaka" və bunları "ka", "ni", "pi" və s. ilə işarə edirdilər.

Hind riyaziyyatçıları cəbri hesablamalarla əlaqəli olan məsələlərin həllində böyük uğurlar qazanmışlar. Ariabxata bir məchullu xətti tənliyin həllinə aid məsələlər qoymuşdu. Maqavirada, Bxaskarada və başqa alimlərin əsərlərində bir neçə məchullu xətti tənliklər sisteminin həlli ilə bağlı məsələlər var. Maqaviranın məsələlərindən biri: "9 limonun və 7 meşə almasının qiyməti 107; 7 limon və 9 meşə almasının qiyməti 101-dir. İndi isə riyaziyyatçı, mənə limon və meşə almasının qiymətini söylə". Məsələ iki məchullu iki xətti tənlik sisteminə gətirib çıxarır:

$$\begin{cases} 9x + 7y = 107, \\ 7x + 9y = 101. \end{cases}$$

Maqaviranın göstərdiyi həll üsulu, müasir, əmsalları bərabərləşdirmənin köməyi ilə həll (cəbri toplama) üsulundan seçilmir.

Bxaskara belə bir məsələ təklif edir: "Bir nəfərin 300 sikkə və 6 atı var; digərinin 10 belə atı olsa da, onun 100 sikkəsi çatışmır. Amma hər ikisi eyni dərəcədə zəngindir. Atın qiyməti nə qədərdir?". Şərtlər aşağıdakı kimi ifadə edilir

$$6x+300=10x\cdot100.$$

Buradan Bxaskara atın 100 sikkə olduğunu tapır.

"Şulba-sutra" əsərində $ax^2 = b$, $ax^2 + x = b$ şəklində kvadrat tənliklər artıq var idi. Amma onların ilk dəfə həllinə biz Ariabxatda rast gəlirik. Amma bu məsələlər mürəkkəb faizlərə və ədədi silsilənin hədlərinin tapılmasına aid idi. Bxaskara tam kökləri sadə çevirmələrin köməyilə tapdığı xüsusi seçilmiş üçüncü və dördüncü dərəcəli tənlikləri nəzərdən keçirir.

Hind riyaziyyatçıları astronomiyaya aid məsələlərdə meydana çıxan qeyri-müəyyən tənlikləri asanlıqla həll edirdilər. Rasional kökləri axtaran Diofantdan fərqli olaraq, hindlilər qeyri-müəyyən tənliklərin tam müsbət ədədlərlə həll üsulunu verdilər. İki məchul həddi olan $ax+b=cy$ xətti tənliyi Ariabxat verir, amma bu haqda daha ətraflı öz əsərlərində Braxmaqupta və Bxaskara yazır.

Hind riyaziyyatçılarının ədədlər nəzəriyyəsində uğurunun zirvəsi – iki dərəcəli iki məchullu $ax^2 + b = y^2$, (burada a – tam ədədin kvadratına bərabər olmayan tam ədəddir) qeyri-müəyyən tənliyin müsbət tam həllərinin tapılmasıdır. Braxmaqupta və Bxaskara nümunələrdə bu tənliyi indi tsiklik adlanan üsulun köməyi ilə izah edərək nəzərdən keçirirdilər. Sonralar Avropada P.Ferma, L.Eyler, J.L.Laqranj da bu tənliklə məşğul olmuşdur. 1769-cu ildə Laqranj tərəfindən icad edilmiş həll üsulu hind üsuluna yaxın idi.

Ədədi və həndəsi silsilələr hind riyaziyyatında görkəmli yer tuturdu. Bəzi məsələlər çox məşhurdur, məsələn şahmatın icadına görə verilən mükafat, vuruğu 2 olan həndəsi silsilənin cəmini tapmaq məsələsi. Ədədi sıraların cəmi bir çox hind riyaziyyatçılarını maraqlandırırdı ("Ədədi sıralar" məqaləsinə bax). Ariabxata üçbucaqlı ədədlər, natural ədədlərin kvadratları və kubları sırasının cəmlənməsi qaydalarını, Maqavira isə ədədi silsilənin hədlərinin kvadrat və kub sırasının cəmlənməsi qaydalarını göstərirdi.

Hindlilər kombinatorikaya böyük maraq göstərirdilər. Məsələn, Maqaviranın misalını göstərək: "Dostum, brilyant, sapfir, zümrüd, mərcan və mirvaridən hazırlanmış müxtəlif boyunbağıların sayını de". Şridxara isə başqa bir misal göstərir: "Aşpaz altı fərqli dada malik yemək hazırlayır: istiotlu, acı, ağız büzən, turş, duzlu, şirin. Dostum, müxtəliflikərin ümumi sayını de".



HƏNDƏSƏ

Hind riyaziyyatçılarının həndəsə sahəsində bilik və ixtiraları, cəbr, hesab və ədədlər nəzəriyyəsi sahəsində olan uğurlarından daha böyükdür. Hindistanda həndəsəyə dair xüsusi əsərlər yox idi, bu məlumatlar cəbri traktatlarda və ya astronomiyaya dair traktatların hesab bölməsində verilirdi.



Hind manuskripti.
Bxaskaranın əlyazmasının surəti. XVI əsr

Həndəsi teoremlər isbatsız verilirdi. Adətən bu "bax" yazısı ilə verilmiş çertyojlar olurdu. Yalnız nadir hallarda onu qısa izahlar müşayiət edirdi. Yəqin ki, izahlar şagirdlərə şifahi verilirdi. Həndəsi məsələlərdə suallar adətən hesablamalara, nadir hallarda qurmalara dair olurdu.

Həndəsə sahəsində hindlilərin ilkin bilikləri səcdəgah və məbədlərin tikilişində rəhbər tutulan "Şulba-sutra" əsərində verilmişdi. Məbədləri bir sıra qaydalara uyğun olaraq ucaldırdılar: binanın təməli müəyyən fiqur olmalı və işığa görə istiqamətləndirilməlidir. Bunun üçün düz bucaq, tərəfləri tam ədəd olan kvadrat, düzbucaqlı üçbucaq tikmək bacarığı tələb olunurdu. Hindistanlılar düzbucaqlı ilə müadil kvadratı, sahəsi verilən kvadratın sahəsinin misli olan kvadratı qurmağı bacarırdılar. Qurmaların istinad nöqtəsi Pifaqor teoremi idi. Bxaskara bu teoremin isbatı olaraq "Bax" yazılı çertyoj verirdi.

TRİQONOMETRİYA

Hindistanda astronomiyanın inkişafına çox güman ki, hindlilərin hesablama qaydalarına çevirdikləri Ptolomeyin əsərləri təsir göstərmişdir. Onların əsas uğuru vətərləri sinuslarla əvəz edərək düzbucaqlı üçbucaqların bucaqları ilə bağlı müxtəlif funksiyaları tətbiq etmə imkanını əldə etmələridir. Beləliklə də, Hindistanda triqonometrik kəmiyyətlər haqqında elmin – triqonometriyanın əsası qoyuldu.

Hind alimləri müxtəlif triqonometrik münasibətlərdən, hətta müasir formada aşağıdakı kimi ifadə olunanlardan belə istifadə edirdilər:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$
$$\sin\alpha = \cos(90°-\alpha),$$
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

Hindlilər həmçinin bucaqlar üçün n=2,3,4,5 olduqda $\sin n\alpha$, $\cos n\alpha$ düsturunu da bilirdilər:

Triqonometriya cədvəllər şəklində tərtib olunan astronomik hesablamalar üçün də vacibdir. Sinusların ilk cədvəli Ariabxatın "Surya-siddxante" əsərində verilmişdir. O, 3°45′ addımı ilə verilmişdir. Sonralar isə alimlər daha ətraflı cədvəllər vermişlər: məsələn, Bxaskara 1° addımı ilə sinusların cədvəlini göstərir.

XVI əsr Cənubi Hindistan riyaziyyatçıları sonsuz sıraların cəmlənməsi sahəsində çox böyük uğurlar əldə etmişlər. Çox güman ki, onlar bu tədqiqatlarla, π ədədinin daha dəqiq qiymətini tapmağa çalışdıqları zaman məşğul olurdular. Nilakanta sözlə arktangensin sonsuz qüvvət sırasına ayrılışı qaydasını göstərir. Anonim "Karanapaddaxati" ("Hesablama texnikası") əsərində sinus və kosinusun sonsuz qüvvət sıralarına ayrılışı qaydaları verilmişdir. Demək lazımdır ki, Avropada buna bənzər nəticələri yalnız *XVII-XVIII* əsrlərdə əldə etdilər. Belə ki, 1666-cı ildə İ.Nyuton sinus və kosinusu, 1671-ci ildə J.Qreqori və 1673-cü ildə isə G.Leybnits arktangensi sıraya ayırmışdır.

VIII əsrdə Yaxın və Orta Şərqin alimləri hind riyaziyyatçılarının və astronomlarının əsərləri ilə tanış oldular və onları ərəb dilinə tərcümə etdilər. *IX* əsrin ortalarında Orta Asiya alimi əl-Xarəzmi "Hind sayı haqqında" əsər yazdı. Ərəb traktatları latın dilinə tərcümə edildikdən sonra hind riyaziyyatçılarının bir çox ideyaları əvvəl Avropa, daha sonra dünya elminin əmlakına çevrildi.

ƏRƏB ŞƏRQİNİN ÖLKƏLƏRİ

622-ci ildə Məhəmməd Peyğəmbər Məkkədən hicrət edərək İslamı yaymağa başladığı zaman, hələ heç nə yeni dinin və İslam dövlətçiliyinin gələcək qələbəsindən xəbər vermirdi. Amma artıq *VIII* əsrdə ərəb xəlifələri Pencabın və Xarəzmin ərazisini fəth etdilər. İlk xəlifələr sivil mədəniyyətə və elmə, o cümlədən də riyaziyyata o qədər də rəğbət bəsləmirdilər. Amma Abbasilərin - əl-Mənsur və Harun ər-Rəşidi kimi xəlifələrin növbəti nəsli elmə dərin hörmət bəsləyərək, Bağdada yadelli alimləri dəvət etdilər. *IX-X* əsrlərdə Evklidin, Arximedin, Apolloniyin, Heronun, Ptolomeyin və Diofantın əsas əsərləri ərəb dilinə tərcümə edildi.



Əl-Xarəzmi
(787-850)

VIII-IX əsrdə Ərəb xilafətində artıq onluq mövqeli say sistemindən istifadə edilirdi. "Hind sayı haqqında" traktat – yeni hind nömrələmə sistemi haqqında ilk ərəb əsəri idi. Onu görkəmli alim Məhəmməd bəy Musa Əl-Xarəzmi təxminən 825-ci ildə yazmışdır. *XII* əsrdə kitabı latın dilinə tərcümə etdilər. Avropaya onluq sistem ərəblərdən gəldiyi üçün, onu ərəb sistemi adlandırmağa başladılar. Onluq ədədlərlə əməllər qaydası "alqoritm" adı aldı. Bu söz əl-Xarəzminin latın dilində olan adından irəli gəlib.



Kitabi əl-cəbr vəl-mükabala

Ərəb Şərqinin alimləri əsasən astronom idilər. *IX* əsrdən Ərəb xilafətində özünəməxsus riyazi mədəniyyət yaranmağa başladı. Burada yunan riyaziyyatının üsulları astronomik mə-

sələləri həll etmək üçün tətbiq edilirdi. Məhz astronomiyanın tələbləri cəbr və triqonometriyanın fırtınalı inkişafına vüsət verdi.

Cəbrin elm kimi əsasını əl-Xarəzminin "Kitabi əl-cəbr vəl-mükabala" (Bərpa və qarşıqoyma haqqında kitab) əsəri qoydu. "Əl-cəbr" sözü Ərəb Şərqinin riyazi ədəbiyyatında mənfi həddi hər iki hissədə müsbət ədəd almaq üçün, tənliyin bir tərəfindən digər tərəfinə keçirilməsi deməkdir; elmin – cəbr adı da elə buradan yaranıb. "Əl-mukabala" "müqayisə", "qarşıqoyma" kimi tərcümə edilir; riyaziyyat baxımından tənliyin hər iki tərəfində oxşar hədlərin islahıdır. Kvadrat, kub və qeyri-müəyyən tənliklərin həlli, üçüncü, dördüncü və beşinci dərəcəli köklərin tapılması ərəb cəbrinin əsas müvəffəqiyyəti oldu. Tənliklərin həllində cəbri və həndəsi üsullardan istifadə edirdilər.

Əl-Xarəzminin riyazi traktatı, məsələn, mirasın bölünməsi kimi praktiki məsələlərin həlli üçün rəhbər tutulan bir əsər kimi tərtib edilmişdir. (Şəriət qanunlarına görə dünyasını dəyişənin çoxsaylı ailə üzvlərinin, qohumluq dərəcəsinə görə öz miras paylarını almasını nəzərdə tutan mürəkkəb bir sistem mövcud idi).

Əl-Xarəzmi xətti və kvadrat tənlikələrin təsnifatını və həlli yollarını vermişdir. Kvadrat tənliyin ümumi həllini o nəzərdən keçirmirdi. Birincisi, onu heç bir müsbət kökü olmayan tənliklər maraqlandırmırdı. İkincisi, o tənlikləri elə yazmağa çalışırdı ki, onun hədləri çıxılan deyil, toplanan olsun. Buna görə də əl-Xarəzmi cəbri islah yolu ilə başqa tənliklərin də gətirildiyi altı növ tənlikləri nəzərdən keçirirdi:

1) $ax^2 = bx$ (əl-Xarəzminin terminologiyasında "kvadratlar köklərə bərabərdir" kimi səslənir);

2) $ax^2 = c$ ("kvadratlar ədədə bərabərdir")

3) $ax=c$ ("köklər ədədə bərabərdir")

4) $ax^2 + bx = c$ ("kvadrat və köklər ədədə bərabərdir")

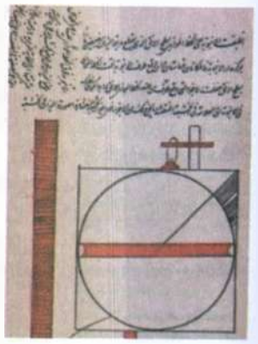
5) $ax^2 + c = bx$ ("kvadrat və ədəd kökə bərabərdir")

6) $bx + c = ax^2$ ("köklər və ədədlər kvadrata bərabərdir")

Burada $a,b,c>0$.

Tənliyin kökünün tapılmasının cəbri yolundan başqa, əl-Xarəzmi həndəsi yol da təklif edirdi. Məsələn, dördüncü növə aid olan $x^2 + 10x = 39$ (*) tənliyinin incə həndəsi həlli verilmişdir.

Tərəfləri x ilə işarə edilən kvadrat çəkilir. Belə kvadratın sahəsi x^2-na bərabərdir. Kvadratın tərəfləri üstündə tərəfləri x və 10/4 olan düzbucaqlı, künclərdə isə tərəfləri 10/4 dörd kvadrat qurulur (şəkil 1). Bu zaman qurulan hər bir düzbucaqlının sahəsi $\frac{10}{4}x$, sahələrinin cəmi isə $10x$ olacaq. Hər bir dörd künc kvadratının sahəsi $100/16=6\frac{1}{4}$, onların cəmi isə $100/4=25$. Əgər kvadratın (x^2) və dörd düzbucaqlının (10x) sahəsini toplasaq, o zaman (*) tənliyinin sol tərəfində olan ifadə alınacaq, yəni sahələrin cəmi 39 olur. Buradan böyük kvadratın sahəsi 39+25=64, onun tərəfləri isə 8 olur. Eyni zamanda çertyoja əsasən böyük kvadratın tərəfini $x+2\cdot10/4$ kimi ifadə etmək lazımdır. Onda $x+2\cdot10/4=8$ bərabərliyindən $x=3$ alırıq.



Əl-Kərəcinin əsəri

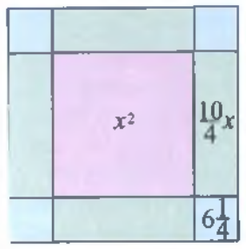
Digər ərəb riyaziyyatçısı, əl-Kərəci (?-1016), tənliklərin həll edilməsinin cəbri yoluna üstünlük verirdi. Onun ən böyük xidməti məchulun sonsuz sayda müsbət və mənfi qüvvətlərini və çoxhədlilər üzərində riyazi əməliyyatlar tətbiq etməsidir (düzdür, bölmə zamanı çoxhədlini birhədliyə bölməklə kifayətlənirdi). Amma əl-Kərəciyə həndəsi üsullar da yad deyildi. Natural ədədlərin kublarının cəmi düsturunun incəliklə verilmiş cəbri-həndəsi isbatını göstərək (əl-Kərəcidə $n=10$):

$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2$.

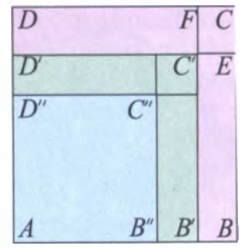
Tərəfləri $1+2+3+4+...+n$ olan $ABCD$ kvadratı (şəkil 2) nəzərdən keçirilir. Kvadratda $DD' = BB' = n$ olmaqla, $BB'C'D'DC$ küncəvari zolaq ayrılır. Onun sahəsi, $D'DCE$ və $B'FCB$ düzbucaqlıların sahələri cəmi ilə, $BC'FCE$ sahəsinin fərqi kimi aşağıdakı olar:



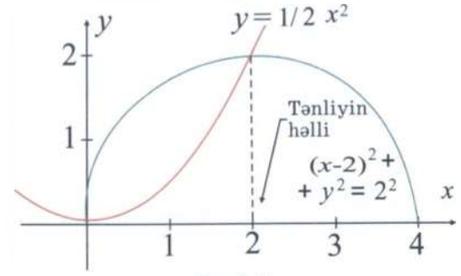
Əl-Kərəci



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

$2n(1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) - n^2$.

Ədədi silsilənin cəmi düsturuna görə $1 + 2 + 3 + 4 + ... + n = n(n + 1) / 2$ olduğundan, alırıq:

$$2n(1 + 2 + 3 + 4 + ... + n) - n^2 = 2n\frac{n(n+1)}{2} - n^2 = n^3.$$

Daha sonra $AB'C'D'$ kvadratına baxılır. Burada $B'B''C''D''D'C'$ küncü göstərilir, belə ki, $D'D'' - B'B' = n - 1$. Analoji qayda ilə bu küncün sahəsinin $(n-1)^3$ olduğunu alırıq. Bu qayda ilə davam edərək, tərəfi 1 olan kvadrata çatırıq, verilmiş kvadratın sahəsi isə bütün baxılan künclərin sahələri cəmindən ibarət olur. $1^2 = 1^3$ olduğundan alırıq:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + ... + n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Məşhur şair və riyaziyyatçı Ömər Xəyyam yunan elminin ənənələrini davam etdirib, tənliklərin həllini həndəsi yolla, əyrilərin köməyilə tapırdı.

O, məsələn $x^3 + 4x = 16$ tənliyini aşağıdakı kimi həll edirdi. Ömər Xəyyam müəyyən etmişdi ki, bu tənliyin x kökü həm də

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4x \\ x = 2y \end{cases}$$

tənliklər sistemini ödəyir.

Sistemin I tənliyi $(x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4$ şəklinə gətirmək olar. Bu isə $(x-2) + y^2 = 2^2$ ilə eyni güclüdür. Axırıncı tənlik müstəvidə mərkəzi (2; 0) nöqtəsində yerləşən, radiusu 2 olan çevrənin tənliyidir. Sistemin II tənliyi isə $y = \frac{1}{2}x^2$ parabolasının tənliyidir. Beləliklə, x məchulu çevrə ilə parabolanın kəsişmə nöqtəsinin absisi (şək. 3) olur.

Ərəblərdə cəbri məsələlər və onların həlli sözlə verilirdi. Məchulların və parametrlərin işarəsi yox idi, tənliklərin və həllərin izahı mürəkkəb və çətin, əlverişsiz olurdu.



Ömər Xəyyam (1048-1112)

Ərəb alimlərinin həndəsi tədqiqatları, xüsusilə də Evklidin paralellər haqqında olan beşinci postulatının isbat edilməsi sahəsində işləri çox vacib idi. Əlbəttə ki, beşinci postulatı isbat etmək cəhdi uğursuzluğa düçar idi, amma onlar Avropa riyaziyyatçılarının tədqiqatlarına vüsət verdi, nəticədə *XIX* əsrdə qeyri-Evklid həndəsəsinin kəşfinə səbəb oldu ("Lobaçevskinin həndəsəsi" məqaləsinə bax). Bundan başqa yığılan həndəsi faktların, daha sonralar beşinci postulata ekvivalent olduqları qəbul edilmişdir. Belə təkliflərdən biri Bağdad riyaziyyatçısı Sabit ibn Kurrün (836-901) beşinci postulatın isbatı üçün istifadə etdiyi paraleloqram və düzbucaqlının mövcudluğunun iddiasıdır. Ömər Xəyyam isə "Əgər iki düz xətt bir-birinə yaxınlaşırsa, mütləq kəsişməlidirlər" iddiasından çıxış edərək, beşinci postulatı isbat edirdi.

Ərəb riyaziyyatçıları ilk dəfə olaraq bütün triqonometrik düsturları öyrənərək $10'$ addımı ilə, həm də $1/60^4$ dəqiqliyilə bucaqların sinusları cədvəlini tərtib etdilər. Triqonometrik funksiyaların köməyi ilə onlar üçbucaqların tərəfləri və bucaqları arasındakı münasibətləri tədqiq edirdilər. Amma bu üçbucaqlar müstəvidə deyil sferanın səthindədir. Əvvəllər bu məsələlərlə sferik triqonometriyanın yaradıcıları – Menelay (*I* əsr) və Klavdiy Ptolomey (*II* əsr) məşğul olurdular.

ORTA ƏSRLƏR AVROPASI

Antik riyaziyyatın yaradıcılarının – Pifaqorun, Evklidin, Arximedin adlarını hamı tanıyır. İndisə heç olmasa bir orta əsrlər Avropa riyaziyyatçısının adını xatırlayın, siz uğursuzluğa düçar olacaqsınız. Səbəb isə (*V-XV* əsr) orta əsrlərdə Avropada dəyərləri qiymətləndirmənin ayrı, antik dövrdən fərqli sisteminin formalaşmasıdır. Onun əsası artıq elmi deyildi. İnsanların fikirləri Allaha, kilsəyə, ruhun mükəmməl olmasına yönəlmişdi. O dövrün görkəmli alim və təfəkkür sahiblərinin dərinliyinə görə yunan nümunələrinə bənzər riyaziyyat və onun rolu haqqında mülahizələri yox idi.

Amma yenə də orta əsrlər Avropasında riyaziyyatı unutmamışdılar. *VI* əsrdə sonuncu savadlı romalılardan olan Flaviy Kassiodor Yaradanı həndəsə alimi simasında verməyə cəsarət etmişdir. Onun "İlahi və insani elmlərdə nəsihətlər" traktatında həndəsə hissəsi azad tərcümədə belə səslənir: "İndi isə həndəsəyə keçək. Qədimlərin sözlərinə görə Yupiter, öz əməllərində həndəsə alimi kimi hərəkət edir. Bilmirəm bu, tərifə və ya tənqidə layiqdir, amma onlar deyir ki, Yupiter qum ilə örtülmüş həndəsə lövhəsinin üzərində fiqurlar çəkən həndəsə alimi kimi davranır. Bu sözləri Yaradana aid etsək, həqiqətə uyğun olar – axı müqəddəs Üçlük, əgər belə demək olarsa, öz yaratdıqlarına müəyyən forma və görkəm verir. Burdan belə bir nəticə çıxır ki, düzgün yerləşən və tamamlanmış formaya malik olan hər şey bu təlimlə əlaqədardır".

Görünür məhz bu mülahizələr orta əsrlərin bəzi rəssamlarını Yaradanı nəhəng pərgar, bəzən isə xarrat aləti ilə təsvir etməyə sövq etmişdir. Amma belə miniatürlər çox az idi. Rəssamların bir çoxunun Yaradanın əlinə hansısa bir aləti verməyə cəsarətləri çatmırdı, axı bu onun imkanlarını məhdudlaşdırmaq demək idi.

ERKƏN ORTA ƏSRLƏRİN RİYAZİYYAT TRAKTATLARI

Erkən orta əsrlərdə (*XII* əsrə qədər) riyaziyyatın inkişafı antik riyazi mədəniyyətin mənimsənilməsi ilə başlayırdı. Kilsələrdə Martsiana Kapellanın "Filologiya və Merkurinin izdivacı" (*V* əsr) ensiklopedik traktatını, eləcə də Anisiy Manliy Torkvat Severin Boetsiyanın (480-524) əsərlərini dəfələrlə köçürərək öyrənirdilər.



Anisiy Manliy Torkvat Severin Boetsi

İki fundamental yunan traktatı Evklidin "Başlanğıclar" və Herasdan olan Nikomaxın (*I-II* əsrlər) "Hesabda nəsihətlər" əsərlərinin mükəmməl tərcüməsi – stilist, antik elmin dərin bilicisi olan Boetsinin qələminə məxsusdur. "Başlanğıclar" əsərinin tərcüməsi tam deyil. Çoxsaylı mənbələrdən Boetsi "Musiqidə məsləhətlər" adlı latın kompilyasiyasını (Kompilyasiya – başqalarının əsərlərindən götürülüb yenidən işlənmiş fraqmentlərdən ibarət əsərdir) da tərtib etmişdir. Bu əsərdə yunan ənənələrinə əsasən musiqi riyazi təlim kimi verilirdi.

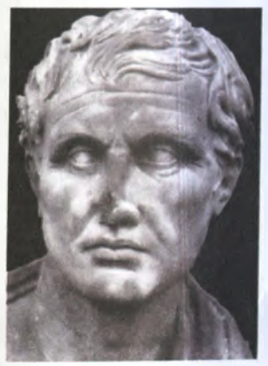


Ovidiy



Horasiya

VIII əsrin sonunda firənglərin kralı *I* Karl diqqətini öz vətənində elmlərin öyrənilməsi sahəsindəki acınacaqlı vəziyyətə yönəltdi. Özünəməxsus enerji ilə Karl təhsil islahatlarına, ilk olaraq da, ən yaxşı latın mətnləri əsasında İncili və dini kitabların tərtibini əmr etdi. Belə mətnlərin, həmçinin latın qrammatikasına dair dərsliklərin axtarışı zamanı alimlər antik müəlliflərin əlyazmaları ilə qarşılaşırdılar. Onlar Vergiliy və Horasiyanın, Ovidiy və Siseronun əsərlərinə heyran qalırdılar. *IX* əsrdən başlayaraq (bu dövrü "karl intibahı" adlandırırlar) məşhur romalıların əsərləri kilsə kitabxanalarının rəflərində Müqəddəs yazılar və Kilsənin müqəddəs atalarının əsərləri ilə yanaşı dururdu. Boetsinin hesaba aid traktatı çox məşhur idi. Boetsinin "Hesab"ının 150-yə yaxın köçürülmüş surəti məlumdur. Maraqlıdır ki, *IX* əsr zəngin illüstrasiyalarla bəzədilmiş əlyazmalarından biri Karlın nəvəsi – Daz Karla məxsus idi. O, əlyazmanın kənarlarında qeydlər etmişdir.



Vergiliy



Daz Karl

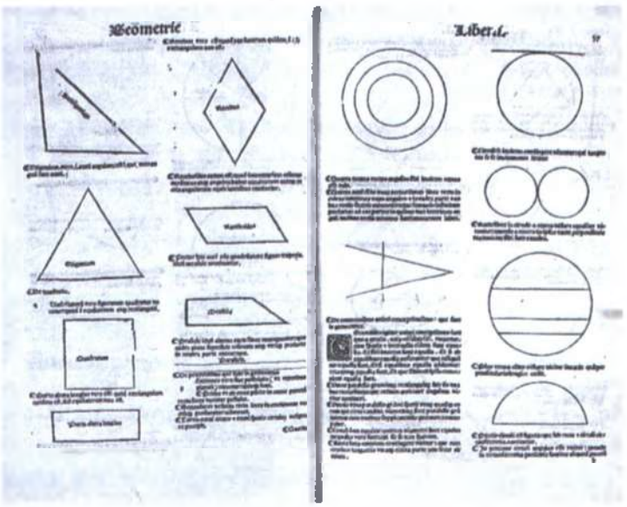
Amma Evklidin "Başlanğıclar" əsərinin tərcüməsini başqa tale gözləyirdi. Bu traktatın böyük bir hissəsi hələ erkən orta əsrlərdə sirli şəkildə diqqət mərkəzindən itdi. İlk dörd kitabdan götürülmüş qalan hissə isə tərif, postulat, aksiomları sərbəst əsər kimi deyil, florilegiyalar (florilegus – lat. "çiçək nektarı toplayan") üçün əsas kimi istifadə edirdilər. Florilegiya – mətnin maraqlı fraqmentlərindən yığılmış mozaikadır. *IX* və *XI* əsrlərdə tərtib edilmiş ən məşhur iki florilegiya Boetsinin adı ilə əlaqələndirilir, amma çətin ki, yarısı onun qələminə məxsusdur. Əslinə qalsa, belə hallar – antik və orta əsrlər üçün adi haldır. Onların yaratdıqları əsərin gələcək nəsillərə çatacağına ümid etmədikləri üçün, bəzi müəlliflər öz əsərlərinə dahi adamların adı ilə imza qoyurdular. Beləliklə, bizim dövrə Aristotelin, Avqustinin adı ilə imzalanmış əsərlər gəlib çatıb.

Orta əsrlər həndəsəsində yunan riyaziyyatına xas olmayan halla, Boetsi ləqəbi ilə yazılmış əsərlərə rast gəlirik. Yüksək ellin elmi gözlənilmədən yunanların riyaziyyat çərçivəsindən çıxardıqları yerölçmə mövzulu mətnlərin arasına düşür. Evklidin həndəsəsi öz ciddiliyini itirir, teoremlərin isbatları qeyb olur, onların yerini sahələrin formalarına (dairəvi, üçbucaqlı, kvadrat və s.) olan istinadlar tutur. Qədim yunan alimlərinin əks çıxdıqları – elm sahəsində iyerarxiyanın dağılması yerinə yetdi. Elmin ciddiliyi və saflığı ləkələndi.

Bunun nəticəsi isə həndəsə üçün faciəvi oldu. Məsələn, düz xəttin sonsuza qədər uzadılması haqqında Evklidin ikinci postulatını psevdo Boetsiy aşağıdakı kimi başa düşürdü. Əgər xətti hansısa bir sahənin sərhəddi kimi nəzərə alsaq, sonsuz olması mümkün deyil, bu isə Evklidin postulatına ziddir. Erkən orta əsrlər həndəsə alimləri hesab edirdilər ki, postulatda söhbət düz xətt üzrə davamından deyil, yana davamından gedir və öz əlyazmalarında bunu qapalı əyri ilə illüstrasiya edirdilər.

"XII ƏSR RENESSANSI" VƏ HƏNDƏSƏ

Qədim yunan əlyazmalarının Qərbi Avropada tərcüməsinin yeni dalğası *XII* əsrə təsadüf edir. Bu dövrü "*XII* əsr renessansı (intibah)" adlandırırlar. İri kafedral məktəblərin bazasında yaradılmış ilk Avropa universitetləri də məhz o zaman meydana çıxır. Orta əsrlər sənətkarlarının gildiyası kimi universitetlər də cəmiyyət və kilsə iyerarxiyalarının himayədarlığı altında idi və feodalların özbaşınalığından asılı deyildi. O dövrün ən məşhur universitetləri – Paris



Evklidin "Başlanğıclar"ının tərcüməsi. 1499-cu il



Hüqo Sen-Viktorski
Qədim kitab miniatürü

(Sorbonna) və Oksford, eləcə də Boloniya və Paduaniya universitetləri idi. İlk iki universitet fəlsəfə və riyaziyyatın öyrənildiyi ilahiyyat və "incəsənət" fakültələri ilə məşhur idi. *XII* əsrdə ilk dəfə "Başlanğıclar" əsərinin latın dilində tam tərcüməsi meydana çıxdı. Klassik mətnlərin barbar oxunuşu sona çatdı. Amma həndəsənin və praktiki fənlərin ümumilik ideyası qalaraq riyaziyyatın yeni bölməsinin – praktiki həndəsənin yaranmasına gətirib çıxardı.

Praktiki həndəsə üzrə traktatlarda sahələrin ölçülməsi problemləri tədricən yerini, əlçatmayan əşyalara qədər olan məsafənin ölçülməsinə (bu məsələlərin kökü Roma mənbələrinə çıxırdı) aid məsələlərə verirdi. Onların həlli üsulları Evklidin həndəsəsinin prinsiplərinə cavab verirdi. Bu traktatlardan ən məşhurları Hüqo Sen-Viktorskinin (?-1141), görkəmli italyan riyaziyyatçısı Fibonaççi adı ilə də tanınan Leonardo Pizalının, parisli riyaziyyatçı və saray münəccimi Domeniko de Klavazionun (*XVI* əsr) və Lionda işləyən tibb bakalavrı Nikola Şükenin (*XV* əsr) əsərləri idi.

Demək lazımdır ki, orta əsr maarifçilərinə praktiki həndəsənin incəlikləri çətinlik törədirdi. Teoremləri müşayiət edən çertyojları yadda saxlamaq lazım idi. Məhz bu çertyojlar, bir neçə səhifə latın mətnini əzbərləməyi, yaddaşa görə çertyoju çəkməkdən daha asan sayan tələbələr üçün maneə idi. Axı o zamanlar insanlar demək olar ki, həyatlarında iri miqyaslı plan və çertyojlar anlayışı ilə qarşılaşmırdılar. Tarixçilərin sözü ilə desək, onlar "təxminiliklər dünyasında" yaşayırdılar və dəqiq həndəsi fiqurları çəkməyərək, onların şifahi təsviri ilə kifayətlənirdilər. Evklidin "Başlanğıclar" əsərindən hansısa bir çertyojun daha etibarlı yadda saxlanılması üçün tələbələr onlara gülməli adlar qoyurdular, məsələn, "toyuq ayağı", "ulaq beli" və ya "tovuz quşu quyruğu".

Orta əsr qotik kilsələrin memarlarının və inşaatçılarının həndəsi bilikləri hansı mənbədən almaları sirr olaraq qalır, axı onlar universitetlərdə oxumamışdılar. Çox güman ki, memarlıq sirləri ustadan tələbəyə keçərək, ənənə kimi davam etdirilərək qorunurdu. Yəqin elə bu səbəbdən İntibah dövrünün zəngin olduğu memarlıq albomlarının o dövrə aid olan nümunələri gəlib çatmamışdır. Villar d`Onnekura məxsus memarlıq cızmaları olan albom istisna haldır. O, təxminən 1235-ci ilə aiddir. Burada qədim fransız dilinin pikardiya dialektində izahatlarla verilmiş çertyojlar çəkilmişdir. Villar d`Onnekuranın "həndəsəsinin" sirrini açmaq hətta memarlıq tarixçilərinə də asan olmadı.

ABAKDA RİYAZİYYAT

Orta əsrlərdə riyaziyyat elmi adlanmaq uğrunda mübarizəni artıq hesablama praktikası aparmağa başladı. Beləliklə də *X* əsrin sonundan hesab üzrə rəhbər sənəd sonradan Roma Papası II Silvester olan, rahib alim Oriyakalı Herbertin (940-1003) "Abak qaydaları haqqında" traktatı oldu.

Abak – bu sadə hesab aləti idi ("Hesabın dörd əməli" məqaləsinə bax). Onun necə göründüyünü təsəvvür etmək üçün rus sayğacını yada salmaq kifayətdir. Herbertin abak aləti bir az fərqlidir. O hesablama elementlərinin yerinə üzərinə 1-dən 9-a qədər rəqəmlərin yazıldığı jetonlardan istifadə edirdi. Abakın üzərində rəqəmləri yerləşdirərək, Herbert müxtəlif natural ədədləri, onluq sistemdə təsəvvür etdiyimiz kimi təsvir edirdi. Sadəcə sıfırın əvəzinə boş jeton qoyurdu.

Yeni abakın üstünlüyü onun üzərində vurma və bölmə əməlinin aparılması idi (köhnə Roma abakı əsasən toplama və çıxma əməlləri üçün yararlı idi). Abak üzərində hesablamanın rahatlığı yaddaşı maksimal dərəcədə yüngülləşdirməsi idi: hesablamalar demək olar ki, avtomatik aparılırdı, vurma və bölmə zamanı rəqəmləri yadda saxlamaq lazım deyildi. Ara nəticələri adətən mum lövhəyə yazırdılar və yaxud da barmaq kombinasiyaları ilə ifadə edirdilər. Qeyd etmək lazımdır ki, latın Qərbində barmaqlarda (9999 qədər) rəqəmlərin ifadəsinin inkişaf etmiş sistemi mövcud idi. Bu sistem barəsində Beda Dostopoçtenı (673-735-ci illər) Pasxa günlərinin hesablanmasına həsr edilmiş "Zamanın hesablanması haqqında" traktatında danışmışdı. Həmçinin romalı Viktorinin 457-ci ildə tərtib etdiyi vurma cədvəli də çox kömək edirdi.

Herbertin bu nişanlanmış jetonlarla abak üsulunun haradan ağlına gəlməsi sirr olaraq qalır. Bir orta əsr müəllifi, "Herbert abakı saratsiyalılardan (yəni ərəblərdən) oğurlayıb" kimi məlumat verir. Həqiqətən o, cavanlıqda bir müddət ispan markasında (ərəblərlə sərhəd ərazidə) olub. Amma o dövrdə ərəblərdə belə abakın olması barəsində sübut yoxdur.

Görkəmli riyaziyyatçı və yorulmaz kilsə-siyasi xadimi Herbert Oriyakalının adı ətrafında böyük sayda şayiə və əfsanələr gəzirdi. Onu hətta cadugərlik və iblislə təmasda günahlandırırdılar. Barbar əsrində vurma və bölməni, çox güman ki, buxar gücü ilə işləyən "danışan başları" və daha bir çox maraqlı əşyaları hazırlamağı bacaran insan haqqında böyük həvəslə əfsanələr uydururdular.

Daha bir önəmli ixtiranı Herbertin adına yazırlar (baxmayaraq ki, bu onun ölümündən sonra şöhrət tapmışdır). Bu "ritmomaxiya" (rəqəmlərin döyüşü) adlı stolüstü oyundur. Ritmomaxiyanın oyun sahəsi şahmat sahəsinə oxşayır. Oyun, rəqəmlər barədə sadə biliklərə əsaslanaraq, yeddi əsr ərzində rəqəmlərlə işləmə vərdişlərini aşılayaraq cəbrə giriş rolunu oynayırdı.

XII əsrin əvvəllərindən Avropada ərəblərdən mənimsənilmiş onluq say sistemi yayılmağa başladı. Amma universitet professorları ona qarşı maraq göstərmirdilər, üstünlüyü Pifaqor sayına və ya abak qaydalarına verirdilər. Hesab edilir ki, ərəb sayının rahatlığını ilk dəfə italyan tacirləri qiymətləndirib. Yeni say sistemi *XIV-XV* əsrlərdə İtaliyanın tacir mühitində, sənətkar şəhərlərində şöhrət tapır. Zəngin ticari ölkələrin tacirləri tez-tez smeta, maliyyə-qanun layihələri tərtib etməli, faiz hesablamalı olurdular. Onluq sistem tam olaraq Avropada, bahalı perqamentin əvəzinə üstündə hesablama aparma imkanı olan kağız meydana çıxanda yerini möhkəmləndirdi. Amma hətta kitab çapının inkişafı belə, abakda hesab aparmanı tamamən sıxışdırıb aradan çıxara bilmədi.

HƏRƏKƏT HAQQINDA ELM VƏ RİYAZİYYAT

Orta əsrlər təfəkküründün orijinal nailiyyətlərindən biri – hərəkətin riyazi nəzəriyyəsidir. *XII* əsrdən başlayaraq ərəb tərcümələrindən Avropaya tədricən Aristotelin ideyaları gəlməyə başladı. Baxmayaraq ki, Aristotelin özü riyazi metodların fizikada istifadəsinin əleyhinə idi, məhz onun ideyalarının latın dilində Qərbdə oxunmasından sonra hərəkət haqqında özünəməxsus bir elm meydana gəldi.



Nikola Orem
(1323-1382)

O, ciddi olaraq *XVI* əsrdə inkişaf etməyə başladı. Bu elmin iki xüsusiyyəti var idi. Həm Aristotel, həm də orta əsr alimləri hərəkət dedikdə, istənilən dəyişikliyi başa düşürdülər: rəngin və temperaturun dəyişməsindən tutmuş, əşyaların meydana gəlib itməsinə qədər. Bu səbəbdən eyni məntiqi-riyazi quruluş, belə deyək, tənasüb nəzəriyyəsi, fəzada yerdəyişmə, insan orqanizmində "istilik" və "soyuğun" paylanması (o dövrdə bu nəzəri tibbin əsası idi) və hətta mələk və insanlardan cansız təbiətə qədər ilahi mükəmməlliyin dərk edilməsinə dair "nəhəng məişət zənciri" kimi fərqli məfhumların təsviri üçün istifadə edilirdi.

Orta əsrlər hərəkət nəzəriyyəsinin digər xüsusiyyəti təbiət üzərindəki müşahidələrin həlledici rol oynamaması idi. Adətən onlar fikirlərə təkan olurdu, daha sonra isə

fikir tamamən məntiqə doğru gedirdi. Tədqiqatın bu növü sxolastika (yunan dilindən tərcümədə "sxolastikos" – "məktəb", "elm" deməkdir) adlanır.

Hərəkətin riyazi modelləri astrologiya ilə mübarizədə istifadə edilirdi. Beləliklə, fransız sxolastik Nikola Orem (1323-1382), fərz edirdi ki, əgər iki luminariy götürsək, onların sürətinin nisbətinin göstəricisinin rasional ədəd olma ehtimalı həddən artıq azdır. Bu nisbət irrasional ədədlə ifadə olunduğu üçün, iki luminariy səmada öz çıxış vəziyyətini təkrar etmədiyi üçün astrologiya dəqiq elm ola bilməz.

Hərəkətin riyazi nəzəriyyəsi tam olaraq ingilis sxolastı Riçard Suaynsxedin "Hesablamalar kitabı" və Oremin əsərlərində verilmişdir. İdeya əşyaların "keyfiyyət"ini, əsasən də hərəkətinin sürətini zaman və ya məsafəni göstərən xəttə perpendikulyar düz xətli parçalar ilə təsvir etməkdən ibarətdir. Əgər üfüqi xətdə zaman qeyd edilirdisə, sürətin zamandan asılılığını göstərən müasir şəkillərə uyğun bir təsvir yaranırdı. Cismin müəyyən zaman kəsiyində keçdiyi yolu zaman oxunda qurulmuş fiqur ifadə edirdi. Məsələn, sabit sürətlə hərəkətdə bu, düzbucaqlı idi, bərabəryeyinləşən və ya bərabəryavaşıyan hərəkətdə düzbucaqlı üçbucaq və s. idi. Alınan fiqurları riyazi nöqteyi-nəzərdən tədqiq edirdilər.

Orem sübut edirdi ki, bərabəryeyinləşən hərəkətdə düzbucaqlı üçbucağın sahəsi, üçbucaqdan iki dəfə alçaq olan düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir. Mexanika nöqteyi-nəzərindən bu bərabəryeyinləşən hərəkət edən cismin getdiyi yol onun orta sürətlə eyni zaman müddətində keçəcəyi yola bərabər olacaqdır. 250 il sonra bu vəziyyətin dəqiq sübutunu cismin boşluqda sərbəst düşməsini təsvir edən Qalileo Qaliley verəcək.

Biz lazımi qədər sadə misal göstərdik. Amma sxolastlar daha çətin problemlərlə məşğul olurdular. Fərz edək ki, cisim 1-ə bərabər zaman kəsiyində 1 sürətilə, $\frac{1}{2}$ zamanı ərzində 2 sürətilə, $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}$ zamanında 3 sürətilə, $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}$ zaman kəsiyində 4 sürətilə və s. hərəkət edir. 2-yə bərabər zaman kəsiyində cisim nə qədər yol qət edəcək. (burada hərəkətin ümumi zamanı vuruğu $\frac{1}{2}$ olan sonsuz həndəsi silsilənin cəmi olur: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots=2$.). Bəs bu yol özü sonsuza dönməyəcəkmi?

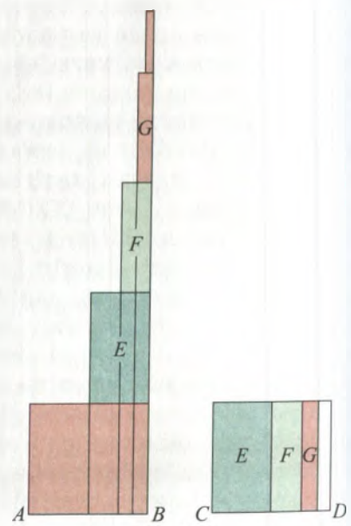
Müasir riyaziyyatçı cismin keçdiyi yola

$$1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+5\cdot\frac{1}{2^4}+\ldots$$

sonsuz sırası şəklində kəmiyyəti qarşı qoyacaqdır.

Bu sıranın əvvəlcə yığılan olub-olmadığını araşdırmaq, əgər yığılandırsa, onun cəmini tapmaq gərəkdir.

Orem başqa cür düşünürdü. Onun verdiyi çertyojdan da (şəkil 2) göründüyü kimi sonsuz sıranın cəmi pilləli xətt altında $AB=2$ parçasının üzərində qurulmuş sahə kimi təqdim edilmişdir. Hər pillənin hündürlüyü 1-ə bərabərdir, eni isə vuruğu $\frac{1}{2}$ olan həndəsi silsilənin ardıcıl hədləri olmaqla sonsuz azalır. Sonra Orem $CD=2$ üfüqi parçası üzərində qurulmuş, hündürlüyü 1 olan düzbucaqlıya baxır. Bu düzbucaqlının sahəsi 2-yə bərabərdir. CD kəsiyi C nöqtəsindən başlayaraq uzunluqları 1, 1/2, $1/2^2, 1/2^3, 1/2^4$... qanununa uyğun olaraq azalan parçalara bölünür. Bu kəsiklərin uclarından Orem şaquli xətt keçirir, belə ki, düzbucaqlı həmin həndəsi silsiləni təşkil edən E, F, G və s. sonsuz sayda düzbucaqlı-



Şəkil 2.

lardan ibarət olur. Daha sonra o qeyd edir ki, pilləli fiqurun ilkin pillənin üstündə qalxan hissəsi eyni E, F, G və s. düzbucaqlılardan ibarətdir. Belə ki, $E+F+G+\ldots=2$, birinci pillənin sahəsi də 2-yə bərabərdir, pilləli xəttin ümumi sahəsi 4-ə bərabər olacaq. Beləliklə, asan həndəsi mülahizələrin köməyi ilə orta əsrlərdə bəzi riyazi təhlillər edilirdi.

Amma yenə də orta əsrlər hərəkət nəzəriyyələri daha çox məntiqi-fəlsəfidir, nəinki riyazi. Axı o zamanlar, antik dövrdə olduğu kimi, riyaziyyat humanitar mədəniyyətdən ayrılmamışdı. Təəccüblü deyil ki, orta əsrlər riyaziyyatçıları arasında teoloqlar (ilahiyyatçılar) az deyil. İngilis sxolastı Tomas Bradvardin (1290-1349) də teoloq olmuşdur. "İlahi səbəb" traktatında o ilk dəfə olaraq, bizim dünyamızın qərq olduğu məkanın sonsuz olduğu fikrini irəli sürmüşdür. Bu antik və orta əsrlər dövrü üçün yolverilməz olan ideya sonradan Avropa fikrinin inkişafında vacib rol oynadı. Nəticədə bu fikir sonsuzluğun, İlahinin atributu, bəzən isə İlahinin özü ilə eyniləşdirilməsinə gətirib çıxardı. Kosmos haqqında antik və orta əsrlər anlayışını tamamən darmadağın edərək, o yeni elmlərə - səma mexanikası və *XVII* əsr riyazi analizin yaranmasına yol açdı.

Daha bir nümunə göstərmək olar – teoloq və riyaziyyatçı kardinal Nikolay Kuzanskiy (1401-1464), sonsuz kiçik və sonsuz böyük anlayışlarını gətirdi. O bu fikrə dairənin kvadraturası və İlahinin və onun yaratdığı Kosmosun yerləşdiyi teoloji problemlər haqqında düşünərək gəlib.


Nikolay Kuzanskiy (1401-1464)

Görəsən hərəkət haqqında orta əsr elmi riyazi dünyagörüşünün əsasıdırmı? Bəlkə də *XVII* yüzillikdə yeni elm yunan riyaziyyatının nümunələrinə, ilk olaraq da orta əsrlərdə anlaşılmayan Arximedin əsərlərinə əsaslanaraq, lazım olmayan sxolastik nəzəriyyələrini atmışdır? Bu haqda hələ də elm tarixçiləri mübahisə aparırlar.

LEONARDO PİZALI VƏ ONUN DÖVRÜ

Müasirləri arasında onun tayı-bərabəri yox idi. Hətta sonrakı üç əsrdə belə ona rəqib olacaq riyaziyyatçının adını çəkmək mümkün deyil. Leonardo Pizalının (1180-1240) yaradıcılığı cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi kimi elmlərin inkişafına, xüsusilə də Fransua Viyet və Pyer Ferma kimi riyaziyyatçıların tədqiqatlarına həlledici təsir göstərdi.

Leonardo nəhəng italyan ticarət şəhər-respublikası Pizada anadan olub. Onu adətən Fibonaççi, yəni Bonaççinin (Mehriban) oğlu adlandırırdılar. Onun əsl familiyası deyilənlərə görə Biqollo idi. Ən azından öz qohumu üçün etibarnamə ilə aldığı torpağın sənədlərində bu familiya ilə qeyd edilmişdir.

Leonardonun atası Pizada notarius idi. Oğlu dünyaya gəldikdən sonra onu Bucaya (indiki Əlcəzair), konsulun vəzifələrinə uyğun xidməti vəzifəyə göndərdilər. Leonardonun 12 yaşı olanda, atası onu işlərlə, əsasən də kommersiya hesabları ilə tanış etmək üçün yanına çağırdı. Bütün bu məlumatları Leonardo özü əsas əsəri olan "Abak kitabı" əsərinin ön sözündə göstərir.

Leonardo Misirə, Suriya, Siciliya və Provansaya səyahət etmişdir və hər yerdə cəbr və yeni hesablama üsulları ilə tanış olmağa çalışmışdır. O, əmin olmuşdur ki, onluq say sistemi bütün digər sistemlərdən üstündür.

Pizaya qayıtdıqdan sonra Leonardo ciddi surətdə riyaziyyatla məşğul olmağa başladı. O, Evklidin "Başlanğıclar" əsəri ilə tanış oldu, bu bilikləri ərəb alimlərindən öyrəndiyi biliklərlə birləşdirərək, 1202-ci ildə

"Abaк kitabı" – öz dövrünün əsl riyazi ensiklopediyasını yaratdı. Burada müəllifin yüksək zəkasının təzahürünün şahidi oluruq: Leonardonun əsəri tələbə kompilyasiyası deyil, dərin düşünülmüş və orijinal əsərdir. Burada cəbr, həndəsə və ədədlər nəzəriyyəsinin məsələləri təhlil edilir.

Məhz bu kitabda ilk dəfə olaraq dovşanlar haqqında məşhur məsələsinin həlli göstərilmişdir. Bu məsələdə bir cüt dovşandan əgər hər ay artmağa qadir olan və tələf olmayan bir cüt dovşan doğularsa, bir ildə neçə dovşanın törəyəcəyi sorulur. Cavab 1+1+2+3+5+8+...+144 silsiləsi kimi verilir, burada bu silsilənin üçüncüdən başlayaraq hər bir həddi özündən əvvəlki iki həddinin cəmidir:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Ardıcıllıq sonradan Fibonaççi ardıcıllığı adlandırıldı ("Ardıcıllıqlar" məqaləsinə bax).

1223-cü ildə Leonardo bu kitabın ikinci nəşrini dostu, imperator *II* Fridrixin saray astronomu, sonradan Dantenin "İlahi komediya"da qeyd etdiyi (Dante onu Cəhənnəmin səkkizinci pilləsinə, özlərini uzaqgörən adlandıran yalançıların yanına yerləşdirdi) – Mikel Skottoya həsr etdi.

Bu ithafetmə Leonardonun ilk maarifçi despotlarından biri olan *II* Fridrix Ştaufenin sarayına nə qədər yaxın olduğunu göstərir. Amma həmin sərt dövrdə belə Fridrix xüsusi qəddarlığı ilə şöhrət tapdı. Deyilənlərə görə o, canlı insanlar - məhkumlar üzərində anatomik tədqiqatlar aparmağa icazə verirdi. Bununla yanaşı o, ədəbiyyata və elmə himayədarlıq edərək, özünü alim və filosoflarla əhatə etmişdi.

Leonardonun Siciliya sarayı ilə əlaqəsi gözə çarpandır. Axı məhz Siciliya və İspaniyanın köməyi ilə Qərbi Avropa ərəb elmi ilə tanış oldu. Amma İspaniyadan fərqli olaraq, Siciliyada ellin elmi ilə birbaşa əlaqə də var idi. İş ondadır ki, ada qədim dövrlərdən zəngin mədəni şəhərləri olan yunan koloniyasıdır. Ellin ənənələri, ada romalılar tərəfindən işğal olunduqdan sonra (b.e.ə. *III* əsrin sonu) da qorunub saxlanıldı. Ərəblər Siciliyada 827-878-ci illərdən məskən salmışlar. Onları normanlar sıxışdırıb çıxararaq Siciliya krallığını yaratdılar. Ərəblər kimi normanlar da dini tolerantlıq nümayiş etdirdilər, bu səbəbdən də adada həm xristian, həm də müsəlman dini, üç işlək: yunan, latın və ərəb dili mövcud idi. Alimlər sərbəst halda münasibət qurur, elm mübadiləsi aparırdılar.

Fridrixin sarayında elmi müzakirələr aparılırdı. Onlardan birində saray filosofu magistr İohann Palermskiy Leonardo Pizanskiyə iki sual verdi:

1) $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ tənliyinin kökünü tapmaq; (*)

2) $\begin{cases} x^2 + 5 = u^2, \\ x^2 - 5 = v^2 \end{cases}$ tənliklər sisteminin

rasional həllini tapmaq (**).

Leonardo hər iki məsələ ətrafında əsaslı tədqiqat apararaq "Çiçək" və "Kvadratlar kitabı" (və ya "Kvadrat ədədlər haqqında kitab") (1225) əsərlərini yazdı. Bu kitabların hər ikisinin yalnız 1862-ci ildə nəşr edilməsinə baxmayaraq, Avropa riyaziyyatçılarına yaxşı tanış idilər.

Birinci kitabda Leonardo müəyyən etdi ki, (*) tənliyinin kökü nə tam, nə də kəsr ədəddir. O, həmçinin $\sqrt{n}, \sqrt{n} + \sqrt{m}$ və ya $\sqrt{n} - \sqrt{m}$ şəklində ola bilməz. Nəhayət, Leonardo onu altıncı altmışlıq işarəyə qədər dəqiqliklə hesabladı: $x = 1;22,7,42,33,4,40$ (burada nöqtəli vergül tam hissəni kəsrdən, vergüllər isə altmışlı hissələri ayırır). Bu ifadənin hansı yolla alındığı, hələ də məlum deyil.

İohann Palermski tərəfindən verilmiş ikinci məsələni Leonardo "Kvadratlar kitabı"nda tədqiq etmişdir. Nəhayət o, cavab tapdı, amma bu əsas deyildi.

Bu məsələ ətrafında mülahizələr daha maraqlı məsələyə yol açdı: $4pq(p^2 - q^2)$ nə ifadə edə bilər? Leonardo bəyan etdi ki, p və q tam olarsa bu ədəd heç cür kvadrat ola bilməz. Mənasına görə bu bəyanat Fermanın məşhur teoreminin ekvivalenti idi. Beləliklə, Fermanın teoreminin xüsusi halı ondan 400 il əvvəl tapılmışdır. Amma Leonardoya bunu isbat etmək nəsib olmadı.

* * *

Sonradan "Kvadratlar kitabı" əsərinin müqəddiməsində Leonardo yazırdı:

"Əlahəzrət Fridrix, magistr Dominik məni sizin hüzurunuza gətirəndə, magistr İohann Palermskiy mənə iki sual verdi, bu haqda mən sonra danışaram, amma qeyd etmək istərdim ki, bu suallar ədədlərdən çox həndəsəyə aid idi, daha dəqiq desəm, 5

vahid artırdıqda və ya azaltdıqda, hər dəfə də müəyyən ədədin kvadratına bərabər olan ədədi tapmaq lazım idi.

Bu sualın həlli barədə düşündükdən sonra, gördüm ki, bu həllin mənbəyi kvadrat ədədlərə aid olan bir çox əşyalarda mövcuddur. Bundan başqa Pizada gedən söhbətlərdən Əlahəzrətin mənim ədədlər haqqında yazdığım kitabı oxuyub və incə mülahizələrdən zövq aldığını anladıqdan sonra Sizin sarayda filosof tərəfindən mənə verilmiş və tərəfimdən formalaşdırılmış sualı xatırladım. Mən bu sualı mövzu kimi götürərək, əsl əsər yazmağı və bu əsəri "Kvadrat ədədlər haqqında kitab" adlandırmağı qərara aldım. İndi isə mən Sizdən kitabda həqiqətə az və ya çox yaxın faktlar görəndə lütf etmənizi xahiş edirəm, belə ki, hər şeyi xatırlamaq və heç bir səhv etməmək yalnız İlahi zəka sahibinə xasdır və eyibsiz və hər şeyi nəzərə ala biləcək şəxs yoxdur".

İNTİBAH DÖVRÜ: ŞƏRƏFLİ İXTİRALAR

XV-XVI əsrlər İntibah və ya renessans dövrü kimi qəbul edilmişdir, bu əsrlərdə antik Yunanıstanda mövcud olan yüksək səviyyəli mədəniyyət dirçəlməyə başladı. Başqa ölkələrdən fərqli olaraq İtaliyada İntibah dövrü iqtisadi və mədəni baxımdan daha çox inkişaf etmiş, daha tez başlamışdır. Bundan əlavə coğrafi baxımdan İtaliya Qərb və Şərq arasında əlaqələndirici halqa idi. Yeni cərəyan məşhurların yaradıcılığında: Dante Aligyerinin, Covanni Boккaçonun və Françesko Petrarkanın poeziya və nəsrində, Cotto, Leonardo da Vinçinin və Rafael Santinin rəsm tablolarında, Mikelancelo Buonarroti və Benvenuto Çellininin heykəllərində öz əksini tapdı. Onlar insanın sərhədsiz imkanlarına, iradəsinə və zəkasına inanırdılar; onun yaradıcılıq qüvvəsinə ümid edərək, ideal harmonik və yaradıcılıq idealının olduğunu iddia edirdilər.

İntibah dövrü həm də nəhəng coğrafi ixtiralar dövrü oldu. 1492-ci ildə Xristofor Kolumb Amerikanı kəşf etdi, 1519-1521-ci illərdə Fernan Magellan dünya səyahətinə çıxdı. İntibah dövrünün parlaq nümayəndəsi həkim, riyaziyyatçı və filosof Cerolamo Kardano bu haqda belə yazırdı:

"Mən bütün Yer kürəsinin icad edildiyi



Salamanki Universiteti

əsrdə doğulmuşam, qədim dövrdə onun üçdə bir hissəsi məlum idi... Görəsən, səma sakinlərinin ildırımından təhlükəli olan pirotexnika və insan ildırımından (yəni artilleriya) təəccüblü nə var? Mən, sahilsiz dənizlərdə gecə qaranlığında dəhşətli tufanlardan xilas olmaq üçün bizə yol göstərən – ey böyük maqnit, səni də unutmaram! Bura həm də dördüncü ixtiranı da – kitab çapını da əlavə edək. O, ilahi möcüzələrlə rəqabət apara bilər. Çünki bu ixtiradan sonra bizə yalnız səmanı fəth etməkdən başqa nə qalır?"

Orta əsrlərdə Avropanın nəhəng elmi mərkəzlərindən biri Bizans idi. Bura müxtəlif ölkələrdən qədim yunan əlyazmalarını köçürmək, öyrənmək və şərh etmək üçün alimlər gəlirdi. Məhz Bizans alimləri, qədim Çin traktatlarının taleyini (b.e.ə. 213-cü ildə İmperator Sin Şi Xuan-di əmri ilə onlar yandırılmışdır) təkrar edə biləcək qiymətsiz qədim yunan irsini sonrakı nəsillər üçün qoruyub saxlaya bildilər.

Türklərə qarşı ittifaq axtaran Bizanslar Venetsiya ilə yaxınlaşdı. O zamanlar Venetsiya gəmiləri dənizləri və zəngin şəhərləri fəth edərək, Yaxın Şərqin liman şəhərləri ilə ticarət aparırdılar. Konstantinopolun süqutundan sonra 1453-cü ildə orda işləyən alimlər Qərbə köçməyə başladılar. Beləliklə də Avropanın elm aləmi yunan dilində yazılmış riyaziyyata dair klassik əsərlərlə tanış oldular.

Amma elmi biliklər çox yavaş yayılırdı. Riyaziyyatı, o dövrlərdə kilsənin himayəsində olan universitetlərdə tədris edirdilər. Onun iyerarxiyası dünya haqqında orta əsrlərin təsəvvürünü saxlamağa çalışırdı

və elmin getdikcə artan təsirinə zidd idi. Həm də alimlər adətən təkbaşına çalışırdılar. Elmi cəmiyyətlər və jurnallar yox idi, riyaziyyatçılar elmi yazışma aparmırdılar. Hansısa bir mesenatın yanında muzdlu çalışan riyaziyyatçılar, ağanın qəzəbindən qorxduqları üçün, öz ixtiralarını qısqanclıqla qoruyurdular.

O dövrlərin xarakterik əlaməti – elmi turnirlərdir. Belə turnirlərdəki qələbə bəzən alimlərin taleyində həlledici rol oynayırdı. Qalib yalnız şöhrət deyil, həm də böyük pul mükafatı qazanırdı, bəzən isə sərfəli bir iş təklifi də alırdı.

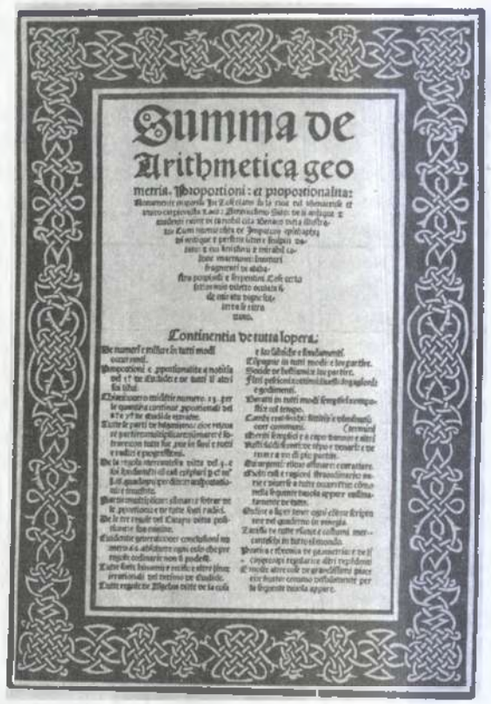
XV əsrin ortalarında kitab çapı ixtira edildikdən sonra biliklər daha geniş insan kütləsinə əlçatan oldu. Baxmayaraq ki, elmi əsərlər ilk çap kitablarının siyahısına düşmədi, amma yenə də *XV* əsrin sonunda Avropada "Kommersiya hesabı" (1478), Evklidin "Başlanğıclar" (1482) əsəri (*XIII*



Luka Paçoli
(1445-1514)

əsrdə Kampana Navarskinin latın tərcüməsində) və alim Luka Paçolinin "Biliklərin məcmusu" (1494), *XVI* əsrdə Apolloniy və Arximedin çap edilmiş əsərləri meydana gəldi. Latın dilində olan kitabları hamı oxuya bilmədiyi üçün, Paçoli, Qaliley və Dekart şüurlu olaraq öz əsərlərini "danışıq" dillərində – italyan və fransız dilində yazırdılar.

İtalyan Paçolinin "Biliklər məcmusu" o dövrdə cəbr, riyaziyyat, həndəsə və triqonometriya üzrə biliklərin cəmindən ibarət idi. Bu əsərdə Leonardo Pizanskinin "Abak kitabı" əsəri tamamən təsvir edilmişdir. Cəbri tənliklərə həsr edilmiş bölümün sonunda, Paçoli qeyd edir ki, kub tənliklərin həlli üçün "cəbr sənəti üsul verməmişdir, necə



"Biliklər məcmusu" nun birinci səhifəsi
L.Paçoli Venesiya 1523-cü il

ki, dairənin kvadraturasının üsulunu verməyib". Onun sözləri cəbr alimlərinin növbəti nəsli üçün çağırış rolunu oynadı. Bəlkə də "orta əsrlərin yuxusu"ndan sonra avropalılar ilk dəfə anladılar ki, klassik nümunələrə əməl etmək və antik elmi öyrənmək azdır, yeni nə isə icad etmək, klassiklərin göstərdiyi sərhədləri aşmaq lazımdır. Onlar buna nail oldular. *XVI* əsr italyan riyaziyyatçıları üç və dörd dərəcəli cəbri tənliklərin kök düsturlarını tapdılar, bununla da əsrlər boyu alimlərə həlledilməz görünən məsələni həll etdilər. Buna görə *XVI* əsr riyaziyyat tarixinə cəbr əsri kimi daxil oldu.

MƏXFİ DÜSTURLAR

O dövrün riyaziyyatında mənfi ədədlər "vətəndaşlıq hüququ" almamışdılar. Onlardan yalnız aralıq hesablamalarda istifadə edirdilər, əgər axtarılan kök mənfi işarəli olurdusa, tənliyin kökü olmadığı qəbul edilirdi. İstənilən kub tənliyi həll etmək üçün riyaziyyatçılar üç müxtəlif tənliyin necə həll olunduğunu bilməli idilər:

$$x^3 + px = q,$$

$$x^3 = px + q,$$

$$x^3 + q = px,$$

burada p, q – müsbət ədədlər idi. Bu düsturların kökünün tapılma tarixi intriqa, dramatizm, məkr və yalanla zəngindir.

İlk olaraq Boloniya universitetinin professoru Stsipion Dal Ferro (1465-1526) uğur qazandı. Demək lazımdır ki, *XV-XVI* əsrdə Boloniya universiteti Avropanın məşhur universitetlərindən biri idi. Müxtəlif dövrlərdə Luka Paçoli, Albrext Dürer və Nikolay Kopernik onun tələbələri olub. 1515-ci ildə Dal Ferro $x^3 + px = q$ tənliyinin həllini tapdı, amma o dövrün adətlərinə görə dərc etməyərək, sirr saxladı. Bu icadın əlyazmasını Dal Ferro öz kürəkəninə, kafedrasının sələfinə – Hannibal della Naveyə verdi. Əlyazmalar tapılmasa da, alimin müasirləri onun prioritetini mübahisə mənbəyinə çevirmir, hətta *XVI* əsr riyazi əsərlərində "Dal Ferro qaydasını" göstərirlər.

Məşhur italyan riyaziyyat tarixçisi U.Forgi Dal Ferro üsulunu bilən daha iki adamın: zadəgan Pompeo Bolonetti və Dal Ferronun tələbəsi Antonio Mariya del Fyorenin adını çəkir. Müəlliminin ölümündən sonra del Fyore ona xəbər verilmiş sirdən istifadə edərək elmi turnirlərdə qələbə çalırdı.

Beləliklə, 1535-ci ildə Fyore turnirdə yarışa məşhur riyaziyyatçı Nikollo Tartalyanı (təxminən 1499-1557-ci illər) çağırdı. Tartalya Fyorenin Stsipion Dal Ferronun sirrindən agah olduğunu bilib, turnirə qədər sərbəst olaraq kökün düsturunu tapdı və qələbə qazandı. İki saat ərzində o Fyorenin bütün məsələlərini həll etdi. Rəqib isə Tartalyanın sözlərinə görə hətta Dal Ferronun qaydası ilə həll edə biləcəyi məsələlərlə belə bacarmadı.



Nikollo Tartalya
(1499-1557)

Turnirdən bir gün sonra Tartalya hətta $x^3 = px + q$ tənliyini də həll etdi. Bu, böyük icad idi. Alim şöhrət qazandı, Veronaya, Venetsiyaya, Pyaçenstaya, Breşə dərs deməyə dəvət edildi. Amma Tartalya öz düsturlarını nəşr etdirmədi. Səbəb?

Birinci növ kub tənlikləri, yəni $x^3 = px + q$ tənliyini $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ əvəzləməsi ilə Tartalya (Dal Ferrodan sonra) kvadrat tənliklərə çevirərdi:

$$u^2 - qu - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0.$$

Bu tənliyin diskriminantı $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ müsbətdir, buna görə də onun bir müsbət kökü var. $x^3 = px + q$ tipli tənliklərin həlli üçün Tartalya $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ əvəzləməsi etməyi qərara aldı. Müvafiq olaraq o diskriminantı həm mənfi, həm də müsbət olan kvadrat tənliyi aldı. Onun mənfi olduğu halda Tartalyanın üsulu işləmirdi, baxmayaraq ki, kub tənliyin həlli vardı.

Məhz bu çətinlik alimlər üçün maneə oldu. Tartalya, çox güman ki, bütün incəlikləri həll etməmiş öz düsturunu çap etmək istəmirdi.

Bununla yanaşı Tartalya hələ sağ ikən onun ən gözəl icadı başqasının kitabını bəzədi. Bu belə baş verdi.

1536-cı ildə Cerolamo Kardano "Cəbri təcrübə" adlı kitabını çapa hazırlayarkən iki alimə - Nikkolo Tartalya və Antonio del Fyoreyə məlum olan "Dal Ferronun qaydası" haqqında öyrənir. Kardano anlayır ki, əgər bu nəticəni öz kitabında dərc etdirərsə, şöhrət tapacaq. Amma bu düsturu sərbəst tapma cəhdlərinin hamısı boşa çıxdı. Bu zaman o sirri Tartalyadan öyrənmək qərarına gəlir. Və nəhayət uzun-uzadı dilə tutmalardan sonra 1539-cu ilin mart ayında Tartalya, Kardano bu icadı heç kəsə açmamağa, hətta şifrələyəcəyinə and içdikdən sonra ona həllin "şerlə alqoritmini" verdi.

Bundan sonra Kardanonun ən istedadlı tələbəsi olan Ludovik Ferrari (1522-1565) dördüncü dərəcəli tənliklərin həllinə müvəffəq oldu. Kardanonun belə möhtəşəm nəticələri çap etdirmək arzuları sadəcə yan keçilməz oldu. Bundan başqa 1542-ci ildə Kardano və Ferrari della Nave ilə görüşmüşdülər, o isə öz növbəsində qayınatasının əlyazmasını böyük həvəslə qonaqlarına göstərmişdi. Demək ki, o, yalnız Tartalyaya


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa vocant) nouis adinuentionibus ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea vulgò tritis, iam sexaginta euaserint. Neq; solùm, ubi unus tantummodus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi tres duobus, aut tres uni æquales fuerint, modum explicuit. Hunc autem librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusi seimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitaretur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius anticipatos, ac minore fastidio perdiscant.

"Dahi incəsənət" traktatının 1-ci səhifəsi. C.Kardano

məlum deyildi! Kardano Tartalyaya verdiyi sözü poza biləcəyini düşündü və ona məlum olan hər şeyi öz kitabında təqdim etdi.

Qeyd etmək lazımdır ki, Kardano böyük icadların şöhrətini ona layiq olan adamlara buraxırdı:


Cerolamo Kardano (1501-1576)

"Bizim dövrdə Stsipion Dal Ferro "Əşyanın kubu üstəgəl əşya cəmə bərabərdir" düsturunu icad etdi. Bu həqiqətən də əsrarəngiz icad idi. Belə ki, bu sənət bütün insan zəkasını kölgədə qoyursa, onu səmanın töhfəsi və əqlin qüvvəsi kimi qəbul etmək lazımdır. Bu o qədər şərəfli bir ixtiradır ki, onu əldə edən insandan hər şeyi gözləmək olar. Onunla rəqabət apararaq Dal Ferronun tələbəsi Antonio Mariya Florido tərəfindən turnirə çağırılan Berşli Nikkolo Tartalya məğlub olmamaq üçün bu problemi həll etdi və uzun-uzadı xahişlərdən sonra həmin məsələni mənə verdi. Məni Luka Paçolinin belə tənliyin ümumi həll yolu olmaması barədə sözləri çaşdırdı, amma mən artıq çox şeyi bildiyim üçün axtarmağa cəsarət etmədiyim şeyi tapacağım üçün ruhdan düşmədim. Amma mən bu hissəni aldıqdan və onun həllinə yaxınlaşdıqdan sonra onun köməyi ilə çox şey həll edə biləcəyimi anlayıb, bəzən mənim keçmiş tələbəm Ludoviko Ferrari ilə birgə, bəzən də tək tədqiqatlar apararaq qalan hissəni tapdım".

Tartalya özünü təhqir edilmiş hesab edərək, nifaq saldı. Üç il ərzində o və öz müəllimini müdafiəsinə qalxan Ludoviko Ferrari təhqir dolu məktub və pamfletlərlə çıxış etdilər. Və əgər əvvəllər elmi polemika latın dilində gedirdisə, indi müəlliflərin hər ikisi fikirlərini xalq dilində ifadə edirdilər. bütün İtaliya hadisələrin gedişatını böyük maraqla izləyirdi. Kardano özü isə "bir zadəganın rəiyyət ilə dueldən etiraz edəcəyi kimi" diskussiyadan etiraz etdi.

Bu mübahisənin nöqtəsini Tartalya və Ferrari arasındakı turnir qoydu. Bu turnir 1548-ci ilin avqust ayının 10-da Kardano Ferrarinin doğma şəhəri Milanda həyata keçdi. Tamaşaçıların əksəriyyəti təbii ki, öz yerlilərinin tərəfini tuturdular. Sonradan Tartalya yazırdı: "Mənə aydın oldu ki, kütlə qarşısında danışmaq istəyim mümkünsüzdür, ona görə də mən daha pis bir şey olacağından ehtiyat edərək, heç kimə heç nə demədən Breşə yola düşdüm". Ferrari rəqibi gəlmədiyi üçün qalib elan edildi.

Ferrarinin taleyi uğurlu oldu, o bir çox cəlbedici təklif aldı və onlardan ən sərfəlisini qəbul etdi. O, səkkiz il müddətində Mantuya əyalətində vergi idarəsinə başçılıq etdi, sonra isə Boloniya universitetində riyaziyyat professoru oldu.

Bu hadisənin iştirakçılarından heç biri sonradan heç bir ixtira etməmişdir. Kub tənliyinin keçilə bilməyən halını anlatmaq isə Rafael Bombelliyə nəsib oldu.

XƏYALİ ƏDƏDLƏRİN MEYDANA GƏLMƏSİ

Rafael Bombelli (1526-1572) mühəndis-hidravlik idi və doğma İtaliyada 1549-

1551-ci illərdə Val-di-Kyana (Bataqlıqlar vadisi) ərazisində bataqlıqları qurutmaqla məşhur idi. Boş vaxtlarında riyazi tədqiqatlarla məşğul olurdu. 1550-ci ildə o "Cəbr" əsərinin birinci variantını bitirdi. Kitab üzərində işləyərkən kitabxanada bu təlim üzrə "İsgəndəriyyəli Diofantın yunan dilində əsərini tapdı". Tapıntı onda çox böyük təəssürat yaratdı. Bombelli yazırdı: "... dünyaya belə gözəl əsər bəxş etmək üçün biz tərcüməyə başladıq və yeddi kitabdan beşini tərcümə etdik".

Diofantın "Hesab" əsərinin təsiri altında Bombelli öz əlyazmasını əsaslı şəkildə dəyişərək, ora Diofantın 14 məsələsini daxil etdi. Amma sadəcə məsələlər deyil, onların həlli də Bombellini heyrətləndirdi. Riyaziyyata yeni çoxluqların – mənfi ədədlərin daxil edilməsi onun üçün çox vacib idi. Axı məhz bu cür tam aksiomatik olaraq yalnız mənfi deyil, həm də başqa ədədləri müəyyən etmək olar. Və Bombelli ilk dəfə cəbrə xəyali ədədləri daxil etdi ("Yeni ədədlər nəyə lazımdır?" məqaləsinə bax).

Əvvəlcə o Diofant kimi mənfi ədədlərin tərifini verdi (bu tərifi o dövrün bütün riyaziyyatçıları "yalan" sayırdılar) və onlardan istifadə qaydalarını tərtib etdi. Mənfi ədədin kvadrat kökü, Bombelli qeyd etdiyi kimi, nə mənfi, nə də müsbət ədəd ola bilməz. Bu zaman bu yeni "sofistik" ədədləri toplamaq lazım olanda "mənfidən müsbət" $(+\sqrt{-1})$ çıxmaq istəyəndə isə "mənfidən mənfi" $(-\sqrt{-1})$ adlandırmağı təklif etdi.

Müasir cəbrdə xəyali vahid tətbiq edərkən riyaziyyatçılar deyirlər: "Kvadratı 1 olan müəyyən bir ədəd mövcuddur. Bu xəyali i ədədidir. Yəni $i^2 = -1$ və beləliklə, tərifə görə $i = \sqrt{-1}$ ". Gördüyümüz kimi keçən 500 il ərzində xəyali ədədin müəyyən edilməsi mənaca dəyişməmiş, cəbri əməliyyatlar isə *XVI* Bombellinin apardığı əməliyyatlardan fərqlənmir.

Bombelli yeni ədədlərə heç bir həndəsi məna verməmişdir. O, tərtib etdiyi qaydalardan başqa haqqında heç bir şey məlum olmayan bu ədədləri formal simvollar kimi nəzərdən keçirirdi. Məhz bu ədədlərin köməyi ilə hətta kub tənliklərin kökləri düsturlarının kök işarəsi altında mənfi ədəd olduğu halda həqiqi həlli olduğunu izah etməyə nail oldu.

Bombellinin tətbiq etdiyi xəyali ədədlər iki yüz ildən artıq bir zamanda sadəcə rahat simvollar kimi qəbul edilirdilər. Riyaziyyatçılar onları yalnız aralıq hesablamalarda istifadə edirdilər, amma nəticə üçün "həqiqi" ədədlərdən istifadə edirdilər. Yalnız *XIX* əsrin əvvəllərində "riyaziyyatçıların şahı" Qauss kompleks ədədlərin əyani həndəsi interpretasiyasını təklif etdikdən sonra bu ədədlər "vətəndaşlıq hüququ" aldı.

HƏRFİ SİMVOLİKANIN YARANMASI

Riyaziyyatı xüsusi işarələrsiz təsvir etmək mümkün deyil. Biz onlara elə alışmışıq ki, sadə eynilikləri simvollardan istifadə etmədən isbat edə bilmirik. Cəbri simvolların yaradıcısı hüquqi olaraq fransız riyaziyyatçısı Fransua Viyet sayılır. Öz ideyalarını cəbr üzrə ümumi traktatın başlanğıcı olacaq "Analitik sənətə giriş" (1591) əsərində təsvir etmişdir. Viyet yazırdı: "Mənim təsvir etdiyim sənət yeni deyil, amma zamanın təsiri altında o qədər təhrif edilmiş və dəyişdirilmişdir ki, mən ona tamamən yeni bir şəkil vermək istədim...". Vietin simvolikasının çatışmayan cəhətlərinə baxmayaraq bu, irəli atılan mühüm bir addım idi. Amma qədim riyaziyyatçılar onlarsız və onlarla aparılan xüsusi əməliyyatlarsız çox rahat keçinirdilər. Yəqin ki, geri qayıtmaq və ilkin riyazi işarələrin necə meydana gəldiyinə nəzər salmaq faydalı olardı.


Fransua Viyet (1540-1603)

MƏCHUL KƏMİYYƏT ÜÇÜN SİMVOLLAR

Artıq İsgəndəriyyəli Heronun əsərlərində (I əsr) və Miçiqan papirusunda (*II* əsr) məchul üçün xüsusi işarə tapmaq olar. Bu yunan əlifbasının heç bir ədədi mənası olmayan ς – "son siqma" hərfidir. Cəbri simvolikanın yaradılmasında növbəti addımı antik

dünyanın son nəhəng riyaziyyatçısı İsgəndəriyyəli Diofant atdı ("Diofantın "Hesabı"" məqaləsinə bax). Yeni işarələrin təfsilatlı təsvirini alim tanınmış "Hesab" əsərində vermişdir. Burada o, məchulun altı müsbət və altı mənfi dərəcəsi üçün simvollar, eləcə də onlarla aparılan əməliyyatları göstərdi.

O dövrün ənənələrinə görə məchulun işarəsi üçün Diofant ς seçdi, məchulun qüvvətləri üçün isə onların yunan dilində qısaldılmış formalarını istifadə edirdi:

$x^2 - \Delta^{\upsilon}$ (δυναμις – "qüvvət")

$x^3 - K^{\upsilon}$ (κυβος – "kub")

$x^4 - \Delta^{\upsilon}\Delta$ (δυναμοδυναμις – "kvadrato-kvadrat")

$x^5 - \Delta^{\upsilon}K$ (δυναμοκυβος – "kvadrato-kub")

$x^6 - K^{\upsilon}K$ (κυβοκυβος – "kubo-kub")

Diofant mənfi üstlü qüvvətləri surəti 1-ə, məxrəci uyğun müsbət üstlü qüvvətə bərabər olan kəsr ədəd ilə işarə edirdi. Mənfi üstlü qüvvətlər üçün müsbət üstlü qüvvətin yuxarı sağ tərəfindən əlavə edilən xüsusi χ işarəsi də qəbul edilmişdi. Məsələn, x^{-2} Diofantın mətnlərində $\Delta^{\chi\kappa}$ kimi işarə edilir.

Diofantın mətnlərində məchulun sıfır üstlü qüvvəti üçün də işarə var idi $-M$, bura yunan "monas"- "vahid" sözünün ilk iki hərfi daxil idi. Diofant onu 1 ədədi ilə eyniləşdirmirdi. "Hesab"da toplama və vurma üçün xüsusi işarələrin olmadığı üçün, məchulun qüvvət üstünün və əmsalının yazılma qaydası çox vacibdir: dərəcə işarəsinin ardından əmsal yazılırdı. Buna görə də M həmçinin işarə ayrıcı rolunu oynayırdı.

Amma çıxma əməliyyatı üçün Diofant ↓ işarəsindən istifadə edirdi. Nəticədə müxtəlif çoxhədliləri yazmaq imkanı yarandı: öncə bütün müsbət hədlər, ↓ işarəsindən sonra isə mənfi işarəli hədlər yazılırdı.

Bərabərlik işarəsinin əvəzinə ισος sözünün ("isos"– bərabər) ilk iki hərfini istifadə edərək, Diofant tənlikləri yazırdı. Məsələn, $x^3 = 2 - x$ tənliyi Diofantın yazısında aşağıdakı kimi təsvir edilirdi:

$$K^{\upsilon}\alpha\iota\sigma M\beta \downarrow \varsigma\alpha$$

(α və β hərflərinə yunan əlifba sırası ilə nömrələmədə 1 və 2 uyğun gəlirdi).

Antik riyaziyyatın qürubundan (süqutundan) sonra elm mərkəzi Şərqə köçdü. Burada ərəb alimlərinin əsərləri nəticəsində riyaziyyat sərbəst elm kimi meydana çıxdı. Ərəb Şərqində ilk dəfə olaraq Hindistandan mənimsənilmiş onluq say sistemindən istifadə etməyə başladılar. Bir çox yunan və hind terminləri ərəb dilinə tərcümə edilmişdir, amma riyaziyyatçılar məchulların hərfi işarələrindən imtina edərək, onları sözlə işarə edirdilər. Məsələn Əl-Xarəzmi bütün kəmiyyətləri üç hissəyə böldü: məchul – "cizr" ("kök") və ya "şay" ("əşya"); məchulun kvadratı – "mal" ("əmlak"); sərbəst hədd – "dirhəm" ("gümüş sikkə"). Sonra Abu Kamil üçüncü dərəcəni "kəb" ("kub") adlandırdı.

Cəbri simvolikadan imtina edən ərəb riyaziyyatçıları yunan alimləri ilə müqayisədə geri addım atdılar.

ORTA ƏSRLƏR AVROPA RİYAZİYYATÇILARININ CƏBRİ SİMVOLİKASI

Ərəb cəbrinin nailiyyətləri ilə Avropa alimlərini Leonardo Pizanskiy tanış etdi. Təəccüblü deyil ki, əsas terminlər ərəb dilindən tərcümə edilmişdir. Amma italyan dilinə tərcümədə sözlər hamısı eyni hərflə başlayırdı: cosa – ("əşya"), censo ("əmlak") və cubo ("kub"). Yəqin ki, buna görə italyan riyaziyyatçıları məchulun qüvvətlərini müvafiq sözün ilk iki hərfi ilə işarə edirdilər. Belə ki, Maestro Jilionun "Cəbri məsələlər" kitabında (1384) x – *co.*, x^2 – *ce.*, x^3 – *cu.*, x^4 – *ce. di ce.* (censo di censo – "kvadratın kvadratı") kimi verilir.

Riyaziyyatçılar məktəbi yalnız İtaliyada deyil, həm də Almaniyada yaranırdı. İtal-



Adam Rize
(1489-1559)
Ağac üzərində qravüra. 1550

yan sözü olan cosa "koza" kimi tələffüz edilir və buna görə də alman riyaziyyatçılarını "kossistlər", onların daxil etdikləri işarələri isə "kossik" adlandırırdılar. Almaniyada ilk dəfə olaraq riyaziyyat üzrə müəhzirələri Çexiyadan olan Yan Vidman (1460 – *XVI* əsrin başlanğıcı) oxumağa başladı. Onun "Bütün tacirlər üçün cəld və gözəl hesab" (1489) dərsliyində ilk dəfə olaraq indiyə qədər istifadə edilən toplama və çıxma işarələri: (it. Piu – "plyus") $\tilde{p}$ simvolunun əvəzinə "+" işarəsini, $\tilde{m}$ əvəzinə isə (italyan meno – "minus") alışdığımız "–" meydana gəldi.

Ən məşhur kossist Adam Rize (1489-1559) idi. O, çap olunmayan "Coβ" dərsliyində kossik işarələrin böyük bir cədvəlini tərtib etdi və bunlardan L.F.Maqnisкiy ilk rus "Cəbri"ndə istifadə etmişdir (1703).

O dövrün alman riyaziyyatçıları simvolların sayını azaltmağa və vahid işarələmə sistemi tətbiq etməyə çalışırdılar. Bu zaman MixelŞtifelin "Tam cəbr" (1544) kitabı böyük rol oynadı.

Kitab çapının icad edilməsi bütün Avropa mədəniyyətinə, xüsusilə də riyaziyyatın inkişafına böyük təsir göstərdi. Çap olunan və geniş yayılan ilk riyazi əsərlərin sırasında Luka Paçolinin " Cəbr, həndəsə, nisbətlər və mütənasibliklər haqqında bilik-lər" əsəri də var idi və onun işarələmələri geniş yayılmışdı. Amma bu o qədər də rahat olmadığı üçün riyaziyyatçılar daha asan işarələr sistemi axtarmağa davam edirdilər.

Fransız bakalavrı Nikola Şuke (?- təxminən 1500) şəxsi variantını təklif etdi. Qüvvətin üstünü kiçik şriftlə yuxarıda əmsalın sağında yazırdı. Məsələn, $12x^3$ Şukenin təsvirində 12^3 kimi göstərilirdi. Bundan başqa Şuke öz simvolikasına sadəcə sıfır deyil, həm də mənfi üstlü qüvvətləri də daxil etdi. $8x^3 \cdot 7x^{-1} = 56x^2$ ifadəsi onun yazısında "7^{1-m} vurulmuş 8^3 56^2 verir" kimi təsvir edilirdi.

Bu ideyanı XVI əsrdə italyan Rafael Bombelli də öz "Cəbr" əsərində istifadə edirdi. Məchulu o, xüsusi 1, onun qüvvətlərini isə 2,3,... simvolu ilə işarə edirdi. Bombellinin işarələmələri niderland riyaziyyatçısı Simon Stevinin (1548-1620) də cəbri simvolikasına təsir göstərdi. O, sadəcə məchulun oxşar işarələrini - ①, ②, ③, ..., daxil etməklə qalmadı, həmçinin onları ikinci məchulun sek.①, *sek.*②, *sek.*③, ..., üçüncü məchulun – *ter.*①, *ter.*②, *ter.*③, ... qüvvətlərinə genişləndirdi.

İLK HƏRFİ HESABLAMA

Hərfi hesablamanı yaratmaq üçün son, amma mühüm bir addım atmaq lazım idi - sadəcə məchul və onun qüvvətləri üçün deyil, həm də parametrlər üçün işarələr qəbul etmək lazım idi. Fransua Viyet "Cəbri sənətə giriş" traktatında məhz bunu etdi. (Viet analitik sənət adlandırdığı yeni elmi yaratmağa çalışırdı. Onun fikrincə belə elmin qarşısında heç bir məsələ tab gətirə bilməzdi).

Öz simvolik cəbrini (logistica speciosa) Viyet ədədi riyaziyyata qarşı qoyurdu. Alim hesab edirdi ki, birinci sözün əsl mənasında cəbrdi, çünki bir sıra əşyalarla əməliyyat aparmağa imkan verir. İkinci isə sadəcə ədədlərlə əməliyyatlar aparılan riyaziyyatdır.

Oxucuya siniflərlə aparılan cəbri əməliyyatlardan danışmazdan əvvəl, Viyet qədim yunanların cəbrinə müvafiq olaraq bütün çoxluqları müəyyən pillələrə ayırdı. Birinci pilləyə o, "uzunluqları" və ya toplanması, çıxılması mümkün olan eyni ölçülü çoxluqları aid etdi. Bu iki əməliyyatın nəticəsində alınan çoxluq həmin pilləyə aiddir. Amma əgər birinci pillənin iki kəmiyyətlərini vursaq, bu zaman artıq, "sahə" alınır, bu isə ikinci pillənin kəmiyyətidir. Növbəti pillə isə təbii ki, "həcmlər" idi. Yunan riyaziyyatçılarından fərqli olaraq, Viyet ilk üç pillədə qalmayaraq yola davam etdi. Bu hesablamada bircinslilik vacibdir: yalnız eyni çoxluğun ədədlərini toplayıb-çıxmaq olar. n pilləsinin kəmiyyətini m pilləsinin kəmiyyətinə vurduqda $n+m$ pilləsinin kəmiyyəti alınar. Onları yalnız $n>m$ olduqda bölmək mümkündür. Bu əməliyyatın nəticəsi $n-m$ pilləsinə aid olacaqdır.

Sonra Viyet bütün kəmiyyətləri əlifbanın hərfləri ilə işarələdi. Kəmiyyətlər məlum və məchul olduqları üçün, birinciləri samit $B, C, D, \ldots$, ikinciləri isə sait $A, E, İ, \ldots$ hərflərlə işarə etdi. (Hal-hazırda biz misalın parametrlərini latın əlifbasının birinci hərfləri ilə $a, b, c, \ldots$, məchulları isə əlifbanın son hərfləri x, y, z ilə işarə edirik).

NƏSİRƏDDİN TUSİNİN CƏBR, HESAB VƏ HƏNDƏSƏ İRSİ

Həndəsə ilə müqayisədə N.Tusinin hesab və cəbrdən olan əsərləri elə də çox deyil. Bununla belə, bu əsərlər həmin dövrdə bu sahədə mövcud olan bilgiləri tam şəkildə əks etdirirlər.

Bunların arasında "Camiəl-hesab bit-təxt vət-turab" ("Lövhə və torpaq ilə hesab məcmusu") ən fundamental əsər hesab edilir. Bu əsər Azərbaycan dilinə tərcümə edilərək 2008-ci ildə "Tozlu lövhənin köməyi ilə hesab toplusu" adı altında nəşr edilmişdir.

Kitab üç hissədən ibarətdir. Birinci hissə tam ədədlər və onlar üzərində hesabi əməllərə, ikinci hissə kəsrlər və onlar üzərində hesabi əməllərə, üçüncü hissə isə qarışıq altımış, otuz və onluq say sistemlərində həm hind, həm də əbcəd hesabı ilə məsələlərə həsr edilmişdir.

İkinci əsər isə "Ər-risələ fil-hesab vəl-cəbr" ("Hesab və cəbrdən traktat") adlanır. Bu kitab iki hissədən ibarətdir. Birinci hissədə hesabi əməllər və onların xassələri kimi məsələlərə baxılır. Burada onlar adı çəkilən birinci traktatdan daha yığcam şəkildə verilmişlər. İkinci hissə kvadrat tənliklərin kanonik şəklə gətirilməsi üçün "Cəbr", "İkmal", "Müqabilə" kimi metodlara həsr edilmişdir. İkinci hissənin sonunda kanonik şəkilli kvadrat tənliklərin müsbət həllərinin tapılması üçün alqoritmlər verilmişdir.



Nəsirəddin Tusi
(1201-1274)

N. Tusinin həndəsi irsi çox genişdir. Bu əsərlər arasında özünün sələflərinə geniş şərhlərlə yanaşı sırf N.Tusinin özünün müəllifi olduğu əsərləri də var.

Sözsüz, həndəsə sahəsində Tusinin Evklidin "Əsaslar"ına etdiyi geniş və qiymətli şərhlərdən ibarət böyük həcmli "Evklidin şərhi" daha məşhurdur. Bu əsərin əlyazma variantları dünyanın ən müxtəlif kitabxanalarında saxlanılır və sevindirici haldır ki, 2001-ci ildə Azərbaycan dilinə tərcümə edilərək "Təhriri-Öqlidis" adı altında nəşr edilmişdir. Bu əsər XVI əsrin sonlarında Romada ərəb dilində, XVII əsrin ortalarında isə Londonda latın dilində nəşr edilmişdir. İntibah dövründə N.Tusinin həndəsi əsərləri Avropa alimlərinə çox yaxşı tanış idi. Holland riyaziyyatçısı və elm tarixçisi D.Y. Ctroyk özünün "Краткий курс истории математики; (Наука 1969 г., 328 с) kitabında aşağıdakını yazır: "İntibah dövründə ət-Tusinin Avropada təsiri çox böyük olmuşdur. Artıq 1651 və 1653-cü illərdə Con Uollis ət-Tusinin Evklidin postulatı haqqında əsərindən istifadə etmişdir". Bu əsər müxtəlif adlar altında tanınır – "Təhrir kitab al-üsul al-həndəsə li-Uqlidis", "Kitab təhrir üsul li-Uqlidis". Kitab Evklidin "Əsaslar"ının 15 məqaləsini tam şəkildə saxlamaqla yanaşı, geniş şərhlərlə zəngindir. Kitabın tərtib edilməsində N.Tusi həm Evklidin, həm Həccacın, həm də Sabit ibn Kürranın variantlarından fayadalanmışdır və onlar arasında fərqli cəhətləri də qeyd etmişdir. Necə ki, kitabın giriş hissəsində aşağıdakı qeyd edilir:

"Rəhman, rəhim olan Allahın adıyla. Hər şeyin ibtidası (başlanğıcı) ondan olan və ona qayıdana həmd olsun. Bütün binaların (varlıqların) həqiqəti onun yanındadır və hər şeyin malikliyi ona məxsusdur. Muhəmməd və onun pak ailəsinə onun salamı olsun.

"Əlməcəsti" şərh edib qurtardıqdan sonra Evklid Surmiyə məxsus olan "Həndəsə və hesabın əsaslarını" onlara ziyan gətirməyən lakonikliк və yorucu olmayan təhlillərlə, onun məqsədini saxlamaqla, ona layiq olanları əlavə etməklə şərh etmək istədim. Hansılarını ki, bu elmin bilicilərinin yazılarından və öz istedadımla əldə etmişəm.

Həccac və Sabitin nüsxələrində əsas materiala edilmiş əlavələri ya onlara birbaşa işarə edərək, ya da təkliflərin nömrələrinin müxtəlif rənglə yazılması ilə göstərəcəyəm. Bunu yalnız Allaha təvəkkül edərək edirəm. Belə ki, mənim təvəkkülüm yalnız onadır.

Söyləyirəm ki, kitab on beş məqalədən ibarət olub, Həccacın variantında dörd yüz altımış səkkiz təklifdən ibarətdir. Sabit variantı isə bundan on ədəd çoxdur. Bəzi yerlərdə həmçinin onların ardıcıllığında da fərqlilik var. Fərqli olan yerlərdə Sabitin təkliflərini qırmızı, Həccacınkıları isə qara rənglə nömrələmişəm".

Buradan həmçinin N.Tusinin Evklidin yunan dilindəki orijinalından istifadə etdiyi məlum olur. Əks halda onun Sabit, Həccac və Evklidin variantları arasında fərqli tərəfləri göstərməsi ağlabatan olmazdı.

N.Tusinin özünə aid edilən iki məşhur həndəsi əsəri "Kəşf əl-ğina an əsrar əş-şəkl əl-qita" ("Kəsik fiqurların sirlərinin dolğun kəşfi (bəyanı)") və "Ər-risalət əş-şafiyə an əş-şəkki fil-xütut əl mütavaziyə" (Paralel düz xətlərdə şəklərin müalicəsi traktatı) çox məşhurdurlar. Bu əsərlər hər iki rus dilinə tərcümə edilmişlər. («Трактат о полном четырехстороннике» (Məmmədbəyli və Rozenfeldin redaktəsi ilə, Bakı 1952), "Трактат, исцеляющий сомнение по поводу параллельных линий" (Перевод с арабского Б. А. Розенфельда), ИМИ, 1960, VIII выпуск, стр. 483-532).

Bundan əlavə N.Tusinin qədim yunan və özünün sələfləri olan orta əsr Şərq alimlərinin çoxsaylı həndəsi əsərlərinə şərhləri mövcuddur. Dünyanın ən müxtəlif kitabxanalarında bu əsərlərin əlyazmaları və müxtəlif versiyaları saxlanmaqdadır.

YENİ DÖVR

RİYAZİ TƏHLİLİN TƏŞƏKKÜLÜ

Antik dövrdən alimlər əyrixətli fiqurların sahələrini və fırlanma cisimlərinin həcmlərini tapmağa çalışmışlar. *XVI* əsrin sonuna bu sıraya yeni - əyriyə toxunanın qurulması, funksiyanın sıraya ayrılışı, loqarifmlərin yaranması kimi məsələlər daxil edildi. Ən maraqlısı isə o idi ki, yeniliklərə və müxtəlifliyə baxmayaraq, onlar çox sıx əlaqəli idilər.

ANALİTİK HƏNDƏSƏ

Yeni dövrün əsas nailiyyətlərindən biri analitik həndəsənin yaradılması idi. Meydana gəlməsinə görə o, *XVII* əsrin iki nəhəng fransız riyaziyyatçısı – Pyer Ferma (1601-1665) və Rene Dekarta (1596-1650) – borcludur. Onlar bir-birindən asılı olmayaraq, bu yeni riyazi təlimin əsaslarını hazırlamağa başladılar.



Rene Dekart (1596-1650)

1636-cı ildə Ferma "Müstəvi və cismi sahələrin öyrənilməsinə giriş" məqaləsini yazdı. Müstəvi və cismi sahələrdən danışarkən, o əyrilərin müstəvi (düz xətt və çevrə), cismi (ellips, parabola, hiperbola) və xətti (kinematik müəyyən edilən əyrilər) kimi bölünən antik təsnifatından çıxış edirdi. Ferma çəpbucaqlı koordinatların köməyi ilə iki dəyişəni olan düsturun həndəsi təsvirini vermişdi. O, ixtiyari olaraq koordinat başlanğıcını seçir və oradan absis oxunu keçirir. Qeyd edilmiş bucaq altında yönələn ordinatın bir ucu absis oxu üzərində sürüşür, digər ucu isə əyrini çəkirdi. Beləliklə də Ferma göstərdi ki, kvadrat tənliklə ifadə edilən əyri, konus kəsiyidir – ellips, parabola və ya hiperboladır. Onun yanaşmasının əsas çatışmazlığı, onun da Viyet kimi antik qaydalara uyması idi. Belə ki, antik riyaziyyat toplama əməli ilə toplanan parçaları bir düz xətt üzrə yığmaq arasında uyğunluğu müəyyən edirdi. Vurmanı isə vurulanlara bərabər olan tərəfləri olan düzbucaqlının qurulması kimi göstərirdi, yəni iki uzunluğun hasili başqa növ kəmiyyət – sahə idi.

Fermanın uzun müddət əlyazma kimi qalan "Giriş"i Dekartın 1637-ci ildə nəşr edilmiş "Həndəsə"si kimi geniş yayılmadı. "Üsul barədə mülahizələr" adlı fəlsəfi traktatın bu əlavəsi onun metodoloji prinsiplərinin riyazi illüstrasiyası olacaqdı. Əslində isə "Həndəsə" fəlsəfədən asılı olmayaraq fundamental məna daşımaqla, riyaziyyatda yeni bir səhifə açdı. Fransız riyaziyyatçısı və tarixçisi Mişel Şal "Həndəsə"nin nəşr edilməsindən düz iki əsr sonra, yazırdı ki, orada göstərilən mülahizələr "anasız dünyaya gələn uşaqlardır", çünki əvvəlki riyaziyyata bənzəmirdilər.

Dekart Fermanın analitik həndəsəsinin çatışmazlıqlarını aşa bildi. O, göstərdi ki, əgər uzunluğun vahidi seçilibsə, bu zaman bütün çoxluqlar ölçüsündən asılı olmayaraq (uzunluqlar, sahələr, həcmlər), eyni şəkildə, yəni müvafiq parçanın köməyi ilə göstərilə bilər. İndi vurma və bütün qalan riyazi əməliyyatlar başlanğıcla bircins olan kəmiyyət verirdi (şəkil 1). Buna görə də, məsələn, hər bir x parçasına və rasional əmsallı $P(x)$ çoxhədlisinə $y=P(x)$ parçasını qarşı qoymaq olar. Məhz bu iddia Dekartın, *XVIII* əsrdə analitik adlanan həndəsəsinin əsasını təşkil edir. Maraqlıdır ki, parçalarla aparılan riyazi əməliyyatların eyni tərifi, R.Bombellinin 1550-ci ildə yazılmış və *XX* əsrin əvvəlinə qədər çap edilməmiş "Cəbr" əsərinin *IV* kitabında verilmişdir.

Yeri gəlmişkən "Həndəsə"də başqa yeniliklər də var idi. Məsələn, məhz Dekart məchulları əlifbanın son hərfləri (x, y, z), əmsalları isə ilk hərfləri (a, b, c, d...) ilə qeyd etdi. Həmçinin qüvvətlərin bizə məlum olan x^2, x^3 və s. yazılışını da qəbul etdi.

LOQARİFMLƏRİN İCADI

10^x şəkilli ədədlər çoxluğunu müvafiq x qüvvət üstü ilə qarşılaşdırma cəhdinə biz *XVI* əsr alman riyaziyyatçısı MixelŞtefelin əsərlərində rast gəlirik. Belə yanaşmanın

hesablama praktikası üçün vacibliyi yetərincə aydındır. Əgər a^x ədədinə x, a^y-ə y uyğundursa, bu zaman $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ hasilinə $x+y$ cəmi uyğun olacaq, yəni bütün hesablayıcıların arzuladığı kimi, vurmanı cəm ilə əvəz etmək olar. Onu həyata keçirmək üçün bütün zəruri məlumatların daxil olduğu dəqiq cədvəllər tətbiq etmək lazım idi. Bu böyük əmək şotland riyaziyyatçısı Con Neperin (1550-1617) çiyinlərinə düşdü.

Neperin "Loqarifmlərin ecazkar cədvəlinin təsviri" adlı əsəri 1614-cü ildə yarandı. 1619-cu ildə müəllifin ölümündən sonra nəşr edilmiş "Loqarifmlərin ecazkar cədvəlinin qurulması" əsərində birinci kitabda yerləşdirilmiş loqarifmlər cədvəlləri izah olunur. Əslində isə ikinci kitab birincidən əvvəl, çox güman ki, 1594-cü ilə qədər yazılmışdır. Neper loqarifmlərin yaradılması prinsipinə malik idi ("Elementar funksiyalar və onların xassələri" məqaləsinə bax). Neperdən asılı olmayaraq 1620-ci ildə, elə də mükəmməl olmayan loqarifmlər cədvəlini "Ədədi və həndəsi silsilələrin cədvəli" kitabında İsveçrə riyaziyyatçı və astronomu İobst Bürgi nəşr etdirmişdir.

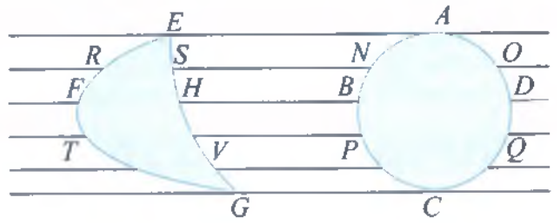


Con Neper (1550-1617)

Neper triqonometrik hesablamalar üçün cədvəllər tərtib edirdi, digər hesablamalar üçün isə onlar rahat deyildi. Alim bunu yaxşı bilirdi, bunun üçün də loqarifmlər sisteminin təkmilləşdirilməsi işi sonralar onun və dostu Oksford professoru Henri Briqsin ümumi qayğısına çevrildi. 1624-cü ildə Briqs onların fikirləşdiyi təkmilləşmələri həyata keçirdi. O, onluq loqarifmlər cədvəlinin daxil olduğu "Loqarifma hesabı" əsərini çap etdirdi.

SAHƏLƏRİN HESABLANMASI

Antik dövrdə müxtəlif fiqurların sahələrinin hesablanmasında ən yüksək nəticələri Arximed əldə etmişdir. Yeni dövrdə kvadratura məsələsi adlanan bu məsələ bir çox alimləri cəlb etdi. Belə ki, İohann Kepler planetlərin hərəkətinin ikinci qanununun çıxarışı zamanı radius-vektorları "parça" olacaqları halda qalınlığa maliklərmiş kimi toplayaraq, elliptik sektorun sahəsini hesablamağa cəhd etdi. Boloniya universitetinin riyaziyyatçı professoru, iyeronimitlər ordeninin rahibi Bonaventura Kavalyeri (1598-1647) "Bölünməyən arası kəsilməyənlərin köməyi ilə yeni üsullarla ifadə edilmiş həndəsə" məqaləsində sonsuz kiçik ədədlərin hesablanmasının sistematik təsvirini vermişdir. O dövrdə sonsuz kiçik ədədlər dedikdə istənilən sonlu ədəddən kiçik olsa da sıfıra bərabər olmayan ədəd başa düşülürdü. Kavalyeriyə görə, istənilən müstəvi fiquru paralel xətlərin və xətlərin paralel hərəkət edərək qoyduqları "izlərin" cəmi kimi nəzərdən keçirmək lazımdır (şəkil 2). Analoji olaraq cisimlər haqqında təsəvvür verilir: müstəvilərin hərəkəti zamanı yaranır. Kavalyeri cəbri üsullara malik olmasına baxmayaraq, "Bölünməyənlərin həndəsəsi" əsərini daha ciddi olacağına inanaraq, bilə-



Şəkil 2. B.Kavalyerinin "Sınaqlarından" şəkil

rəkdən, Evklid həndəsi cəbrinin dilində yazmışdır. Bu məhdudiyyətin sayəsində $y = x^n$ düsturunun kvadraturasını (yəni əyrinin qrafiki altında sahəni) yalnız $n=1$ və $n=2$, üçün aldı, belə ki, artıq $n=2$ olduqda o üçölçülü cisimlərin təsvirindən istifadə etməli olurdu. Onun dostu və tələbəsi Evancelista Torriçelli (1608-1647) 1644-cü ildə Kavalyerinin üsulu ilə $xy = a^2$ bərabəryanlı hiperbolasının OY oxu ətrafında fırlanmasından alınan cisimlərin həcmini hesabladı.

Kavalyerinin üsulunu ingilis riyaziyyatçısı, Oksford universitetinin professoru Con Vallis (1616-1703) inkişaf etdirdi. O nəhəng həndəsi qurmaları cəbri dilə çevirmişdir. "Sonsuzluğun cəbri" əsərində (1655) Vallis $y=x^p$ qüvvət funksiyasının qrafiki altında yerləşən sahəni sadəcə p natural ədəd-

ləri üçün deyil, həmçinin mənfi və müsbət rasional qiymətləri üçün də hesabladı. Dörddə bir hissəsi müasir riyaziyyat dilində

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4},$$

kimi ifadə olunan vahid radiuslu dairənin sahəsini nəzərdən keçirərkən, Vallis $4/\pi$ ədədinin sonsuz hasil şəklində ifadəsini alır:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10}\cdots$$

Fransız alimləri isə başqa yolu seçdilər. Məsələn, Ferma fiqurun sahəsini, əyri üzərinə sahələri azalan sonsuz həndəsi silsiləni təşkil edən düzbucaqlılar düzərək hesablayırdı. Belə ki, bu silsilənin cəminin hesablanması artıq məlum idi, məsələnin həlli müvafiq bölünmə yolu ilə aparılırdı.

Kvadratura üsullarını başqa bir məşhur fransız riyaziyyatçı və fizika alimi Blez Paskal (1623-1662) da öyrənirdi. 1659-cu ildə öz əsərində belə bir mülahizə irəli sürdü ki, sahələrin hesablanması zamanı bəzi sonsuz kiçik ədədləri digərləri ilə əvəz etmək olar. O, xüsusi halda, əyrinin kiçik qövsünü toxunanın kiçik parçasına bərabər hesab edirdi. Paskalın əsəri, onu 1673-cü ildə oxuyan Leybnitsə çox böyük təsir etmişdir.

FUNKSİYALARIN SIRAYA AYRILIŞI

Sahələrin hesablanma məsələləri funksiyaların sıraya ayrılması ilə sıx əlaqəli oldu. Belə ki, London kral cəmiyyətinin birinci prezidenti Uilyam Brounker (1620-1684), hiperbolanın altındakı sahəni faktiki olaraq daxilə çəkilmiş düzbucaqlıların, eləcə də üçbucaqların limit həddi kimi müəyyən edirdi. Birinci hal üçün,

$$S = ln2 = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{5\cdot6} + \ldots,$$

(S – axtarılan sahədir)

Brounker bu düsturu 1657-ci ildən gec tapmamışdır, amma onu yalnız 1668-ci ildə nəşr etdirmişdir. Öz əsərində (1659) bu sıranı verən italyan riyaziyyatçısı Pyetro Menqoi onu qabaqladı (1625-1686). 1668-ci ildə Londonda işləyən və daha çox latınlaşdırılmış Merkator adı ilə tanınan alman riyaziyyatçısı Nikolaus Kaufman (1620-1687 illər) "Loqarifmotexnika" əsərində x=0,1 və 0,2 üçün

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \quad (*)$$

ayrılışını verdi. Bu, x=1 olduqda Brounkerin düzümü ilə üst-üstə düşürdü – sadəcə kəsrlərin fərqini eyni məxrəcə gətirmək lazım idi.

Bu nailiyyətlər ingilis riyaziyyatçıları arasında böyük əks-sədaya səbəb oldu. Vallis, əgər x>1 olarsa (*) sırasının yığılmasının pozulduğunu görür və $ln\dfrac{1}{1-x}$ funksiyası üçün ayrılış tapır.

Bu istiqamətdə növbəti inkişaf şotland riyaziyatçısı və astronomu Ceyms Qreqorinin (1638-1675) adı ilə bağlıdır. 1667-ci ildə o, dairənin və hiperbolanın kvadraturası haqqında əsərində yığılan sonsuz sıralardan istifadə etmişdir. Qreqori demək olar ki, ilk dəfə yığılan və dağılan sıralar arasındakı fərqləri dəqiq təsbit etmişdir. O, "Universal həndəsə" əsərində əyrilərin altındakı sahəni və əyrilərin fırlanması nəticəsində əmələ gələn cisimlərin həcmini hesablama qaydaları vermişdir. Qreqorinin əldə etdikləri nəticələr, onun birinci məktub və əlyazmaları 1939-cu ildə çap olunana qədər naməlum qalmışdır. Məlum oldu ki, alim ədədlər nəzəriyyəsi və təhlil sahəsində bir çox ixtiraları qabaqlamışdı. Məsələn, $(1+x)^m$ ikihədlisinin, əsasən də tangens, sekans və arktangensin sıraya ayrılışlarını bilirdi.

ƏYRİYƏ TOXUNANIN KEÇİRİLMƏSİ HAQQINDA MƏSƏLƏ

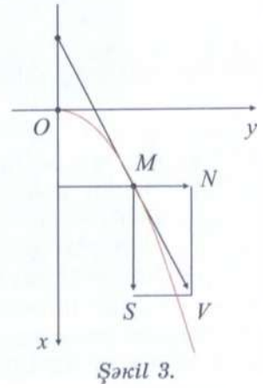
XVII əsrin ikinci rübündə riyaziyyatçıların diqqəti toxunanların keçirilməsi haqqında məsələlərə yönəldi.

Dekartın optik tədqiqatları onu: fokus məsafəsinə görə linzanın formasını hesablamaq kimi problemlə üzbəüz qoydu. Riyazi olaraq bu, toxunanın qurulması məsələsinin tərsi (aydındır ki, normal və toxunan bir-birini qarşılıqlı olaraq müəyyənləşdirirlər) olan, verilmiş xüsusiyyətlərə malik normala görə əyrinin qurulması məsələsinin ekvivalentidir. Dekart linza haqqında məsələni həll etdi, həmçinin əyrilərə normalların qurulmasının ümumi üsulunu təklif etdi. Bu üsul niderland riyaziyyatçısı İohann Qudde tərəfindən sadələşdirilib, təkmilləşdirilərək 1659-cu ildə Dekartın "Həndəsə" əsərində çap olundu.

Kitab, latın tərcüməsində başqa bir niderland alimi – Fransa van Sxotenin şərhləri ilə çıxdı.

Dekartın üsulu yalnız cəbri (Dekart onları həndəsi adlandırırdı) əyrilər, yəni tənliyi verilmiş dərəcəli çoxhədli olan əyrilər üçün yarayırdı. Amma qeyri-cəbri əyrilər də mövcuddur, məsələn, sikloida – təkərin fırlanması zamanı çəmbər üzərində qeyd edilmiş nöqtənin cızdığı trayektoriya. Paris kral kollecinin professoru Jil Roberval (1602-1675) əyrini nöqtənin hərəkət trayektoriyası kimi nəzərdən keçirərək başqa bir üsul hazırladı.

Hələ Qaliley, üfüqi atılmış mərminin hərəkətini öyrənərkən sübut etdi ki, hissəciyin ani sürəti onun iki sərbəst hərəkətdə iştirakı ilə şərtləndirilir – bərabər sürətli üfüqi hərəkət və ağırlığın təsiri altında bərabərtəcilli şaquli düşmə. Və bu zaman toxunan yekun sürətin istiqamətindədir (şəkil 3). Məhz bu mülahizəni eyni zamanda 1644-cü ildə Torriçelli və Roberval istifadə etdilər. Torriçelli parabolaya, Roberval isə sikloida və digər qeyri-cəbri əyrilərə toxunanı qurdu.



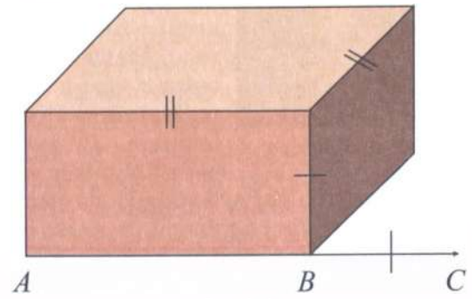
Şəkil 3.

Toxunanın absis oxuna paralel olan vəziyyətinin axtarışı, funksiyanın maksimumu və ya minimumunun tapılması barədə məsələ ilə sıx bağlıdır. İlk dəfə bu əlaqəni "Maksimumlar və minimumların axtarılması üsulu" əsərində Ferma tapmışdır. Bu əsər 1679-cu ildə alimin ölümündən sonra nəşr olunsa da, fransız riyaziyyatçıları arasında yarım əsr öncə tanınmışdı.

Söhbət aşağıdakı məsələdən gedirdi: b uzunluqlu parça verilir; onu iki hissəyə elə bölmək tələb olunur ki, oturacağı, tərəfi parçanın birinci hissəsinə bərabər olan a tərəfli kvadrat, hündürlüyü isə kəsiyin ikinci hissəsi (yəni $b-a$) olan prizma maksimal həcmə malik olsun (şəkil 4). Heç bir sübut və əsas olmadan Ferma törəməni hesablamaya bərabər olan üsuldan istifadə etdi:

$$\lim_{h\to0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

sonra isə bu törəməni sıfıra bərabərləşdirdi.



Şəkil 4.
Ferma məsələsi

DİFERENSİAL VƏ İNTEQRAL HESABININ YARADILMASI. NYUTON VƏ LEYBNİS

Əyrilər altında sahələrin hesablanması və əyrilərə toxunanların keçirilməsinə dair məsələlərlə alimlər çoxdan məşğul olsalar da, bu iki prosedur arasında heç bir əlaqə görmürdülər. Buna baxmayaraq, bu əlaqə fundamental məna daşıyırdı, belə ki, sonsuz kiçilənlərin təhlilinin ümumi xarakterinə işarə edirdi. Bunu tapan ilk insan İsaak Barrou (1630-1677) oldu.

1663-cü ildə Henri Lukas adlı bir nəfərin sərmayələri hesabına Kembricdə Müqəddəs Üçlük kollecində (Triniti-kollec) riyaziyyat kafedrası təsis edildi, çox istedadlı alim, riyaziyyatı ilahiyyat və qədim dilləri bildiyi kimi yaxşı bilən 33 yaşlı İssak Barrou bu kafedrada yer aldı. 1670-ci ildə Barrou sahənin tapılması və toxunanın keçirilməsi əməliyyatlarının qarşılıqlı tərs olduğunu göstərdiyi "Həndəsə üzrə mühazirələri"ni çap etdirdi.

İnteqral və diferensial hesabının sonrakı inkişafında əsas rol iki böyük alimə – ingilis İsaak Nyutona (1643-1727) və alman Qotfrid Vilhelm Leybnitsə (1646-1716) məxsus idi.

Nyuton riyaziyyatı özü öyrənmişdi, amma dahi idi. Kembric universitetinə riyaziyyat imtahanına gəldiyi zaman aydın oldu ki, o riyaziyyatın öyrənildiyi Evklidi tanımır, amma Dekartın "Həndəsə" əsəri ilə tanışdır. Sonunda imtahandan keçdi – imtahanı aparan İsaak Barrou onun riyazi istedadını layiqincə qiymətləndirdi. O zamana qədər Nyuton yalnız Dekartı deyil, Vallis və Sxotenin də əsərlərini oxumuş və riyazi problemlərə qarşı həvəs duymuşdu.



İsaak Nyuton (1643-1727)

Tezliklə İngiltərəyə dəhşətli bədbəxtlik üz verdi – taun epidemiyası başladı. Universitet bir müddətlik bağlandı və Nyuton demək olar ki, iki ilə yaxın Linkolnşir qrafлığında yerləşən Vulstorp malikanəsində keçirdi. Bu illər onun üçün həddən artıq məhsuldar oldu. Sonralar xatırlayırdı: "1665-ci ilin əvvəlində mən sıralarla yaxınlaşma üsulunu və istənilən binomun belə sıralara gətirilməsi qaydasını kəşf etdim. Həmin ilin may ayında Qreqori və Slyuzun toxunanların üsulunu, noyabrda isə flüksiyaların birbaşa üsullarını əldə etdim və növbəti ildə mayda flüksiyaların tərs üsuluna yiyələndim. Bütün bunlar iki taun ilində baş verdi, 1665 və 1666-cı ildə. Belə ki, bu illərdə mən ixtira üçün ən yaxşı yaşımda idim və riyaziyyat və fəlsəfə haqqında sonrakı illərlə müqayisədə daha çox düşünürdüm".

Nyutonun danışdığı flüksiyaların birbaşa metodu – diferensiasiallama, müvafiq olaraq flüksiyaların tərs üsulu isə - inteqrallama ("Riyazi analiz nədir" məqaləsinə bax) idi. Nəticədə o, "Flüksiya və sonsuz sıralar üsulu" adlı əsər yazdı, amma alim yaşadığı sürə bu əsər çap edilmədi: 1736-cı ildə bu əsərin ingilis dili variantı çap etdirildi, orijinal latın mətni isə yalnız 1779-cu ildə işıq üzü gördü.

x, y, z dəyişənlərini Nyuton flüentlər, yəni "axan" (lat. Flue – "axıram"), "hərəkətverici qüvvə nəticəsində hər bir flüentin artım sürətini isə" – flüksiya adlandırırdı. Onlar yuxarıda nöqtə qoyularaq eyni hərflərlə işarə edilirdilər: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$. Nyuton həmçinin "flüksiyanın anları"nı da (müasir terminologiyada diferensialları), yəni $\dot{x}o, \dot{y}o, \dot{z}o$ kəmiyyətlərini nəzərdən keçirirdi, (burada o – sonsuz kiçik miqdara işarə edir).

Nyuton diferensiallama alqoritmi kimi, Fermanın funksiyaların maksimum və minimumlarını axtararkən istifadə etdiyi eyni prosedurdan istifadə edirdi. Məsələn, x^2-nın törəməsini (flüksiya) hesablayarkən yazırdı:

$$\frac{(x+\dot{x}o)^2 - x^2}{o} = \frac{x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}o\cdot\dot{x}o - x^2}{o} = 2x\dot{x}$$

Burada o daxil olan hədlərin yüksək üstlü qüvvətlərini, o sadəcə olaraq atırdı, "belə ki, onları başqaları ilə müqayisədə heçə saymaq olar". Bu yolla ikinci dərəcədən yüksək qüvvət üçün də düsturları almaq olar. Radikal və kəsr daxil olan funksiyaları diferensiallamaq üçün Nyuton yardımçı dəyişənlərdən, qeyri-cəbri funksiyalar üçün isə sonsuz sıralara ayrılışdan istifadə edirdi.

"Flüksiyaların üsulu" əsərində sonsuz kiçik kəmiyyətlərin hesablanmasının iki məsələsi də dəqiq göstərilmişdir:

1. Flüentlər arasında verilən münasibətdən flüksiyalar arasında münasibəti müəyyən etmək.

2. Flüksiyaların daxil olduğu tənlikdən, flüentlər arasında münasibəti tapmaq.

Aydındır ki, birinci məsələdə söhbət diferensiallamadan gedir və biz bu məsələni Nyutonun necə həll etdiyini görürük. İkinciyə gəldikdə isə inteqrallamanın ümumi üsulunu vermək o zaman mümkün deyildi. Amma yenə də Nyuton irrasionallığın olduğu inteqralların böyük bir qrupu üçün düstur tapmağa nail oldu.

Bütün bu kəşflər alimə özü üçün deyil – yeni fizikanın yaranması üçün lazım idi. Onun "Natural fəlsəfənin riyazi əsasları" (1687) əsəri, əgər planetin orbitinin trayektoriyası konus kəsiyi (ellips, parabola və ya hiperbola) olarsa, o zaman planet və Günəş arasında cazibə qüvvəsinin onlar arasında olan məsafəyə tərs mütənasib olduğu (ümumdünya Cazibə qanunu) faktının riyazi sübutunu verir. Elə burada Nyuton riyazi çətinlikləri olan bir çox məsələlərin, qabarma – çəkilmələrin mahiyyətcə izahını, Ayın hərəkəti nəzəriyyəsinin əsaslarını, kürəvi

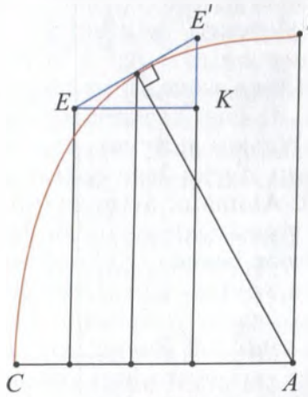
kütlələrin cazibəsi problemi və s. həllini verdi. Kitabın əsas hissəsinə limitlər nəzəriyyəsi əlavə edilmişdi. 1696-cı ildə sonsuz kiçik kəmiyyətlərin hesabı haqqında birinci dərsliyi çap etdirən fransız riyaziyyatçısı Giyom de Lopital, müqəddimədə yazırdı ki, Nyutonun kitabında "demək olar ki, bu hesablamanı tərənnüm edən hər şey var".

Nyutonun riyaziyyata dair əsəri *XVIII* əsrdə işıq üzü gördü, baxmayaraq ki, əsas nəticələri *XVII* əsrin 60-cı illərində almışdı. Onun həmkarlarına yazdığı məktublardan bəzi şeylər məlum idi. Belə ki, Nyuton 1676-cı ildə, bəzi nəticələri, diferensial və inteqral hesabını özü kəşf edən Leybnitsə yazmışdı.

Leybnits Nyutondan asılı olmayaraq 1673-1676-cı illərdə sonsuz kiçik kəmiyyətlərin hesablanmasını kəşf etdi. Paskalın riyazi əsərləri, xüsusilə də toxunanın keçirilməsində kiçik $\Delta x, \Delta y, \Delta s$ parçalarından yaradılmış üçbucaqdan istifadə etdiyi məsələ ona böyük təsir göstərmişdi (şəkil 5). Leybnitsin digər ilham mənbəyi özünün dediyi kimi, Dekartın analitik həndəsəsi, Vallisin və Merkatorun sıralar haqqında işləridir. İşinin əvvəlində "funksiya" terminini verdi və arktangensin ayrılışını aldı, onun köməyi ilə hal-hazırda Leybnits sırası kimi tanınan $\frac{4}{\pi} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ sırasını aldı. O, tərəfləri dx, dy, dz olan ("xarakterik") üçbucağına ümumi məsələlərdə toxunanı qurmaq üçün alət kimi baxırdı. Bu üçbucağın köməyi ilə Leybnits 1673-cü ildə sonradan diferensiallama və inteqrallama adlandırdığı əməliyyatların qarşılıqlı tərs xarakterli olduğu- nu aldı.



Qotfrid Vilhelm Leybnis (1646-1716)



Şəkil 5.
Çox kiçik $\Delta x = EK$, $\Delta y = E'K$, $\Delta S = EE'$ parçaları ilə yaranmış "Xarakteristik üçbucaq"

1675-ci ilin oktyabrında hesablamaların yaranmasında ilk addımlar atıldı – Leybnitsin əlyazmalarında əsas anlayışlar, əməliyyat və simvollar peyda oldu. Nəhayət, 1677-ci ilin yayında Nyutonun ikinci məktubuna cavabında Leybnits hasilin (məhz $d(xy)=ydx+xdy$) və qüvvətin diferensiallanması qaydasını, eləcə də diferensiallamanın, riyaziyyatçıların əvvəl etdikləri kimi irasionallıqdan azad olmağa ehtiyac doğurmayan, birbaşa üsulunu açıqladı. Burada ilk dəfə "diferensial tənlik" termini meydana gəldi.

Leybnits aldığı nəticələri yalnız 1684-cü ildə "Kəsr və irasional kəmiyyətlərin maneçilik törətmədiyi maksimum və minimumların, eləcə də toxunanların yeni üsulu və bunun üçün xüsusi hesablama növü" adlı məqaləsi ilə "Acta eruditorum" ("Elmi əsərlər") jurnalının səhifələrində nəşr etdirdi. "Xüsusi hesablama növü" – bu əlbəttə diferensial hesabıdı. Leybnits məqalədə diferensiallamanın sadə qaydalarını verir, əyrinin maksimum və minimumları arasında fərqi təyin edir və dönmə nöqtəsini müəyyənləşdirir. Bu andan etibarən riyazi analizin rəsmi tarixi başlanır.

Onun eyni jurnalda 1686-1697-ci illərdə çap edilmiş növbəti məqalələri təhlilin müxtəlif problemlərinə, əsasən də inteqral hesabına (bu termin də Leybnitsə məxsusdur) həsr edilmişdir. Məsələn, 1693-cü ildə inteqral və törəmə arasında əlaqə müəyyən edilir, burada törəmə toxunanın absis oxuna meyl bucağının tangensi kimi nəzərdən keçirilir.

Leybnitsin tədqiqatları Avropa qitəsində analiz üsullarının gözə çarpacaq dərəcədə inkişafını müəyyənləşdirdi. Onun xələflərinin sırasında İohann və Yakob Bernuli qardaşlarının, Pyer Varinyon və Giyom de Lopitalın adını çəkmək olar.

İDEAL RİYAZİYYATÇI – LEONARD EYLER

XVIII yüzillik – Maarifçilik dövrü qəddar səbirsizlik dövrləri arasında qısa zamandır. Leonard Eylerin (1707-1783) anadan olmasına altı il qalmış Berlində kütlə qarşısında axırıncı cadugər yandırıldı. Altı il sonra isə Böyük fransız inqilabı alovlandı. Eylerin bəxti gətirdi: o bütün Avropadan, vətəndaş müharibəsinə və dini münaqişələrə qoşulmaq istəməyən usta və alimlərin gəldiyi kiçik və sakit İsveçrədə doğulmuşdu. Beləcə, elmi istedadlar Yakob və İohann qardaşları başda olmaqla – holland Bernulli ailəsi onun doğma Bazelinə köçdü. Bernulli qardaşlarının ətrafında parlaq riyazi mühit yarandı və Bazel yarım əsr Avropada artıq elmlər akademiyasının yarandığı Paris və Londondan sonra üçüncü riyazi mərkəzə çevrildi. Hər il dərnəkdə çətin və maraqlı məsələlər həll edilirdi, onların yerinə isə yeniləri yaranırdı.



İohann Bernulli (1667-1748)



Yakob Bernulli (1654-1705)

Bazel universitetinə qəbul olduqdan sonra, Eyler İohann Bernullinin mühazirələrini dinləyir və onun oğulları – Nikolay və Daniel ilə dostlaşır. Amma gənc alimlər yaşa dolanda məlum oldu ki, İsveçrə onlar üçün kiçikdir. Amma uzaq Rusiyada *I* Pyotrun fikrinə və Leybnitsin layihəsinə görə 1724-cü ildə Peterburq Elmlər Akademiyası yaradıldı. Rus alimlərinin sayı çox deyildi və üç dost – Leonard Eyler və Daniel və Nikolay Bernulli qardaşları, səadət və elmi qəhrəmanlıqlar sorağında ora yollanırlar.

Yeni mühitdə Eyler nələrlə məşğul olmaq məcburiyyətində qalmadı! O, rus əhalisinin siyahıya alınma məlumatlarını işlədi (bu nəhəng işi o təkbaşına gördü). O, əldə edilmiş xarici diplomatik depeşlərin şifrələrini açırdı (məlum oldu ki, riyaziyyatçılar şifrəni digər mütəxəssislərdən fərqli olaraq daha tez və yaxşı açırlar). O, cavan dənizçilərə ali riyaziyyat, astronomiya, eləcə də gəmiqayırmadan və yelkənli gəmidən tufanda istifadə etməkdən dərs deyirdi. Artilleriya döyüşü üçün lazımi hesablama və Ayın hərəkət cədvəlini (axı uzaq səfərdə Ay adətən uzunluğu təyin etmək üçün saat rolunu oynayırdı) tərtib edirdi.



Daniel Bernulli (1700-1782)



Nikolay Bernulli (1695-1726)

Yalnız dahi bu əməklərlə yanaşı elmi unuda bilməzdi. Eyler dahi idi. 14 il ərzində (1727-1741) o, dünyada nəzəri mexanikaya aid ilk dərsliyi (Tələbələrə Nyutonun çətin kitablarından dərs deməyəcəkdi ki!), eləcə də riyazi naviqasiya kursunu və digər elmi əsərləri yazdı. Eyler adi və anlaşılan dildə, asan və tez yazırdı. Bu sürətlə də yeni dilləri mənimsədi, amma ədəbiyyata maraq göstərməzdi. Riyaziyyat onun bütün zamanını və gücünü əlindən alırdı.

26 yaşında Eyleri rus akademiki seçdilər, səkkiz il sonra Peterburqdan Berlinə köçür. Nə baş verirdi? Anna İoannovnanın hakimiyyəti başa çatmışdı və saray çevrilişlərinin yeni dalğası başlamışdı. Amma bunun Eylerə birbaşa aidiyyatı yox idi. Peterburqda alman olmaq həm təhlükəsiz, həm prestijli idi. Amma o, artıq özünü Avropanın güclü riyaziyyatçılarından biri hesab edirdi və birdən burada öz elmi haqqında danışmağa həmsöhbət tapa bilmədiyini hiss etdi. Gəlmə əcnəbi gənclərin yarısı böyümüş, vəhşi, təhlükəli Rusiyanı tərk etmişdi, yarısının isə cari işlərə başı qarışmışdı. Birinci rus alimlərinin nəsli isə hələ yetişməmişdi (Yada salaq ki, Lomonosov onda

Almaniyada təhsil alırdı). Eyler, elmi diskusiyaların yüksək olduğu yerə köçməyi qərara alır. O, Berlini seçdi – *II* Fridrix Parisdəkindən geri qalmayan elmi mərkəz yaratmağı qərara almışdı.

Eyler Berlində əsrin dörddə birini keçirdi (1741-ci ildən 1766-cı ilə qədər) və bu illəri ömrünün ən yaxşı illəri hesab edirdi. Onun yenə də çoxlu sayda alim dostları tapılır, onların sırasında Berlin elmlər akademiyasının prezidenti Pyer Lui Moro de Mopertyui (1698-1759) var idi. O, fizik və coğrafiyaçı idi, Nyutonun Yer kürəsinin qütblərdə yastılanma hipotezini yoxlayırdı. Bunun üçün o, Laplandiyada meridianın dərəcə uzunluğunu ölçürdü, bu işi eyni zamanda onun həmkarları Cənubi Amerikada yerinə yetirirdi. Mopertyui fərz edilən çoxlu sayda trayektoriyaların içindən, cisimlərin (məsələn, çevrə və parabola) real hərəkətinin trayektoriyasını göstərən, ən az hərəkət prinsipini – təbiətin yeni riyazi qanununu kəşf edərək Nyutonu üstələmək istədi.



Pyer Lui Moro de Mopertyui (1698-1759)

Mopertyuinin ideyası yaxşı idi, amma onun riyazi məğzi çox mürəkkəb oldu və Eylerin köməyinə ehtiyacı oldu. O, başa düşdü ki, yeni qanun variasiya hesabı sahəsinə aiddir. Eyler bu hesablamanı 1740-cı ildə kəşf etdi. Mopertyuinin prinsipi yeni elmin ilk müqəddiməsi oldu. Eyler ona gözəl əlavələr etdi. O, qeyd etdi ki, təbii riyazi şərtlər yalnız minimal trayektoriyaya deyil, həm də maksimal hərəkətə yol verir. Doğrudur, mexanikada maksimumlar nədənsə müşahidə edilmir, amma fizikanın başqa sahələrində kim bilir?

Eylerin fərziyyələri yalnız *XX* əsrin sonunda fiziklərin, quruluşunu və davranış qanunlarını dəyişməyə qadir, qeyri-tarazlıqlı sistemləri öyrənməyə başlayanda təsdiq olundu. Məlum oldu ki, sistemin simmetriyasının dəyişməsində ifadə olunan belə keçidlər, ekstremal hərəkətin (əsasən maksimal) trayektoriyası ilə təsvir edilir.





L.Eylerin "Sonsuzluqların analizinə giriş" əsərinin titul vərəqi (sağda) və birinci səhifəsi. 1748-ci il

Eyler müxtəlif problemlərlə məşğul olurdu və demək olar ki, həmişə uğur qazanırdı. Məsələn, kompleks dəyişənlərdən ibarət riyazi analizin üsullarını funksiyalara keçirmək fikrinə düşdü, beləliklə, kompleks dəyişənli elementar funksiyalar nəzəriyyəsini yaratdı. Eyni zamanda aydın olur ki, üstlü funksiya (eksponent) və sinusoid eyni medalın iki üzüdür. Bu qüvvət sıraları ilə sübut edilən aşağıdakı düsturla ifadə edilir:

$$e^{it} = cost + isint.$$

Eksponent və sinusoida "bacı" olduqlarından *e* (ən rahat loqarifmlərin əsası) və π (çevrənin uzunluğunun diametrə olan nisbəti) ədədləri arasında gözəl bir əlaqə yaranır. *e*-nin irrasionallığı müqayisədə sadə yolla sübut edilir (həddən artıq rahat 1+1/1!+ +1/2!+1/3!+... sırası bu ədədə yığılır), o zaman yəqin ki, bu yol π-nin irrasional olduğunun isbatına gətirib çıxaracaq. Amma qoy cavan riyaziyyatçılar bu qədim problemi həll etsinlər, Eylerin isə yetərincə şöhrəti var idi. Alim belə hesab edirdi və yanılmamışdı: 1766-cı ildə İohann Henrix Lambert π ədədinin irrasionallığının sübutunu tapdı.

Fermanın böyük teoremi ilə də eyni cür oldu. Onun haqqında eşidən Eyler itmiş isbatları bərpa etmək fikrinə düşür. Tezliklə o, bir əsr öncə Ferma kimi ("Böyük Ferma teoremi" məqaləsinə bax) enmə üsulunu tapır. Onu 3 və 4 dərəcə üçün yoxladıqdan sonra Eyler növbəti dərəcəyə - 5-ə

üz tutur. Bu zaman çətinliklər meydana gəlir və o bu teoremi cavan tədqiqatçıların öhdəsinə buraxır.

Həndəsədə Eyleri yeni faktlardan çox Evklidin doqmatikasına yerləşməmiş ümumi teoremlər maraqlandırırdı. Məsələn, qabarıq çoxüzlünün təpə nöqtələrinin, til və üzlərinin sayını göstərən ədədlər arasındakı əlaqə haqqında teorem: $B-P+\Gamma=2$. bu düsturu Dekart da bilirdi, amma onun sübutunu qoymamışdı. Eyler çox asanlıqla sübut tapdıqdan sonra fikrə getdi: əgər düstur bütün qabarıq cisimlər üçün doğrudursa, o zaman nəyin xüsusiyyətini ifadə edir? Bəlkə istənilən çoxüzlünü deformasiya etmək mümkün olduğu sferanın? O, zaman üzlər "ölkələrə", tillər isə "sərhədlərə" çevriləcək. Əgər belədirsə, o zaman düstur çətin ki, digər tor və krendel kimi qapalı səthlərə çəkilmiş "xəritələr" üçün də düzgün olsun. Yoxlama göstərdi ki, $B-P+\Gamma$ ifadəsi tor üçün 0, krendel üçün isə – 2 nəticəsini verir. Amma bu bərabərlikləri verilən səthlərdə bütün xəritələr üçün sübut edə bilməyən Eyler yenə də məsələnin həllini gələcək nəsillər üçün saxladı. Uğuru isə 1890-cı ildə Anri Puankare qazandı.

1766-cı ildə Leonard Eyler Berlini tərk edərək Rusiyaya qayıtdı. Yeni Rusiya imperatoru, alman mənşəli *II* Yekaterina, alimə simic və kaprizli *II* Fridrixdən daha yaxşı həyat şərtləri təklif etdi. Eyler qocalırdı və bu təklifi qəbul etdi. Elmi gənclər cəmiyyəti artıq onu cəlb etmirdi. O, "qızıl" Berlin çağında ağlına gəlmiş saysız fərziyyə və kəşfləri kağıza köçürmək arzusunda idi. Bu insanın əmək qabiliyyəti və həvəsi təəccüb doğurur: Avropanın bütün elmi jurnalları daima Eylerin yeni məqalələrini nəşr edirdi, bununla yanaşı alimin bir çox elmi əsəri onun sağlığında işıq üzü görmədi.

Peterburqa köçdükdən sonra alim kor olur. İnadkar qoca işləməyə davam edir – məqalə və kitabları diktə edirdi. Beləliklə, ömrünün 77-ci, kor olmasının 16-cı ilində ölənə qədər çalışır.

Rusiya paytaxtında olduğu dövrdə Eylerin ətrafında yarıdan çoxu rus alimlərindən ibarət, Peterburq riyaziyyat məktəbi yaranır. Elə həmin illərdə onun əsas nəşri olan diferensial və inteqral hesabının əsasları (demək olar ki, bütün Avropa riyaziyyatçıları bu kitabdan təhsil alırdı) trilogiyası başa çatdı. O, Evklidin "Başlanğıclar", Nyutonun "Natural fəlsəfənin riyazi əsasları" əsərindən fərqlənirdi. Riyazi təhlilin binasının təməlini qoyarkən, Eyler özünün keçdiyi yol və cığırları aradan götürmədi. Bir çox ilkin mülahizə və ideyalarının sübutları mövcud səhvlərə baxmayaraq, Eyler fikrinin davamçıları üçün mətndə qorunub saxlanılmışdı. İlk dərslik davamçılara deyil, tədqiqatçılara ünvanlanmışdı – bu, Leonard Eylerin və bütün gələcək əsr və xalqların vəsiyyəti idi.

XIX ƏSR: ABSTRAKTIN MƏNİMSƏNİLMƏSİ

QAUSS, ABEL VƏ QALUANIN KƏŞFLƏRİ

Əgər cəbr uzun əsrlər boyu tənliklərin həlli ilə məşğul idisə, *XIX* əsrdə onun məqsədi cəbri strukturları öyrənmək oldu. Abstraksiyanın bu yeni mərhələsi ilkin növbədə böyük alman riyaziyyatçısı Karl Fridrix Qaussun (1777-1855) işləri ilə bağlıdır. Onun, 1801-ci ildə nəşr edilmiş, əsrarəngiz "Cəbri tədqiqatlar" əsəri müasir riyaziyyatın yaranışından xəbər verirdi.



Karl Fridrix Qauss (1777–1855)

Qauss hələ Qədim Yunanıstan riyaziyyatçılarının üzərində çalışdığı məsələnin üzərində işləyirdi: düzgün çoxbucaqlının pərgar və xətkeşin köməyi ilə qurmaq üçün neçə tərəfi olmalıdır? Qədim yunanlar 3, 4, 5, 6, 8, 10, 15 sayda tərəfləri olan çoxbucaqlı qururdular. Onlar həmçinin, məlum düzgün çoxbucaqlının tərəflərini ikiqat artırmağı bilirdilər. Bəs pərgar və xətkeşin köməyi ilə 7, 9, 11, 13 tərəfli çoxbucaqlı qurmaq olarmı? İki min il ərzində riyaziyyatçılar bu suala cavab tapa bilmədilər.

1796-cı ilin mart ayının 30-da 19 yaşına bir ay qalmış Qauss gündəliyində çox vacib bir qeyd etdi. O, sübut etdi ki, pərgar və xətkeşin köməyi ilə düzgün 17 bucaqlı qurmaq olar. O zaman gənc, Höttengen universitetinə daxil olmuşdu və hələ həyatını riyaziyyat və ya filologiyaya həsr edəcəyini qərara almamışdı.

"Cəbri tədqiqatlar" əsərində Qauss belə bir teorem verir: əgər n – sadə ədəddirsə və $n-1=p_1p_2\ldots p_\kappa$ $n-1$ ədədinin sadə vuruqlara ayrılışıdırsa, onda $x^n-1=0$ tənliyinin həlli p_1, p_2, …, p_κ dərəcəli κ sayda tənliyin həllinə gətirilir. Xüsusi halda, $n-1=2^m$ olarsa, $x^n-1=0$ tənliyi kvadrat tənliklər zənciri halına gətirilir.

Əyani sübut üçün aşağıdakı misalı göstərək:

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0.$$

Buradan $x-1=0$ və ya

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0.$$

Sonuncu tənliyi x^2-na bölək:

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0.$$

$z=x+\frac{1}{x}$ (*) əvəzləməsi edərək,

$z^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$ olduğunu nəzərə alsaq,

$z^2+z-1=0$ tənliyini alırıq,

(*) – tənliyindən isə x üçün

$$x^2-zx+1=0$$

tənliyini alırıq. $x^5-1=0$ tənliyinin həlli iki kvadrat və bir xətti tənliyin həllinə gətirilmişdir.

$x^{17}-1=0$ (yəni $n-1=2^4$) dörd kvadrat tənliyə gətirilir və deməli, düzgün 17 bucaqlını pərgar və xətkeşin köməyi ilə qurmaq olar. Qauss sübut etdi ki, $n-1$ ədədinin 2-dən fərqli böləni varsa, $x^n-1=0$ tənliyini silsilə kvadrat tənliklərə gətirmək olmur. Deməli, çevrəni 7, 11, 13, 19 hissəyə bölmək olmur.

"Cəbri tədqiqatlar" *XIX* əsr riyaziyyatçılarının stolüstü kitabına çevrildi. Axı burda yalnız parlaq nəticələr deyil, həm də cəbri tənliklərin araşdırılması üçün yeni riyazi aparat mövcud idi.

Qeyd edək ki, hələ Qədim Çayarası riyaziyyatçıları kvadrat tənlikləri həll etməyi bacarırdılar, *XVI* əsrdə İtaliyada üçüncü və dördüncü dərəcəli tənliklərin kökü üçün düsturu tapmışdılar. Beşinci dərəcəli tənliklərin kökləri düsturunun axtarışı uğur qazanmadı. 1770-ci ildə fransız riyaziyyatçısı Jozef Lui Laqranj (1736–1813) "Tənliklərin cəbri həlli haqqında mülahizələr" əsərində ilk dörd dərəcə üçün mövcud olan həll üsullarının, niyə görə beşinci dərəcə üçün yaramadığı səbəbini tənqidi baxışdan keçirdi. Laqranj ilk dəfə tənliklərin kökü qrupunu nəzərdən keçirdi ("Qruplar" məqaləsinə bax), bu nəzəriyyənin "tənliklərin həllində əsl metafizika" olduğunu göstərdi.

1824–1826-cı illərdə gənc Norveç riyaziyyatçısı Nils Henrik Abel (1802–1829) sübut etdi ki, $n\geq 5$ dərəcəli tənliklərin həlli üçün ümumi düstur mövcud deyil. Bununla yanaşı bəzi tənliklər radikallarda həll oluna bilir, bəziləri isə yox. 1829-cu ildə Abel, vaxtsız ölümünə qədər "Tənliklərin, cəbri yolla həll olunan, xüsusi sinifi haqqında memuar"əsərini nəşr etdirdi.

Cəbr sahəsində yeni böyük kəşfləri gənc fransız alimi Evarist Qalua (1811–1832) etdi. Laqranjın, Qauss və Abe=lin ideyalarını inkişaf etdirərək $x^n+a_2x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0$ tənliyinin radikalda həll olunmasını müəyyən etmək məsələsini qoydu və həll etdi. O, Qrup və meydan anlayışlarını daxil edərək, yüksək dərəcəli birməchullu tənliklərin daha sadə cəbri tənliklərə gətirilməsi şərtlərini və beləliklə də, radikallarla həll edilə bilən cəbri tənliklər sinifini müəyyənləşdirdi. Evarist Qalua 20 yaşında dueldə ölüb. Öz nəticələrini iki qısa memuarda 1830-cu ildə və dueldən bir gecə əvvəl yazılan məktubda təsvir etmişdir.



Jozef Lui Laqranj (1736–1813)



Nils Henrik Abel (1802–1829)

Qaluanın nəzəriyyəsinin riyaziyyatçılara aydın olması üçün əsrlər lazım oldu. Bu haqda 1870-ci ildə fransız alimi Kamil Jordan "Cəbri tənliklər və əvəzetmələr haqqında traktat" əsərində danışmışdır. Cəbr-



Evarist Qalua (1811–1832)

də dəyişikliklər baş verdikcə Qaluanın şöhrəti artırdı.

1854-cü ildə ingilis riyaziyyatçısı Artur Keli (1821–1895) qrupun istənilən *a* və *b* üçün *ax=b, ya=b* tənliklərinin biqiymətli həllini, vahidin mövcudluğunu və assosiativlik şərtlərini təmin edən məlum kompozisiya qanunlu, ixtiyari təbiətli obyektlərin sonlu çoxluğu kimi ümumi tərifini verdi. 1898-ci ildə alman alimi Henrix Veber (1842–1913) qrupun aksiomatik tərifini formalaşdırdı.

Qruplar nəzəriyyəsinin yaradıcıları cəbri tənliyin radikallarda həlli problemindən çıxış edərək qrupları öyrənirdilər. İndi isə qruplar elmin bir çox sahələrində: diferensial tənliklər nəzəriyyəsində (Li qrupları), fizikada (Lorens qrupu), həndəsədə (çevirmələr qrupu) vacib rol oynayırlar.

HƏNDƏSƏNİN "FƏRZİYYƏLƏRİ"

Beləliklə, *XIX* əsrdə cəbr tədqiq edilən obyektlərin təbiətindən getdikcə daha çox abstraktlaşdırılırdı. Bu cür inqilabi dəyişikliklər həndəsədə də baş verirdi. Bu dəyişikliklər K.F.Qaussun, N.İ.Lobaçevskinin, Y.Bolyay və B.Rimanın ("Lobaçevskinin həndəsəsı" məqaləsinə bax) adları ilə bağlı idi.

B.e.ə. *III* əsrdə Evklid həndəsənin aksiom sistemini təsvir etdikdən sonra, alimlərin diqqəti uzun əsrlər boyu beşinci postulat adlandırılan paralellər aksiomuna yönəlmişdi. Onun tərifləndən biri belə səslənir: *ABM* müstəvisi üzərində *M* nöqtəsindən *AB* düz xəttinə paralel olan yalnız bir düz xətt keçirmək olar. Riyaziyyatçılar ya paralellər haqqında aksiomu daha sadə aksiom ilə əvəz etməyə, ya da "Başlanğıclar" əsərinin digər aksiomlarına əsaslanaraq, onu teorem kimi isbat etməyə çalışırdılar. Bununla yanaşı, *XIX* əsrə qədər beşinci postulatın həqiqiliyinə, Evklid həndəsəsinin yeganə mümkün həndəsə olduğuna, nə də onun real fiziki dünyanı təsvir etdiyinə heç kim şübhə etmirdi.

Qauss 1792-ci ildə paralellər nəzəriyyəsinə müraciət etdi. Əvvəlcə o, beşinci postulatı isbat etməyə çalışdı, amma sonra yeni qeyri-evklid adlanan həndəsənin qurulması haqqında fikrə gəldi. 1817-ci ildə məktublarından birində alim etiraf edirdi ki: "Mən getdikcə bizim həndəsənin labüdlüyünün sübut olunmasının mümkün olmadığı fikrinə gəlirəm". Amma bu fikirləri heç kimin anlamayacağından qorxduğu üçün dilə gətirmirdi. Qauss öz nəticələrindən heç birini dərc etdirmədi, halbuki məktub və şəxsi sənədlərindən aydın görünür ki, qeyri-evklid həndəsəsinin əsaslarını hazırlamışdı.

Kazan universitetindən Nikolay İvanoviç Lobaçevski (1792–1856) və macar riyaziyyatçısı Yanoş Bolyay (Boyai) yeni həndəsənin yaradıcılarından oldu. Qaussdan fərqli olaraq, onlar öz ideyalarını yaymağa üstünlük verirdilər, amma riyaziyyatçıların çoxu bu ideyaları qəbul etməyə hazır deyildilər.

Yanoş Bolyayın nəticələri 1832-ci ildə atası Farkaş Bolyayın kitabına əlavələrində qısa şəkildə verilmişdi. Y.Bolyayın "Mütləq həqiqi, Evklidin *XI* aksiomunun (heç bir zaman həll olunmayacaq) həqiqi və ya yalan olmasından asılı olmayan, fəza haqqında elmdən ibarət olan əlavə" əsərini, adətən qısa olaraq "Appendiks" (əlavə) adlandırırlar. Bu əsəri oxuyan Qauss öz tələbəsi, riyaziyyatçı Herlinqə yazırdı: "Mən gənc həndəsəçi fon Bolyayı birinci dərəcəli dahi hesab edirəm". Amma F.Bolyaya məktubunda o, Yanoşun əsəri haqqında bir az təvazö davrandı: "Bir neçə söz oğlunun əsəri haqqında demək istərdim. Əgər mən bu işi tərifləməli olmadığımdan başlasam, sən əlbəttə, təəccüblənərsən, amma mən başqa cür hərəkət edə bilmərəm, çünki bu əsəri tərifləmək özümü tərifləmək deməkdir: əsərin bütün məzmunu, oğlunun keçdiyi yol, aldığı bütün nəticələr demək olar ki, mənim 30-35 il əvvəl əldə etdiyim nailiyyətlərimlə tamamilə üst-üstə düşür". Müasirlərindən dəstək görmədiyi üçün, Bolyay riyaziyyatla məşğul olmaqdan imtina etdi. O, qeyri-evklid həndəsəsi ümumi rəğbət qazanmadan bir neçə il öncə dərin depressiya içində dünyasını dəyişdi.

Lobaçevski öz həndəsi tədqiqatlarının nəticələrini ilk dəfə 1829-cu ildə "Həndəsənin əsaslarına dair" əsərində dərc etdirdi. Sonradan o, bu ideyaları bir çox əsərlərdə

inkişaf etdirərək, yalnız rus dilində deyil, eləcə də fransız və alman dillərində nəşr etdirdi. Alim cəsarətlə Evklidin həndəsəsi ilə yanaşı fərzi adlanan həndəsənin də mövcud olduğundan yazırdı. Onun fikrincə yalnız təcrübə hansı həndəsənin real məkanda yeri olduğunu həll edəcək.

Evklidin beşinci postulatını Lobaçevski aşağıdakı ilə əvəz etdi: əgər *AB* düz xətti və onun üzərində yerləşməyən *M* nöqtəsi verilibsə, bu zaman *ABM* müstəvisində *M* nöqtəsindən *AB* xəttinə paralel olan iki düz xətt keçirmək olar. Lobaçevskinin həndəsəsindən bir neçə teorem misal göstərək:

Üçbucağın bucaqlarının cəmi 180°-dən azdır. O, bir üçbucaqdan digərinə keçdikdə dəyişir.

Oxşar üçbucaq cütü yoxdur.

Düz xətt üzərində olmayan istənilən üç nöqtədən çevrə keçirmək olmaz.



M.V. Ostroqradski (1801–1867)

Heç bir düzbucaqlı mövcud deyil.

Bu iddialar müasirlərə qəribə və əsassız görünürdü. Rusiyanın məşhur riyaziyyatçıları – M. V.Ostroqradski və V.Y.Bunyakovskiy yeni həndəsəyə qarşı çıxdılar. Həmkarlarının tənqidi münasibəti Lobaçevskini yolundan döndərə bilmədi. O, bütün mənfi rəy və istehzalara baxmayaraq, tədqiqatlara davam edirdi.

Qaussun ölümündən sonra qeyri-evklid həndəsəsi barədə fikirləri və Lobaçevskinin əsərləri barədə rəğbətlə danışdığı məktubları dərc edildi. Məsələn, 1846-cı ildə Qauss yazırdı: "Lobaçevski fənn haqqında əsl həndəsi ruhda bir alim kimi danışır. Mən sizin diqqətinizi, oxuduqda böyük məmnuniyyət duyacağınız "Paralel xətlər nəzəriyyəsinə dair həndəsi tədqiqatlar" əsərinə yönəltməyi özümə borc bilirəm".

Əvvəlcə qeyri-evklid həndəsəsi, əsrarəngiz dünyanın təsvir edildiyi nağıla bənzəyirdi. Bu həndəsə harada tətbiq edilir? O, təzadlardan ibarət deyilmi? Yeni həndəsənin yaradıcıları hesab edirdilər ki, riyazi abstraksiyalar ətraf mühitin reallıqlarını əks etdirməlidir və təcrübələr əsasında fiziki məkanın həndəsəsinin xüsusiyyətləri barədə suallara cavab tapmağa ümid edirdilər. Lobaçevski məsələn, astronomik məlumatlar əsasında bucaqlarının cəminin 180°-yə bərabər olmadığı "kosmik üçbucaqlar"ın sahələrini ölçməklə məşğul oldu. Lakin 180° -dən bütün kənara çıxmalar müşahidələrin dəqiqliyi çərçivəsində oldu. Bu zaman alim onun həndəsəsinin mikrodünyanı təsvir etdiyi haqqında fərziyyə irəli sürdü.

Nəticədə riyaziyyatçılar qeyri-evklid həndəsəsinin interpretasiya məsələsini çözdülər, fizika alimləri isə onun nəticələrindən tədqiqatlarda istifadə etməyə başladılar. Qeyd etmək lazımdır ki, yeni ideyaların əsasında Qaussun yaratdığı səthlər nəzəriyyəsi dururdu.

Qauss uzun müddət geodeziya ilə məşğul olmuşdur: meridianın qövsünü ölçərək, Hannover krallığının geodezi çəkilişlərini aparırdı. O, çöl-ölçmə işləri təşkil edir, özü də iştirak edərək, çətin hesablamalar aparırdı. Nəticədə o, riyaziyyatın yeni bölməsini – səthlərin daxili həndəsəsini kəşf etdi. 1828-ci ildə Qauss "Səthlərin əyriliyi haqqında ümumi tədqiqatlar" əsərini çap etdirərək, ilk dəfə olaraq Qauss əyriliyi anlayışını meydana çıxardı.

Qaussun tədqiqatlarını, Derptedə (indiki Tartuda) yaşayan, mənşəcə alman olan rus riyaziyyatçısı Ferdinand Qotliboviç Mindinq (1806–1885) davam etdirdi. O, əyrilik anlayışını öyrənirdi. Əyriliyi sıfıra bərabər olan səth sadə müstəvidir. Əyriliyi sabit və müsbət olan səthi kürə üzərinə yerləşdirmək olar. Mindinq sabit mənfi əyriliyə malik səthi nəzərdən keçirdi – və bu səthlərdəki üçbucaqlarda triqonometrik münasibətləri kəşf etdi.

Göründüyü kimi, Lobaçevski "Fərzi həndəsə" kitabında üçbucaqlar üçün Mindinqin fərzi sferada üçbucaqlar üçün çıxardığı triqonometrik funksiyaları çıxardı. Amma əvvəlcə alimlər bu bənzərliyi görmədilər. Uzun illər sonra 1868-ci ildə italyan riyaziyyatçısı Eudcenio Beltrami (1835–1900) bu bənzərliyə diqqət yetirdi və sübut etdi ki, Lobaçevskinin müstəvinin məhdud hissəsinin həndəsəsi fərzi sfera üçün də keçərlidir. Beltraminin verdiyi açıqlamalar qeyri-evklid həndəsəsini anlamağa və qə-



Bernhard Riman (1826–1866)

bul etməyə kömək etdi.

Bernhard Riman (1826–1866), Almaniyadan olan bir riyaziyyatçıdır, səthləri öyrənməkdən fəzanın tədqiqinə keçmişdir. 1854-cü ilin iyulunda Höttingen Universitetində Qaussun iştirak etdiyi bir toplantıda "Həndəsənin əsasında duran hipotezlər" adlı mühazirə oxudu. Rimanın müasirləri onun, qısa şəkildə ifadə edilmiş dərin və cəsarətli fikirlərini asanlıqla qəbul etmədilər. Mühazirə yalnız 1868-ci ildə onun ölümündən sonra dərc edildi. Fəzanın əyriliyi anlayışı Rimanda – Qaussun səth əyriliyinin ümumiləşdirilmiş forması idi. Əyriliyin sıfıra çevrilməsi bütün hallarda evklid fəzasını xarakterizə edir. Daimi müsbət əyrili ikiölçülü fəza həndəsəsi sfera həndəsəsi ilə, daimi mənfi əyrili fəza həndəsəsi isə Lobaçevskinin həndəsəsi ilə üst-üstə düşür.

Qaussun, Lobaçevskinin, Rimanın kəşfləri insan təfəkküründə sahəsində inqilabı – məkan və zamana fiziki baxışın dəyişməsini tərənnüm edir. Artıq *XX* əsrin başlanğıcında xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi yaradılmış və onun Lobaçevskinin həndəsəsi ilə əlaqəsi müəyyən edilmişdir. 1916-cı ildə Eynşteyn Qaussun səthlərin daxili həndəsəsinə dair əsərlərinə və Rimanın həndəsəsinin riyazi aparatına istinad edərək, ümumi nisbilik nəzəriyyəsini qurdu.

KLEYNİN "ERLANGEN PROQRAMI"

Hələ qədim Yunanıstanda astronomiya məsələlərinə gətirib çıxaran sferik həndəsə məlum idi. Coğrafi xəritələrin tərtibi ellipsoidin müstəvidə təsviri üsullarını tapmağı tələb edirdi. Rəssamlar, memarlar, mühəndislər proyeksiyalama qaydalarını hazırlayırdılar. 1822-ci ildə fransız riyaziyyatçısı və mühəndisi, Jan Viktor Ponsele (1788–1867) "Fiqurların proyektiv xassələri haqqında traktat" dərc etdirdi. O, "layihələşdirmə zamanı dəyişməyən" xassələri tədqiq edirdi. Aydındır ki, pyoksiyalarda uzunluq və bucaqlar saxlanılmır, amma bir düz xətt üzərində yerləşən nöqtələr və kəsişən xətlər olduğu kimi qalır. Fiqurların xassələrini tədqiq etmə ideyası buradan irəli gəlmişdir.

Evklidin və Lobaçevskinin həndəsələrinin bərabərhüquqlu olduğu meydana çıxdıqdan sonra, mövcud olan bütün həndəsi sistemləri təsnifetmə zərurəti yarandı. Bu məsələni alman riyaziyyatçısı Feliks Kleyn (1849–1925) həll etdi.

Kleyn öz fikirlərini 1872-ci ildə bildirdi. Erlangen Universitetinin professoru vəzifəsinə təyin edildikdən sonra, o, "Erlangen proqramı" adı altında məşhur olan "Yeni həndəsi tədqiqatların müqayisəli icmalı" mövzusunda mühazirə oxudu.

Kleynə görə bu və ya digər həndəsənin qurulması üçün çoxlu sayda element və çevrilmələr qrupu vermək lazımdır. Həndəsənin vəzifəsi verilən qrupda bütün dəyişikliklər zamanı invariant qalan elementlər arası münasibətləri öyrənməkdən ibarətdir. Məsələn, Evklid həndəsəsi fiqurların hərəkət zamanı dəyişməyən xassələrini öyrənir. Amma başqa növ həndəsi çevirmələr də vardır: konform, kəsilməz, xətti və s. Konform həndəsədə dairələri dairələrə çevirərək, bucaqları saxlayan çevirmələr araşdırılır. Topologiya kəsilməz, affin həndəsəsi – xətti çevirmələri öyrənir. Kleyn qeyd etmişdir ki, əgər iki çevirmənin hasili olaraq, bu çevirmələrin ardıcıl yerinə yetirilməsini hesab etsək, evklid hərəkətləri, oxşarlıq çevirmələri, Afinn, proyektiv, konform çevirmələri, qeyri-evklid hərəkətləri qrup əmələ gətirir.

Kleynin proqramı cəbrin və həndəsənin yeni sintezini yaratdı, belə ki, *XX* əsrdə bu iki fənnin qarşılıqlı müdaxiləsi daha dərin oldu.

Kleynin hazırladığı həndəsələrin təsnifatına Rimanın fundamental ideyaları daxil deyildi. Kleyn çevirmələrin qrupunu öyrənirdi. Riman isə həndəsənin vəzifəsini fəzaları öyrənməkdə görürdü. Onun tədqiqatları əsasında *XX* əsrdə riyaziyyata metrik və topoloji fəzalar anlayışı daxil oldu, riyaziyyatın, riyazi analizin əsas əməliyyatlarının: diferensiallama, inteqrallamanın ümumiləşdirildiyi – funksional analiz bölməsi yaradıldı.

NİKOLAY İVANOVİÇ LOBAÇEVSKİ

Nikolay İvanoviç Lobaçevski 1792-ci ildə Nijniy Novqorodda anadan olub. Onun doqquz yaşı olanda ailəsi Kazana köçdü. Burada Nikolayı "dövlət hesabına" gimnaziyaya verdilər.

1807-ci ildə 14 yaşlı Nikolay Lobaçevski iki il öncə açılmış Kazan Universitetinin tələbəsi oldu. Burada Qaussla yaxından tanış olan Martin Feodoroviç (İohann Martin Kristian) Bartels kimi çox yaxşı riyaziyyatçılar dərs deyirdi. Müəllimlər kursda əsasən iki tələbəni seçirdilər: İvan Simonovu (sonradan o Kazan Universitetinin professoru oldu) və Nikolay Lobaçevskini. 1812-ci ildə təqdim edilmiş Dekan tərəfindən verilmiş rəydə deyilirdi: "Baxmayaraq ki, Simonov riyazi elmlərdən yaxşı xəbərdardır, Lobaçevski incə məsələlərdə üstündür". Universitetin Dekanı hesab edirdi ki, Lobaçevski "gələcəkdə şöhrət tapmaya bilməz".



Nikolay İvanoviç Lobaçevski (1792–1856)

Lobaçevskinin karyerası sürətlə inkişaf edirdi. Onu 1814-cü ildə Bartelsin tövsiyyəsi ilə adyunkt (professorun köməkçisi) təyin etdilər, iki il sonra 23 yaşında ekstraordinar professor (dosent adına bərabərdir) seçilir. 1822-ci ildə Lobaçevski ordinar professor olur.

Pedaqoji fəaliyyətinin ilk 10-12 ili ərzində oxuduğu kursların siyahısında 10 addan çox mövzu vardır: ədədlər nəzəriyyəsi, müstəvi və fəza triqonometriyası, analitik və xətti həndəsə, astronomiya, diferensial və inteqral hesabı, fizika, statika və dinamika və b. Gördüyümüz kimi cavan professor yalnız riyaziyyatın müxtəlif sahələrinə dair deyil, eləcə də fizika və astronomiya üzrə də mühazirələr oxuyurdu. O, çox səliqəli mühazirəçi idi.

Bir dəfə Kazan Universitetinə I Aleksandr tərəfindən təsdiq edilmiş təlimat gəldi: "Nəzəri və təcrübi fizikanı tədris edən professor, kurs boyunca Allahın müdrikliyinə və onun möcüzələrini dərk etmək üçün bizim hisslərimizin və vasitələrimizin məhdudluğuna istinad etməlidir". Çətin ki, o dövrdə "Nəzəri və təcrübi fizika" kursunu tədris edən Lobaçevski bu təlimata uyurdu.

O, artıq 1817-ci ildən başlayaraq üç il idi ki, ən çətin problemlərdən olan – Evklidin paralellər haqqında beşinci postulatının isbatı ilə məşğul olurdu. Mühazirələrdə o, tələbələrinə, düz xətdən kənarda yerləşən nöqtədən cari xəttə yalnız bir paralel xətt keçirmək olar təklifini isbat etmək cəhdlərindən danışırdı. Beşinci postulatın problemini bir çox məşhur alimlər tədqiq etmişlər, amma bu məsələnin ifadəsi hər kəs üçün aydın olduğu üçün belə tədqiqatlara əl atanlar da az deyildi. Lobaçevski ona xüsusi məna verirdi. O, yazırdı ki, paralellər haqqında məsələ "indiyə qədər məğlubedilməz sayılır, amma bununla yanaşı özündə bütün şübhələrdən uzaq, elm üçün dəyərli olan həqiqətləri birləşdirir".

Əvvəlcə Lobaçevski bütün digər riyaziyyatçılar kimi sübutları əksdən axtarmağa başladı. Bu yolla o, bir çox iddialar irəli sürdü, onlardan bəziləri, bir az qəribə də səslənsə köklü təzad şəklində olmadı. Bundan başqa Lobaçevski başa düşdü ki, bu "fərzi" həndəsə alışdığımız məzmuna malik olmasa da, bizim təcrübəmizlə təkzib edilə bilməz.

1826-cı ilin fevralında Lobaçevski yeni həndəsənin ixtirası barədə birinci əsəri yazıb, universitetdəki əməkdaşlarına verəndə cavab gəlmədi. Əsər özü isə qeyb oldu.

1829-cu ildə "Kazanskiy vestnik" jurnalı Lobaçevskinin qeyri-evklid həndəsəsi haqqında əsər dərc etdi. Əsərə verdiyi rəydə məşhur riyaziyyatçı M.V.Ostroqradski yazırdı: "Müəllif deyəsən elə yazmağı qərara alıb ki, onu heç kim anlamasın. Əgər bu beladirsə, o öz məqsədinə çatıb: kitabın böyük bir hissəsi mənim üçün bu kitabı görməyəcəyim halda sirli qalacağı kimi anlaşılmaz qaldı".

Dahilər hər zaman öz zamanlarını qabaqlayırlar. 30-40 ildən sonra Lobaçevskinin həndəsəsinin, Evklidin həndəsəsi qədər bərabərhüquqlu və bizi əhatə edən mühiti öyrənməkdə vacib addımlardan biri olduğunu sübut edən əsərlər meydana gələcək. Amma *XIX* əsrin 20-ci illərinin sonunda Lo-

başevskı çox çətin vəziyyətdə qaldı. Onu anlamır, hətta mühakimə belə edirdilər, o dövrün məşhur riyaziyyatçıları, onun əməkdaşları əsər haqqında istehzalı, bəzən isə təhqiredici rəylər verirdilər. Bu, alimin xarakterini yoxlamaq üçün əsl sınaq idi. Lobaçevskı bu sınaqdan şərəflə çıxdı. Birinci böyük məqalənin ardınca bu mövzuda olan bir neçə əsər meydana çıxdı. Bununla o, qeyri-evklid həndəsəsinin ixtiraçısı Qaussdan çox fərqləndi. "Riyaziyyatçılar şahı" 30 ilə yaxın zamanda paralellər nəzəriyyəsi ilə məşğul olur və qeyri-evklid həndəsəsinin bərabərhüquqlu olması nəticəsinə gəlsə də, bu nəticələri dərc etdirmirdi.

Amma Qauss Lobaçevskinin sağlığında elmi nəticələrinin qəbul edilməsinin yeganə halında vacib rol oynamışdır. 1842-ci ildə Nikolay İvanoviç Höttingen elmi cəmiyyətinə (elmlər akademiyasına) müxbir üzv seçildi. Seçilmə və diplom Qauss tərəfindən imzalanmışdı.

Lobaçevskinin Qaussa verdiyi cavaba nəzər yetirək: "Məni, cavabı bu qədər ləngitməyimə görə bağışlayın, bunun günahı şəhərdə baş verən yanğındır; bu həm mənim səhhətimi korladı, həm də bir sıra xidməti iş meydana çıxardı". Alimə mötəbər elmi cəmiyyətə üzv seçilməyini xəbər verirlər, o isə yanğına görə cavabı gecikdirir.

Məktubda Lobaçevskinin şəxsiyyətinin daha bir tərəfi üzə çıxır. Doğrudan da, riyazi istedad və elmə olan qeyri-adi məhəbbət onda ictimai borc təsəvvürləri ilə uzlaşırdı.

Artıq 25-30 yaşlarında rəsədxanaya başçılıq edir, riyaziyyat fakültəsində dekan idi. Uzun illər Universitet kitabxanasına rəhbərlik etmişdir. Kitabxananın elmdə necə böyük rol oynadığını anlayan Lobaçevskı kitab seçmək və almaq üçün Peterburqa şəxsən özü gedirdi. Universitetin memarlıq komitəsinin sədri kimi yeni tədris korpuslarının tikilişinə rəhbərlik edirdi.

1827-ci ildə Lobaçevskini kazan Universitetinin rektoru seçdilər. Daha sonra o, bu vəzifəyə 6 dəfə təkrar olaraq seçilərək, 20 il ərzində rektor oldu. Bu vəzifədə Lobaçevskı çox böyük həvəs və maraqla hər şeylə: elmi və tədris işləri ilə, maliyyə məsələləri və memarlıqla məşğul olurdu. 1835-ci ildə vəba epidemiyası və 1842-ci ildə adıçəkilən yanğın zamanı xüsusilə çətin oldu.

1846-cı ildə hakimiyyət Lobaçevskini rektor vəzifəsindən azad etdi. 1852-ci ildə onun böyük oğlu dünyasını dəyişdi. Ailənin maliyyə vəziyyəti ciddi şəkildə pisləşdi. Ölümündən bir az öncə Nikolay İvanoviç görmə qabiliyyətini itirdi. Kazan Universitetinin 50 illiyinə həsr edilmiş "Ümum həndəsə" əsərini o tam kor olduğu halda tələbələrinə diktə etmişdir. Lobaçevskı 1856-cı ildə vəfat etmişdir.

1828-ci ildə Lobaçevskı rektor olmasının bir illiyində sonradan məşhur olan "Tərbiyənin vacib predmetləri" nitqini söylədi. O deyirdi: "Misallar izahlar və kitablardan daha yaxşı öyrədir". Nikolay İvanoviç Lobaçevskinin həyatı vətənə və elmə xidmətin ən bariz nümunəsidir.

XX ƏSR

ƏSRLƏRİN QOVŞAĞINDA

1900-cü ilin avqust ayının 8-də Parisdə keçirilən ikinci Beynəlxalq riyazi konqressdə Höttingendən cavan professor, sonralar isə dahi riyaziyyatçıya çevrilən David Hilbert çıxış edirdi. Riyaziyyata həsr edilmiş məşhur mühazirəsini o, bu sözlərlə başladı "Arxasında gələcəyimizin gizləndiyi pərdəni kim qaldırıb, gözucu olsa belə qarşımızdakı əsrin elmi nailiyyətlərini görmək istəməz ki?".



David Hilbert (1862–1943)

O zaman *XX* əsrin astanasında keçən əsrə nəzər salaraq, Yerin gələcəyini çox gözəl təsəvvür etmək olardı. Sanki ədalət və ağıl erası başlanırdı. Bu gün isə biz yüz il bundan əvvəl əcdadlarımızın etdiyi kimi keçən əsrə nəzər salırıq. Nə görürük?

Xoş güzərana olan ümid doğrulmadı: – *XX* əsrdə bir çox faciələr, təbii fəlakətlər baş verdi, zəhərlənmiş çaylar və qurudulmuş dənizlər, mənəviyyatın süqutu, dəhşətli cinayətlər, atom partlayışları, arası kəsilməyən müharibələr... Bütün bunlar həqiqət idi. Bu əsr eyni zamanda həm dəhşətli, həm də yaddaqalan idi.

Elm üçün *XX* əsr yaddaqalan oldu. Bu yüzillikdə riyazi nailiyyətlər əvvəlki iki minillikdən üstün idi.

Riyaziyyatla məşğul olmanın müxtəlif nəzər nöqtələri mövcuddur. *XIX* əsrdə iki məşhur alim – fransız riyaziyyatçısı Jozef Furye və alman alimi Karl Yakobi arasında mübahisə meydana gəldi. Furye hesab edirdi ki, riyaziyyatın məqsədi – təbiəti anlatmaqdan ibarətdir. Yakobi isə cavabında riyaziyyatın məqsədinin insan şüurunu təmsil etmək olduğunu bildirirdi. Prinsipcə hər ikisini haqlı saymaq olardı. Bundan başqa son üç yüzillikdə riyazi tədqiqatların məqsədi praktiki əlavələrdən – mühəndislik, konstruktiv, iqtisadi və s. ibarət idi. Nəhayət, riyaziyyat bütün dövrlərdə dünyanın fəlsəfi anlamına təsir edirdi.

XX əsr riyaziyyatı bütün istiqamətlərdə vüsət tapdı.

RİYAZİ MƏKTƏBLƏR

XX əsrin birinci yarısında riyaziyyat əsasən milli çərçivədə inkişaf edirdi. Əvvəlki yüzillikdə olduğu kimi əsas rol fransız və alman riyazi məktəblərinə məxsus idi, amma artıq dünya birliyinə italyan, macar, Avstriya, İsveç alimləri də qoşuldular. Hələ *XIX* əsrin ortalarında Rusiya, əsasən də Peterburq məktəbi inkişaf etməyə başladı. Amerika qitəsində ilk böyük riyaziyyatçılar meydana gəldi, Polşa riyazi məktəbi formalaşmaqda davam edirdi.

Sonralar isə riyaziyyat beynəlxalq elmi cəhətlərə malik olmağa başladı. Hilbertin, riyaziyyatçı üçün bütün dünyanın vahid bir ölkə anlamını verməsi haqqında fikri özünü doğrultmağa başladı.

Elmin təkamülünü dahi alimlərin yaradıcılığını nəzərdən keçirməmiş müşahidə etmək mümkün deyil. *XX* əsrin birinci yarısında mühüm rol oynamış riyaziyyatçıların adlarını çəkək.

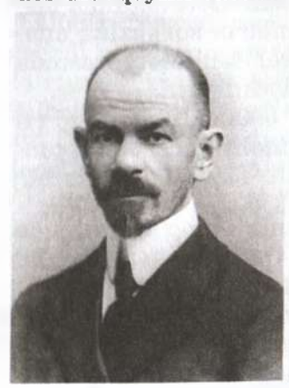
Əsas yeri David Hilbert (1862–1943) tuturdu. Alman riyazi məktəbini həmçinin Herman Veyl (1885–1955). Felikx Kleyn (1849–1925), Herman Minkovskiy (1864–1909), Emmi Nöter (1882–1935), Felikx Hausdorf (1868–1942) kimi alimlər də tərənnüm edirdilər.

Fransız Jül Anri Puankare (1854–1912) – bütün dövrlərin elm dahilərindən biri idi. Puankaredən sonra Fransa riyaziyyatçılarının arasında Jan Adamar (1865–1963) böyük ehtirama layiqdir. Fransız riyaziyyatçılarının sırasında Emil Borel (1871–1956), Jan Qaston Darbu (1842–1917), Eli Jozef Kartan (1869–1951), Anri Leon Lebeq (1875–1941), Pol Montel (1876–1975) və Emil Pikarın (1856–1941) adlarını çəkmək olar.

İtalyan riyazi məktəbini VitoVolterra (1860–1940) və Tulio Levvi-Çivita (1873–1941), İsveç məktəbini Maqnus Gösta Mittaq-Löfler (1846–1927) və Erik İvar Fredholm (1866–1927), ingilis məktəbini isə Hodfri Harold Hardi (1877–1947), Con İdenzor Litlvud (1885–1977), Bertran Rassel (1872–1970), rus məktəbini Aleksandr Mixayloviç Lyapunov (1857–1918) və Andrey Andreyeviç Markov (1856–1922), Amerika məktəbini Corc Deyvid Birkhof (1884–1944) və Osvald Veblen (1880–1960) təmsil edirdilər.

Qeyd etmək lazımdır ki, yüzilliyin birinci yarısını da iki dövrə – 1914–1918-ci illərin Birinci dünya müharibəsinə qədər və sonra - bölmək lazımdır. Müharibədən sonra, ən çox fransız məktəbinə təsir edən nəsillərin dəyişməsi baş verdi. Almaniyada hakimiyyətə gəlmiş faşistlər alman elmini yerlə yeksan etdilər. Bir çox cavan istedadlı alimlər Avropadan Amerikaya köçdü, bunun nəticəsində yeni riyazi məktəblər və istiqamətlər yarandı.

Moskva riyazi məktəbi gözlənilməz inkişaf dövrü keçdi, 30-cu illərdə dünyada lider mövqeyini tutdu. Onun əsasını Dmitriy



Dmitriy Fyodoroviç Yeqorov (1869-1931)



Nikolay Nikolayeviç Luzin (1883-1950)

Feodoroviç Yeqorov (1869–1931) və Nikolay Nikolayeviç Luzin (1883–1950) qoydu.

XX ƏSR RİYAZİYYATINDA ELMİ İSTİQAMƏTLƏR

XX əsr riyaziyyatında hansı istiqamətlərin üstünlük təşkil etməsi barədə təsəvvürü Paris konqresinin seksiyalar siyahısı yaradır. Bu əsas dörd: riyaziyyat və cəbr; analiz; həndəsə; mexanika və riyazi fizika, eləcə də iki: tarix və biblioqrafiya; tədris və metodologiya seksiyaları idi.

O dövrdən bəri elmdə baş verən dəyişikliklər barədə məlumatı müasir konqreslərdəki seksiyalar siyahısı aydınlaşdırır: riyazi məntiq və riyaziyyatın əsasları; cəbr; ədədlər nəzəriyyəsi; həndəsə; topologiya; cəbri həndəsə; kompleks analiz; Li qrupları; həqiqi dəyişənli və funksional analiz; ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistika; xüsusi törəməli diferensial tənliklər; adi diferensial tənliklər, riyazi fizika; hesablama metodları və hesablama nəzəriyyələri; diskret riyaziyyat və kombinatorika; informatikanın riyazi aspektləri; qeyri-təbiət elmlərində riyazi tətbiq; riyaziyyat tarixi; riyaziyyatın tədrisi.

Adı çəkilən riyazi bölmələrdən bir çoxları *XX* əsrdə yaranmışlar. *XIX–XX* əsrlərin qovşağında, riyaziyyatda aparıcı rollardan oynayacaq üç istiqamət: funksional analiz, topologiya və funksiyalar nəzəriyyəsi meydana gəlmişdir.

Funksional analiz. Hələ *XVIII* əsrdə xətti tənliklərin həll sistemi üçün metodlar işlənib hazırlanmışdır. *XIX* əsrin sonunda sonlu sayda məchulu olan xətti tənliklər sistemi nəzəriyyəsi və onların sonsuzluq analoqları – xətti inteqral tənliklər arasında analogiyanın olduğu aydınlaşdı.

Həlledici addımı 1900-cü ildə İsveç riyaziyyatçısı İvar Fredholm atdı. Xətti tənliklər sisteminin həlli metodlarını tətbiq edərək və limitə keçidi tətbiq etməklə, o,

$$x(t) - \lambda \int_b^a K(t,\tau)x(\tau)d\tau = y(t)$$

tipli tənliklərin həll olunması şərtlərini və həll alqoritmlərini tapdı. Bu, sonsuz ölçülü fəzalarda cəbri və həndəsi elementləri özündə birləşdirən nəzəriyyələrin yaradılması üçün stimul rolunu oynadı.

Beləcə xətti funksional analiz meydana gəldi.

Funksional analizin əsas bölməsi isə təməlini Hilbertin qoyduğu kvadratik formalar nəzəriyyəsi oldu. Kvadratı inteqrallama bilən $\int_b^a x^2(t)dt < \infty$ funksiyalar küllisi Hilbert fəzası adını aldı (onu *L* ilə işarə edirlər). Nəticədə Hilbert fəzasında kvadratik formaların nəzəriyyəsi Kvant mexanikasının riyazi bazasına çevrildi.



Georq Kantor (1845-1918)

Topologiya. "Topologiya" termini riyaziyyatın iki bölməsinə aid edilə bilər. Yaradıcısı Puankare olan topologiyanı uzun müddət kombinator adlandırırdılar. Arxasında alman alimi Georq Kantorun (1845–1918) adı duran digəri isə ümumi və ya nəzəri-çoxluq adını daşıyırdı.

Kombinator topologiya – həndəsənin bölməsidir. O, həndəsi fiqurların qarşılıqlı birqiymətli və kəsilməz inkası zamanı dəyişməyən xüsusiyyətlərini öyrənir. Uzun müddət topologiya, həyatdan uzaq, yalnız "insan əqlini tərənnüm edən" bir elm kimi qəbul edilirdi. Amma bizim dövrdə aydın oldu ki, dünyavi münasibətlərin izahı ilə birbaşa əlaqəsi vardır.



Pavel Sergeyeviç Aleksandrov (1896-1982)

Ümumi topologiya çoxluqlar nəzəriyyəsinə birləşir və riyaziyyatın əsasında durur. Bu aksiomatik nəzəriyyə "sərhəd", "yığılma", "kəsilməzlik" və s. kimi anlayışları öyrənir. Topoloji fəzanın aksiomatik əsasları Feliks Hausdorf tərəfindən qoyulmuş və rus riyaziyyatçısı Pavel Sergeyeviç Aleksandrov (1896– 1982) tərəfindən başa çatdırılmışdır.

Funksiyalar nəzəriyyəsi. Əsrin əvvəlində fransız Anri Lebeq ölçü və inteqral nəzəriyyəsinin qurulmasını tamamladı. *XIX* əsrdə O.Koşi və B.Rimanın ardınca $\int_b^a f(x)dx$ inteqralını riman cəmlərinin sərhədi (limiti) kimi anlayırdılar.

İnteqralın yuvarlaqlaşdırılmış ifadəsi kimi

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

tipli ifadə (burada x_i, $[a;b]$ parçasının $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ nöqtələri ilə bölünməsində $[x_{i-1}; x_i]$ parçasının müəyyən nöqtəsidir) götürülürdü.

Lebeq başqa cür hərəkət etdi. O, absis oxunu deyil, ordinat oxunu nöqtələrə $\ldots < y_{i-1} < y_1 < \ldots$ bölürdü və bunu kəsilən *f* funksiyasının $[x_{i-1}\ \ x_i]$ parçasında adekvat təqdim edilməsi üçün x_i nöqtəsini seçməyin mümkünsüz olması ilə əsaslandırırdı. Amma funksiya yetərincə mürəkkəb olarsa, absis oxu üzərində $y_{i-1} \le f(x) < y_i$ olan E_i çoxluğu qəribə görünəcək. Buna görə də inteqral nəzəriyyəsini qurmaq üçün ölçü nəzəriyyəsindən başlamaq, yəni belə çoxluqları ölçməyi öyrənmək lazım idi. Bunu isə Borel və Lebeq etdilər.

E çoxluğunun ölçüsü ([0,1] parçasında) aşağıdakı kimi müəyyən edilir. *E*-ni üstələyən intervalların uzunluqları cəminin aşağı sərhədini yuxarı hədd adlandıraq. Yuxarı hədd istənilən çoxluq üçün təyin edilmişdir. Əgər bu çoxluğun yüksək həddinin və onun tamamlayıcısının yüksək həddinin cəmi vahidə bərabərdirsə, o zaman *E* çoxluğu Lebeq mənada ölçülə biləndir. Bu zaman *E* yüksək həddini Lebeqin çoxluq ölçüsü adlandırırlar və mes *E* ilə işarə edirlər.

Rimanın inteqral üçün hesablama cəmlərini Lebeq

$$\sum_i \eta_i\ mes\, E_i,$$

(burada η_i $[y_{i-1}, y_i]$ parçasının hər hansı bir nöqtəsidir) ilə əvəz etdi. O, öz üsulunun üstünlüyünü çox ifadəli tərzdə xarakterizə etmişdir. Lebeq yazırdı ki, – "Koşinin üsulunda təcrübəsiz bir məmurun apardığı kimi əməliyyat aparılır, yəni pul və kredit kağızları elə gəldikcə hesablanır. Biz isə təcrübəli bir məmur kimi əməliyyat apararaq deyirik: mənim 1 x mes E_1 dəyərində olan bir frankлıq mes E_1 pulum var, mənim 2 x mes E_2 dəyərində olan iki frankлıq mes E_2 olan pulum var, mənim 5 *x mes* E_5 dəyərində olan beş frankлıq mes E_5 olan pulum var. Beləliklə, mənim 1 *x mes* E_1 +2 *x mes* E_2 +5 *x mes* E_5..... frankım var. Düzdür həm birinci, həm də ikinci məmur eyni nəticəyə gələcəklər. Amma cəmlər sayı sonsuz olduğu halda iki metodun fərqi əsaslıdır". Ölçü nəzəriyyəsinin bazasında funksiyalar nəzəriyyəsində yeni – funksiyaların metrik nəzəriyyəsi meydana gəldi.

Çoxluqlar nəzəriyyəsi də transformasiyaya uğradı. Üç fransız alimi – Borel, Lebeq və Rene Lui Ber çoxluqların deskritiv nəzəriyyəsinin, yəni ədədi çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsasını qoydular.

20-ci illərdə funksiyaların nəzəriyyəsində aparıcı rol N.N.Luzinin və onun şagirdlərinin: P.S.Aleksandrovun, N.K.Larinin, A.N.Kolmoqorovun, D.E.Menşovun, M.Y.Suslinin, A.Y.Xinçinin təmsil etdiyi rus məktəbinə keçdi.

Riyaziyyatın abstrakt bölmələrinin inkişafı. İnsan təfəkkürünü tərənnüm etmə istəyi bir çox alimlərin səyini istiqamətləndirdi. Amma qeyd etmək lazımdır ki, bəzən bu istək onları reallıqla heç bir əlaqəsi olmayan dərinliklərə də aparırdı.

XX əsrin birinci yarısında bütün riyaziyyatın aksiomatik quruluş konsepsiyası yarandı. Bu konsepsiyaya uyğun olaraq akademik Andrey Nikolayeviç Kolmoqorovun (1903–1987) sözlərinə görə "bütün riyaziyyatın əsasında Georq Kantorun yaratdığı çoxluqlar nəzəriyyəsi durur". Çoxuna elə gəlirdi ki, Kantorun tədqiqatları nəticəsində riyaziyyat daha səliqəli və vahid – yəni Hilbertin "cənnət" adlandırdığı kimi olmalı idi. Çoxluqlar nəzəriyyəsində təzadlar meydana gəldiyini görən riyaziyyatçılar şübhəyə düşərkən Hilbert: "Heç kəs bizi Kantor cənnətindən qova bilməz!" – deyə, vurğuladı.

Aksiomatik metodun inkişafı riyaziyyatın əsaslarını tənqidi şəkildə nəzərdən keçirmə labüdlüyünü yaratdı. Kolmoqorov yazırdı: "Geniş və bəzən tamamən abstrakt nəzəriyyələrin qurulmasında, onların yaranma hallarını əhatə edən, yalnız perspektiv onil-

lıkdə tətbiq ediləcək nəhəng materialı, nəzəriyyənin çatışmazlığı haqqında birbaşa siqnalları gözləmək olmaz. Bunun əvəzində sübutların ciddiliyini tələb edən elm tərəfindən cəmlənən, insan təfəkkürünün topladığı bütün təcrübəyə müraciət etmək lazımdır".

Hilbert elementar həndəsənin, Kolmoqorov isə ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik quruluşunu yaratdı. Bundan sonra bir çox aksiomatik nəzəriyyələr inkişaf etməyə başladı.

30-cu illərin sonlarında bütün riyaziyyatı aksiomatik əsasda qurmaq arzusu ilə mətbuatda Nikola Burbaki təxəllüsü altında çıxış edən bir qrup fransız riyaziyyatçısı birləşdi. Təməl olaraq çoxluqlar nəzəriyyəsini götürdülər. Sonra birinci mərtəbə quruldu: nizamlanmış strukturlar, cəbr, ümumi topologiya, ölçü nəzəriyyəsi. Sonra ikinci mərtəbəni tikmək lazım oldu, burada isə cəbri və həndəsi strukturlar birləşməli oldu. Bu cəhd həll edilməmiş qaldı, belə ki, məqsədin özü utopik idi.

20-ci illərdə cəbr qeyri-adi inkişafa çatdı, riyaziyyatın cəbrləşdirilməsi baş verdi. Bu prosesə vasitəçi olaraq əsasən alman riyaziyyatçısı Emmi Nöterin və onun şagirdi holland alimi Bartel Lendert Vander-Vardenin (1903–1996) adını çəkmək lazımdır.

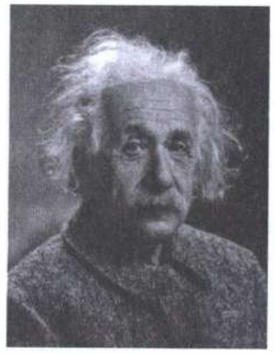
RİYAZİYYAT VƏ FİZİKA

XIX əsrdə sanki fizika – elmin bitmiş sahəsinə bənzəyirdi. Deyilənlərə görə bir cavan oğlan, müəllimə fizika ilə məşğul olmaq istədiyini deyir, müəllim isə oğlana fizikanın heç bir perspektivi olmadığını deyir. Demək olar ki, açıq səmada yalnız iki kiçik bulud – Maykelsonun təcrübəsi (o, işığın sürətinin Yerin hərəkətindən asılı olmadığını sübut etmişdir) və şüalanma qanunlarından başqa heç bir şey yoxdur. Tezliklə onlar da seyrələcək və fizika sahəsində heç bir iş qalmayacaq.

Bir neçə ildən sonra birinci buluddan nisbilik nəzəriyyəsi, ikincidən isə – Kvant mexanikası yarandı.

Xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi 1905–1906-cı illərdə Albert Eynşteyn və Puankarenin səyləri ilə yarandı. Bu nəzəriyyə ilə təsvir edilən fiziki dünyanın quruluşu adət edilən tərzdə deyildi. Onlar son üç əsrdə yaranmış təsəvvürlərlə təzad təşkil edirdilər. Məsələn "əkizlər paradoksunu" nəzərdən keçirək. Onlardan biri Yerdə yaşayır, digəri isə yüksək sürətli raket ilə kosmik səyahətə çıxır. Geri qayıtdıqdan sonra özü heç dəyişmədən getdiyi kimi cavan qayıdan qardaş, digərini ahıl bir qoca kimi görür – axı Yerdə və kosmik raketdə zaman fərqli keçir.

Amma xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinin Lobaçevskinin həndəsəsi ilə əlaqəsinin meydana çıxması riyaziyyatçıları ilhama gətirdi. Çünki bir çoxlarına cansıxıcı görünən nəzəriyyənin bütün dünyavi təsəvvürlərin əsasında durduğu göründü.



Albert Eynşteyn (1879-1955)

On il sonra Eynşteyn, müstəvi dünya haqqında bütün mülahizələri devirən ümumi nisbilik nəzəriyyəsini yaratdı. Dünya həndəsəsi "əyilmiş" və cazibə ilə əlaqəli olaraq meydana çıxdı. Bir nöqtədən digərinə hərəkət edən cihazların göstəricilərinin hərəkət trayektoriyasından asılı olduğu meydana çıxdı. Əyilmiş səthlərdə paralel keçirmələr həndəsənin əsas anlayışlarından biri olan – rabitəlilik ilə müəyyən edilir. Bu italyan məktəbinin həndəsə alimlərinin (Levi-Çivita və b.) tədqiqat predmeti oldu. Bütün bu hadisələr 20-ci və 30-cu illərdə həndəsənin intensiv inkişafına gətirib çıxardı.

Elə həmin dövrdə elm dünyasını başqa – Kvant mexanikasının yaranması "şoku" gözləyirdi. Elm dünyasının o dövrə qədər dəyişməz olan bastionlarından biri – gələcəyin keçmişə görə təyini, yəni determenizm prinsipi darmadağın edilirdi. Məlum oldu ki, mikro dünya öncədən müəyyən edilə bilinməz. Qeyri-müəyyənlik prinsipinə uyğun olaraq biz eyni zamanda elementar zərrəciklərin vəziyyətini və sürətini dəqiq öyrənə bilmərik. Bu hətta Kvant nəzəriyyəsinin əsasını qoyanlardan biri olan Eynşteyn kimi dahiyə də mümkünsüz görünürdü. O, "Mən zər atan Allaha inanmıram" – deməkdən yorulmurdu.

İş elə gətirdi ki, Kvant mexanikasının riyazi əsasları elmin yaranmasından bir qədər əvvəl Hilbert və onun sələfləri tərəfindən yaradılmışdı. Əsasən Hilbertin sonsuz ölçülü kvadratik formalar nəzəriyyəsi mikro dünyanın təsvirində – iki yanaşmanın – Heyzenbergin matrisa mexanikasının və Şrödingerin dalğa mexanikasının bərabərliyini müəyyən etdi.

1905-ci ildə Eynşteyn üç əsər dərc etdirdi. Onlardan biri xüsusi nisbilik nəzəriyyəsinə, ikincisi – Kvant mexanikasına, üçüncüsü isə – broun hərəkətinə həsr edilmişdir. İlk iki problem haqqında çox danışılıb, indi isə üçüncü haqqında söhbət gedəcək.

Broun hərəkətinin riyazi nəzəriyyəsini Kolmoqorov yaratdı. Burada Furyenin tədqiqatları ilə öyrənilməyə başlanan istilik nəzəriyyəsi, Eynşteyn –Smoluxovskinin broun hərəkəti nəzəriyyəsi və əsası Markov və Viner tərəfindən qoyulmuş ehtimal nəzəriyyəsinin nəticələri birləşmişdi.

Xüsusi törəməli tənliklər nəzəriyyəsi yüksək həddə çatdı. Puankare yazırdı: "Hər bir fiziki nəzəriyyə... tənlikləri yeni tərzdə işıqlandırır. Bu nəzəriyyələrsiz biz xüsusi törəməli tənliklərin nə olduğunu bilməzdik". Riyaziyyatın, mexanikanın və fizikanın müxtəlif sahələrinə daxil olması geniş cəbhələrdə gedirdi. Riyaziyyatçı alimlər bir çox fiziki nəzəriyyələrin – turbulentlik, fövqəl keçiricilik və s. işlənməsində fəal iştirak edirdilər.

RİYAZİYYAT VƏ HƏRBİ-SƏNAYE KOMPLEKSİ

Riyaziyyat həmçinin bəşəriyyəti ümumdünya fəlakətlərinə qədər gətirib çıxaran işlərdə belə iştirak etdi. Müxtəlif ölkələrin alimləri yeni növ silahların yaranmasında və hərbi əməliyyatların aparılmasında iştirak etmişdilər.

Təyyarəqayırma sahəsində olan tələblər aerodinamikanın inkişafına və əsrin əvvəlində uçuş nəzəriyyəsinin yaranmasına gətirib çıxardı. Bu elmin klassikləri arasında – "rus aviasiyasının atası" N.Y.Jukovskiy və onun davamçıları – S.A.Çaplıgin, V.V.Qolubev dururdu. Uçuş nəzəriyyəsinin yaradılması üçün kompleks dəyişənli funksiya nəzəriyyəsini tətbiq edir və inkişaf etdirirdilər.

Suüstü və sualtı donanmanın quruculuğu ilə gəmiçilik (A.N.Krılov), hidroskopiya (A.Y.İşlinskiy) sahəsindəki nailiyyətlər, hesablama metodlarının nəzəriyyəsinin inkişafı ilə əlaqədar idi.

Viner və Kolmoqorov ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox əlavələri ilə, əsasən də artilleriya atəşi və qumbara atma ilə məşğul olmuşdular. Məxfi məlumatların şifrələnməsi və ötürülmə effektinin yüksəldilməsi üçün riyaziyyatın yeni bir bölməsi – informatika nəzəriyyəsi (K.Şenon) meydana çıxdı. Uzaq uçuşlu raketlərin konstruksiya edilməsi optimal idarəetmənin (L.S.Pontryaqin, R.Bellman), eləcə də tətbiqi və adi riyaziyyatın bir çox sahələrinin inkişafını stimullaşdırdı. Tətbiqi riyaziyyat atom proqramına da xidmət edirdi.

İki sosial sistemin qarşıdurması texnikanın inkişafına, sonra isə kompüterləşmə ilə əlaqəli informasiya partlayışına səbəb oldu. İlk kompüterlərin hazırlanması və yaradılmasında riyaziyyatçıların rolu danılmazdır.

RİYAZİYYAT VƏ ELMİ DÜNYAGÖRÜŞÜ

XX əsrin böyüklüyü ətraf mühit haqqında mövcud olan bütün fikirləri dəyişərək alt-üst etməsindən ibarət oldu. Riyaziyyat burda da əsas rollardan birini oynadı.

Əsrin əvvəlində sanki elm dünyanın yaranışının izahına yaxın idi. Alimlər əmin idilər ki, Kainat daimidir, onun zaman və məkan daxilində nə əvvəli, nə də sonu var. Onlar hesab edirdilər ki, Yer, onun üzərindəki həyat və hətta bizim indi gözümüz önündə olan bütün icadlar da təbii yolla meydana gəlmişdir.

Amma Eynşteynin ümumi nisbilik nəzəriyyəsi kosmologiyanın inkişafına, Böyük Partlayış nəzəriyyəsinə – Kainatda həyatın başlanğıc anının olmasına gətirib çıxardı. Məlum oldu ki, Kainat məkanın genişlənməsinə baxmayaraq məhduddur.

Günəş sisteminin yaranması nəzəriyyələrinin bir çoxunda dərin çatışmazlıqlar müəyyən edildi. Ən sirlisi isə Yerdə həyatın yaranması və təkamülü, insanın yaranma tarixidir. Kainatın quruluşu və yaranması barədə ləngər vurmuş təsəvvürlərin yerində müasir alimlər rasional bir versiyanı yaratmağa çalışırlar, amma qeyd etmək lazımdır ki, onların uğur şansları xələflərindən azdır.

Determinizm məsələsinə qayıdaq. Postnyuton natural fəlsəfəsinin əsas tezisi dünyanın diferensial tənliklərlə idarə edilməsindən, başqa sözlə desək, tamamən müəyyən olmasından ibarət idi. Məsələn, Pyer Simon Laplasa qulaq asaq: "İstənilən an üçün, təbiəti canlandıran bütün qüvvələrin və onların tərkib hissələrinin məlum olduğu ağıl, onları analiz etmək üçün Kainatın cisimlərini, bütün atomlarının hərəkətləri ilə bərabər bir hərəkət formulunda əhatə edərdi; onun üçün yoxlanılmamış heç bir şey qalmazdı və gələcək də keçmiş kimi gözümüz önündə canlanardı".

Laplasın dövründə dünya Qayda şahlığı kimi təsəvvür edilirdi, burda hər şey məlum idi. Və yalnız bu dünyanın kiçik bir hissəsi "əks hüquqlu" idi, Xaosun ağalıq etdiyi bu məkan şans oyunları idi. Paskal, Ferma, Y.Bernuli və Laplasın özü təsadüfün ilkin qanunlarını təsvir etdilər.

Amma Xaosun sahəsi genişlənirdi. Təsadüflər haqqında elm – ehtimal nəzəriyyəsi – inkişaf edir və möhkəmlənirdi. *XX* əsrdə P.L.Çebışevin, A.M.Lyapunovun, A.A.Markovun, S.N.Bernşteynin və A.N.Kolmoqorovun səyləri nəticəsində o, tamamən formalaşdı və təbiətin təfsirində daha böyük yer tutmağa başladı. Hələ yarım əsr bundan öncə fikirləşmək olardı ki, Xaosun və Qaydanın sərhədləri bir-biri ilə ortaq ölçülüdür. Amma bizim dövrdə alimlər Nyuton-Laplas nəzəriyyəsinə tamamən zidd olan bir nəzəriyyəni, hər şeyin Xaos olması nəzəriyyəsini tərənnüm edirlər. Bunun üçün onların yetərincə əsasları vardır.



Norbert Viner (1894-1964)

40-cı illərdə riyaziyyatda yeni istiqamət – informasiya nəzəriyyəsi yarandı. Amerika alimi Norbert Viner (1894–1964) informasiya nənəzəriyyəsini kibernetika (yunan dilində "idarə bacarığı") adlandırdığı daha geniş fənnə daxil etdi. Bu elmin yaranması bir çox fəlsəfi konsepsiyaların açıqlanması ilə, əsasən də təfəkkürlə əlaqədardır. İnsan təfəkkürünün modelləşdirmə ideyası irəli sürüldü. Təfəkkürə malik süni məxluqların yaradılma imkanı – müasir fəlsəfənin problemlərindən biridir və *XX* əsrin sonlarında meydana çıxmışdır.

Və nəhayət, əsrin əvvəlində meydana gələn fəlsəfənin məhək daşı – dünyanın dərk edilmə imkanı deyəsən məhv edilmişdi. Hər halda "bütün problemlərin həll edilmə" probleminin prinsipial həll edilməzliyi sonralar Amerikaya mühacir olmuş Kurt Hödel (1906–1978) tərəfindən 30-cu illərdə müəyyən edildi.

BƏZİ RİYAZİ PROBLEMLƏR VƏ ONLARIN HƏLLİ

"Ümumi riyaziyyat elminin inkişafı üçün məna kəsb edən müəyyən problemlərin dərin məğzini və ayrı-ayrı tədqiqatçıların əsərlərində oynadıqları rolu təkzib etmək olmaz" – bu sözləri Hilbert riyazi problemlərin formalaşmasına dair mühazirəsinin giriş hissəsində söyləmişdir.

XX əsr ötən dövrlərdən bir neçə böyük problemi miras aldı. Onların ən qədimi *XVII* əsrdə qoyulmuş – $n>2$ olduqda $x^n+y^n=z^n$ diofant tənliyinin natural ədədlərdə həll edilməzliyi barədə Fermanın teoremi idi. Holdbaxın və Eylerin iki məşhur teoremi ədədlər nəzəriyyəsinə *XVIII* əsrdən gəlmişdi. Doğrudurmu ki, 6-dan böyük istənilən natural ədəd iki sadə ədədin cəmidir? Bu sualla 1742-ci ildə H.Holdbax L.Eylerə müraciət etdi. Eyler isə qeyd etdi ki, qoyulmuş suala cavab vermək üçün, hər bir cüt ədədin iki sadə ədədin cəmi olduğunu sübut etmək kifayətdir.

XIX əsr problemlərindən ən məşhuru Kantorun qoyduğu kontinum problemidir: elə bir çoxluq varmı ki, onu birqiymətli olaraq vahid parçaya inkas etdirmək mümkün olsun, amma bu vahid parçanı birqiymətli olaraq bu çoxluqda təsvir etmək mümkün olmasın?

Hilbert *XX* əsrdə riyaziyyatın perspektivlərini əks etdirəcək 23 problem qoydu. Bir çox məsələlərdə o, uzaqgörən davransa da, bəzi hallarda intuisiyası onu yanıltdı. Bu isə yuxarıda danışılan, dünyaya "optimist" baxışdan irəli gəlirdi. İnsan təfəkkürünün sərhədsiz imkanlarını Hilbert "Biz bilmək istəyirik və biz biləcəyik" aforizmində ifadə etdi.

Hilbertin bəzi problemləri üzərində dayanaq. Onun siyahısında birinci yerdə kontinum problemi dururdu. Ona müraciət edərək, Hilbert onun həllinin bu və ya digər yöndə: bəli və ya xeyr, həlli imkanını nəzərə alırdı. Amma məlum oldu ki, o, riyazi məntiqin və çoxluqların ümum qəbul edilmiş aksiomatik nəzəriyyəsi ilə nə təsdiq, nə də təkzib edilə bilməz. Onun təkzibedilməzliyini 1936-cı ildə Hödel, tərs teoremi isə 1963-cü ildə Amerika riyaziyyatçısı Pol Koen (1934-cü ildə anadan olmuşdur) sübut etdi.

Hər bir müəyyən riyazi problemin mütləq həlli olduğuna əminlik Hilberti 10-cu problemi qoymağa sövq etdi: "Verilmiş tənliyin sonlu sayda əməliyyatdan sonra rasional ədədlərdə həllinin olub-olmadığını müəyyən etməyə imkan verən üsul göstərmək". Başqa sözlə 10-cu problem belə səslənir: verilən tam əmsallı n dəyişənli P çoxhədlisinə görə, $P=0$ tənliyinin tamədədli kökünün olub-olmaması alqoritminin varlığını sübut etmək. 1970-ci ildə Yuriy Vladimiroviç Matiyaseviç (1947-ci ildə anadan olub) tələb olunan alqoritmin olmadığını sübut etdi.

Hilbert üç dəyişənlinin, iki dəyişənlinin funksiyasından daha mürəkkəb olduğundan elə əmin idi ki, hətta aşağıdakı hipotezi səsləndirdi: üç dəyişəni olan hər hansı konkret funksiyanın, iki dəyişəni olan kəsilməz funksiyaların superpozisiyası şəklində göstərilməsi mümkün deyil (13-cü problem). Onu 1957-ci ildə Kolmoqorov və Vladimir İqoreviç Arnold (1937-ci ildə anadan olmuşdur) təkzib etdilər. Aydın oldu ki, yalnız bir, həm də sadə bir iki dəyişəni $(x, y) \to x + y$ olan funksiyanın və bir dəyişəni olan kəsilməz funksiyanın köməyi ilə n sayda dəyişəni olan funksiyanı bərpa etmək olar.

Fermanın problemi 1995-ci ildə ("Böyük Ferma teoremi" məqaləsinə bax) həll edildi. Holdbaxın problemi demək olar ki, 1937-ci ildə yetərincə böyük natural ədədin üç sadə ədədin cəmi olduğunu sübut edən İvan Matveyeviç Vinoqradov (1891-1983) tərəfindən həll edildi. Eylerin problemi *XX* əsrin sonunda da həll edilməz qaldı.

HESAB ƏLİFBASI

MÖVQELİ SAY SİSTEMLƏRİ

Dükana gələn alıcı müxtəlif dəyərdə olan malları görür: burada həm çox ucuz, həm də təsəvvür edilməyəcək dərəcədə baha mallar var. Alış-veriş zamanı hesabı sadələşdirmək üçün banklar müxtəlif pul vahidləri istehsal edir. Fotoqraf və ya əczaçı ona lazım olan məhlulu hazırlayanda xüsusi əczaçı tərəzisindən və müxtəlif çəki daşlarından istifadə edir. Bu yolla da baza elementlərindən və ya açar ədədlərdən istənilən hesablama sistemi qurulur.

Əgər tozu çəkərkən əczaçı tərəziyə iki 50 qramlıq, bir 5 qramlıq və bir 2 qramlıq çəki daşı qoyarsa, bu zaman tozun çəkisi

$$2\cdot 50q + 1\cdot 5q + 1\cdot 2q = 107q$$

olur. Amma 107 ədədinin yazılması da xüsusi ədəd bazası ilə əlaqədardır, daha dəqiq 1,10,100... Belə ki, 1 ədədi yüzlük, 0 – onluq, 7 – isə təkliyi bildirir. Ədəd bazasının elementləri və ya açar ədədlər bu halda onluğun qüvvətlərini göstərir:

$$1 = 10^0,\ 10 = 10^1,\ 100 = 10^2,$$

$$1000 = 10^3 \text{ və s.}$$

Onluq sistemdə yalnız on rəqəm var: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Bu rəqəmlər həm də verilən ədədin 10-un qüvvətlərinə görə ayrılışındakı əmsallardır, 10 ədədini isə hesablama sisteminin əsası adlandırırlar. Onluq yazıda rəqəmin "çəkisi" onun mövqeyi ilə müəyyən edilir: sağ kənardakı vahidlərdən nə qədər uzaq mövqe tutarsa, rəqəmin qiyməti bir o qədər böyükdür. Buna görə də qəbul edilmiş sistem hesablamanın mövqeli onluq say sistemi adlanır.

Diqqətli oxucu soruşa bilər ki: bəs nəyə görə baza ədədləri kimi məhz 10 ədədinin qüvvətləri seçilir? Başqa ədədlərin, məsələn, 2 və ya 5-in qüvvətlərindən istifadə etmək olmazmı? Olar. Məsələn, 107 ədədinin beşin qüvvətlərinə görə ayrılışı belə ifadə ediləcək:

$$107 = 4\cdot 5^2 + 1\cdot 5^1 + 2\cdot 5^0$$

ikinin qüvvətlərinə görə isə:

$$107 = 1\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + $$
$$+1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$

Birinci halda ayrılışın əmsalları 0,1,2, 3,4, ikinci halda isə – bu rəqəmlər yalnız ikidir: 0 və 1.

İKİLİK SAY SİSTEMİ

A.N.Starikovun "Qeyri adi qız" məzəli şerini oxuyun.

Şairin tapmacasını tapmaqda isə bizə müşahidələr kömək edəcək. Şerdə səslənən rəqəmləri qeyd edək: 1, 10, 100, 101, 1100. Asanlıqla nəzərə çarpır ki, onlar yalnız iki ədədin: 0 və 1 ədədinin köməyi ilə yazılır. Bəlkə burda ikinin qüvvətlərinə görə ədədlər şifrələnmişdir? Yoxlayaq.

"Onun 1100 yaşı var idi": $1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + +0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0 = 12$, deməli, onun 12 yaşı var idi.

O 101-ci sinfə gedirdi: $1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + +1\cdot 2^0 = 5$, deməli, o 5-ci sinfə gedirdi. Həqiqətən də, tamamilə aydın bir tablo alınır. Bizə sadəcə ikilik hesablama sistemi kömək etdi.

Beləliklə, 2 ədədinin qüvvətləri baza kimi götürülən mövqeli hesablama sistemləri ikilik say sistemi adlanır. Müxtəlif say sistemlərində yazılan ədədləri seçmək üçün isə, onları mötərizəyə alaraq, aşağıda sağdan hesablama sisteminin əsası göstərilir. Məsələn $(1100)_2$ $(12)_{10}$ ədədini göstərir. Biz onluq sistemdən istifadə etdiyimiz üçün onluq əsas adətən göstərilmir $(1100)_2=12$.

Qeyri-adi qız haqqında şeri başa düşmək üçün ədədləri ikilik sistemdən onluq sistemə çevirməli olduq. Tərs əməliyyatı aparmaq da çətin deyil. Məsələn, 100 ədədini ikilik sistemə çevirmək tələb olunur. Fərz edək ki, dükanda alış-veriş üçün 100 pul vahidi ödəmək lazımdır, bizim ixtiyarımızda isə 1,2,4,8,16,32,64,128,... vardır. Əlbəttə hesabı 100 ədədinə yaxın olan puldan başlamaq asandır. Nəticədə bizim mühasibat 64+32+4=100 şəklini alacaq. Bütün toplananların ikinin qüvvətləri olduğu üçün, biz həmçinin $100 = 2^6 + 2^5 + 2^2 = (1100100)_2$ əldə edərik.

Təcrübədə ədədlərin onluq sistemdən ikilik sistemə bölmə yolu ilə keçirirlər. Verilən ədədi, sonradan isə qismətdə əldə edilən ədədləri qismətdə 1 qalana kimi ikiyə bölürük. Bu zaman qalıqları qeyd edəcəyik. Sonuncu 1 ilə və sağdan sola olmaqla götürülən qalıqları yazmaqla alınan ədəd axtarılan ədəd olur.

$$100 = (1100100)_2$$

İkilik say sistemi XX əsrdə baş vermiş nəhəng kompüter inqilabının mənbələrindən oldu. İki ədədi vurmaq texniki olaraq asandır: 1 – yarımkeçirici elementdə cərəyan keçir, 0 – cərəyan keçmir. Elementin "cərəyan keçir" və "cərəyan keçmir" vəziyyəti bir-birini çox qısa bir müddətdə – saniyənin milyonda bir hissəsində əvəz edə bilər. Bu ikilik sistemdə sürətli əməliyyatlar aparmağa imkan verir.

Onluq sistemdə nəhəng vurma cədvəlləri ilə müqayisədə ikilik sistemdə ədədlərin vurma və toplama cədvəlləri miniatürdür. Bundan başqa 1-ə vurma ədədi heç dəyişmir. Buna görə də ikilik say sistemində iki ədədi vurmaq üçün yuxarıda yazılmış vuruğu uyğun mərtəbə vahidlərinin sayı qədər sola hərəkət etdirərək, alınan ədədləri toplamaq kifayətdir.

Əməliyyatlar olduqca sadədir. Amma bəzən maşın donur və ya kompüterə həll üçün verilmiş məsələnin cavabında səhvlər olur. Bu zaman proqramistlər özlərini və kompüteri yoxlamalı olurlar, buna görə də ikilik ədədləri yaxşı bilən mütəxəssis olmadan bu vəziyyətdən çıxmaq çətindir.

İXTİYARİ ƏSASI OLAN MÖVQELİ SİSTEMLƏR

Biz onluq say sisteminə alışmışıq. Kompyuterə ikilik sistem daha uyğun gəlir. Amma bəzən başqa əsaslı sistemlər də rahat ola bilər. Düjün hesablaması buna parlaq misal ola bilər. Burada əsas 12 ədədidir.

Ümumi halda isə ixtiyari N ədədinin əsası d olan say sistemində yazılışı aşağıdakı kimi olacaq

$$N = a_n d^n + a_{n-1}d^{n-1} + \ldots + a_2 d^2 + a_1 d + a_0.$$

Burada d – birdən böyük istənilən tam ədəddir. $a_0, a_1, \ldots, a_n$ əmsalları N-in d-lik sistemdə yazılışındakı rəqəmlərdir. Onlar yalnız d sayda qiymət ala bilərlər: 0, və ya 1, və ya 2, ..., və ya $d-1$. Qeyd edək ki, $d > 10$ olanda rəqəmlər üçün yeni simvollar tapmaq lazım olacaq.

Verilən N ədədi və d əsası üçün rəqəmləri tapmaq üçün yuxarıda danışdığımız N manat ödəmək üçün istifadə edilən üsuldan istifadə etmək olar. Əvvəlcə N-dən böyük olmayan ən böyük d^n ədədi tapılır. Sonra N ədədini d^n ədədinə bölür- lər, nəticədə a_n natamam qismətini və r_{n-1} qalığını alırlar, yəni

$$N = a_n d^n + r_{n-1}$$

r_{n-1} qalığı d^n baza ədədindən kiçikdir, buna görə də r_{n-1} d^{n-1}-ə bölünür, nəticədə a_{n-1} natamam qiyməti alınır və qalıq isə r_{n-2} olur.

$$r_{n-1} = a_{n-1}d^{n-1} + r_{n-2}$$

Belə hərəkət edərək, nəticədə $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ ədədlər toplusunu əldə edirik.

Təcrübədə bu üsul elə də rahat deyil. N ədədini əsası d olan say sistemində yazmaq üçün adətən başqa üsul tətbiq edirlər. N ədədini qüvvətlərin daxil olmadığı:

$$N = a_0 + d(a_1 + d(a_2 + d(\ldots + d(a_{n-1} + da_n)\ldots))).$$

Buradan $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ rəqəmlərinin kiçik mərtəbə vahidindən başlayaraq, aşağıdakı çoxaddımlı prosesin nəticəsində tapılmasının mümkün olduğu görünür:

a_0 N-in d-yə bölünməsindən alınan qalığa bərabərdir;

a_1 əvvəlki addımdan alınmış natamam qismətin d-yə bölünməsindən alınan qalığa bərabərdir;

a_2 əvvəlki addımdan alınmış natamam qismətin d-yə bölünməsindən alınan qalığa bərabərdir;

N ədədinin d sistemində $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ rəqəmləri ilə ifadəsi aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$N = (a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_d.$$

Məsələn: $26700 = (110100001001100)_2 = (1323300)_5$.

BÖYÜK ƏDƏDLƏRİN ADLARI

2 ədədini alman "svay" kimi (zwei kimi yazılır), ingilis "tu" (two yazılır) səsləndirəcək. Amma 1 000 000 ədədini, rus da, ingi-

lis də, alman da eyni cür, yəni – milyon adlandıracaq.

"Milyon" ədədinin maraqlı tarixçəsi var. 1271-ci ildə Vena taciri Marko Polo uzaq və sirli Çinə yollanır. Çinə gedən yol bir çox ölkələrdən keçirdi. Evə demək olar ki, 25 ildən sonra qayıdan səyyah gördüyü möcüzələrdən heyrətlə danışırdı. Onun söhbətində tez-tez milyon kəlməsi eşidilirdi. "mille" sözü (min) hələ qədim Roma dövründən məlum idi. Cəsur səyyah milyon sözü ilə minin minini adlandırırdı. Bu söz Marko Poloya ləqəb oldu. Müasirləri onu Marko Milyone adlandırırdılar.

1 000 000000 ədədinin "milyard" adı isə fransız mənşəlidir. Onun sinonimi – "bilion" sözüdür. Latın dilində "bi-" söz önü "ikiqat" deməkdir, sanki minə 3 sıfırlı iki vaqon birləşdirilir. Sonra isə ədədlərin adları sağdan birləşdirilmiş belə "vaqonların" latın kəmiyyət adlarından yaranır:

1 000 000 000 000 – trilyon

1 000 000 000 000 000 – kvadrilyon

1 000 000 000 000 000 000 – kvintilyon

Ədədlərin 21 vaqonlu 10^{63} qədər adları məqalənin sonunda göstərilmişdir. Nəzərə almaq lazımdır ki, "vaqonların" sayı adında səslənən latın rəqəmindən bir vahid çoxdur. Axı tərkib "teplovozdan" – vahiddən deyil, məhz qoşqulardan – bir "vaqonlu" mindən başlamışdır.

Böyük rəqəmlərin adlandırma sistemi demək olar ki, bütün Avropa ölkələrində və ABŞ-da qəbul edilmişdir. Fransada isə *XV* əsrdə belə hesab edirdilər ki, üç sıfır olan vaqonlar balacadır və bir vaqona altı sıfır yerləşdirdilər. Lionlu həkim Nikola Şükenin cəbrə dair əlyazma əsərində milyonun sonrakı qüvvətlərini, yəni

$1000000^2 = 1000000\ 000000$,

$1000000^3 = 1000000\ 000000\ 000000$

"biliyon" və "trilyon" adlandırdığı sözlərinə rast gəlirik. Bu adət hələ də Almaniya və İngiltərədə qorunub saxlanılıb. Fransızlar özləri isə *XVII* əsrin ortalarından ədədləri altı rəqəmli əvəzinə, üç rəqəmli dövrlərə ayırmağa başladılar və beləliklə "bilyon" onlarda 10^9 mənasını aldı.

Böyük ədədlərin adları bizim dövrümüzdə də alimlərin nəzərini cəlb edir. Stanford Universitetinin professoru Donald E.Knut hesab edir ki, ədədlərin ənənəvi sistemlərində ədəd adlarında israfçılığa yol verilir. Təsəvvür edək ki, biz yalnız 1-dən 100-ə qədər olan ədədlərin adlarını bilirik. Bu biliklər artıq 1-dən 9999-a qədər olan ədədlərin adlarını saymağa kifayətdir. Sonuncu ədədi "doxsan doqquz yüzlük doxsan doqquz" kimi ifadə etmək olar. Qədim yunanlar kimi 10 000 ədədini "miriad" adlandırsaq 1-dən 10^8 qədər bütün ədədlərin adını saymaq olar. Məsələn, 9999 9999 ədədini "doxsan doqquz yüz miriad doxsan doqquz yüzlük doxsan doqquz" kimi ifadə edə bilərik.

Növbəti adlandırılması labüd olan ədəd 10^8 ədədidir. D.E.Knut onun üçün "milyon" adını təklif edir. Belə hərəkət edərək biz hər dəfə ədədə yeni ad verərək əvvəlki ada uyğun ad verəcəyik. Maraqlıdır ki, yeni adlandırılmış ədədin "bundan bu qədər götürmək" ideyasına yaxın olan nömrələmə daha öncə Arximedin riyazi tədqiqatlarından məlum idi.

Böyük ədədlərin ifadə edilməsi haqqında mülahizə yürüdərkən Knut 1977-ci ildə riyazi simvollar sistemini qurdu, onun köməyi ilə riyazi isbatlarda nə vaxt isə rast gəlinən konstant – Qrexem ədədini qiymətləndirdi. Öz böyüklüyünə görə bu sabit xüsusi yazı konstruksiyalarının köməyi olmadan ifadə oluna bilmir. Bax Kuntun 64 dərəcəli simvollar sistemi burda köməyə çatdı. Bu nəticə Ginnesin rekordlar kitabında layiq olduğu yeri tutur.

Sonda "sistemdən kənar" olan "quqol" – 10^{100} və "quqolpleks" – yəni $10^{10^{100}}$ ədədini xatırlamamaq olmaz. Bir dəfə Amerika riyaziyyatçısı Edvard Kasner 10^{100} ədədi üçün qısa, yadda qalan bir ad axtararkən, öz 9 yaşlı qardaşı oğlundan soruşdu, o, isə "Quqol" deyə cavab verdi.

HESABIN DÖRD ƏMƏLİ

TOPLAMA VƏ ÇIXMA

Ədədlər insanlar tərəfindən əşyaların sayını: ambarda neşə kisə buğdanın olduğunu, sürüdə neçə qoyun olduğunu və s. ifadə etmək üçün icad edilmişdir. Amma bu çoxluqlar sabit qalmır, onlar ya çoxalır, ya da azalırdı, ona görə də onları toplamaq və çıxmağı bacarmaq vacib idi. Ədədlər kiçik olanda bunu etmək asan idi, ağacda cızıqlar çəkilir, kəndirdə düyünlər vurulurdu. Çoban qoyun otarır, belində isə bir kəndir var, kəndirin üstündə qoyunların sayı qədər düyün olurdu. Quzu doğularsa, çoban belindəki ipə bir düyün də vurardı. Canavar iki qoyun apararsa, çoban iki düyünü açardı.

Kəndir yerinə bəzən canlı sayğacdan, yəni barmaqlardan istifadə edərdilər. Adətən uşaqlar belə edir. İbtidai sinif müəllimləri böyük çətinliklə uşaqların bu vərdişini tərgidərək şifahi hesaba alışdırırlar. Bəziləri isə müəllim görməsin deyə əllərini ciblərində saxlayaraq, barmaqları ilə hesab aparırlar. Hətta saatın siferblatına baxaraq hesab aparan şagirdlər belə var.

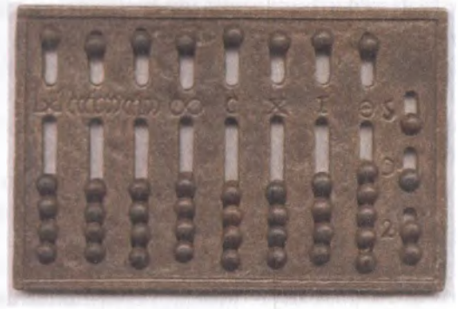
Cəmiyyət inkişaf etdikcə hesablamanın müxtəlif növləri meydana çıxdı. Onlar həm tacirlərə, həm sənətkarlara, həm də o dövrün "bankirlərinə" – müamiləçilərə lazım idi. Hesab aparmaq üçün xüsusi təlim keçmiş adamları dəvət edirdilər. Təsəvvür edin ki, qədim Romaya düşmüsünüz və sizə *CXXXIX* və *CCCXLIV* ədədlərini toplamaq lazımdır. Nə edəcəksiniz? Əlbəttə əvvəlcə onları adət etdiyimiz rəqəmlərlə yazmalısınız 139 və 344, sonra isə məktəbdə öyrəndiyiniz kimi toplayacaqsınız.

Bəs görəsən, bunu romalı hesablayıcı necə edərdi? Elə bu cür, baxmayaraq ki, hind hesablaması Avropaya gec gəlmişdir. İş ondadır ki, hesab aparan adam rəqəmləri yazmayacaq, xüsusi – abak aləti ilə hesablayacaq.

Abak – novçası olan lövhədir. 139 və 344 toplamaq üçün, hesabdar abak üzərində öncə 139 ədədini qeyd edir. Bunun üçün o, aşağı novçada 9 daş qoyur, növbəti də 3, üçüncüyə isə 1 daş qoyur (latın dilində daş "calculus" adlanır, müasir kalkulyatorun adı burdan götürülmüşdür). Əgər hansısa mərtəbə vahidi yoxdursa, müvafiq novça boş qalır. Fikir versək, ədədlərin belə yazılışı müasir yazılışa yaxındır.

Bəs sonra? Hesabdar sonra son novçada olan 9 daşın yanına 4-nü, əlavə edib, 10-nu götürərək orda cəmi 3 daş saxlayır, ikinci novçaya 1 daş əlavə edir, sonra yenə 4 daş, üçüncü novçaya da 3 daş əlavə edərək hesabı bitirir. Lövhədəki daşlar 483 göstərir.

Bu hesab aləti sizə nəyi isə xatırlatdı? Əlbəttə köhnə sayğacı. Sadəcə olaraq sayğacda daş yerinə taxta kürələrdi. Rus sayğacı Avropa sayğaclarından birinci sırada 10, sonrakılarda isə 9 kürə olmaqla fərqlənir. Maraqlıdır ki, Avropada indi də onlara abak deyirlər.



Qədim Roma abakı

Sayğaclar Şərqdə – Çin və Yaponiyada istifadə olunurdu. Çin sayğacları suan-panda hər sırada 10 və ya doqquz deyil, 7 kürə olurdu, həm də bu kürələrdən 2 kürə qalan 5 kürədən ayrı olurdu. Bu kürələrdən hər biri verilən mərtəbənin 5 vahidini ifadə edirdi. Belə təkmilləşmə sayğaclardakı kürələrin sayının azalmasına imkan verirdi.

Hələ yaxın keçmişdə idarə və müəssisələrin mühasibatlarında sayğaclardan hesab zamanı yerləri dəyişən kürələrin səsi gəlirdi. Yaponiyada isə hələ də saroban və müasir hesablama qurğuları ilə silahlanmış insanlar arasında yarışlar keçirilir. Maraqlıdır ki, məhz sayğaclarda hesablayanlar çox vaxt qalib olur. Axı maşının hesablaması üçün proqram qurulmalıdır.

Suan-pan sayğacları isə sanki qəsdən Roma rəqəmlərini hesablamağa yönəlib. Bu təəccüblü deyil, çünki hər ikisi "barmaq hesabı" sistemindən yaranıb. Beş barmaq – soldan ikinci kürə, sonra isə təkliyə keçid, yenə beş barmaq və növbəti mərtəbəyə keçid. Qərbi Avropa sayğaclarına uyğun olaraq suan-panı mükəmməlləşdirmək olar: sağdan 5 daş əvəzinə dördünü saxlamaq, soldan iki daş əvəzinə isə yalnız birini saxlamaq olar.

Onluq sistemə keçid abaksız hesablamağa imkan verdi. Rəqəmlərin belə yazılışı hind hesabı adını aldı, belə ki, rəqəmlərin belə yazılışı və hesablanması Hindistanda yaranıb. Dəyişikliklər abakdan da yan keçmədi: novçadakı daşların yerinə üstündə rəqəmlər yazılmış jetonlar qoymağa başladılar. Bu jetonların adı "apeks" idi. Amma apeksli abak zamanın sınağına dözməyərək unuduldu.

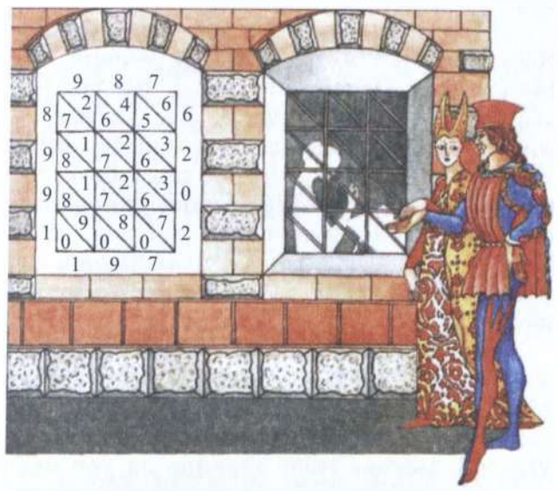
VURMA

İndi ədədlərin vurulmasını məktəbin birinci sinfində keçirlər. Orta əsrlərdə isə çoxları vurmanın incəlikləri ilə tanış deyildi. Tək-tük aristokratlar, hətta onlar Avropa universitetləri qurtarsalar belə, vurma cədvəlini bilməyi ilə öyünə bilərdilər.

İnsanlar riyaziyyatın min illərlə inkişafı boyu ədədlərin vurulmasının çoxlu üsullarını fikirləşib-tapmışdılar. İtalyan riyaziyyatçısı Luka Paçoli öz "Hesab, nisbətlər və mütənasibliyə dair biliklər məcmusu" traktatında vurmanın səkkiz müxtəlif metodunu gətirir. Onlardan biri "qısqanclıq və ya qəfəsli vurma" adlanır.

Əvvəlcə kvadratlara bölünmüş düzbucaqlı çəkilir, özü də düzbucaqlının tərəflərinin ölçüləri vurulan və vuranın onluq işarələrinin sayına uyğun gəlir. Sonra kvadrat damalar diaqonal boyunca bölünür və "... qəfəs taxma-jalüzlərə oxşayan mənzərə alınır, – Paçoli yazır. – Belə jalüzlər Venesiya evlərinin pəncərələrindən asılaraq, küçədən keçənlərin pəncərə önündə əyləşən xanımları və rahibləri görmələrinə mane olurdular".

Bu üsulla 1998 ədədini 987-yə vuraq. Bundan ötrü, şəkil 1-də göstərildiyi kimi, cədvəlin yuxarısına 987, soluna isə 1998 yazaq.



Şəkil 1. 987 və 1998 ədədlərinin "qısqanclıq" üsulu ilə vurulması.

İndi isə hər bir kvadrata bu kvadratla eyni sətirdə və eyni sütunda yerləşən ədədlərin hasilini yazaq. Onluqlar aşağı, təkliklər isə yuxarı üçbucaqda yerləşirlər. Bütün üçbucaqlar dolandan sonra onlardakı ədədlər hər bir diaqonal boyunca toplanır. Nəticə cədvəlin sağ aşağı küncündə yazılır – 1972026.

VURMA VƏ TOPLAMA QANUNLARI

Yerdəyişmə (kommutativlik) qanunu:
$a + b = b + a$,
$ab = ba$.

Qruplaşdırma (assosiativlik) qanunu:
$(a + b) + c = a + (b + c)$,
$(ab)c = a(bc)$.

Paylama (distrubutivlik) qanunu:
$a(b + c) = ab + bc$,
$(b + c)a = ba + ca$.

Sıfır üçün qayda:
$a + 0 = a$,
$a + (-a) = 0$.

Vahid üçün qayda:
$a \cdot 1 = a$.

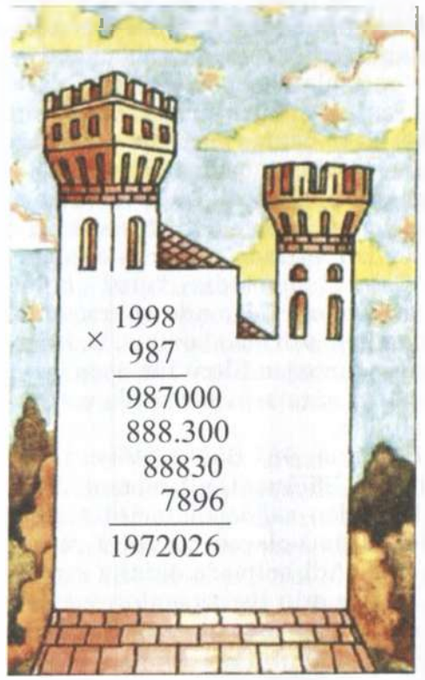
Bu üsul hamı tərəfindən qəbul edilmiş üsuldan heç də pis deyil. O hətta daha sadədir. Belə ki, cədvəlin damalarına ədədlər birbaşa vurma cədvəlindən, həm də standart metoddakı toplama olmadan, daxil edilir. Sonra sadəcə toplamanı aparmaq qalır.

İkinci üsul "xırda qala" adlanır. Əvvəlcə, adət etdiyimiz kimi, bir ədəd o birinin altında yazılır, sonra yuxarıdakı ədədin rəqəmləri növbə ilə aşağıdakı ədədə vurulur, özü də yüksək mərtəbə rəqəmindən başlayır və hər dəfə lazımi sayda sıfır əlavə edirlər.

Şəkil 2-də 1998 və 987 ədədlərinin bu üsulla vurulması göstərilib. Onun üstünlüyü ondadır ki, artıq lap əvvəldən yuxarı mərtəbə rəqəmləri təyin olunur, bu isə kəmiyyəti tezcə qiymətləndirmək lazım gələndə vacib olur. Paçolinin təsvir etdiyi altı fənd də vurma cədvəlini bilməyə əsaslanıb.

Lakin Rusiyada bir sıra quberniyaların kəndliləri arasında bütün vurma cədvəlini bilməyi tələb etməyən üsul yayılmışdı. O, "rus kəndli vurma üsulu" adlanırdı. Burada ədədi təkcə 2-yə vurmağı və bölməyi bacarmaq zəruri idi. Yenə 987 və 1998-ni bu üsulla vuraq.

Bir sətirdə ədədlərin birini soldan, o birini sağdan yazaq. Soldakı ədədi 2-yə bölәcək, sağdakını isə 2-yə vuracağıq və nəticəni bir sütunda yazacağıq (şəkil 3).



Şəkil 2. 1998 və 987 ədədlərinin "kiçik qala" üsulu ilə vurulması.

Bölmə zamanı qalıq qalırsa (yəni bölünən tək ədəddirsə), o atılır. 2-yə vurma və bölməni solda 1 qalana qədər davam etdiririk. Sonra sütunların solda cüt ədədlər dayanan sətirlərini pozaq. İndi isə sağ sütundakı qalan ədədləri toplayaq – 1 972 026 alırıq. Bu da vurulan ədədlərin hasilidir.

Bu üsul niyə düzgün nəticə verir? Sən demə, o, vuruqlardan birinin, məhz birincinin, ikilik sistemdə təqdimi ilə bağlıdır ("Mövqeli say sistemləri" məqaləsinə bax):

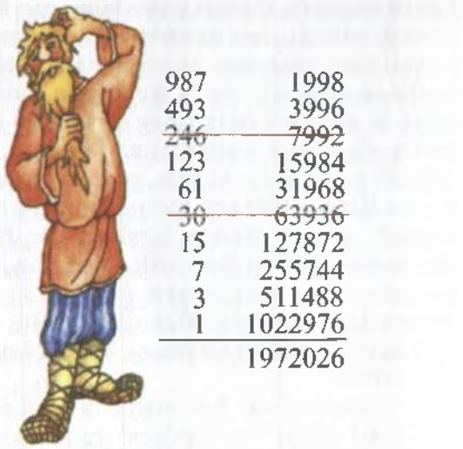
$$987 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0.$$

İndi bu ifadəni 1998-ə vurmaq lazımdırsa, alırıq:

$$1 \cdot 1022976 + 1 \cdot 511488 + 1 \cdot 255744 + 1 \cdot 127872 + 0 \cdot 63936 + 1 \cdot 31968 + 1 \cdot 15984 + 0 \cdot 7992 + 1 \cdot 3996 + 1 \cdot 1998.$$

Gördüyümüz kimi, 0 vuruğu məhz sağ sütundakı pozulan ədədlərin qarşısında dayanır!

"Kəndli üsulu" vurma cədvəli ilə arası olmayanların işinə yarayar, doğrudur, burada daha çox toplama aparmaq lazım gəlir. Lakin vurma cədvəlini hər halda öyrənmək lazımdır. Yoxsa hər biri 80 qəpiyə olan 7 kö-



Şəkil 3. 987 və 1998 ədədlərinin "rus kəndli üsulu" ilə vurulması.

kənin neçəyə olacağını aydınlaşdırmaq üçün kağız-qələm götürməyəcəksiniz ki?!

BÖLMƏ

Qədimlərdə vurma asan iş sayılmasa da, bölmə daha da mürəkkəb idi. İtaliyada indiyə kimi "Bölmə ağır işdir" zərb-məsəli saxlanılır. Sanki həllolunmaz məsələ ilə rastlaşanda belə deyirlər. Orta əsrlərdə bölmə apara bilən adamları barmaqla saymaq olardı. Onları hörmətlə "bölmə magistrləri" adlandırırdılar. Onlar öz hesablarında nizam yaratmaq istəyən tacirlərin dəvəti ilə şəhərbəşəhər gəzirdilər.

Çox bölmə üsullarını fikirləşib-tapmışdılar. Rahib-riyaziyyatçı Herbert, gələcək Roma Papası II Silvestr, öz əsərlərində abakda bir neçə bölmə üsulunu göstərmişdir. Bu zaman o, aşağıdakı prinsipləri gözləyirdi:

– vurma cədvəlindən bacardıqca az istifadə etməli, xüsusi halda, yaddaşda ikirəqəmli ədədlərin birrəqəmliyə vurulmasından istifadə etməməli;

– çıxmaları toplamalarla əvəzləyərək onlardan qaçmalı;

– iş avtomatik, yoxlamalarsız yerinə yetirilməlidir, belə ki, onlar zamanı da səhvlər yarana bilər.

O, hesablamalar aparan rahiblərin necə savadsız olduğunu nəzərə alaraq, belə ciddi məhdudiyyətlər qoymuşdu. Onların, demək olar ki, heç biri vurma cədvəlini bilmirdi.

Lakin nəticədə Herbert qaydalarının elə mürəkkəb olduğu məlum oldu ki, onlar hətta ən çalışqan hesabdar-abakçılar üçün belə anlaşılmaz qaldılar. Onda Avropada indi qəbul edilmiş mövqeli onluq say sisteminə əsaslanan ərəb bölmə sistemi üzə çıxdı, o, "qızıl bölmə" adını aldı. Biz bu gün də ondan istifadə edirik. Herbert metodunu isə "dəmir bölmə" adlandırmağa başladılar. Bunlardan başqa üsullar da vardı. Məsələn, böləni vuruqlara ayırır, sonra bölünəni ardıcıl olaraq bu ədədlərə bölürdülər. Bu zaman birrəqəmli ədədlərə bölmək üçün xüsusi metod var idi.

Uzun zaman Avropada iki bölmə üsulu: "qızıl bölmə" və "qalera" rəqabət aparırdılar.

Hər şeydən əvvəl "qızıl bölmə" qaydasını yada salaq. 987654-ü 346-ya bölək (Şəkil 4).



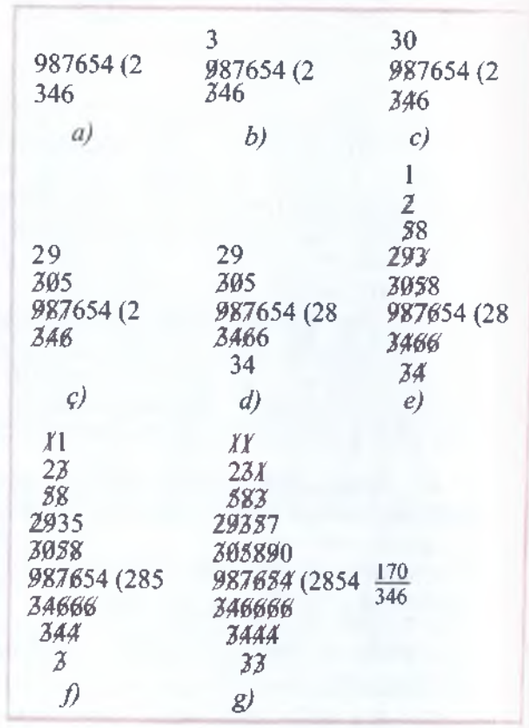
Şəkil 4. 987654 ədədinin "qızıl bölmə" metodu ilə 346-ya bölünməsi.

Əvvəlcə 346-ya vurulduqda 987-dən kiçik olacaq ən böyük ədədi tapaq. Bu ədəd 2-dir, o, qismətin ilk rəqəmi olacaq. Sonra 346-nı 2-yə vuraq, nəticəni bölünənin ilk üç rəqəminin altında yazırıq və çıxma əməliyyatı həyata keçiririk. Sonra alınan ədədin yanına bölünənin növbəti rəqəmini yazırıq və həmin əməliyyatları təkrar etməklə prosesi davam etdiririk.

Növbəti üsulu italyanlar ona görə qalera adlandırmışlar ki, hesablamalar qurtaranda rəqəmlər bu avarlı gəmiyə bənzər fiqur şəklində düzülürlər. İngilislərdə o, "üstdən xətt çəkmə metodu" kimi tanınır, belə ki, burada rəqəmləri daim xətləmək lazım gəlir. Luka Paçoli bu metodu ən sürətli metod sayırdı. Bəlkə də hər hansı bir oxucu məhz ondan istifadə etmək istəyəcək.

"Qalera" metodu "qızıl bölmədən" onunla fərqlənir ki, onda çoxrəqəmli ədədi birrəqəmliyə vurmaq yoxdur. O, birrəqəmli ədədlərin birrəqəmlilərə bir neçə vurulması və alınan nəticələrin növbə ilə çıxılması ilə əvəz olunur.

Beləliklə, 987 654-ü 346-ya bölmək tələb olunur. Bölünəni, altından da böləni yazaq. Bələndən sağda mötərizə açaq, onun ardınca ardıcıl olaraq qismətin rəqəmlərini yazacağıq. Adi bölmədə olduğu kimi, seçmə yolu ilə qismətin ilk rəqəmini, verilmiş halda 2-ni tapırıq. Onu yazırıq (Şəkil 5, *a*).



Şəkil 5. 987654 ədədinin "qalera" metodu ilə 346-ya bölünməsi.

Sonra bölənin ilk rəqəmini, 3-ü 2-yə vururuq və nəticəni bölənin birinci rəqəmindən çıxırıq. $9 - 3 \cdot 2 = 3$ fərqini yuxarıdan, 9 rəqəminin üstündə yazırıq, bundan sonra 9 rəqəmini və böləndəki 3 rəqəmini pozuruq – onlar artıq "oyundan çıxmışlar" (Şəkil 5, *b*).

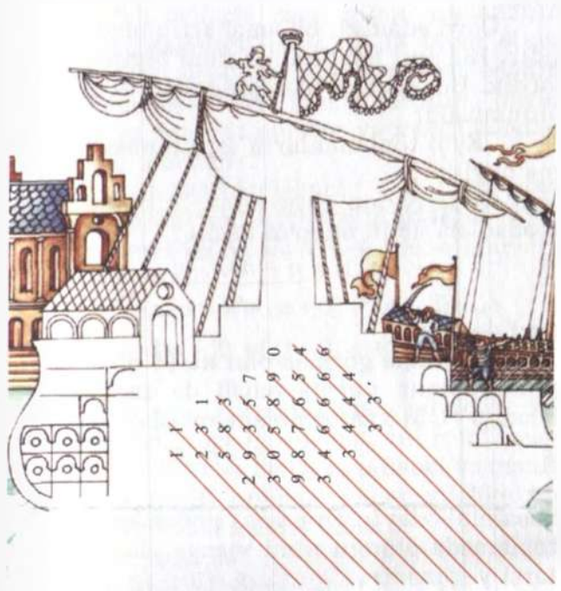
Bölənin ikinci rəqəminə – 4-ə – keçirik. Onu 2-yə vururuq və alınmış 8 hasilini bölünənin bu rəqəmi altında dayanan 38-dən çıxırıq. Verilmiş halda 8 rəqəmini xətləmək və onun üstündə 0 yazmaq kifayətdir. İndi bölünəndə 4 rəqəmini də pozmaq olar (Şəkil 5, *c*).

Bölünənin axırıncı rəqəminə – 6-ya – keçirik. Onu 2-yə vururuq və əvvəlki mərhələdən sonra yuxarıda əmələ gələn 307 ədədindən çıxırıq. $307 - 6 \cdot 2 = 295$ olduğundan 307-ni pozuruq və onun üstündə 295 yazırıq (Şəkil 5, *ç*).

Bütün bu əməliyyatlardan sonra Şəkil 5, *ç* -nin yuxarısındakı rəqəmləri 295 654 ədədi kimi oxumaq olar ki, bu da "qızıl bölmə"də birinci çıxmadan sonra alınır.

İndi isə 346 ədədini Şəkil 5, *e*-də göstərilən kimi yazırıq və qismətin ikinci rəqəmini seçirik. Bu, 8 rəqəmidir. Onu yazırıq və 2956 ədədindən 346 ədədinin 8-ə vurulmuş və müvafiq şəkildə sürüşdürülmüş rəqəmlərini ardıcıl olaraq çıxırıq. Şəkil 5, *e*-də təsvir olunan düzüm alınır.

Bu halda xətlənməmiş rəqəmlər 18 854 ədədini təşkil edir. Elə bu ədəd də "qızıl bölmədə" ikinci çıxmadan sonra yarandı ki, bu da təəccüblü deyil.



Şəkil 6. "Qalera" metodu ilə bölmədə qayığa bənzəyən fiqur yaranır, xətlər isə avara çevrilir.

Bu prosesi davam etdirərək (Şəkil 5,*f*, *g*) son nəticəni alırıq: 2854 və qalıq 170.

Axırıncı şəkli 90° döndərsək, qayıq və ya gəmiyə bənzəyən fiqur əmələ gətirəcək, bizim xətlərimiz isə qaleranın uzun avarlarına bənzəyən bütöv xətlərə qovuşacaq.

Bu metod Hindistanda yaranıb, oradan ərəb ölkələri vasitəsi ilə Avropaya nüfuz edib. Doğrudur, hindlilərdə bölmə zamanı gəmi-zad yaranmırdı. Axı o vaxt onlar hesablamalarda kağız işlətmirdilər, toz və ya qumla örtülən taxta lövhələrdə yazırdılar. Rəqəmləri xətləmək əvəzinə onları sadəcə pozurdular.

ƏDƏDİ ÇOXLUĞUN GENİŞLƏNMƏ MƏRHƏLƏLƏRİ

Burada natural ədədlər çoxluğu olan N-dən başlayaraq, birinci genişlənmədə *Z*-tam ədədlər çoxluğunu, sonra isə ikinci genişlənmə olaraq Q-rasional ədədlər çoxluğunu, daha sonra rasional ədədlər çoxluğunun genişlənməsi birinci irrasional ədədlər çoxluğu R_1-i, R_2-ni və s. ədədlər çoxlugunu alacağıq.

Burada hər dəfə yeni genişlənmiş çoxluq aldıqda göstərəcəyik ki, bu yeni çoxluqda elə ədəd mövcuddur ki, bu ədəd genişləndirilən (genişlənmədən qabaqkı) əvvəlki çoxluğa daxil deyil.

Bu üsulun daha bir üstün cəhəti odur ki, məs. R_k çoxluğunun hər elementini analitik şəkildə sonlu sayda ədəd üzərində sonlu əməl aparmaqla alındığı göstərilir.

HESAB ƏMƏLLƏRİ

Yuxarıda söylənilənlərə qayıdıb, qəbul edək ki,

$$N=\{1,2,3,4...\},\ +, \qquad (1.1)$$

verilmişdir. Yəni natural ədədlər çoxluğu və toplama əməli məlumdur. İxtiyari qayda ilə N-dən iki ədəd götürək, $m \in N$, $n \in N$. onda

$$m+n \in N, \qquad (1.2)$$

olur. Deməli *N*-də təyin olunmuş toplama əməli *N*-dən kənara çıxmır. Bu əməl birinci mərtəbənin (və ya pillənin) düz əməli adlanır. Asanlıqla görünür ki, ixtiyari *m* və *n*

üçün

$$m+n=n+m, \qquad (1.3)$$

xassəsi ödənilir. Sonralar görəcəyik ki, bu çox gözəl xassə həmişə ödənilmir.

İndi toplama əməlindən istifadə etməklə, bu əməlin tərsi olan çıxmanı aşagıdakı kimi verək. İxtiyari $m\in N$ və $n\in N$ üçün m-n dedikdə elə k-nı başa düşək ki $m=k+n$. Yəni o zaman

$$m-n=k, \qquad (1.4)$$

olur ki,

$$m=k+n, \qquad (1.5)$$

olsun.

Aldığımız (1.4) dən görünür ki ixtiyari m və n üçün (1.4)-ün nəticəsi olan k N çoxlugundan olmaya da bilər. Doğrudan da

$$7-3\in N,$$

olduğu halda,

$$4-4\notin N, \quad 4-9\notin N.$$

İndi iki istiqamətlə getmək olardı, ya (1,4)-də m-i həmişə n dən kiçik götürməməklə alınan k bir m=n olmaqdan başqa bütün hallarda N dən olardı, ya da (1.4) ün nəticəsi olan k-ya ədəd deyib onları N-ə qatmaqla N-i genişləndirmək. Riyaziyyat adətən bu ikinci yolu qəbul etmişdir.

Beləliklə biz toplama əməlinin tərsi olan çıxma əməlinin köməyi ilə alınan sıfır "0" və mənfi tam ədədləri alırıq ki, onları N-ə qatmaqla N-in genişlənməsi olan Z çoxluğunu almış oluruq. Beləliklə

$$N\subset Z, \qquad (1.6)$$

alınmış olur ki, bununla da birinci mərtəbədə

$$+ \; - , \qquad (1.7)$$

kimi iki əməl almış oluruq.

Digər tərəfdən (1.4)-ün (1.5) dən alınmasına nəzər yetirsək, görərik ki,

$$k+n=m,$$

olduqda, birinci toplananı təyin etmək üçün cəmdən "m"dən, ikinci toplananı çıxmaq lazımdır. Onda (1.5) dən ikinci toplananı nə cür təyin etmək olar?

Bunun üçün (1.3)-ə nəzər salsaq, (1.5)-i aşağıdakı kimi yazmaq olar

$$n+k=m.$$

Buradan birinci toplananı təyin edək:

$$n=m-k.$$

Beləliklə (1.3)-ün ödənilməsi bizə imkan verir ki, (1.5) də hər bir toplananı təyin etmək üçün yuxarıda təyin etdiyimiz bir tərs əməl kifayət etsin.

Bununla birinci mərtəbənin əməlləri təyin edilmiş olur.

Asanlıqla görmək olar ki Z çoxlugu (tam ədədlər çoxluğu) birinci mərtəbənin əməllərinə nəzərən kamildir. Yəni Z-dən götürülmüş ixtiyari iki ədədin həm cəmi həm də fərqi Z çoxluğundandır.

Başqa sözlə desək, Z çoxluğu toplama və çıxma əməllərinə nəzərən tamdır.

Burada biz Z-də toplama əməlinə xas olan çox gözəl bir xassənin də ödənildiyini görürük.

Belə ki, iki müsbət ədədin cəmi müsbət, iki mənfi ədədin cəmi mənfi, müsbət və mənfi ədədlərin cəmi bu toplamanlardan hansı güclüdürsə (hansı koordinat başlanğıcından uzaqdadırsa) onun işarəsini saxlayır.

İndi ikinci mərtəbəyə keçək. Əvvəlcə bu mərtəbənin düz əməlini "Vurmanı" təyin edək.

Qeyd edək ki, bu əməl artıq bizdən asılıdır. Biz onu istədiyimiz kimi təyin edə bilərdik. Bu əməl tarixən aşağıdakı kimi tərif olunmuşdur.

"Eyni toplananların toplanmasına vurma deyilir".

Onda N-dən götürülmüş ixtiyari m və n ədədləri üçün onların hasili

$$m\cdot n=\underbrace{n+n+\ldots+n}_{m}, \qquad (1.8)$$

şəkildə olar.

Asanlıqla görmək olar ki, (1.8) kimi təyin olunmuş vurma əməli də toplamanın ödədiyi (1.3) xassəsinə analoji olan

$$m\cdot n=n\cdot m, \qquad (1.9)$$

xassəsini ödəyir. Ona görə söyləmək olar ki, toplamada olduğu kimi vurma əməlinin də tərsi yeganədir.

Əgər yuxarıda (1.8) kimi təyin etdiyimiz vurma əməlinə Z çoxluğunda baxsaq,

tərifdən göründüyü kimi m və n müsbət ədədlərdirsə

$$m\cdot n>0,$$
$$m\cdot(-n)=\underbrace{(-n)+(-n)+\ldots+(-n)}_{m}<0,$$

ifadələrindən görünür ki, iki müsbət ədədin hasili müsbət, müsbət və mənfi ədədlərin hasili isə mənfidir.

Onda $m>0$

$$-m=(-1)\cdot m, \qquad (1.10)$$

kimi olduğundan n>0 üçün

$$(-m)\cdot(-n)=(-1)\cdot m\cdot(-n)=(-1)\cdot(-mn),$$

alınır. Amma (1.10) dan görünür ki, (-1)-ə vurulan ədəd işarəsini dəyişir. Ona görə də

$$(-m)\cdot(-n)=(-1)(-mn)=mn>0, \qquad (1.11)$$

olduğunu alırıq.

Bu isə onu göstərir ki, Z-də təyin olunmuş vurma əməli Z-də təyin olunmuş toplama əməlinə xas olan yuxarıda verdiyimiz çox gözəl xassəyə malik deyil. Bir daha yada salaq ki, iki müsbət ədədin cəmi müsbət, iki mənfi ədədin cəmi mənfi və nəhayət müsbət və mənfi ədədlərin cəmi güclu toplananın işarəsini saxladığı halda, Z-də təyin olunmuş vurma əməli üçün iki müsbət ədədin hasili müsbət, iki mənfi ədədin hasili müsbət və nəhayət müsbət və mənfi ədədlərin hasili mənfidir.

İndi ikinci mərtəbənin düz əməli olan vurmanı aşağıdakı kimi təyin edək:

ixtiyari $m\in N$, $n\in N$ üçün $m>n$ olarsa

$$m\cdot n=n+(n+1)+(n+2)+\ldots+$$
$$+(m-2)+(m-1)+m, \quad (112)$$

onda Z-də təyin olunmuş bu əməl üçün, iki müsbət ədədin hasili müsbət, iki mənfi ədədin hasili mənfi və nəhayət müsbət və mənfi ədədlərin hasili onların hansı güclüdürsə onun işarəsini saxlamış olardı.

Doğrudan da

$$(-3)\cdot 7=(-3)+(-2)+(-1)+0+$$
$$+1+2+3+4+5+6+7=22,$$

olur ki, (-3) və 7 vuruqlarından 7 güclü oldugundan nəticə onun işarəsini saxlamış olur.

Əfsuslar olsun ki, tarixən vurma əməli üçün tərif olaraq (1.12) deyil (1.8) götürülmüşdür. İndi ikinci mərtəbənin tərs əməli olan bölməni bu mərtəbənin düz əməli olan vurmanın köməyi vasiməsi ilə verək. İxtiyari $m\in N$, $n\in N$ üçün m:n dedikdə elə k-nı basa düşəcəyik ki,

$$m=k\cdot n, \qquad (1.13)$$

olsun. Başqa sözlə desək (1.13) dən birinci vuruğu təyin etmək üçün hasilin nəticəsini ikinci vuruğa bölmək lazımdır. Əgər hasilin ikinci vurugunu təyin etmək lazım gələrsə onda (1.13) də (1.9) xassəsini nəzərə almaqla, onu

$$nk=m,$$

şəklində yazıb, sonra birinci vuruğu təyin edirik. Ona görə də

$$n=m:k,$$

olur ki, bu da vurmada vuruqların hər birini eyni əməl (vurmanın tərsi olan bölmə) vasitəsi ilə təyin etmiş oluruq.

Əgər $m\in N$, $n\in N$ üçün

$$m:n=k,$$

ifadəsində $k\notin N$, onda k-nı ədəd adlandırıb N-i (və yaxud Z-i) genişləndirəcəyik. Bu genişləndirilmiş çoxluq rasional ədədlər çoxluğu adlanır. Yəni ikinci mərtəbədə

$$N\subset Z\subset Q,$$

genişlənməsini almış oluruq.

Q rasional ədədlər çoxluğu sıfıra bölmə istisna olunmaqla bütün dörd hesab əməllərinə görə tamdır.

Yəni Q-dən götürülmüş ixtiyari iki ədədin cəmi fərqi, hasili və nisbəti (bölən sıfır deyilsə) yenə də Q-dəndir.

Bununla biz dörd hesab əməllərini almış oluruq. Yuxarıda iki mərtəbə üçün aldığımız əməllər

$$+\;-\;\cdot\;:$$

şəkildədir. Burada belə bir qanunauyğunlu-

ğun da ödənildiyini gördük ki, düz əməllər olan toplama və vurma bizə heç bir yeni ədəd vermir. Yeni ədəd gətirən əməllər, tərs əməllərdir. Belə ki, çıxma əməli bizə sıfır və mənfi tam ədədləri, bölmə əməli isə rasional ədədləri vermiş olur.

CƏBRİ ƏMƏLLƏR

İndi üçüncü mərtəbənin (pillənin) düz əməli olan qüvvətə yüksəltmə əməlini təyin edək Qeyd edək ki, bu əməl də bizdən asılıdır. Onu istədiyimiz kimi təyin edə bilərdik. Amma tarixən bu əməl aşağıdakı kimi təyin edilmişdir. Eyni vuruqların hasilinə qüvvətə yüksəltmə deyilir". Əgər $m\in N$, $n\in N$ olarsa,

$$m^n = \underbrace{m\cdot m\cdots m}_{n}, \qquad (2.1)$$

belə ki, bu düz əməl də bizi heç bir yeniliyə gətirmir. Qeyd edək ki, bu düz əməl əvvəlki iki düz əməllərdən fərqli olaraq,

$$m^n = n^m,$$

xassəsini ödəmir. Doğrudan da

$$8 = 2^3 \neq 3^2 = 9,$$

olduğundan gözləmək olar ki, qüvvətə yüksəltmə əməlinin iki tərs əməli mövcuddur.

Qüvvətə yüksəltmə əməlinin köməyi ilə bu əməlin tərsini verək. Belə ki, $m\in N$, $n\in N$ üçün m-in n-ci dərəcədən kökü elə k-ya deyəcəyik ki,

$$\kappa^n = m, \qquad (2.2)$$

olsun. Bu zaman

$$\kappa = \sqrt[n]{m}. \qquad (2.3)$$

Beləliklə biz qüvvətə yüksəltmə əməlinin birinci tərs əməli olan kökalma əməlini vermiş oluruq. Bu əməl quvvətə yüksəltmə əməlində əsası təyin etmək üçündür. Toplama və vurma əməllərindən fərqli olaraq quvvətə yüksəltmə əməli üçün

$$m^n \neq n^m, \qquad (2.4)$$

olduğundan, (2.2) dən n-i təyin etmək üçün yeni əməl, loqarifmalama lazım gəlir. Belə ki (2.2) dən

$$n = log_{\kappa} m. \qquad (2.5)$$

Bununla da cəbrin yeddi əməli verilmiş olur.

Asanlıqla görünür ki, (2.3) -ün təyin etdiyi k ədədi Q rasional ədədlər çoxluğundan olmaya da bilər.

Əvvəlki iki halda tərs əməlin genişlənmə verməsi aydın göründüyündən bu halda kök alma əməlinin Q-dən kənara çıxa biləcəyini göstərək.

Tutaq ki $p\in N$-sadə (əsli) ədədir. Yəni p ədədi yalnız vahidə və özünə bölünür. Bu ədədin başqa böləni yoxdur. Əks fərziyyədən istifadə edək. Başqa sözlə qəbul edək ki $\sqrt{p}$ rasional ədəddir. Yəni

$$\sqrt{p} = \frac{m}{n} \in Q, \quad m\in N, \quad n\in N, \quad p\in N, \qquad (2.6)$$

belə ki, $\frac{m}{n}$ ixtisar olunmayan kəsrdir. Onda (2.6) dan

$$p = \frac{m^2}{n^2},$$

və ya

$$m^2 = pn^2, \qquad (2.7)$$

ifadəsini almış oluruq. Aldığımız (2.7) -nin sağ tərəfi p sadə ədədinə bölündüyündən, onun sol tərəfi olan $m^2 = m\cdot m$ -də p-yə bölünməlidir. Onda m ədədi p-yə bölünməlidir. Əks halda p natural ədəd olmazdi. Deməli

$$m=p\kappa, \qquad (2.8)$$

olduğunu alırıq. Bu (2.8)-i (2.7) də yazsaq,

$$p^2\kappa^2 = pn^2,$$

və ya

$$n^2 = p\kappa^2.$$

alarıq.

Burada da yuxarıdakı mühakiməyə əsasən görünür ki n ədədi p-yə bölünməlidir. Bu isə (2.6) kəsrinin ixtisar olunmaması şərtinə ziddir. Beləliklə göstərdik ki, kökalma əməli rasional ədədlər çoxluğunu genişləndirir. Bu genişlənməni birinci irrasionallıq (birinci irrosinal çoxluq) adlandırıb R_1 ilə işarə edəcəyik. Deməli bu vaxta qədər

$$N\subset Z\subset Q\subset R_1,$$

genişlənmələri ilə tanış olmuşuq.

Bu vaxta qədər aldığımız çoxluqlar üçün N və ya Z-in elementlərini m,n,k və s. ilə Q-nün elementlərini $\frac{m}{n}, p, q,$ və s. ilə R_1-in elementlərini isə $\sqrt[k]{\frac{m}{n}}$,r, və s. ilə işarə edəcəyik. Bu o deməkdir ki, R_1-in elementlərini (müsbət ədədləri) üç natural ədədin köməyi ilə, Q-nün müsbət elementlərini iki natural ədədin köməyi ilə, nəhayət N-in (və ya Z-in müsbət elementlərini) elementlərini biz m və ya n kimi göstərə bilirik.

Bu isə o deməkdir ki, əgər axtarılan bir element R_1-dəndirsə bu ədədi

$$\sqrt[k]{\frac{m}{n}}$$

şəklində axtarmaqla, m,n və k ədədlərinin tapılması bu R_1-dən olan ədədin tapılması deməkdir.

İndi yuxarıda təyin etdiyimiz yeni vurma əməlinə qayıdaq. Tutaq ki hesab əməlləri bu vaxta qədər bizim bildiyimiz əməllərdir.

Qüvvətə yüksəltmə əməlinə aşağıdakı kimi tərif edək. Əgər $m\in N$, $n\in N$ və $m>n$ olarsa onda

$$n^m = n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\ldots(m-2)(m-1)m, \qquad (2.9)$$

kimi qəbul etsək, onda bu düz əməl üçün

$$n^m = m^n, \qquad (2.10)$$

xassəsi ödənilmiş olacaqdır, yəni (2.9) düz əməlinin tərsi olan kökalma əməli yeganə olardı.

Əfsuslar olsun ki, həqiqi ədəd oxunun doldurulmasında bu yeddi cəbri əməl ilə kifayətlənirlər və rasional ədədlərdən birdəfəlik həqiqi ədədlərə keçirlər.

Biz isə göstərəcəyik ki, rasional ədədlər çoxlugundan həqiqi ədədlər çoxluğuna keçid sonsuz sayda mərhələdən keçməlidir. İndi bu mərhələlərin necə yaranmasın- dan söhbət gedəcəkdir.

HƏQİQİ ƏDƏDLƏR ÇOXLUĞUNUN ALINMASI

İndi ədədi çoxluğun inkişaf mərhələlərindən dör- düncü mərhələnin (və ya mərtəbənin) düz əməlini təyin edək.

Bu əməli yandan qüvvətə yüksəltmə əməli adlandıraq. Onu iki cür verə bilərik.

Birinci hal. Məsələn,

$$^2a = a^a,$$
$$^3a = (a^a)^a = a^{a^2},$$
$$^4a = ((a^a)^a)^a = (a^a)^{a^2} = a^{a^3},$$

və s. Onda $n\in N$ üçün

$$^na = a^{a^{n-1}}. \qquad (3.1)$$

İkinci hal. Məs.

$$^2a = a^a,$$
$$^3a = a^{a^a},$$
$$^4a = a^{a^{a^a}},$$

və s. Onda $n\in N$ üçün

$$^na = a^{a^{a^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}, \qquad (3.2)$$

burada a -ların sayı n dənədir.

Yuxarida aldığımız (3.1) və ya (3.2) ifadələrindən birini dördüncü mərtəbənin düz əməli olaraq, qəbul edəcəyik.

Bunların hansının düz əməl kimi qəbul edilməsindən asılı olmayaraq,

$$^2a = a^a, \qquad (3.3)$$

münasibəti ödənilməlidir.

Ona görə (3.3) düz əməlinin tərsi olan yeni kökalma əməli (yandan kökalma) həmişə birinci irrasional çoxluqdan ola bilməyəcəyini göstərmək kifayətdir.

Beləliklə

$$^{2}x = x^{x} = 2, \qquad (3.4)$$

tənliyinə baxaq. Göstərək ki (3.4)-dən

$$x \notin R_1 \qquad (3.5)$$

təyin olunur.

Bunun üçün əksin fərz edək. Yəni qəbul edək ki, (3.4)-ün həlli olan $x \in R_1$ dir. Onda

$$x = \sqrt[\kappa]{\frac{m}{n}}, \qquad (3.6)$$

Burada $m \in N$, $n \in N$ və $\kappa \in N$ olduğu qəbul edilmişdir.

Digər tərəfdən $\frac{m}{n}$ - ixtisar olunmayan kəsr, (3.6) -da verilmis kökdə $\kappa > 1$ dir. Əks halda (3.6) -dakı x rasional ədəd olardı.

Əsas tənlik olan (3.4) -dən görünür ki, bu tənliyin həlli $x \in N$ ola bilməz, çünki $x=1$ üçün $x^x = 1$, $x=2$ üçün isə $x^x = 4$ dür. Asanlıqla göstərilə bilər ki, $x \in Q$ -də ola bilməz. Əgər $x=\frac{m}{n}$ olsaydı, onda

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{n}} = 2,$$

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{m} = 2^{n}, \qquad (3.7)$$

$$m^m = 2^n \cdot n^m,$$

olduğunu almış olardıq. Buradan görünür ki $m>n$ olmalıdır. Əlavə olaraq (3.7) dən görünür ki, sag tərəf cüt olduğundan sol tərəf də cütdür.

Yəni

$$m = 2\kappa,$$

onda

$$2^{2\kappa} \cdot \kappa^{2\kappa} = 2^n \cdot n^{2\kappa},$$

buradan da

$$n^{2\kappa} = 2^{2\kappa - n} \cdot \kappa^{2\kappa}. \qquad (3.8)$$

Alinan ifadənin sağ tərəfi cüt ədəd olduğundan, onun sol tərəfi də cütdur.

Yəni n - cütdür. Bu isə $\frac{m}{n}$ - in ixtisar olunmamasına ziddir. Deməli (3.4)-ün həlli rasional ədəd də ola bilməz.

İndi göstərək ki, (3.5) hökmü doğrudur. Bunun üçün (3.6)-nı (3.4) -də yerinə yazaq:

$$\left[\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\kappa}}\right]^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\kappa}}} = 2,$$

və ya

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\kappa}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\kappa}}} = 2,$$

Bunun hər iki tərəfini κ-cı qüvvətə yüksəldək

$$\left(\frac{m}{n}\right)^{\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{\kappa}}} = 2^{\kappa}, \qquad (3.9)$$

Alınan (3.9) ifadəsinin sol tərəfi α^{β} şəklindədir. Burada α cəbri ədəd $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, (rasional ədəd), β-isə cəbri irrasional ədəddir. Ona görə də deyə bilərik ki (3.9) -un sol tərəfi transendent ədəd (yəni heç bir rasional əmsalli çoxhədlinin kökü şəklində göstərilə bilməyən ədəd), sag tərəfi isə cəbri ədəddir (hətta tam ədəddir). Bu ziddiyyət isə (3.5)-in döğruluğunu göstərmiş olur.

Beləliklə ədədi çoxlugun aşağıdakı genişlənməsini almış oluruq:

$$N \subset Z \subset Q \subset R_1 \subset R_2.$$

Bu prosesi istənilən qədər davam etdirmək olar.

Onun üçün beşinci mərhələnin düz əməlini təyin edib, məsələn,

$$_{2}a = {}^{a}a, \qquad (3.10)$$

onun vasitəsi ilə tərs əməl versək, bu əməl bizə yeni ədədlər verəcəkdir ki, onlar R_2-yə daxil deyil. Bu da bizi

$$N \subset Z \subset Q \subset R_1 \subset R_2 \subset R_3.$$

genişlənməsinə gətirəcəkdir. Beləliklə bu prosesi sonsuz davam etdirsək biz ədədi çoxluğun genişlənməsində sonsuz mərhələdən sonra (yəni limitdə) həqiqi ədədlər çoxluğunu almış oluruq.

BU İSƏ HƏQİDİ ƏDƏDLƏR ÇOXLUĞUNUN ALINMASININ YENİ ÜSULUDUR

Burada aşağıdakı kimi çox gözəl qanunauyğunluq mövcuddur.

Belə ki natural ədədlər çoxluğu N-in və ya tam ədədlər çoxluğu Z -in ixtiyari elementini m və ya n, ya da κ şəklində göstərmək olar (N -i nəzərə almaya bilərik, çünki o bizdən asılı deyil. Biz çoxluqları Z dən başlayaraq almağa başladıq). Rasional ədədlər çoxluğu Q-nün ixtiyari elementini $\frac{m}{n}$ şəklində göstərmək olar. Birinci irrasional çoxluq olan R_1 -in ixtiyari elementini $\sqrt[\kappa]{\frac{m}{n}}$ şəklində göstərmək olar. Burada k, m, n, - natural ədədlərdir. Eyni qayda ilə ikinci irrasional çoxluğun R_2 -nin ixtiyari elementini $\sqrt[s]{\sqrt[\kappa]{\frac{m}{n}}}$ şəklində dörd natural ədəd vəsitəsi ilə göstərmək olar. Bu prosesi davam etdirsək ixtiyari R_k çoxlugunun ümumi elementini $(\kappa+2)$ natural ədəd vasitəsilə göstərmək olar. Beləliklə məsələnin həllinin hansı irrasionallıq sinfindən olduğunu təyin etdikdən sonra bu məsələnin həllini sonlu sayda natural ədədin təyin olunmasına gətirmək olur.

Bununla da həqiqi ədədlər çoxluğunu R_k kimi almış oluruq.

İndi isə bu söylənilənləri bir qanunauyğunluq çərçivəsində birləşdirək. Bunun üçün toplama işarəsi olan "+" istifadə ediləcəkdir.

Belə ki, düz əməllər düzülüş nömrəsi vasitəsi ilə üfüqü xətdən yuxarıda, tərs əməllər isə həmən xətdən aşağıda uyğun olaraq öz nömrəsi vasitəsi ilə göstəriləcəkdir.

Riyaziyyatda qəbul edilmiş, işlətdtyimiz əməllər şaquli xətdən sağda yeni adlandırdığımız əməllər isə soldan öz nömrələri vasitəsi ilə göstəriləcəkdir.

Məsələn qəbul olunmuş birinci mərhələnin düz əməli toplama

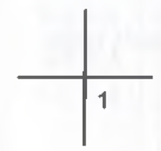


Şəklində, yeni düz əməldə (birinci mərhələ üçün) həmən mənanı verməsinə baxmayaraq,



şəklində işarə ediləcəkdir.

Onları tərs əməlləri olan çıxma əməli də eyni məna kəsb etməsinə baxmayaraq, uyğun olaraq,



və



kimi işarə ediləcəkdir.

İkinci mərhələyə gəldikdə isə bu mərhələnin düz əməli olan "vurma əməli"nin qəbul olunmuş şəkli, yəni eyni toplananların toplanması əməli



şəklində, yeni təyin edəcəyimiz vurma əməli isə, yəni $m>n$ olarsa

$$m \cdot n = m + (m-1) + \ldots + (n+1) + n$$

şəklində verilən vurma əməli



işarə ediləcəkdir.

Eyni olmayan bu vurma əməlləri hər ikisi yerdəyişmə xassəsinə malik olduqlarından onların yeganə xassəsinə malik tərs əməlli bölmə mövcuddur.

Bu tərs əməllər uyğun olaraq,





ilə işarə edəcəyik.

Qeyd. Adi vurma əməlində ixtiyari ədədi vahidə vurduqda dəyişmədiyi kimi, yeni vurma əməlində hər bir ədədi özünə vurduqda bu ədəd dəyişmir, yəni adi vurmada

5 · 1=5,

olduğu halda, yeni vurmada

5 · 5=5,

olduğu qəbul edilir.

Eyni qayda ilə bölmə əməli üçün

5 : 1=5,

olduğu halda, yeni bölmədə

5 : 5=5

olduğu qəbul olunur.

Yeni təyin etdiyimiz vurma və bölmə əmələri üçün aşağıdakı kimi cədvəlləri verək.

Birdən ona qədər ədədlərin hasili üçün....

1·1 = 1	1·6 = 21	7·1 = 28	7·6 = 13
1·2 = 2	1·7 = 28	7·2 = 27	7·7 = 7
1·3 = 6	1·8 = 36	7·3 = 25	7·8 = 15
1·4 = 10	1·9 = 45	7·4 = 22	7·9 = 24
1·5 = 15	1·10 = 55	7·5 = 18	7·10 = 34
2·1 = 3	2·6 = 20	8·1 = 36	8·6 = 21
2·2 = 2	2·7 = 27	8·2 = 35	8·7 = 15
2·3 = 5	2·8 = 35	8·3 = 33	8·8 = 8
2·4 = 9	2·9 = 44	8·4 = 30	8·9 = 17
2·5 = 14	2·10 = 54	8·5 = 26	8·10 = 27
3·1 = 6	3·6 = 18	9·1 = 45	9·6 = 30
3·2 = 5	3·7 = 29	9·2 = 44	9·7 = 24
3·3 = 3	3·8 = 33	9·3 = 42	9·8 = 17
3·4 = 7	3·9 = 42	9·4 = 39	9·9 = 9
3·5 = 12	3·10 = 52	9·5 = 35	9·10 = 19
4·1 = 10	4·6 = 15	10·1 = 55	10·6 = 40
4·2 = 9	4·7 = 22	10·2 = 54	10·7 = 34
4·3 = 7	4·8 = 30	10·3 = 52	10·8 = 27
4·4 = 4	4·9 = 39	10·4 = 49	10·9 = 19
4·5 = 9	4·10 = 49	10·5 = 45	10·10 = 10
5·1 = 15	5·6 = 11		
5·2 = 14	5·7 = 18		
5·3 = 12	5·8 = 26		
5·4 = 9	5·9 = 35		
5·5 = 5	5·10 = 45		
6·1 = 21	6·6 = 6		
6·2 = 20	6·7 = 13		
6·3 = 18	6·8 = 21		
6·4 = 15	6·9 = 30		
6·5 = 11	6·10 = 40		

18:6 = 3	18:3 = 6		
25:7 = 3	25:3 = 7		
33:8 = 3	33:3 = 8		
42:9 = 3	42:3 = 9		
52:10 = 3	52:3 = 10		

və həmin cədvəldən alınan bölmə əməli üçün aşağıdakı kimi cədvəl mövcuddur

		10:1 = 4	10:4 = 1
		9:2 = 4	9:4 = 2
1:1 = 1		7:3 = 4	7:4 = 3
3:1 = 2	3:2 = 1	4:4 = 4	
6:1 = 3	6:3 = 1	9:5 = 4	9:4 = 5
10:1 = 4	10:4 = 1		
15:1 = 5	15:5 = 1	15:6 = 4	15:4 = 6
		22:7 = 4	22:4 = 7
21:1 = 6	21:6 = 1	30:8 = 4	30:4 = 8
28:1 = 7	28:7 = 1	39:9 = 4	39:4 = 9
36:1 = 8	36:8 = 1	49:10 = 4	49:4 = 10
45:1 = 9	45:9 = 1		
55:1 = 10	55:10 = 1	15:1 = 5	15:5 = 1
		14:2 = 5	14:5 = 2
3:1 = 2	3:1 = 2	22:3 = 5	22:5 = 3
2:2 = 2		9:4 = 5	9:5 = 4
5:3 = 2	5:2 = 3	5:5 = 5	
9:4 = 2	9:2 = 4		
14:5 = 2	14:2 = 5	11:6 = 5	11:5 = 6
		18:7 = 5	18:5 = 7
20:6 = 2	20:2 = 6	26:8 = 5	26:5 = 8
27:7 = 2	27:2 = 7	35:9 = 5	35:5 = 9
35:8 = 2	35:2 = 8	45:10 = 5	45:5 = 10
44:9 = 2	44:2 = 9		
54:10 = 2	54:2 = 10	21:1 = 6	21:6 = 1
		20:2 = 6	20:6 = 2
6:1 = 3	6:3 = 1	18:3 = 6	18:6 = 3
5:2 = 3	5:3 = 2	15:4 = 6	15:6 = 4
3:3 = 3		11:5 = 6	11:6 = 5
7:4 = 3	7:3 = 4		
12:5 = 3	12:3 = 5		

6:6 = 6

13:7 = 6 13:6 = 7

21:8 = 6 21:6 = 8

30:9 = 6 30:6 = 9

40:10 = 6 40:6 = 10

28:1 = 7 28:7 = 1

27:2 = 7 27:7 = 2

25:3 = 7 25:7 = 3

22:4 = 7 22:7 = 4

15:5 = 7 18:7 = 5

13:6 = 7 13:7 = 6

7:7 = 7

15:8 = 7 15:7 = 8

24:9 = 7 24:7 = 9

34:10 = 7 34:7 = 10

36:1 = 8 36:8 = 1

35:2 = 8 35:8 = 2

33:3 = 8 33:8 = 3

30:4 = 8 30:8 = 4

26:5 = 8 26:8 = 5

21:6 = 8 26:8 = 6

15:7 = 8 15:8 = 7

8:8 = 8

17:9 = 8 17:8 = 9

27:10 = 8 27:8 = 10

45:1 = 9 45:9 = 1

44:2 = 9 44:9 = 2

42:3 = 9 42:9 = 3

39:4 = 9 39:9 = 4

35:5 = 9 35:9 = 5

30:6 = 9 30:9 = 6

24:7 = 9 24:9 = 7

17:8 = 9 17:9 = 8

9:9 = 9

19:10 = 9 19:9 = 10

55:1 = 10 55:10 = 1

54:2 = 10 54:10 = 2

52:3 = 10 52:10 = 3

49:4 = 10 49:10 = 4

45:5 = 10 45:10 = 5

40:6 = 10

34:7 = 10 40:10 = 6

27:8 = 10 34:10 = 7

19:9 = 10 23:10 = 8

10:10 = 10 19:10 = 9

Bu prosesi davam etdirsək, üçüncü mərhələnin düz əməli qüvvətə yüksəltmə əməlinin qəbul olunmuş variantı



ilə, yeni qüvvətə yüksəltmə əməli isə



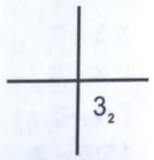
kimi işarə ediləcəkdir.

Bu əməllərin tərsi isə qəbul olunmuş qüvvətə yüksəltmə əməli üçün yerdəyişmə doğru olmadığından iki tərs əməl (kök alma və loqarifmalama) mövcuddur.

Onları



və



ilə işarə edəcəyik.

Yəni qüvvətəyüksəltmə əməli üçün əgər ikinci əməl olan vurma yeni deyilsə, onda qüvvətəyüksəltmə əməli yerdəyişmə xassəsinə malik olduğundan yeganə tərs əmələ (kökalma əməlinə) malikdir ki, bu əməli



ilə işarə edəcəyik.

Bu halda qəbul olunmuş işarələmənin köməyi ilə üçüncü mərtəbənin düz əməli üçün aşağıdakı misalları verək:

5 | 3 — $8 = 5^8 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 30 \cdot 56 = 1680,$

5 | 3 — $5 = 5^5 = 5 \cdot 5 = 5,$

2 | 3 — $4 = 2^4 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 4 \cdot 2 \cdot 3 = 24,$

1 | 3 — $4 = 1^4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24,$

9 | 3 — $6 = 9^6 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 72 \cdot 42 = 3024,$

0 | 3 — $4 = 0^4 = 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 0,$

(-2) | 3 — $3 = (-2)^3 = (-2) \cdot (-1) \times \times 0 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 0,$

(-2) | 3 — $(-5) = (-2)^{(-5)} = (-2) \cdot (-3) \times \times (-4) \cdot (-5) = 120,$

(-1) | 3 — $(-3) = (-1)^{(-3)} = (-3)^{(-1)} = (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) = -6.$

Eyni qayda ilə bu mərhələnin tərs əməli üçün alarıq:

1680 | 3 — 5 = 8,

1680 | 3 — 8 = 5,

5 | 3 — 5 = 5,

24 | 3 — 2 = 4,

24 | 3 — 4 = 2,

24 | 3 — 1 = 4,

24 | 3 — 4 = 1,

3024 | 3 — 6 = 9,

3024 | 3 — 9 = 6,

0 | 3 — 4 = 0,

0 | 3 — 0 = 4,

0 | 3 — (-2) = 3,

0 | 3 — 3 = -2,

120 | 3 — (-2) = -5

120 | 3 — (-5) = -2

-6 | 3 — (-1) = -3

-6 | 3 — (-3) = -1

Yuxarıda söylənildiyi kimi birinci mərhələ üçün təyin olunmuş



düz əməlləri eyni olub, toplama əməlləri, onların tərsi də

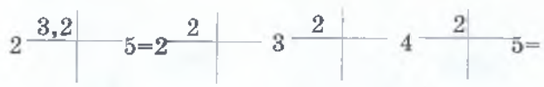


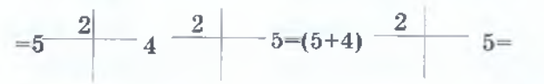
kimi işarə edilən eyni çıxma əməlləridir.

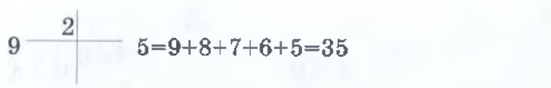
Əgər ikinci düz əməl olan vurma yenidirsə, onda üçüncü düz əməl də yeni olarsa, bu halda işarələmə



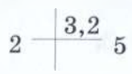
kimi aparılacaqdır. Yəni həm vurma, həm də qüvvətə yüksəltmə əməlləri yenidir.







Məsələn,
Əgər



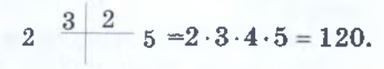
ifadəsini hesablamaq lazım gələrdisə, onda



Əgər



hesablamaq lazım gələrdisə, onda



Qeyd edək ki, əgər hesablama zamanı əvvəlki əməllər göstərilməyibsə, onda onları qəbul edilmiş əməllər hesab edəcəyik.

Yəni



Beləliklə biz bütün mərhələlər üçün həm düz, həm də tərs əməlləri yalnız

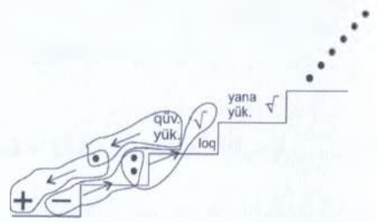


işarəsinin köməyi ilə vermiş oluruq.

Əgər bu cür işarələmə qəbul edilməsəydi onda həqiqi ədədləri almaq üçün sonsuz sayda işarələmə qəbul etməli olardıq.

İNTEQRAL VƏ TÖRƏMƏ ANLAYIŞINA YENİ BAXIŞ

Yenidən yuxarıda haqqında söhbət etdiyimiz əməllər mərhələsinə qayıdaq.



İki ardıcıl düz əməlin ardıcıl aparılmasına nəzər yetirək:

$$\sum_{\kappa=1}^{n} f(x_\kappa)\Delta x_\kappa. \qquad (4.1)$$

Asanlıqla görmək olar ki, bu bizə ədəbiyyatdan məlum olan Darbu cəmini xatırladır. Deməli inteqrala iki düz əməlin ardıcıl təsiri kimi baxmaq olar. Bu additiv inteq-

raldır. İndi iki tərs əməlin ardıcıl təsirinə baxaq:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} \qquad (4.2)$$

Bu isə bizə törəməni xatırladır. Deməli törəməyə iki tərs əməlin ardıcıl təsiri kimi baxa bilərik. Bu additiv törəmə adlanır. İndi şəkildə bir pillə yuxarı qalxaq. Yenə də iki ardıcıl düz əmələ baxaq. Əvvəl qüvvətəyüksəltmə əməli, sonra isə vurma əməli:

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i)^{\Delta x_i}, \qquad (4.3)$$

ifadəsi multiplikativ inteqralı yada salır. Bu mərtəbədə tərs əməllər ardıcıllığına nəzər yetirsək, yenə də törəmə almış olarıq ki, bu multiplikativ törəmə adlanıb,

$$\left(\frac{f(x+\Delta x)}{f(x)}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}, \qquad (4.4)$$

kimi işarə olunur.

Qeyd 1. Bizə orta məktəbdən məlum olan və ali məktəbdə təkmilləşdirilən inteqral və törəmə mövzuları (4.1) və (4.2) nin uyğun olaraq Δx_κ və h sıfra yaxınlaşdıqda limit vəziyyətidir. Bunlar additiv inteqral və törəmələrdir.

Qeyd 2. Eyni qayda ilə bir pillə yuxarı qalxaraq qurduğumuz (4.3) və (4.4) -ün uyğun olaraq, Δx_i və h sıfıra yaxınlaşdıqda limit vəziyyətləri multiplikativ inteqral və multiplikativ törəmə adlanır. Bunlar haqda aditiv inteqral və törəmələrə nisbətən çox az işlər mövcuddur.

Qeyd 3. İndi isə üç düz əməlin ardıcıl aparılmasından alınan yeni inteqraldan söhbət açaq. Belə ki, əvvəlcə qüvvətə yüksəltmə, sonra vurma və nəhayət toplama əməli.

Qeyd 4. Eyni qayda ilə qeyd 3 də verilən əməlin tərsindən söhbət gedə bilər. Belə ki əvvəlcə çixma əməli, sonra bölmə əməli və nəhayət kökalma əməli.

Bu cür təyin olunan inteqral və törəmə haqda hələ ki, heç bir məlumat belə yoxdur. Əvvəl onlara tərif vermək və sonra müxtəlif funksiyaların inteqral və törəmələri üçün cədvəllər hazırlamaq lazımdır.

İndi yeri gəlmişkən bir neçə məsələni qeyd edək. Yuxarıda gördük ki, bizi yeniliyə aparan tərs əməllər idi. Hər dəfə tərs əməllər bizə yeni ədədlər verirdi. Onda aşağıdakı suallara cavab verməyə çalışın.

1) Yuxarıda verdiyimiz (4.2) -nin limiti olan additiv törəmə bizə hansı yeniliyi verir?

2) Eyni qayda ilə qurulmuş (4.4)-ün limiti adlanan multiplikativ törəmə bir tərs əməl kimi bizi hansı yeniliklərə aparıb çıxarır?

3) Nəhayət ardıcıl aparılan üç tərs əməlin nəticəsi olan bu yeni törəmə bizi hansı yeniliyə aparır?

KƏSR ÖLÇÜLÜ FƏZALAR

Məlumdur ki, ixtiyari hadisənin riyazi modelinin qurulması orta məktəb şagirdinə tapşırılarsa onun qurduğu model xətti cəbri tənliklər sistemindən ibarət olacaqdır.

Çünki onun bildiyi səviyyə o qədərdir. Əgər modeli quran şəxsin ali savadı varsa, onun qurduğu model müəyyən diferensial tənlik üçün qoyulmuş məsələ olacaqdır. Əgər bu səviyyə bir qədər də yüksəkdirsə alınan model qeyri-xətti tənlik üçün məsələ və nəhayət kəcr tərtibli və ya törəməsinin tərtibi kəsilməz dəyisən tənliklər üçün qoyulmuş məsələlər alınacaqdır. Ona görə hər hadisəyə yuxarıdan baxmağı bacarmaq lazımdır.

Bizə çox xoş olan bir təbii qanunauyğunluğu burada da qeyd etmək istərdik. Belə ki bir mövzunu oxuyub başa düşmədikdə heç də pəjmürdə olmayın.

Sözsüz ki, bundan sonra ondan daha mürəkkəb olan başqa mövzunu oxuduqda, onu da başa düşməyəcəksiniz, amma əvvəlki mövzu sizin üçün yavaş-yavaş aydınlaşacaqdır. Bu çəmiyyətin deyil təbiətin qanunauyğunluqlarından biridir.

Digər belə bir qanunauyğunluq bir hadisəni mümkün qədər çox təkrar edib özünü ona təlqin etməkdir. O hadisəni özünə inandırdıqdan sonra bu hadisəni başqalarına inandırmaq çətin deyildir.

Belə ki bir hadisə çox təkrar olunursa onun icrası asanlaşır.

Məsələn, Vahid təsdiq etmək istədiyi

bir kəlami belə qələmə verərdi: "Bunu bir mən demirəm, cümlə İvanlar da deyir". Cümlə İvanlar böyük çoxluq olduğundan bu söylənilən kəlamın doğruluğuna dəlalət edir.

Yuxarıdan baxa bilməyə daur daha bir misal gətirək.

Tutaq ki, müstəvi üzərində məhdud bir oblasta baxırıq. Məsələn dairəyə və ya düzbucaqlıya. Bu oblastda hərəkət edən nöqtərə və dür xətt parçalarına baxaq. Əgər düz xətt parçaları olmasaydı bu nöqtələr bir birini asanlıqla görə bilərdilər. Belə ki, *A* asanlıqla *B* və *C* -ni görür. Ancaq *D* -ni görmək üçün yerini dəyişməsi kifayətdir.

B-nin *D*-ni görməsi üçün onun azca yerdəyişməsi kifayət deyildir.

Əgər müstəvi oblastdan qopmaq mümkün olsaydı, onda azca yuxarı qalxmaqla bu oblasdakı bütün elementləri görmək çətin deyildir. İndi qəbul edək ki, bizim olduğumuz otaqda bütün qapı və pəncərələr bağlıdır. Aydındır ki biz bu otaqdan kənara çıxmaq üçün ya qapıdan ya pəncərədən ya da divarı deşməklə çıxa bilərik.

Amma biz özümüz otaqdan çıxmadan bir müddət əvvəl harada oldugumuzu fikrən yada salıb o yerləri bir daha səyahət edə bilərik. Bu cür səyahət nəinki məkan məhdudluğuna heç zaman məhdudluğuna da qail deyil. Belə ki, biz otaqdan çıxmadan həm keçmişə həm də gələcəyə gedə bilərik."Vokruq sveta" jurnalından bir hadisə haqda belə yazılmışdır.

O zaman SSRI dövründə bir qrup şəxs Krıma yığılırlar ki, dəniz gəzintisinə çıxsınlar. Gəminin çıxmasına 4-4,5 saat vaxt var imiş. Yığışanlar nahar etmək üçün restoranlara gedirlər. Bir cavan bir də yaşlı qadın qalır. Yaşlı qadın cavana bir qədər dolanmağı təklif edir. Onlar gəzdikdə palma tipli ağaclıqla rastlaşırlar. Cavan qadının halı pisləsir. Yaşlı qadın buna fikir vermir, onlar bir dənizçilər (matros) məzarlığına yaxınlaşırlar. Cavan qadının vəziyyəti bir qədər də pisləşir. Onlar qəbristanlığa girdikdə artıq cavan qadın heç gəzə bilmir və yaşlı qadın onu kənara çıxarası olur. Bir müddətdən sonra özünə gələn cavan qadın deyir ki, mən bu yerlərdə olmamışam. Birinci dəfədir ki, bu yerlərdə oluram. Amma bu palma tipli ağaclığı və bu qəbristanlığı 10 ilə yaxındır ki hər il iki və ya üç dəfə mən yuxumda görürəm.

Deməli yuxarıda haqqında danışdığımız fikir üçün zaman məhdudiyyəti də yoxdur. O keçmişə qayıda bildiyi kimi gələcəyə də gedə bilir.

Nəhayət daha bir kəlamı sizə çatdırmaq iştərdik ki, heç nəyə məhdudiyyət qoymaq lazım deyil. Belə ki, Nyüton mexanikasında kütlə sabit qəbul edilərək, müəyyən məhdudiyyətlər daxilində sürətlər öyrənilirdi. Sonralar məlum oldu ki, sürət artdıqca kütlə də artir. Eynşteyn nəzəriyyəsində işıq sürəti sabit (ən böyük) götürülərək nisbilik nəzəriyyəsini bu məhdudiyyət daxilində qurmuşdur. Ancaq yuxarıda haqqında söhbət gedən mövhum fikir bir anın içində təsəvvür olunmayan məsafəni qət edib geri qayıdır.

Deməli bu mühakimələrdən görünür ki, elə ən azı dörd ölçülü fəzanın elementi mövcuddur ki, (fikirdir, ruhdur, nə isə bir varlıqdır) biz onun bu üç ölçülü fəzada proyeksiyasıyıq.

Beləliklə tanri, xuda, allah adlanan varlıq sonsuz ölçülü fəzanın elementidir ki, istənilən zamanda istənilən yerdə mövcuddur. İndi bu fəlsəfəni bir kənara qoyub, qayidaq riyariyyatın kəsr ölçülü fəzasının qurulmasına. Yaddan çıxarmayaq ki, "riyariyyat təbiətin dilidir".

Dünya ədəbiyyatında kəsr ölçülü fəralar həndəsi olaraq qurulmuşlar. Bu fəzaların ölçüsü əsasən bir ilə iki arasında və iki ilə üç arasında olur. Bizim quracağımız kəsr ölçülü fəzalar analitik yolla qurulacaq və onların ölçüsü sıfırla bir arasında olacaqdır.

Beləliklə yuxarıda apardığımız ədədi çoxluğun inkişaf mərhələlərini bir daha yada salaraq, həqiqi ədədlər çoxlugunu (mənfi olmayan) aşagıdakı mühakimənin köməyi ilə quraq.

HƏQİQİ ƏDƏDLƏR ÇOXLUĞUNUN ALINMASI

Natural ədədlər çoxluğu əsas çoxluq olduğundan biz bu çoxluqla işləyəcəyik. Amma aparacağımız əməllər bizim verdiyimiz əməl olan vurmanın tərsindən başlayacaqdır. Biz burada yalnız tərs əməllərlə işləyəcəyik.

Məqsədimiz aşağıdakı cədvəli doldurmaqdan ibarətdir

$$\begin{array}{l} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ \ldots \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ . \\ . \\ . \end{array}$$

Bunun üçün əvvəlcə N-natural ədədlər çoxluğuna baxaq.

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ \ldots\ ,$$

bu ədədləri vahidə böldükdə həmən ədədlər özləri alınır. İndi bu ədədlərin hər birini ikiyə bölməklə alınan ədədləri bunların altında yazaq:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ \ldots\ ,$$

$$\frac{1}{2}\ 1\ \frac{3}{2}\ 2\ \frac{5}{2}\ 3\ \frac{7}{2}\ 4\ \frac{9}{2}\ 5\ \frac{11}{2}\ \ldots\ .$$

İndi bu natural ədədlər çoxluğunun hər bir elementini üçə bölüb alınan ədədləri üyğun olaraq N-dən olan ədədlərin altında yazsaq, alarıq:

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ \ldots\ ,$$

$$\frac{1}{2}\ 1\ \frac{3}{2}\ 2\ \frac{5}{2}\ 3\ \frac{7}{2}\ 4\ \frac{9}{2}\ 5\ \frac{11}{2}\ \ldots\ ,$$

$$\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 1\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{3}\ 2\ \frac{7}{3}\ \frac{8}{3}\ 3\ \frac{10}{3}\ \frac{11}{3}\ \ldots\ .$$

Bu prosesi davam etdirsək, aşağıdakı sonsuz cədvəli (matrisi) almış oluruq. Dördüncü sətri almaq üçün natural ədədləri dördə, sonrakı sətri almaq üçün beşə və s. bölmək lazımdır.

$$\begin{array}{l}
1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{2}\ 1\ \frac{3}{2}\ 2\ \frac{5}{2}\ 3\ \frac{7}{2}\ 4\ \frac{9}{2}\ 5\ \frac{11}{2}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{3}\ \frac{2}{3}\ 1\ \frac{4}{3}\ \frac{5}{3}\ 2\ \frac{7}{3}\ \frac{8}{3}\ 3\ \frac{10}{3}\ \frac{11}{3}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{4}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ 1\ \frac{5}{4}\ \frac{3}{2}\ \frac{7}{4}\ 2\ \frac{9}{4}\ \frac{5}{2}\ \frac{11}{4}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}\ \frac{4}{5}\ 1\ \frac{6}{5}\ \frac{7}{5}\ \frac{8}{5}\ \frac{9}{5}\ 2\ \frac{11}{5}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{6}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{5}{6}\ 1\ \frac{7}{6}\ \frac{4}{3}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{3}\ \frac{11}{6}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{7}\ \frac{2}{7}\ \frac{3}{7}\ \frac{4}{7}\ \frac{5}{7}\ \frac{6}{7}\ 1\ \frac{8}{7}\ \frac{9}{7}\ \frac{10}{7}\ \frac{11}{7}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{8}\ \frac{1}{4}\ \frac{3}{8}\ \frac{1}{2}\ \frac{5}{8}\ \frac{3}{4}\ \frac{7}{8}\ 1\ \frac{9}{8}\ \frac{5}{4}\ \frac{11}{8}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{9}\ \frac{2}{9}\ \frac{1}{3}\ \frac{4}{9}\ \frac{5}{9}\ \frac{2}{3}\ \frac{7}{9}\ \frac{8}{9}\ 1\ \frac{10}{9}\ \frac{11}{9}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{10}\ \frac{1}{5}\ \frac{3}{10}\ \frac{2}{5}\ \frac{1}{2}\ \frac{3}{5}\ \frac{7}{10}\ \frac{4}{5}\ \frac{9}{10}\ 1\ \frac{11}{10}\ \ldots \\[4pt]
\frac{1}{11}\ \frac{2}{11}\ \frac{3}{11}\ \frac{4}{11}\ \frac{5}{11}\ \frac{6}{11}\ \frac{7}{11}\ \frac{8}{11}\ \frac{9}{11}\ \frac{10}{11}\ 1\ \ldots \\[4pt]
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \tag{1.1}$$

İndi (1.1)-də verilmiş cədvəlin elementlərindən üçüncü tərs əməl olan kökalma əməlini aparaq. Belə ki, (1.1)-in elementlərinin birinci dərəcədən kökü elə həmən ədədləri verəcəkdir. Bu ədədlər birinci mərtəbədə yerləşdirilirlər. İndi həmən (1.1) cədvəlinin elementlərinin ikinci dərəcədən köklərini qurub alınan

Cədvəli (1.1)-in üstündə (yəni ikinci mərtəbədə) yerləşdirək. Onun üstündə (üçüncü mərtəbədə) (1.1)-in elementlərinin üçüncü dərəcədən köklərini yerləşdirək. Bu

qayda ilə prosesi davam etdirərək kökləri yerləşdirməklə üç ölçülü bir cədvəl (üç ölçülü matris və ya tenzor) almış oluruq.

İndi aldığımız üç ölçülü cədvəlin elementləri üzərində dördüncü tərs əməl yandan qüvvətə yüksəltmə əməlinin tərsi olan yandan kökalma əməlini aparacağıq. Belə ki, $\sqrt{\ }$ əməl elementləri dəyişmədiyindən bu üç ölçülü cədvəl olduğu kimi qalır.

Bu cədvəlin $\sqrt[2]{\ }, \sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }$, və s. köklərini dördüncü ölçü boyunca yerləşdirsək nəticədə dörd ölcülü cədvəl almiş olacağıq.

Beləliklə qeyri-məhdud sayda bu prosesi davam etdirsək, nəticədə sonsuz ölçülü cədvəl alacağıq. Bu alınan cədvəldəki ədədləri bir çoxluqda birlləşdirsək, həqiqi ədədlər soxluğunu almış oluruq.

Ədədlərdən ibarət olan cədvəllər qurulduqda, hər sonrakı mərhələdə bir ölçü əlavə olunduqda alınan ədədlər əvvəlki mərhələnin ədədlərindən qat-qat çoxdur.

SIFIR ÖLÇÜLÜ ÇOXLUQ

İndi yuxarıda söylənilən sxemi aşağıdakı səpgidə aparaq. Başlanğıc çoxluq olan natural ədədlər çoxluğu N-in əvəzinə bu çoxluqdan götülmüş sonlu sayda elementi olan çoxluqdan başlayaq (bu N-nin sonlu elementli alt çoxluğudur)

Tutaq ki, bu çoxluq

$$\{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_m\}, \qquad (2.1)$$

m elementli (2.1) çoxluğudur. Onda birinci mərhələdə bu ədədləri əvvəlcə n_1-ə, sonra n_2-yə və s. axırda n_m-ə bölməklə alınan sətrləri alt-alta yazsaq, bir sonlu sayda elementi olan matris almış oluruq. İkinci mərhələdə bu matrisin elementlərindən n_1, n_2 və s. n_m dərəcədən kök almaqla aldığımız matrisləri üst-üstə düzməklə sonlu sayda elementi olan üç ölçülü matris (tenzor) almış oluruq. Bu prosesi davam etdirsək (sonsuz sayda), nəticədə alınan çoxluğun elementlərinin sayı sonsuz olacaqdır. Amma bu çoxluq hesabi (elementləri sayıla bilən) olduğundan bu çoxluq hesabı çoxluqdur və ona görə də onun ölçüsü sıfırdır.

KƏSR ÖLÇÜLU FƏZALAR

İndi belə bir hala baxaq. Başlanğıc çoxluq olan N əvəzinə tək ədədlər çoxlugu olan

$$\{1,3,5,7,9,\ldots\}, \qquad (3.1)$$

(3.1)-i götürək. Bütün yuxarıda söylənilən mərhələləri (3.1) çoxluğundan başlayaraq aparsaq, nəticədə alınan çoxluq $\frac{1}{2}$ ölçülü çoxluq olar və onu $R_1^{\frac{1}{2}}$ ilə işarə edəcəyik.

Eyni qayda ilə əqər çüt ədədlər çoxluğu

$$\{2,4,6,8,\ldots\}, \qquad (3.2)$$

(3.2)-dən başlasaydıq yenə də $\frac{1}{2}$ ölçülu bir çoxluq almış olardıq ki, bu çoxluğu $R_2^{\frac{1}{2}}$ ilə işarə edəcəyik. Belə ki onların kəsişməsi olan

$$R_1^{\frac{1}{2}} \cap R_2^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.3)$$

(3.3) çoxlugu ölçüsü sıfır olan hesabi çoxluq, onların birləşməsi isə

$$R_1^{\frac{1}{2}} \cup R_2^{\frac{1}{2}} = R, \qquad (3.4)$$

bütün həqidi ədədlər çoxluğunu verir.

Bu mərhələdə başlanğıc çoxluq olaraq N əvəzinə sayi sonlu olmayan

$$\{1,2,3,4,5,6,8,11,12,13,14,15,16,18;\ 21,22,23,24,25,26,28;.\} \qquad (3.5)$$

(3.5) çoxluğunu götürək. Asanlıqla görünür ki, bu çoxluğa hər on ədəddən (1dən 10-a qədər olan ədədlərdən, 11dən 20-yə qədər olan ədədlərdən və s.) yeddisi götürülmüşdür.

Bu çoxluq üzərində yuxarıda söylənilən əməlləri aparsaq, $R_1^{0,7}$ çoxlugunu almış olarıq. Alınan çoxlugun ölçüsü 0,7-dir.

Əgər (3.5) əvəzinə başlanğıc çoxluq olaraq

$$\{5,6,7,8,9,15,16,17,18,19;\ 25,26,27,28,29;\ldots\} \qquad (3.6)$$

(3.6)-a baxsaq, onda aldığımız çoxluq $\frac{1}{2}$ ölçülü çoxluq olaçaqdır ki bu $R_2^{0,5}$ ilə əvvəlki $R_1^{0,7}$ çoxluğunu kəsişməsi

$$R_1^{0,7} \cap R_2^{0,5} = R_3^{0,3}, \qquad (3.7)$$

kimi 0,3 ölçülü çoxluq olacaqdır.

Aldığımız ((3.5) və (3.6)-nın köməyi ilə) bu iki çoxluğun birləşməsi isə

$$R_1^{0,7} \cup R_2^{0,5} = R_4^{0,9}, \qquad (3.8)$$

(3.8) kimi alınan 0,9 ölçülu çoxluq olacaqdır.

Bu mühakimələrdən görünr ki, burada əsas başlanğıcda götürülən çoxluqdakı ədədlər arasındakı təkrarlanmada olan qanunauyğunluq (periodiklik) olur. Belə ki əgər başlanğıc çoxluq olaraq

$$\{14,15,19,41,47,59,60,61,62,64,65,\ 71,72,78,79,80,82;97,98,102,124,130,\ 142,143,144,145,147,148,154,155,\ 161,162,163,165;.....\} \qquad (3.8)$$

(3.9) çoxluğuna baxaq. Burada periodiklik belədir ki, hər 83 ədəddən 17-si istirak edir. Ona görə də (3.9)-un köməyi ilə alınan çoxluq

$$R^{\frac{17}{83}},$$

kimi verilən və ölçüsu $\frac{17}{83}$ olan çoxluqdur. Çox ehtimal ki, yuxarıda göstərilən periodiklik pozula da bilər. Belə ki, əgər qurmaq istədiyimiz fəzanın ölçüsü rasional ədəd deyilsə, məsələn,

$$\sqrt{2} - 1 = 0,4142\ldots, \qquad (3.10)$$

(3.10) kimi göstərilə bilən irrasional ədəddirsə (bu ədəd sıfır ilə bir arasında olmalıdır), onda başlanğıc çoxluq olaraq elə ədədləri götürməliyik ki, birinci on ədəddən orada dörd dənəsi, birinci 100 ədəddən 41 dənəsi, birinci 1000 ədəddən 414 dənəsi, 10000 ədəddən 4142 dənəsi və s. iştirak etmiş olsun. Belə ki, birinci onluqdan iştirak edən dörd ədəd, birinci 100-lükdə iştirak edən 41 ədədin içərisində iştirak etmiş olsun. Bu qayda ilə aldığımız başlanğıc çoxluğun köməyi ilə qurulan fəzanın ölçüsü (3.10)-da verilən ədəd, yəni $(\sqrt{2} - 1)$ olacaqdır.

Beləliklə biz gördük ki, ölçüsü sıfır ilə bir arasında olan ixtiyari həqiqi ölçülü çoxluq qurmaq mümkündür.

BÖLÜNÜR, YA BÖLÜNMÜR

Bəzən elə şərait yaranır ki, bir ədədin digərinə bölünüb-bölünmədiyini təcili təyin etmək lazım gəlir. Fərz edək ki, siz mağazadan 3 pozan, 6 karandaş və 9 eyni cür dəftər almısınız, satıcı isə deyir: "Alqıya görə on manat verməlisiniz". Alqının dəqiq qiymətini bilmədən belə ani anlamaq olar ki, satıcı səhv edib. Axı cəmi dəyər mütləq 3-ə bölünməlidir, lakin nə 10 manat, nə 1000 qəpik 3-ə bölünmür.

Ənənəvi "bucaqlı" bölməyə əl atmadan bir ədədin o birinə bölünüb-bölünmədiyini necə təyin etmək olar? Böyük olmayan bölənlər üçün sadə, asan yadda qalan əlamətlər mövcuddur.

2-yə bölünmə əlaməti. n ədədi yalnız və yalnız onda 2-yə bölünər ki, onun axırıncı rəqəmi 2-yə bölünsün.

4-ə bölünmə əlaməti. n ədədi yalnız və yalnız onda 4-ə bölünər ki, n-in iki axırıncı rəqəmindən əmələ gələn ədəd 4-ə bölünsün.

8-ə bölünmə əlaməti. n ədədi yalnız və yalnız onda 8-ə bölünər ki, n-in üç axırıncı rəqəmindən əmələ gələn ədəd 8-ə bölünsün.

Misal gətirək: 199 619 971 998 ədədinin 2-yə bölünüb-bölünməməsi yalnız onun axırıncı rəqəmi 8-lə (2-yə bölünür); 4-ə iki axırıncı rəqəmi ilə (98 4-ə bölünmür); 8-ə 998 ədədi ilə (8-ə bölünmür, yeri gəlmişkən, bu artıq 199 619 971 998 ədədinin 4-ə bölünməməsi faktından alınır) təyin olunur.

2, 4, 8-ə bölünmə əlamətlərinə diqqətlə baxsaq, 2^m-ə (m = 1, 2, 3, 4...) bölünmə əlamətini tapmaq olar. n ədədi yalnız və yalnız onda 2^m-ə bölünər ki, n ədədinin axırıncı m rəqəmindən əmələ gələn m-rəqəmli ədəd

2^m-ə bölünsün.

Həqiqətən, ilkin n ədədini iki toplananın cəmi şəklində göstərmək olar ki, onlardan biri m sıfırla qurtarır, digəri isə n ədədinin son m rəqəmindən əmələ gəlib. Birinci toplanan 10^m-ə, $10^m = 5^m \cdot 2^m$ olduğundan, deməli, 2^m-ə də bölünür. Beləliklə, ilkin ədədin 2^m-ə bölünməsi məsələsi bütövlükdə ikinci toplananın 2^m-ə bölünməsindən asılıdır.

5-ə bölünmə əlaməti. n ədədi yalnız və yalnız onda 5-ə bölünər ki, onun axırıncı rəqəmi 0 və ya 5 olsun.

n ədədinin beşin 5^m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) qüvvətinə bölünmə əlaməti n ədədinin ikinin 2^m qüvvətinə bölünməsi əlamətinə oxşardır. Bu, tamamilə təbiidir, axı 2 və 5 bölənləri onluq say sisteminin əsasının – $10 = 2 \cdot 5$ ədədinin yaranmasında eyni rol oynayırlar.

Hər hansı bir yuvarlaq ədədi, məsələn 20-ni götürək. Əgər 20 ədədindən onun onluqlarının sayını – 2-ni çıxsaq, nəticədə 9-a bölünən 18 alınar. Asanca yoxlamaq olar ki, bu xassə digər ədədlər üçün də – 10, 30, 40, ...90 – ödənilir. Onu eləcə də daha iri yuvarlaq ədədlərə şamil etmək olar. Həqiqətən, $m \cdot 10^\kappa$ ədədindən (burada m və κ natural ədədlərdir) m ədədini çıxsaq, $m \cdot 10^\kappa - m = m \cdot (10^\kappa - 1)$, yəni 9-a aşkar bölünən ədəd alınar, axı $10^\kappa - 1$ vuruğu onluq mövqeli sistemdə yalnız doqquzlarla yazılır. Bu müşahidə bizə 9-a bölünmə əlamətini əsaslandırmağa imkan verir.

9-a bölünmə əlaməti. n ədədi yalnız və yalnız onda 9-a bölünər ki, onun rəqəmləri cəmi 9-a bölünsün.

Bu əlaməti isbat etmək üçün xatırlayaq ki, ixtiyari natural ədədi bir neçə yuvarlaq ədədin – onluqların, yüzlüklərin və s. – və ola bilsin ki, hər hansı miqdarda təklıklərin cəmi şəklində təqdim etmək olar. Məsələn, 522 ədədi 5 yüzlük, 2 onluq və 2 təklikdən ibarətdir. Bu ədədin tərkib hissələrini başqa cür də qruplaşdırmaq olar. 522 ədədinin bütün rəqəmləri cəmini bir qrupa ayıraq ($5 + 2 + 2 = 9$). Onda yerdə qalan toplananlar içində "vergini" çıxmaqla yuvarlaq ədədlər qalacaq ki ($500 - 5 = 495$; $20 - 2 = 18$), bu "vergini" ödəmək də onları 9-a bölünən edir. Bu mülahizənin daha formal əsaslandırılması belədir.

QƏDİM ŞƏRQ PRİTÇASI

Qədim zamanlarda ölərkən öz üç oğluna 19 dəvə miras qoyan bir qoca vardı. O, böyük oğluna mirasın yarısını, ortancıla dörddə birini, kiçiyə isə beşdə birini vəsiyyət etmişdi. Müstəqil şəkildə həlli tapa bilməyən oğullar (axı məsələ "bütöv dəvələrlə" həll olunmur) bir müdrik şəxsə müraciət etdilər.

– Ey müdrik insan! – böyük qardaş dedi. – Atamız bizə 19 dəvə miras qoyub və aramızda bölməyi tapşırıb: böyüyə yarısını, ortancıla dörddə birini, kiçiyə beşdə birini. Lakin 19 nə 2-yə, nə 4-ə, nə də 5-ə bölünür. Hörmətli şəxs, dərdimizi çözə bilərsənmi, axı biz atamızın iradəsini yerinə yetirmək istəyirik.

– Bundan asan nə var ki? – müdrik cavab verdi. Mənim dəvəmi götürün və evə gedin.

Qardaşlar evdə 20 dəvəni asanca yarıya, 4 və 5 yerə böldülər. Böyük qardaş 10 dəvə, ortancıl 5, kiçiyi isə 4 dəvə aldı. Bu vaxt bir dəvə qaldı ($10 + 5 + 4 = 19$). Kədərlənmiş qardaşlar müdrikin yanına gedib şikayətləndilər:

– Ya müdrik, yenə atamızın vəsiyyətinə əməl etmədik! Bu dəvə artıqdır.

– Artıq deyil, – müdrik dedi, – bu mənim dəvəmdir. Onu qaytarın və evə gedin.

$n = 10^\kappa n_\kappa + 10^{\kappa-1} n_{\kappa-1} + \ldots + 10n_1 + n_0$ ədədini, burada $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_\kappa$ n ədədinin onluq təqdimindəki rəqəmlərdir,

$$n = [n_\kappa + n_{\kappa-1} + \ldots + n_1 + n_0] + [(10^\kappa - 1)n_\kappa + (10^{\kappa-1} - 1)n_{\kappa-1} + \ldots + (10 - 1)n_1]$$

cəmi şəklində yazaq.

Bu bərabərliyin sağ tərəfindəki birinci kvadrat mötərizə n ədədinin rəqəmləri cəmindən başqa bir şey deyil, ikincisi isə, rəqəmləri cəmi çıxılandan sonra yerdə qalandır: bu ədəd, əlbəttə ki, 9-a bölünür.

Beləliklə, n ədədinin 9-a bölünməsi bütövlüklə onun rəqəmləri cəminin 9-a bölünməsindən asılıdır: bu cəm 9-a bölünərkən nə qalıq verirsə, n ədədi 9-a bölünərkən həmin qalığı verir. Qeyd edək ki, biz tələb olunandan da güclü hökm aldıq və ondan yuxarıda ifadə edilmiş 9-a bölümnə əlaməti çıxır (əlamət göstərilən qalıqların sıfıra bərabər olduğu hala uyğundur). Bundan əlavə, elə ondan 3-ə bölünmə əlaməti çıxır.

3-ə bölünmə əlaməti. n ədədi yalnız və yalnız onda 3-ə bölünər ki, onun rəqəmləri cəmi 3-ə bölünsün.

3-ə və 9-a bölünmə əlamətlərinin diqqətəlayiq xüsusiyyətləri var. Onlar çoxlu sayda: əvvəl ədədin özünə, sonra onun rəqəmləri cəminə, sonra alınan ədədin rəqəmləri cəminə və s. o qədər tətbiq oluna bilər ki, ilkin kifayət qədər nəhəng ədəd tədriclə bir-yeganə rəqəmə "bürmələnə" bilər.

Fərz edək ki, məsələn, 1998 vahiddən ibarət 11...11 ədədinin 9-a bölünüb-bölünmədiyini bilmək gərəkdir. Onun rəqəmləri cəmi 1998-dir. Axırıncı ədəd 9-a bölünür, belə ki, onun rəqəmləri cəmi $1 + 9 + 9 + 8 = 27$ 9-a bölünür. Deməli, ilkin ədəd də 9-a bölünür.

Qeyd edək ki, rəqəmlərin cəminin hesablanması prosesində doqquzları saymamaq da olar, belə ki, 1998-in 9-a bölünməsi məsələsi $1 + 8$ ədədinin 9-a bölünməsinə müncər edilir ki, bu da aşkardır.

Artıq məlum olan bölünmə əlamətlərini kombinə edərək verilən ədədin 6-ya bölünüb-bölünmədiyini bilmək olar. Bunun üçün o, eyni zamanda həm 2-yə, həm 3-ə bölünməlidir. Deməli, iki əlamət: 2-ə bölünmə əlamətini və 3-ə bölünmə əlamətini tətbiq etmək lazımdır. Oxşar olaraq 12, 15, 18 və digər mürəkkəb ədədlərə bölünmə əlamətləri çıxarılır.

Paskal əlaməti. *XVII* əsr fransız riyaziyyatçısı, fizik və filosofu Blez Paskal bir gün özünə belə bir sual verdi: əgər natural ədədin $n = 10^\kappa \cdot n_\kappa + 10^{\kappa-1} n_{\kappa-1} + \ldots + 10n_1 + n_0$ onluq ayrılışında onun bütün qüvvətlərini – $10^1, 10^2, \ldots, 10^\kappa$ – götürsək və bu qüvvətlərin müəyyən qeyd olunmuş m ədədinə bölünməsindən alınmış $m_1, m_2, \ldots, m_\kappa$ qalıqları ilə əvəz etsək, nə olar? Sən demə bu zaman $p = m_\kappa n_\kappa + m_{\kappa-1} n_{\kappa-1} + \ldots + m_1 n_1 + n_0$ ədədi əmələ gəlir ki, bu da istər m-ə, istərsə də n-ə bölünəndə eyni qalıq verir. Paskalın "Ədədlərin bölünməsi xüsusiyyətləri" kitabında təsvir etdiyi əlamətin mahiyyəti bundan ibarətdir.



Blez Paskal. Əsərlərinin külliyatının 1-ci cildindən qravür. 1779-cu il.

Onun doğruluğunu yoxlayaq. Bundan ötrü n ədədinin onluq ayrılışındakı onluğun hər bir 10^i qüvvətini $10^i = q_i m + m_i$ şəklində göstərək, burada q_i 10^i-nin ($i = 1, 2, \ldots, \kappa$) m-ə bölünməsində natamam qismətdir. Alırıq:

$$n = (q_\kappa m + m_\kappa)n_\kappa + (q_{\kappa-1} m + m_{\kappa-1})n_{\kappa-1} + \ldots + (q_1 m + m_1)n_1 + n_0 = m_\kappa n_\kappa + m_{\kappa-1} n_{\kappa-1} + \ldots + m_1 n_1 + n_0 + (q_1 n_1 + q_2 n_2 + \ldots + q_\kappa n_\kappa)m = p + (q_1 n_1 + q_2 n_2 + \ldots + q_\kappa n_\kappa)m.$$

Buradan görünür ki, n və p ədədləri m-ə bölünərkən eyni qalıq verir.

Təcrübədə bəzən m-ə bölərkən $m_1, m_2, \ldots, m_\kappa$ qalıqlarını uyğun "kəsirlərlə" əvəz etmək əlverişli olur – Paskal əlaməti bu halda da qüvvədə qalır. Eləcə də qeyd edək ki, $10, 10^2, 10^3$ və s. ədədlərin m-ə ardıcıl bölünməsi zamanı növbəti, i-ci addımda 10^i-nin m-ə bölünməsindən m_i qalığı alınmışdırsa, sonrakı m_{i+1} qalığını hesablamaq üçün ondan əsrarəngiz surətdə istifadə etmək olar. İzafi iri ifadələrdən aşağıdakı faydalı eyniliyin köməyi ilə yaxa qurtarmaq olar:

$$10^{i+1} = 10 \cdot 10^i = 10 \cdot (q_i m + m_i) = 10 q_i m + 10 m_i.$$

Ondan görünür ki, 10^{i+1} və $10m_i$ ədədləri m-ə bölündükdə eyni qalıq alınır və bir halda ki $10m_i$ ədədi böyük i və çox da böyük olmayan m üçün 10^{i+1}-dən çox-çox kiçikdir, aydındır ki, sonrakı m_{i+1} qalığını məhz $10m_i$-yə görə təyin etmək gərəkdir.

7-yə bölünmə əlaməti. n ədədi onda və yalnız onda 7-yə bölünər ki, $p = n_0 + 3n_1 + 2n_2 - (n_3 + 3n_4 + 2n_5) + \ldots$ ədədi 7-yə bölünsün (burada əvvəldə olduğu kimi $n_0, n_1, n_2, \ldots n$ ədədinin təklik, onluq, yüzlük...rəqəmləridir).

Buna əmin olmağa bizə universal Paskal əlaməti kömək edər. $10, 10^2, 10^3, \ldots$ədədlərinin $m = 7$-yə bölünməsindən alınan qalıqları və kəsirləri taparaq alırıq

$10 = 1 \cdot 7 + 3$, $m_1 = 3$;

$10m_1 = 4 \cdot 7 + 2$, $m_2 = 2$;

$10m_2 = 3 \cdot 7 - 1$, $m_3 = -1$;

$10m_3 = -1 \cdot 7 - 3$, $m_4 = -3$;

$10m_4 = -4 \cdot 7 - 2$, $m_5 = -2$;

$10m_5 = -3 \cdot 7 + 1$, $m_6 = 1$;

$10m_6 = 1 \cdot 7 + 3$, $m_7 = 3$ və s.

Deməli, n ədədi 7-yə bölünərkən p ədədinin verdiyi qalığı verir.

Məsələn, 1999 ədədi 7-yə bölünmür, belə ki, $p = 9 + 3 \cdot 9 + 2 \cdot 9 - 1 = 53$ ədədi 7-yə bölünmür.

11-ə bölünmə əlaməti. n ədədi 11-ə onda və ancaq onda bölünər ki, onun tək yerdə duran rəqəmlərinin cəmi cüt yerdə duran rəqəmlərinin cəmindən 11-in misli olan kəmiyyət qədər fərqlənsin.

İsbat üçün qeyd edək ki, 10, 10^2, 10^3,..., 10^k ədədləri 11-ə bölünərkən -1, 1, -1, 1, ..., $(-1)^k$ kəsirləri və qalıqları verir. Deməli, Paskal prinsipinə görə, ixtiyari n natural ədədi 11-ə bölünərkən $n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \ldots + (-1)^k n_k$ -nın verdiyi qalığı verir. İndi yalnız qeyd etmək qalır ki, axırıncı ifadə n ədədinin cüt yerdə duran rəqəmlərin cəmi ilə tək yerlərdə duran rəqəmləri cəminin fərqindən ibarətdir:

$$(n_0 + n_2 + n_4 + \ldots) - (n_1 + n_3 + n_5 + \ldots).$$

Məsələn, 1969 ədədi 11-ə bölünür, çünki onun üçün bu fərq $18 - 7 = 11$ 11-ə bölünür.

13-ə bölünmə əlaməti. n ədədi 13-ə onda və yalnız onda bölünər ki, ondan axırıncı rəqəmin xətlənməsi və alınan ədədə bu rəqəmin dördqat qiymətini əlavə etməklə alınan l ədədi 13 ədədinə bölünsün. Məsələn, $n = 52$ ədədi 13-ə bölünür, belə ki, $l = 5 + 4 \cdot 2 = 13$ 13-ə bölünür.

n ədədini $10a + b$ şəklində yazaq. Qeyd edək ki, $n = 10a + b = 10(a + 4b) - 39b = 10l - 13 \cdot 3b$, burada $l = a + 4b$. Buradan çıxır ki, n və l ədədləri 13-ə eyni zamanda ya bölünür, ya bölünmür.

Az sayda istisnalarla, l ədədi ilkin n ədədindən bir neçə dəfə kiçikdir. Elə bil n ədədi estafet çubuğunu öz kiçik qardaşına verir: bəs kiçik qardaşımın 13-ə bölünüb-bölünmədiyini bilin, sonra mənlə maraqlanın. l ədədi üçün axırıncı rəqəmi xətləmək və bu rəqəmin dördqat qiymətini nəticəyə əlavə etmək prosedurunu təkrarlasaq, daha kiçik ədədə keçmək olar və s. Nəhayət elə bir kiçik ədəd alınacaq ki, onun 13-ə bölünüb-bölünməməsi aşkar bilinəcək. Bu əməliyyatı 2002 ədədi üzərində apararaq alırıq:

$$2002 \to 208 \to 52 \to 13.$$

Deməli, 2002 ədədi 13-ə bölünür.

Həm 7-yə, həm də 11-ə aid olan əlamətdar bir bölünmə əlaməti var. Onu eyni uğurla hətta 13 ədədinə də tətbiq etmək olar! Bu möcüzə "Min bir gecə" nağıllarındakı sehrlərə tən gəlir. Bu, təəccüblü deyil, axı $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$.

$10^3, 10^6, \ldots, 10^{3k}$ ədədlərinin 1001-ə bölünməsindən alınan qalıqları (və ya kəsirləri) tapaq:

$$10^3 = 1 \cdot 1001 - 1, \qquad m_1 = -1;$$

$$10^3 m_1 = 10^3 \cdot (-1) = -1 \cdot 1001 + 1, \qquad m_2 = 1;$$

$$10^3 m_2 = 10^3 \cdot 1 = 1 \cdot 1001 - 1, \qquad m_3 = -1.$$

Buna görə də 1001-ə bölünərkən n ədədi $q = n_0 - n_1 + n_2 - n_3 + \ldots + (-1)^k n_k$ ədədinin verdiyi qalığı verir, burada n_0, n_1, n_2,... n ədədinin təklik, minlik, milyonluqlarını və s. göstərən üçrəqəmli ədədlərdir. Deməli, əgər q ədədi 7, 11 və ya 13-ə bölünürsə, onda n ədədi də 7, 11 və ya 13-ə bölünür. Məsələn, $n = 2016$ ədədi 7-yə bölünür, belə ki, bu halda q=14-dür.

MƏNFİ ƏDƏDLƏR

Mənfi ədədlər, yəni 0-dan kiçik ədədlər haqqında riyaziyyatçılar hələ 2 min il əvvəl bilirdilər. Mənfi ədədlər haqqında xatırlamaya qədim Çin traktatı "Doqquz kitabda riyaziyyatın" səkkizinci kitabında rast gəlinir. Onlara Yunanıstanda *III* əsrdə yaşamış Diofant baxmışdır. Onları hindlilər tanıyır (Brahmaqunta, *VII* əsr), onlardan ərəb riyaziyyatçıları istifadə edirdilər (Əbül-vəfa, *X* əsr). Onlar hamısı bu ədədləri "varidat" – müsbət ədəddən fərqli olaraq, "borc", "kəsir" adlandırırdılar. Bu zaman söhbət heç də həmişə puldan və ya əmtəədən getmirdi.

Təcrübəyə mənfi ədədlər böyük zəhmətlə, "olmaz" tabusundan keçməklə daxil olurdu. Uzaq zamanlardan qayda mövcud idi: böyük ədəddən kiçiyi çıxmaq olmaz. Bu qayda tamamilə təbii və ağıllı qəbul edilirdi: a-nın b-dən kiçik olduğunu bilirsinizsə, məgər $a - b$ yazmaq olarmı? Lakin zaman gəldi ki, yasaq əl-ayağa dolaşan, sonra isə sadəcə qəbuledilməz oldu. Mənfi ədədlərin meydana gəlməsi cəbrin yaranmasına yol açdı.

Məsələn, belə bir məsələyə baxaq: "Alma və limon birlikdə 3 manat edir, 3 alma və 2 limon isə 7 manat edir. Alma limondan nə qədər bahadır?" Axtarılan kəmiyyəti x, limonun qiymətini y-lə işarə etsək, iki tənlik alırıq:

$$\begin{cases} (x + y) + y = 3, \\ 3(x + y) + 2y = 7. \end{cases}$$

Bu sistemi həll edərək alırıq ki, $x = -1$ manat, bu isə o deməkdir ki, alma baha deyil, 1 manat ucuzdur. Eyni ilə, məsələn, iki səyyah haqqında məsələni həll edərkən alınırsa ki, birinci A məntəqəsindən B məntəqəsinə – 2 saat tez gəlib, aydındır ki, o, ikincidən 2 saat gec gəlib. Əgər biz mənfi ədədlərdən istifadə etməsəydik, onda bir məsələnin yerinə ikisini həll etməli olardıq: birində fərz edərdik ki, birinci səyyah əvvəl gəlib, ikincidə isə ikinci səyyah əvvəl gəlib.

Mənfi ədədlərin meydana gəlməsi kifayət qədər paradoksal vəziyyətlərə gətirib-çıxarırdı. Lütfən deyin, – 4-dən iki dəfə böyük ədəd hansıdır? Əksəriyyət ani olaraq cavab verəcək: "Mənfi səkkiz". Məgər – 8 – – 4-dən böyükdür? Bu etirazın cavabında adətən deyirlər: "Onda mənfi iki". Lakin fikirləşib bu cavabdan da imtina edirlər. Bəs hansı cavab doğrudur? Heç biri! Məsələ ondadır ki, "iki dəfə çox" anlayışı ancaq müsbət ədədlər üçün təyin olunub, mənfilər üçün isə onu ya təzədən təyin etmək, ya da ümumiyyətlə istifadə etməmək gərəkdir.

Əlbəttə ki, mənfi ədədlər riyaziyyatçıların qayğılarını artırdılar. Yeni məhdudiyyətlər daxil etmək lazım gəldi. Belə ki, kvadrat kök və loqarifm işarələri altında mənfi ədədlər qadağan edilirdi. Bu, təəccüblü deyil. Axı – 1 ədədindən kvadrat kök almaq elə bir x ədədi tapmaq deməkdir ki, kvadratı – 1-ə bərabər olsun: $x^2 = -1$. Lakin həqiqi ədədin kvadratı mənfi ola bilməz. Oxşar olaraq, -1 ədədinin a əsasından loqarifmini tapmaq o deməkdir ki, elə bir x tapmaq lazımdır ki, $a^x = -1$ olsun, özü də $a>0$. Lakin ixtiyari x üçün $a^x > 0$.

Hər halda, mənfi ədəddən kvadrat kök almaq olmaz, eləcə də mənfi ədədin loqarifmini tapmaq olmaz deyəndə böyük səhv edirlər. Ali riyaziyyat öyrədir ki, belə köklər və loqarifmlər mövcuddur. Doğrudur, onlar artıq həqiqi yox, kompleks ədədlərdir ("Yeni ədədlər nəyə lazımdır" məqaləsinə bax).

MƏNFİ ƏDƏDLƏRİN TOPLANMASI VƏ VURULMASI QAYDALARI

Toplama qaydaları: $a + (-b) = a - b$, $a - (-b) = a + b$, $a - a = 0$.

Vurma qaydaları: $a(-b) = (-a)b = -ab$, $(-a)(-b) = ab$.

FAİZLƏR

Dəniz suyunda duz çoxmudur? Bu sualı müxtəlif cür anlamaq olar. Məsələn, dənizlərdə və okeanlarda ərimiş duzun çəkisi nə qədərdir? Ya da ki, bir vedrə dəniz suyuna nə qədər duz düşür? Birinci suala cavab vermək üçün ikinciyə cavab tapmaq və dəniz və okeanlarda neçə vedrə suyun olduğunu bilmək kifayətdir.

Sahil şəhərinin və ya qəsəbəsinin sakininə ikinci suala cavab tapmaq o qədər də çətin deyil. Bundan ötrü bir vedrə dəniz suyu yığmaq, onu oçağa qoymaq və su qaynayıb-quruyana qədər qızdırmaq, sonra dibdə qalan duzu çəkmək lazımdır. Lakin qonşuda da eyni miqdarda duz alınacağını hökm etmək olarmı? Çox güman ki, yox. Birdən onun vedrəsi böyük ya kiçikdir, ya da o daha çox və ya daha az doldurulub? Nəticədə qonşu başqa su həcmini buxarlandıracaq, buna görə də onda başqa miqdar duz qalacaq.

Beləliklə, bizim duzluluq ölçümüz – su vedrəsinin dibindəki duz – uğursuz alındı. Digər ölçünü – məhlulun kiloqramında duzun miqdarını götürək. Yəni məhlulu qaynamağa qədər çəkmək və sonra alınan duzun miqdarını məhlulun çəkisinə bölmək lazımdır. Qoy məhlulun çəkisi 8,4 *kq*, duzun çəkisi isə 21 *q* olsun. Hesablayaq: məhlulun kiloqramında $21/8{,}4 = 5/2$ *q* duz var. Təcrübəni davam etdirsək, yenə, demək olar ki, həmin kəmiyyət alınar.

Bəs niyə tonda sentner və ya pudda funt yox, kiloqramda qram? Gəlin qramda qram hesablayaq. Kiloqramda min qram olduğundan nəticə min dəfə az olacaq: $5/2000 = 1/400$. Bir ton məhluldakı duzun tonlarla çəkisini və ya bir pud məhlulda duzun pudlarla çəkisini hesablasaq, eyni cavab alınacaq.

Münasib ölçü tapılıb, ancaq yazılış... Hansı ədədin böyük olduğunu deyin $11/1002$, yoxsa $12/1090$? Birdən-birə anlamaq olmur, hesablamaq lazımdır. Onluq kəsrləri müqayisə etmək daha asandır! 0,01097 kəsri 0,01101 kəsrindən kiçikdir, çünki təklik, ondabir və yüzdəbirlərin sayı onlarda eynidir, mindəbirlər isə ikincidə çoxdur. Rahatdır? Əlbəttə! Qət etdik: nəticələri adi yox, onluq kəsrlə yazacağıq.

Düşünmək olar ki, hər hansı dəniz su-

yuna görə bu sicilləmələr nəyə lazımdır? Bəs filizdə metalın, süddə yağın, dərmanda kimyəvi maddənin tərkibini dəqiq bilmək lazımdırsa? Axı məsələ həmin-həmindir.

Beləliklə, biz cavabı onluq kəsr şəklində yazmağı şərtləşdik. Bəs hansı dəqiqliklə?

Karandaş və kağızla milyardda birlərə qədər bölmək olar, lakin ilkin ədədlər haradan götürülür? Əgər mağazada tərəzi 520 *q* göstərirsə, həqiqətdə əşya 515 qram da, 524 qram da gələ bilər, iki yüz-üç yüz il əvvəl isə çəkilərin dəqiqliyi daha az idi. Buna görə də bir maddənin digərində miqdarına vergüldən sonra ilk iki rəqəm dəqiqliyi ilə baxmaq daha məqsədəuyğundur: 0,27; 0,64; 0,37; yəni yüzdə 27, yüzdə 64, yüzdə 37.

Budur, biz faizlərə gəldik, onlara latınca pro centum – "yüzdə bir hissə" deyirlər. Xüsusi yazılış da mövcuddur: 27%, 64%, 37%. Deyirlər ki, haçansa mürəttibin literləri sınmış və bu möcüzəli % işarəsi yaranmışdır. Nisbətlərin yazılışı rahatlaşdı, sıfır və vergül aradan qalxdı, % simvolu isə ani göstərir ki, qarşımızda qramlar, litrlər, manatlar, metrlər yox, nisbi kəmiyyətdir.

Faizlər hindlilərə hələ *V* əsrdən məlum idi. Bu, təəccüblü deyil, çünki Hindistanda hesab qədim zamanlardan onluq sistemdə aparılıb. Avropada onluq kəsrlər min ildən sonra peyda oldu, onları holland alimi Simon Stevin daxil etdi.

Zaman keçdikcə insanlar maddədən onun minlərdə birini təşkil edən komponentləri ayırmağı öyrəndilər. Onda sıfır və vergülü daxil etməmək üçün, yəni 0,6% yazmamaq üçün yeni kəmiyyəti – promilleni – fikirləşib tapdılar. Onu ‰ ilə işarə etdilər və 0,6%-in əvəzində 6‰ yazmağa başladılar.

QÜVVƏTƏ YÜKSƏLTMƏ VƏ KÖKALMA

Hesab əməliyyatlarının siyahısında ilk olaraq toplama, çıxma, vurma və bölmə gəlir. Qüvvətə yüksəltmə və kökalmanı bəzən beşinci və altıncı əməliyyat adlandırırlar.

Qüvvətlərin hesablanması haqqında məsələlərə ən qədim riyazi mətnlərdə rast gəlmək mümkün olsa da ("Qədim Misir" və "İki çayarası" məqalələrinə bax), riyaziyyatçılarda müstəqil əməliyyat kimi qüvvətə yüksəltmək haqqında təsəvvürlər birdənbirə formalaşmadı.

İsgəndəriyyəli Diofant öz məşhur "Hesab" kitabında ilk natural qüvvətləri özünəməxsus tərzdə təsvir edir:

"Sən bildiyin kimi, bütün ədədlər müəyyən miqdar vahidlərdən ibarətdir, aydındır ki, onlar sonsuzluğa qədər artaraq davam edirlər. Onların arasında aşağıdakılar var:

müəyyən ədədin özü-özünə vurulmasından alınan kvadratlar; bu ədəd özü kvadratın tərəfi adlanır;

sonra kvadratların onların tərəfinə hasilindən alınan kublar;

sonra kvadratların özlərinə hasilindən alınan kvadrato-kvadratlar;

sonra kvadratın onun tərəfinin kubuna hasilindən yaranan kvadrato-kublar;

sonra kubların özlərinə hasilindən yaranan kubo-kublar".

XVI əsrin sonu – *XX* əsrin əvvəlində müasir qüvvətlər nəzəriyyəsini qurmağa cəhd edənlərdən birincisi holland riyaziyyatçısı Simon Stevin idi. O, məchul kəmiyyəti dairə ilə O işarə edir, daxilində isə qüvvətin üstünü göstərirdi. Məsələn, ①,②,③ onun yazılışında x, x^2, x^3 deməkdir. Stevin Diofantın "kvadrato-kvadrat", "kvadrato-kub" ifadələrini inkar etdi və qüvvətləri üstlərinə görə – dördüncü, beşinci və s. adlandırmağı təklif etdi. Qüvvətlərin müasir a^2, a^3, ...işarələnməsini biz Röne Dekartda tapırıq.

* * *

Qüvvətə yüksəltmə əməliyyatını vurma əməliyyatına oxşar təyin etmək təbiidir. Doğrudan da, eyni ədədlərin çoxsaylı toplanması bir əməl – vurma ilə əvəz edilirsə,

$$\underbrace{a + a + \ldots + a}_{n\ dəfə} = a \cdot n$$

oxşar şəkildə eyni ədədlərin hasilini də birləşdirmək olar:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ dəfə} = a^n.$$

Axırıncı bərabərlik a ədədinin n-ci qüvvətinin tərifindən başqa bir şey deyil. Bu zaman a qüvvətin əsası, n onun üstü adlanır.

Natural üstlü qüvvətlər asanca yoxlanıla bilən aşağıdakı xassələrə malikdirlər:

✓ **eyni ədədin iki qüvvətini vurarkən onların üstləri toplanır:**

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \qquad (*)$$

✓ **eyni $a \neq 0$ ədədinin iki qüvvətini bölərkən onların üstləri çıxılır:**

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}. \qquad (**)$$

İkinci xassədə $n > m$ fərz olunur.

Yoxlamaq üçün hər bir qüvvəti eyni vuruqların hasili kimi yazmaq kifayətdir. $a \neq 0$ şərtinin meydana gəlməsi asanca izah olunur: sıfıra bölmək olmaz. Lakin $n>m$ məhdudiyyəti məmnuniyyətsizlik hissi doğurur, elə deyilmi? Onsuz keçinmək olmazmı?

Qeyd edək ki, $m \geq n$ halında (**) bərabərliyinin sol tərəfində tamamilə anlaşılan ifadə alınır:

$$\frac{a^n}{a^m} = \frac{\overbrace{a \cdot a \ldots a}^{n\ dəfə}}{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m\ dəfə}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \ldots a}_{m-n\ dəfə}} = \frac{1}{a^{m-n}},$$

əgər $m > n$ və

$$\frac{a^n}{a^m} = 1, \quad \text{əgər } m=n.$$

Bu, qüvvətə yüksəltmə əməliyyatını sıfır və ya mənfi üstlü qüvvət halına genişləndirmək imkanı verir. Yeri gəlmişkən, adət etdiyimiz əməliyyatların daha yeni oblastlara yayılması əvvəllər işlənib-hazırlanmış üsulların tətbiq sferasını genişləndirməyə imkan verən çox münasib fənddir.

QÜVVƏTƏ YÜKSƏLTMƏ DÜSTURLARI

Tərifər:

$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$

$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n\ dəfə} \qquad (n > 0);$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (a \neq 0,\ n > 0);$

$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} \qquad (m \neq 0,\ a > 0);$

Xassələr:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m};$$

$$(a^n)^m = a^{nm};$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a; \sqrt[n]{a^n} = a\ (a > 0).$$

Tərifə əsasən fərz edək ki,

$$a^0 = 1 (a \neq 0);$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}\ (a \neq 0, n > 0).$$

Beləliklə, qüvvətə yüksəltmə əməliyyatı bütün tam üstlər üçün təyin edilib. Bu zaman (*) və (**) bərabərlikləri $n > m$ məhdudiyyəti olmadan da qüvvədə qaldı. Gözəl, sadə və münasibdir!

Bəs a^n ifadəsini öz növbəsində m-ci qüvvətə yüksəltsək, nə olacaq? Qüvvətin

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \ldots a^n}_{m\ dəfə},$$

tərifindən isttifadə edərək (*) düsturunu tətbiq edək:

$$\underbrace{a^n \cdot a^n \ldots a^n}_{m\ dəfə} = a^{\overbrace{n+n+\ldots+n}^{m\ dəfə}} = a^{nm}$$

yəni

✓ **qüvvəti qüvvətə yüksəldən zaman üstlər vurulur:**

$$(a^n)^m = a^{nm}. \qquad (***)$$

Kökalmanı qüvvətə yüksəltmənin tərs əməliyyatı kimi təyin edirlər. Necə yəni "tərs"? a ədədini n-ci qüvvətə yüksəltmək lazım gələndə ədəd özü və qüvvətin üstü verilmiş, $x = a^n$ axtarılan kəmiyyət hesab olunur. n-ci qüvvəti verilmiş a ədədinə bərabər olan ($x^n = a$) x ədədini tapmaq tərs məsələdir.

Bu məsələnin həlli a ədədindən n-ci dərəcədən kökalma adlanır:

$$x = \sqrt[n]{a}.$$

Bir halda ki,"mənfiylə mənfi müsbət verir", onda $x^{2n} = (-x)^{2n} \geq 0$. Buna görə də $a < 0$ olduqda cüt dərəcəli kökalma mümkün olmur, $a > 0$ olduqda isə ancaq işarə ilə fərqlənən iki kökə malik oluruq. Müəyyənlik xatirinə qəbul edirlər ki, $\sqrt[2n]{a}$ müsbət kökü (ona hesabi kök də deyilir) ifadə edir. İkinci kök isə – $-\sqrt[2n]{a}$ – dır.

Ancaq müsbət əsaslarla məhdudlaşsaq, n-ci qüvvətə yüksəltmək və n-ci dərəcədən kök almaq qarşılıqlı tərs əməliyyatlar olur. Belə ki, 3 ədədini ikinci qüvvətə yüksəltsək, 9 alırıq, 9-dan kvadrat kök almış olsaq, yenə 3 alınır. Ümumi halda

$$\left(\sqrt[2n]{a}\right)^n = a \quad \text{və} \quad \sqrt[n]{a^n} = a\ (a \geq 0).$$

Kökalma qüvvətə yüksəltmənin sanki güzgü əksidir və tərsinə. Lakin riyaziyyatın böyük möcüzəsi ondadır ki, hər iki əməli...bir əməl kimi qələmə vermək olar. Bunun üçün daha bir addım atıb qüvvətə yüksəltməni kəsr üstlərə də genişləndirmək lazımdır.

KÖK İŞARƏSİ NECƏ MEYDANA GƏLDİ

Əvvəlcə kök sözünün özü haqqında danışaq. Müstəqim, bioloji "ağac kökü", "diş kökü" mənalarından başqa onun məcazi "zülmün kökü", "nəsil kökləri" kimi metaforik, məcazi mənaları da var. Kozma Prutkovun "Kökə bax!" kəlamı problemin mahiyyətinə, ilkin əsasına, ilkin səbəbinə çatmağa çağırır.

Qədim Hindistanda naməluma "mula" deyirdilər ki, bu da "başlanğıc", "əsas", "kök" demək idi. Ərəblər bu məqsədlər üçün həmin mənanı verən "cizr" sözündən istifadə edirdilər. Avropalılar bu sözü latıncaya radix – "kök" kimi tərcümə etdilər. "Radikal" riyazi termini belə yarandı. Kökün bizə məlum olan $\sqrt{\ }$ işarəsi bu adla bağlıdır. Onun tarixçəsi belədir.

Riyaziyyatçılar bir neçə əsr ərzində Leonard Pizalının ardınca kvadrat kökü R (radix sözündən qısaltma) adlandırırdılar. Tədricən R kiçik r hərfinə çevrildi. Kristof Rudolfun cəbrə dair kitabında – almanca yazılmış ilk belə aparıcı kitabda (1525-ci il), r əvəzinə v işarəsi işlənilir. Bu simvol artıq bizim istifadə etdiyimizə bənzəyir. Müxtəlif dərəcəli köklərin müasir $\sqrt[3]{\ }, \sqrt[4]{\ }$ .... yazılışını biz holland riyaziyyatçısı Alber Jirarda tapırıq. Radikal altdakı ifadənin üstündəki üfüqi xətti isə 1637-ci ildə Rene Dekart daxil etmişdir.

$a^{\frac{n}{m}}$ nədir? Gəlin (***) düsturundan istifadə edib, bu ifadəni formal olaraq m qüvvətinə yüksəldək:

$$\left(a^{\frac{n}{m}}\right)^m = a^{\frac{n}{m}m} = a^n.$$

Deməli, $a^{\frac{n}{m}}$-i təbii olaraq a^n ədədinin m-ci dərəcədən kökü kimi anlamaq təbiidir:

$$a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}.$$

Bu da kəsr üstlü qüvvətin tərifidir. Beləliklə, biz altıncı əməliyyatı – kökalmanı tamamilə beşinciyə – qüvvətə yüksəltməyə müncər etdik: güzgü əksi əks olunan obyektlə qovuşdu. Belə məlum olur ki, bizim altı deyil, beş əməliyyatımız vardır.

ORTA QİYMƏTLƏR

"Orta yaş", "orta boy", "orta qazanc" deyəndə söhbətin nədən getdiyi hamıya aydındır. Riyaziyyatda isə müxtəlif "ortalar" çoxluğuna baxılır, buna görə də həmişə məhz hansı "ortanın" nəzərdə tutulduğunu aydınlaşdırmaq lazımdır.

Ən ümumi halda bir neçə ədədin orta qiyməti onlardan ən kiçiyi və ən böyüyü arasında yerləşən müəyyən bir ədəddir.

İki müsbət a və b ədədləri üçün hər şeydən əvvəl aşağıdakılara baxılır:

ədədi orta

$$m = \frac{a+b}{2},$$

həndəsi orta

$$g = \sqrt{ab},$$

harmonik orta

$$h = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$$

və kvadratik orta

$$s = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

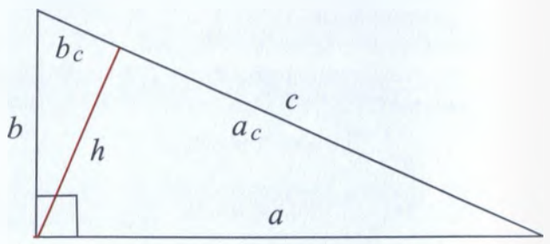
Göstərmək olar ki, bu orta qiymətlər

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}, \text{ yaxud}$$

$$h \le g \le m \le s,$$

bərabərliklərini ödəyir, özü də bərabərlik işarəsi yalnız $a = b$ halında olur.

Orta qiymətlərə həndəsə və cəbrdə tez-tez rast gəlinir. Məsələn, düzbucaqlı üçbucağın kateti hipotenuzun və bu katetin hipotenuza proyeksiyasının həndəsi ortasına bərabərdir. Düzbucaqlı üçbucağın hipotenuza endirilmiş hündürlüyü isə katetlərin hipotenuza proyeksiyalarının həndəsi ortasıdır (Şəkil 1).



Şəkil 1. $a = \sqrt{c \cdot a_c}$;
$h = \sqrt{a_c \cdot b_c}$.

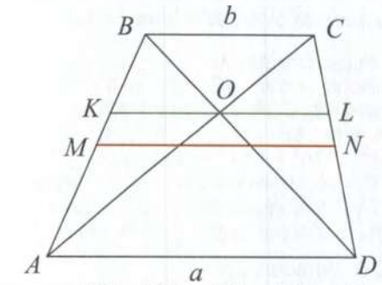
Oturacaqları a və b olan ixtiyari trapesiyada ucları yan tərəflərdə yerləşmiş, oturacaqlara paralel olan düz xətt parçası

– əgər yan tərəflərin ortasını birləşdirirsə (Şəkil 2), oturacaqların ədədi ortasına bərabərdir:

$$MN = \frac{a+b}{2};$$

– diaqonalların kəsişmə nöqtəsindən keçirsə (Şəkil 2), oturacaqların harmonik ortasına bərabərdir:

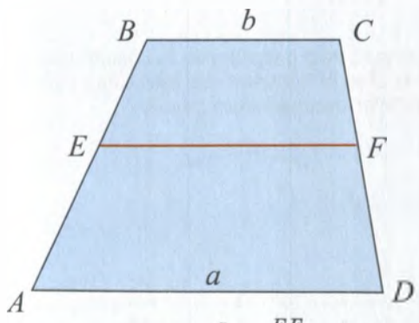
$$KL = \frac{2ab}{a+b};$$



Şəkil 2. $\frac{KO}{a}+\frac{KO}{b}=\frac{BK}{AB}+\frac{KA}{AB}=\frac{AB}{AB}=1$,
deməli,
$KO = \frac{ab}{a+b}$.

– trapesiyanı öz aralarında oxşar iki trapesiyaya ayırırsa (Şəkil 3), oturacaqların həndəsi ortasına bərabərdir:

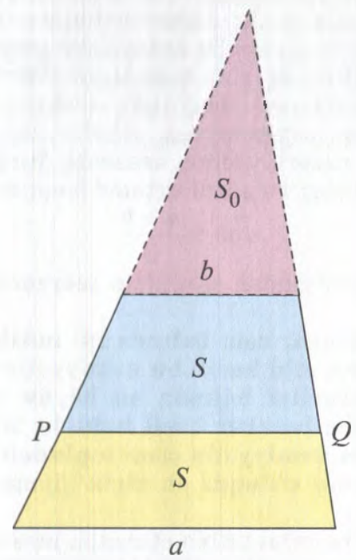
$$EF = \sqrt{ab};$$



Şəkil 3. $\frac{a}{EF}=\frac{EF}{b}$,
deməli,
$EF = \sqrt{ab}$.

– trapesiyanı iki bərabər sahəli trapesiyaya bölürsə (Şəkil 4), oturacaqların kvadratik ortasına bərabərdir:

$$PQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$



Şəkil 4.

$$\left.\begin{aligned}\frac{S_0+2S}{S} &= \left(\frac{a}{b}\right)^2,\\ \frac{S_0+S}{S_0} &= \left(\frac{PQ}{b}\right)^2\end{aligned}\right\}$$

deməli, $2\left(\frac{PQ}{b}\right)^2 - 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ *və* $PQ^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$

a, s, m, g, h, b parçaları $a > b$ olduqda həmişə burada yazıldıqları nizamda yerləşəcəklər. Əlbəttə, bu, ortalar haqqında bərabərsizliklərdən alınır. Nizamın məhz belə olmasını həndəsi mülahizələrdən təyin etmək (siz də cəhd edin, bu, asandır!) və beləliklə, cəbri bərabərsizlikləri isbat etmək olar.

İndi isə cəbrdən bir neçə misal gətirək. Ədədi silsiləni təyin edən və onun adını izah edən əsas xassə ondan ibarətdir ki, silsilənin ikincidən başlayaraq hər bir həddi qonşu hədlərin ədədi ortasına bərabərdir. Uyğun olaraq, hədləri müsbət olan həndəsi silsilənin ikincidən başlayaraq hər bir həddi qonşu hədlərin həndəsi ortasına bərabərdir ("Ədədi və həndəsi silsilələr" məqaləsinə bax). 1, 1/2, 1/3,..., $1/n$ ... elə təşkil olunub ki, onun ikincidən başlayaraq hər bir həddi qonşu hədlərin harmonik ortasına bərabərdir. Bu ardıcıllıq və onun hədlərindən tərtib

olunmuş $1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n + ...$ sırası harmonik adlanırlar ("Ardıcıllıqlar" məqaləsinə bax).

Ədədi, həndəsi və harmonik orta qiymətlər hələ antik riyaziyyatçılara məlum idi. Bu orta qiymətlər tənasüblər nəzəriyyəsi ilə bağlıdır ki, o da musiqi, ədədlərin həndəsi nəzəriyyəsi haqqında qədim yunan təlimində, sonralar isə sahələr və konik kəsiklər nəzəriyyəsinin əsasında durdu.

Həndəsi və ədədi ortalar haqqında

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

bərabərsizliyindən aşağıdakı teorem alınır:

✓ **Bərabər cəm halında iki müsbət kəmiyyətin hasili bu kəmiyyətlərin bərabərliyi halında ən böyük qiymət alır; bərabər hasil halında iki müsbət kəmiyyətin cəmi toplananlar bərabər olduqda ən kiçik qiymət alır.**

Bu teoremi tətbiq etməklə, məsələn, isbat etmək olar ki, verilmiş perimetrli bütün düzbucaqlılardan sahəsi ən böyük olanı kvadratdır və verilmiş sahəli düzbucaqlılardan perimetri ən kiçik olanı kvadratdır.

n sayda müsbət $a_1, a_2, ..., a_n$ ədədi üçün

$$m = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$$

ədədi ədədi orta,

$$g = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

ədədi həndəsi orta,

$$b = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

ədədi harmonik orta,

$$s = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2}{2}}$$

ədədi kvadratik orta adlanır.

İki ədəd halında olduğu kimi, bu orta qiymətlər

$$h \le g \le m \le s,$$

bərabərsizliklərini ödəyirlər ki, onlarda da bərabərlik işarəsi yalnız və yalnız $a_1 = a_2 = ... = a_n$ halında doğrudur.

Eləcə də $a_1, a_2, ..., a_n$ ədədlərinin $p_1, p_2, ..., p_n$ çəkiləri ilə

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + ... + p_n a_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} \quad (*)$$

düsturu ilə təyin olunan ölçülmüş ortalarına da baxılır.

Belə ad sadə mexaniki modellə izah olunur: $a_1, a_2, ..., a_n$ hansısa n maddi nöqtənin koordinatları, $p_1, p_2, ..., p_n$ onların kütlələridirsə, (*) ölçülmüş orta onların kütlə mərkəzinin koordinatıdır.

Başqa misal da gətirmək olar. Fərz edək ki, $a_1, a_2, ..., a_n$ müəyyən kəmiyyətin ekspert qiymətləndirmələri, $p_1, p_2, ..., p_n$ isə müvafiq qiymətlərə (və ya onları söyləyən ekspertlərə) bizim inam dərəcəmizdir. Onda ölçülmüş orta elə hesablanmış məcmu qiymətdir ki, daha etibarlı ekspertlərin fikirləri az etibarlılarınkından "ağır gəlir".

Ölçülmüş orta qiymətlər ehtimal nəzəriyyəsində, riyazi statistikada müşahidə və ölçmələrin nəticələrini emal edərkən istifadə olunur.

ORTA QİYMƏTLƏRİ NECƏ QURMALI

Antik riyaziyyatda, əsasən həndəsədə pərgar və xətkeşin köməyi ilə qurmalara böyük yer ayrılırdı. İki verilmiş a və b parçalarına görə orta qiymətlərin qurulması üçün bir sıra üsullar qəbul edilmişdi. İsgəndəriyyəli Pappın "Riyaziyyat toplusunda" (III əsr) – bu əsər qədim yunan riyaziyyatının uğurları məcmusu idi – orta qiymətlərin müəllifin sələflərinin metodları əsasında müxtəlif qurmaları gətirilmiş, eləcə də üç orta qiymətin bir fiqur əsasında qurulması təsvir edilmişdir.

Bütün dörd orta qiymətin bir mümkün qurulmasını göstərək. Düz xətt üzərində $AM = a$ və $MB = b$ qonşu parçaları ayıraq. AB parçası diametr olmaqla, mərkəzi O nöqtəsində olan çevrə quraq; onun $\frac{a+b}{2}$ radiusu ədədi ortaya bərabərdir.

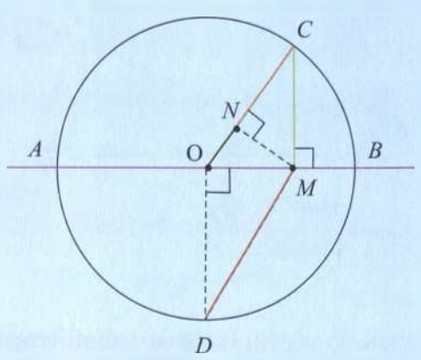
M nöqtəsindən AB düz xəttinə MC perpendikulyarı qaldıraq. OCM düzbucaqlı üçbucaqdır. Pifaqor teoreminə görə $CM^2 = OC^2 - OM^2$, lakin $OC = OA$, deməli, $CM^2 = OA^2 - OM^2 = (OA + OM)(OA - OM) = AM \cdot MB = ab$. Buradan $CM = \sqrt{ab}$ həndəsi ortadır.

OC-yə MN perpendikulyarı endirək. CMN və COM üçbucaqlarının oxşarlığından alınır ki, $CN : CM = CM : OC$, buradan $CN = \frac{CM^2}{OC} = \frac{2ab}{a+b}$ harmonik ortadır.

$OD = \frac{a+b}{2}$ və $OM = \frac{a-b}{2}$ olduğu DMO düzbucaqlı üçbucağından DM-i tapırıq: $DM = \sqrt{OD^2 + OM^2}$, yəni $DM = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ kvadratik ortadır.

Düzbucaqlı üçbucaqda katet hipotenuzdan kiçikdir, buna görə də $CM < OC$, yəni $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$; $CN < CM$, yəni $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$; $OD < DM$, yəni $\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Əgər a və b parçalarının uzunluqları bərabərdirsə, onda O və M nöqtələri üst-üstə düşür və bütün bərabərsizliklər bərabərliklərə çevrilir.



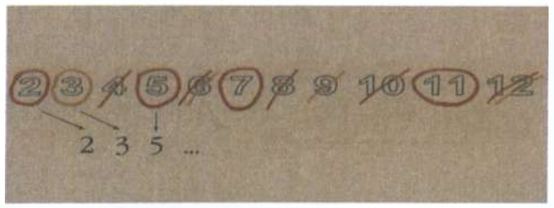
TAM ƏDƏDLƏR

SADƏ ƏDƏDLƏR

Vahiddən böyük ixtiyari natural ədəd azı iki ədədə: özünə və vahidə bölünür. Əgər o, başqa heç bir ədədə qalıqsız bölünmürsə, onda sadə ədəd, yox əgər onun başqa tam bölənləri də varsa, mürəkkəb ədəd adlanır. Vahid isə nə sadə, nə də mürəkkəb ədəd hesab olunur. Niyə? Bu barədə aşağıda söhbət gedəcək ("Hesabın əsas teoremi" məqaləsinə bax).

Hələ e. ə. *III* əsrdə məşhur İsgəndəriyyə kitabxanasının mühafizi Kirenli Eratosfenin fikirləşib tapdığı qədim üsul bizə sadə ədədlərin kiçik "kolleksiyasını" toplamağa kömək edər.

2-dən başlayaraq bir neçə ardıcıl gələn ədəd yazaq (Şəkil 1). İkini kolleksiyamıza götürək, 2-yə bölünən digər ədədlərin üzərindən isə xətt çəkək. Ən yaxın xətlənməyən ədəd 3 olacaq. Onu da kolleksiyamıza götürək və 3-ə bölünən bütün ədədlərin üzərindən xətt çəkək. Bu zaman məlum olacaq ki, bəzi ədədlər, məsələn, 6, 12 və s., artıq əvvəllər xətlənmişdi. Sonrakı xətlənməmiş ən kiçik ədəd 5 olacaq. Beşi götürürük və 5-ə bölünən bütün ədədləri xətləyirik. Bu proseduru yenə və yenə təkrar edərək son nəticədə ona nail olacağıq ki, yalnız sadə ədədlər xətlənməməiş qalacaq. Onlar sanki ələkdən ələnəcək. Buna görə də belə üsul "Eratosfen ələyi" adını almışdır.



Şəkil 1. Eratosfenin ələyi.

Şairi təqlid edərək demək olarmı ki, sadə ədədlər "göydəki ulduzlar, sudakı balıqlar" qədərdir? Bu suala cavabı Evklidin məşhur "Başlanğıclar" əsərində – qədim dünyanın bu bakirə abidəsində tapırıq. Bu kitabdakı iyirminci teoremdə deyilir: " İlk (sadə) ədədlər onların ixtiyari göstərilən sayından çox mövcuddur".

ƏKİZLƏR

5 və 7, 11 və 13, 17 və 19 kimi biri-birindən 2 qədər fərqlənən iki sadə ədəd "əkizlər" obrazlı adını almışlar. Maraqlıdır ki, natural sırada hətta "üçəmlər" də mövcuddur – bunlar 3, 5, 7 ədədləridir. Lakin neçə əkizin mövcud olması müasir elmə məlum deyil.

Eratosfen ələyini bir qədər "düzəldərək" əkiz ədədləri verilmiş ədədlər siyahısından ələmək olar. Əgər Eratosfen üsulu ilə xətlənmiş hər bir n ədədi üçün həm də $n-2$ ədədininin üstündən xət çəksək, onda cədvəldə elə p ədədləri qalacaq ki, onlar üçün $p+2$ ədədi də sadədir. İlk yüzlük hüdudlarında sadə "əkiz" ədədlər aşağıdakılardır: (3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73).

Sıfırdan uzaqlaşdıqca əkizlər get-gedə azalır, lakin "uzaq ədəd kosmosunda" aparılan araşdırmalar bu əlamətdar və əsrarəngiz cütləri aşkar etməkdə davam edir. 1996-cı ilə, təbii ki, *EHM*-də tapılan $242206083 \cdot 2^{38880} \pm 1$ əkizləri rekordsmen hesab olunurdu.

Əkizlər $(n-4, n-2, n+2, n+4)$ şəkilli , məsələn, (5, 7, 11, 13) və ya (11, 13, 17, 19), dördlüklər yaradaraq topalara yığışa bilərlər. Belə topaların nə qədər çox olması da hələ məlum deyil.

Bu teoremin isbatı belədir. Fərz edək ki, ən böyük P sadə ədədi mövcuddur. Onda 2-dən başlayıb P-də qurtararaq bütün sadə ədədləri bir-birinə vuraq və alınmış hasili bir vahid artıraq: $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots P + 1 = M$. Əgər M ədədi mürəkkəbdirsə, onda onun azı bir sadə böləni olmalıdır. Lakin 2, 3, 5, ..., P sadə ədədlərindən heç biri bu bölən ola bilməz, çunki M-i onlara bölərkən hər zaman qalıqda 1 alırıq. Deməli, M ədədi ya sadədir, ya da P-dən böyük sadə ədədə bölünür. Belə çıxır ki, ən böyük sadə P ədədinin mövcudluğu fərziyyəsi doğru deyil və sadə ədədlər çoxluğu sonsuzdur.

SADƏ, YOXSA MÜRƏKKƏB

Hər bir ədədin sadə, yoxsa mürəkkəb olduğunu ani olaraq söyləmək mümkün deyil. Məsələn, 1999 ədədini götürək. Əl altında xüsusi məlumat cədvəlləri və köməkçi-kompüter yoxdursa, köhnə, lakin etibarlı Eratocfen ələyinə əl atmaq lazım gələcək. Lakin uzun ədədlər sırasının üstündən xətt çəkmə kimi yeknəsəq-darıxdırıcı perspektiv adamı dilxor edir. Əlbəttə, 1999 ədədi bu qəfəsdən çətinliklə ələnmək mənasında elə

də böyük deyil, lakin onun misalında digər üsulun nəticəsinə baxmaq ibrətamizdir.

Beləliklə, 1999-un fərz edilən bölənləri kimi ilkin sadə ədədlər dəvət olunur. Bu zaman 2-ni götürməmək də olar – aydındır ki, 1999 ona bölünmür. Ən sadə bölünmə əlamətləri ("Bölünür, ya bölünmür" məqaləsinə bax) nicbətən tez bir zamanda digər "namizədləri" də: 3, 5, 7, 11, 13-ü rədd etməyə imkan verir. 19-u yoxlayırıq, o da yaramır. Bəs 23?.. Hər bir yeni cəhd ilə tez uğura ümid heç olur. 1999-a çatmaq üçün biz neçə ədəd-namizədi götür-qoy eləməliyik?

Stop! Axı niyə məhz zirvəyə çatmaq lazımdır? Qarşıdakı məqsədə dağlararası aşırım vasitəsi ilə də çatmaq olar, axı əgər n iki natural ədədin hasilidirsə, onda onların azı biri $\sqrt{n}$-dən böyük olmamalıdır. Deməli, $\sqrt{n}$-dən böyük namizədlərə diqqət vermək lazım deyil. Bir halda ki, $44 < \sqrt{1999} < 45$, onda yoxlamağa elə də çox ədəd qalmayıb – ancaq 23, 29, 31, 37, 41, 43. Yoxlama göstərir ki, onlardan heç biri keçmir. Deməli, 1999 ədədi sadədir.

Hələ Pizalı Leonardın qeyd etdiyi bu fənd verilmiş n ədədinin mümkün bölənlərinin axtarışını sürətləndirsə də, çoxluca zəhlətökən iş də tələb edir. Belə işi kompüterə yükləmək daha yaxşıdır.

Necə gəldi hər hansı kifayət qədər böyük natural ədədi götürsək, o, böyük ehtimalla mürəkkəb olacaq. Bu, təəccüblü deyil. Axı sonsuzluğa uzaqlaşdıqca Eratosfen ələyi daha tez-tez olur və deməli, sadə ədədlərə daha gec-gec rast gəlinir. Bəs elə metod fikirləşib tapmaq olarmı ki, mürəkkəb ədədlərin böyük əksəriyyəti üçün onların mürəkkəb olduğunu nisbətən asan təyin etməyə imkan versin? Onda qalan şübhəli hallarda biz yuxarıda baxılan zəhmətli üsuldan istifadə etmiş olardıq. Hər halda, orta hesabla götürdükdə, böyük qüvvəyə qənaət etmiş olardıq.

Xoşbəxtlikdən belə bir üsul vardır. Qoy $n > 2$ sadəliyinin isbat olunması tələb olunan natural ədəd olsun.

$$\kappa_0 = 1,$$

$$\kappa_{i+1} = \begin{cases} 2\kappa_i, \text{ əgər } 2\kappa_i < n \\ 2\kappa_i - n, \text{əks halda} \end{cases}$$

sxemi ilə ardıcıl olaraq $\kappa_0, \kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ qiymətlərini hesablayaq, burada $i = 0, 1, 2, \ldots n-2$-dir. İndi əgər $\kappa_{n-1} \neq 1$-dirsə, onda n ədədi mürəkkəbdir, yox, əgər $\kappa_{n-1} = 1$-dirsə, məsələ açıq qalır: n ədədi həm sadə, həm də mürəkkəb ola bilər.

Bu metodun sirri aşağıdakındadır. Sən demə κ_{n-1} 1-ə onda və yalnız onda bərabər olacaq ki, $2^{n-1} - 1$ n-ə bölünsün. Kiçik Ferma teoreminə görə isə $n > 2$ sadədirsə, $2^{n-1} - 1$ n-ə bölünür. Tərsi heç də həmişə doğru deyil. Bu barədə hətta bir ibrətamiz əhvalat da məlumdur.

$2^n - 2$ şəkilli ədədlərlə eksperiment aparan qədim Çin alimləri gördülər: əgər n sadədirsə, $2^n - 2$ n-ə bölünür, mürəkkəbdirsə – bölünmür və bu 2-dən 300-ə kimi n-lər üçün doğrudur. Onlar hesab etdilər ki, bu, kifayətdir – axı 2^{300} ədədi kifayət qədər təsirlidir: onu yazmağa 90 rəqəm lazımdır! Və onlar nəticə çıxartdılar ki, bu qayda həmişə ödənir. Əslində isə $341 = 11 \cdot 31$ ədədi artıq onu pozur. Qədim Çin riyaziyyatçıları bir qədər də səbirli olsaydılar, öz eksperimentlərində bu ədədə çatardılar.

SADƏ ƏDƏDLƏR OVU

Sadə ədədlərin bizə məlum olan ilk cədvəlini 1603-cü ildə italyan riyaziyyatçısı Pyetro Antonio Kataldi tərtib etmişdi. O, 2-dən 743-ə kimi bütün sadə ədədləri əhatə edirdi.

1770-ci ildə alman riyaziyyatçısı İohann Henrix Lambert 102 000-i aşmayan və 2, 3, 5-ə bölünməyən bütün ədədlərin ən kiçik bölənlərinin cədvəlini çap etdirdi. Bu işə böyük əmək sərf edən Lambert bölənlərin sayını milyona çatdıracaq şəxsin ölməzliyinə zəmanət verdi. Onun çağırışına çoxlu hesablayıcı səs verdi.

XIX əsrin ortalarında artıq nəinki ilk milyonluğun ən kiçik bölənləri, eləcə də doqquz milyona qədər sonrakıların cədvəlləri tərtib olunmuşdu. Elə həmin zamanda mətbuatda tamamilə fantastik görünə bilən məlumat yayıldı: Vyana akademiyasına əlyazma halında yeddi böyük cildlik "2, 3, 5-ə bölünməyən bütün ədədlərin bölənlərinin və onlar arasındakı 100 330 201 sadə ədədin böyük kanonu" daxil oldu. Bu əsərin müəllifi Praqa universitetinin riyaziyyat professoru Yakub Filipp Kulik idi.

Sonralar sadə ədədlərin axtarışı kütlə-

İLK 320 SADƏ ƏDƏD VƏ ONLARIN ARASINDAKI ƏKİZLƏR

2	89	211	347	479	631	787	947	1097	1277	1447	1601	1777	1973
3	97	223	349	487	641	797	953	1103	1279	1451	1607	1783	1979
5	101	227	353	491	643	809	967	1109	1283	1453	1609	1787	1987
7	103	229	359	499	647	811	971	1117	1289	1459	1613	1789	1993
11	107	233	367	503	653	821	977	1123	1291	1471	1619	1801	1997
13	109	239	373	509	659	823	983	1129	1297	1481	1621	1811	1999
17	113	241	379	521	661	827	991	1151	1301	1483	1627	1823	2003
19	127	251	383	523	673	829	997	1153	1303	1487	1637	1831	2011
23	131	257	389	541	677	839	1009	1163	1307	1489	1657	1847	2017
29	137	263	397	547	683	853	1013	1171	1319	1493	1663	1861	2027
31	139	269	401	557	691	857	1019	1181	1321	1499	1667	1867	2029
37	149	271	409	563	701	859	1021	1187	1327	1511	1669	1871	2039
41	151	277	419	569	709	863	1031	1193	1361	1523	1693	1873	2053
43	157	281	421	571	719	877	1033	1201	1367	1531	1697	1877	2063
47	163	283	431	577	727	881	1039	1213	1373	1543	1699	1879	2069
53	167	293	433	587	733	883	1049	1217	1381	1549	1709	1889	2081
59	173	307	439	593	739	887	1051	1223	1399	1553	1721	1901	2083
61	179	311	443	599	743	907	1061	1229	1409	1559	1723	1907	2087
67	181	313	449	601	751	911	1063	1231	1423	1567	1733	1913	2089
71	191	317	457	607	757	919	1069	1237	1427	1571	1741	1931	2099
73	193	331	461	613	761	929	1087	1249	1429	1579	1747	1933	2111
79	197	337	463	617	769	937	1091	1259	1433	1583	1753	1949	2113
83	199		467	619	773	941	1093		1439	1597	1759	1951	2129

vi ov səciyyəsi daşımırdı (cədvəllərin tərtibini bununla müqayisə etmək olar) və ayrı-ayrı nümayəndələrin məqsədyönümlü seçiminə çevrilmişdi. Ədəd ovçuları arasında Mersenin sadə ədədləri daha məşhurdur. Onlar *XVIII* əsrdə Avropa elminin təşəkkülündə görkəmli rol oynamış Maren Mersenin şərəfinə adlandırılıb ("Mükəmməl və dost ədədlər", "Mersen ədədləri: çaşmalar və rekordlar" məqalələrinə bax).

SADƏ ƏDƏDLƏRİN PAYLANMASI QANUNU

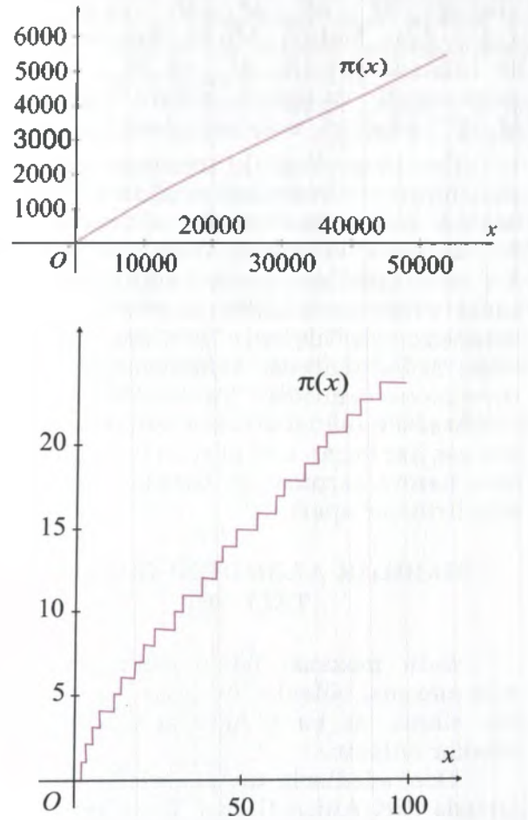
Sadə ədədlərin paylanması haqqında müəyyən təsəvvürlərə artıq qədim yunanlar malik idilər. Məsələn, Evklidin isbatından çıxır ki, onlar bir yerdə toplanmamış, əksinə, bütün ədəd oxu boyunca səpələnmişlər. Lakin hansı tezliklə?

1845-ci ildə fransız riyaziyyatçısı Jozef Bertran 1-dən 6 000 000-adək sadə ədədlərin cədvəlini tədqiq edərək müəyyən etdi ki, $n > 3$ olduqda n və $2n - 2$ ədədləri arasında azı bir sadə ədəd vardır. Bertran özü bunu əsaslandıra bilməsə də, bu xassə sonralar Bertran postulatı adını aldı. Onu 1852-ci ildə rus riyaziyyatçısı Pafnutiy Lvoviç Çebışyov isbat etdi. Çebışyovun nəticələrindən daha dəqiq qiymət çıxırdı. Beləliklə, hətta çox böyük ədədlər arasında belə sadə ədədlər o qədər də nadir deyil.

Digər tərəfdən, özündə minlərlə, milyonlarla, milyardlarla və ümumiyyətlə, ixtiyari böyük miqdarda dalbadal gələn natural ədədləri ehtiva edən aralıqlar mövcuddur ki, onların arasında bir sadə ədəd belə tapmaq olmaz! Həqiqətən, ixtiyari böyük k natural ədədi üçün $k!+2$, $k!+3$, ..., $k!+k$ (burada $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k$) ardıcıllığı quraq. Bu ədədlərin hər biri mürəkkəbdir. Məsələn, $k!+m$ m-ə bölünür, çünki $k!$ m-ə bölünür və m özü m-ə bölünür. x-dən kiçik və ya bərabər sadə ədədlərin miqdarını ifadə edən $\pi(x)$ funksiyasına baxsaq, x-in böyük olmayan qiymətlərində onun qeyri-müntəzəmliyi gözə çarpır. Lakin qrafikin miqyasını bir neçə min dəfə kiçiltsək, gözümüz önündə gözəl hamar əyri canlanacaq (Şəkil 2).

On beş yaşlı Karl Qauss ona bağışlanan "Loqarifmlər cədvəlindəki" sadə ədədlər cədvəli ilə maraqlandı. Onun hər şeylə maraqlanan ağlı əlamətdar bir riyazi qanunu açdı: arqument artdıqca $\pi(x)$ funksiyası $x / \ln x$ funksiyasından praktiki olaraq fərqlənmir. İndi bu fakt sadə ədədlərin paylanma qanunu adlanır. Qauss dahilərə məxsus nüfuzetmə qabiliyyəti ilə bu qanunu görmüş,

lakin onun əsaslandırılması üçün əsaslı arqumentlər tapmaq ona nəsib olmamışdı.



Şəkil 2. $\pi(x)$ funksiyasının müxtəlif miqyaslarda qrafiki.

1852-ci ildə Çebışyov sübut etdi ki, $\pi(x): x / \ln x$ nisbətinin $x \to \infty$-da limiti vahiddən fərqlənə bilməz. Yalnız onu isbat etmək qalırdı ki, bu limit həqiqətən mövcuddur. Bunu 1896-cı ildə Jak Adamar və ondan asılı olmadan La Valle Pussen etdilər. Öz isbatlarında alimlər alman riyaziyyatçısı Bernhard Rimanın nəticələrinə əsaslanırdılar ki, bunlar da riyaziyyatın sanki ədədlər nəzəriyyəsindən uzaq oblastından – kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsindən alınmışdı. Beləliklə, bir çox riyaziyyatçının səyi ilə sadə ədədlərin paylanması xaosunda gizlənmiş harmoniya aşkar edildi.

MÜKƏMMƏL VƏ DOST ƏDƏDLƏR

MÜKƏMMƏLLİYİN CİDDİ QANUNLARI

Öz bölənlərinin (yəni vahid daxil olmaqla və ədədin özü istisna olmaqla bütün bölənlərinin) cəminə bərabər olan ədədlər mükəmməl ədədlər adlanır. $6 = 1 + 2 + 3$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ olduğundan 6 və 28 ədədləri mükəmməl ədədlərdir. İnsanlar onlara ta qədimdən diqqət ayırmışlar. Qədim Misir ölçü vahidi dirsək 28 barmaqdan ibarət idi. Qədim Romada ziyafətlərdə altıncı yeri ən ali və hörmətli qonaqlara ayırmaq dəb idi. Mükəmməl ədədlərlə pifaqorçular – qədim yunan riyaziyyatçısı Pifaqorun məktəbinin ardıcılları maraqlanırdılar.

Evklid "Başlanğıclar"ın doqquzuncu kitabındakı teoremlərdən biri Pifaqorun şagirdlərinin açdığı güman edilən əlamətdar xassəsinə həsr olunub: əgər $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n = 2^{n+1}-1$ ədədi sadədirsə, onda 2^n ədədi mükəmməldir. Hökmün doğrululuğuna $2^n \cdot p$ ədədinin bütün məxsusi bölənlərinə: $2^n \cdot p$: 1, 2, 4, ..., 2^n, $2^{n+1} - 1$, $2 \cdot (2^{n+1} - 1)$, $4 \cdot (2^{n+1} - 1)$, ..., $2^{n-1} \cdot (2^{n+1} - 1)$ baxmaqla və



Müqəddəs Sikstin əlində altı barmaq var. Rafaelin "Sikstin Madonnası" şəklindən fraqment (1517 – 1519).

onların cəmini hesablamaqla əmin olmaq olar. Evklid qaydası qədin yunan riyaziyyatçısı Heraslı Nikomaxa ($I - II$ əsrlər) 6, 28, 496, 8128 (n = 1, 2, 4, 6 olduqda) kimi mükəmməl ədədləri tapmağa imkan verdi. Növbəti, hesabla beşinci kamil 33 550 336 (n = 12) ədədi yalnız XV əsrdə aşkar olundu.

ALTI YÜZ ALTMIŞ ALTI

Müdriklik buradadır. Kimin ağlı varsa, heyvanların sayını biləcək, çünki bu insan ədədidir, o, altı yüz altmış altı ədədidir.

İoann Boqoslovun açıqlamaları (Apokalipsis).

13.18.

L. N. Tolstoyun "Hərb və sülh" əsərində Pyerin Napoleonun "rəqəm çəkisinin" heyvan ədədinə – 666-ya bərabər olduğunu hesabladığı epizod var, öz adının yazılışını da belə qaydada düzdü, bunda əlamət gördü və Bonopartı öldürməyə getdi. Pyerin hesabını təkrar etməyə ərinməyin – bəlkə bu, onun uğursuzluğunun səbəbini açıqlayar.

Ədəd isə doğrudan da qeyri-adidir. Onun yalnız bir qism heyrətamiz riyazi səciyyələri bunlardır:

– heyvan ədədi ilk yeddi əsli ədədin kvadratları cəmidir:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2;$$

– heyvan ədədi ilk 36 natural ədədin cəmidir:

$$666 = \sum_{i=1}^{36} i;$$

– heyvan ədədi ilk üç natural ədədin altıncı qüvvətlərinin fərqi və cəmidir:

$$666 = 1^6 - 2^6 + 3^6;$$

– heyvan ədədini doqquz rəqəmlə iki üsulla artan və yalnız bir üsulla azalan qaydada yazmaq olar:

$$666 = 1 + 2 + 3 + 4 + 567 + 89 = 123 + 456 + 78 + 9,$$
$$666 = 9 + 87 + 6 + 543 + 21.$$

Öz yazılışında 666-nı saxlayan 2^l şəkilli ədəd apokaliptik ədəd, yazılışında düz 666 işarə olan ədəd isə Apokalipsis ədədi adlanır.

Mükəmməl ədədlərin tarixində parlaq səhifə fransız vaizi və riyaziyyatçısı Maren Mersenin adıyla bağlıdır. Qaynar ictimai fəaliyyət Patrenin riyaziyyatla məşğul olmağına mane olmurdu. Sadə p-lərdə $M_p = 2^p - 1$ şəkilli sadə ədədlər onun şərəfinə sadə Mersen ədədləri adlandırılıb. Evklid qaydasına əsasən, hər bir sadə M_p ədədi $M_p \cdot 2^{p-1}$ mükəmməl ədədini təyin edir.

Mersen özü bəyan etmişdi ki, 33 550 336-dan sonrakı növbəti altı mükəmməl ədəd M_{17}, M_{19}, M_{31}, M_{67}, M_{127} və M_{257} - yə uyğun gəlir. Məlum oldu ki, Mersen altı halın ikisində yanılıb. M_{67} və M_{257} ədədləri mürəkkəbdir və deməli, onlara uyğun olan $M_p \cdot 2^{p-1}$ ədədləri mükəmməl ədəd deyil.

Evklid qaydası ilə tapılması mümkün olan bütün mükəmməl ədədlər cütdürlər. Bəs tək mükəmməl ədədlər mövcuddurmu? Bu, indiyə kimi məlum deyil. Hərçənd ki, XX əsrdə aparılan çoxsaylı araşdırmalar şəhadət verir: bu ədədlər mövcud olsa belə, onlar çoxsaylı "hiyləgər" şərtlərə tabe olmalıdır. Müasir alman riyaziyyatçısı Valter Boro necəsə demişdir: "Tək mükəmməl ədədlərə həsr olunan işlər kabus ovuna bənzəyir: heç kəs heç haçan onu görməyib, lakin onun necə nəzərə çarpmadığı barədə çoxlu ağıllı araşdırmalar aparılıb".

ƏDƏDLƏR ALƏMİNDƏ DOSTLUQ TELLƏRİ

m-in məxsusi bölənlərinin sayı n-ə, n-in məxsusi bölənlərinin sayı isə m-ə bərabər olarsa, m və n natural ədədləri dost ədədlər adlanır.

Dost ədədlərin tarixi əsrlərin dərinliklərində itir. Antik filosof Yamvlixin (III – IV əsrlər) şəhadətinə görə böyük Pifaqor kimi özünün dostu saymaq lazımdır sualına "Kim ki, 220 və 284 ədədləri kimi mənim ikinci Mənimdir" cavabını vermişdir. Lütfən, 220 və 284 ədədlərinin dost ədədlər olduğunu yoxlayın.

Ərəb alimi Sabit ibn Kürrə (IX əsr) ağıllı üsul təklif etdi: n ədədi verildikdə $p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$, $q = 3 \cdot 2^n - 1$ və $r = 9 \cdot 2^{2n} - 1$ köməkçi kəmiyyətlərini hesablamaq. Əgər aşkar olsa ki, p, q, r ədədləri sadədir, onda $A = 2^n pq$ və $B = 2^n r$ ədədləri dost ədədlərdir.

220 və 284 Pifaqor cütü bu metoddan n=2-də alınır. Digər ədədlər cütünü – 17 296 və 18 416 – bir-birindən asılı olmadan Mərakeş alimi İbn əl Bənna və üç yüz il sonra fransız Pyer Ferma almışlar. Bu halda n=4-dür. Üçüncü cütü – 9 363 584 və 9 437 056 (n = 7) – 1638-ci ildə Röne Dekart göstərmişdir. Böyük olmayan n-lərdə dost cütlər tapmaq cəhdləri uğura gətirmir. Daha pisi, n-i 20 000-ə qədər artırsaq, Sabit ibn Kürrənin üsulu bir dost ədəd cütü belə aşkar etmir. Doğrudanmı dost ədədlər almaz külçələridir və onların sayılması üçün bir əlin barmaqları belə çoxdur?

1747 – 1750-ci illərdə Leonard Eyler unikal ədəd "qazıntıları" apardı. O, orijinal axtarış metodları fikirləşib tapdı və birdənbirə 61 yeni dost ədəd cütü aşkar etdi. Əlamətdardır ki, onların arasında tək ədədlər: 69 615 və 11 498 355; 87 633 və 12 024 045 də vardı. Maraqlıdır ki, 1866-cı ildə məktəbli N. Paqanini (böyük skripkaçının familiyadaşı) hamının, hətta dahi riyaziyyatçıların belə nəzərdən qaçırdığı 1184 və 1210 dost ədədlər cütünü tapdı!

100 000 hüdudlarında dost ədədlər bunlardır:

220 – 284,
1 184 – 1 210,
2 620 – 2 924,
5 020 – 5 564,
6 232 – 6 368,
10 744 – 10 856,
12 285 – 14 595,
17 296 – 18 416,
63 020 – 76 084,
66 928 – 66 992,
67 095 – 71 145,
69 615 – 87 633,
79 750 – 88 730.

Dost ədədlər çoxlu sirlər çoxluğunu gizlətməkdə davam edir. Bir ədədi cüt, digəri tək olan qarışıq cütlər varmı? Bütün dost ədədləri təsvir edən ümumi düstur mövcuddurmu? Bu cütlərin sayı sonlu, yoxsa sonsuzdur? Bu və digər suallara cavab hələ tapılmayıb.

NATURAL VƏ TAM ƏDƏDLƏR ÇOXLUĞU

N ilə natural ədədlər, Z ilə isə tam ədədlər çoxluğu işarə edilir:

$$N = \{1;2;3;...\}, Z = \{0;\pm1;\pm2;\pm3;...\}$$

Bildiyimiz kimi, istənilən iki natural ədədin cəmi və hasili natural ədəddir, istənilən iki tam ədədin cəmi, fərqi, hasili tam ədəddir.

A çoxluğunda təyin edilmiş əməl B altçoxluğunun elementləri üzərində yerinə yetirildikdə alınan nəticə də B çoxluğuna aiddirsə, B çoxluğu verilən əmələ nəzərən **qapalı çoxluq** adlanır.

Yuxarıda söylədiklərimizə əsasən natural ədədlər çoxluğu vurma və toplamaya nəzərən, tam ədədlər çoxluğu isə vurma, toplama və çıxmaya nəzərən qapalı çoxluqlardır. Yəni, adı çəkilən əməlləri verilən çoxluqların istənilən iki elementi üzərində yerinə yetirdikdə alınan nəticələr həmin çoxluqlara aid olur. Vurma və toplama əməlləri üçün yerdəyişmə, qruplaşdırma və onların ikisi üçün birlikdə isə paylanma qanunları ödənilir: $\forall a,b,c \in Z$ yerdəyişmə və ya kommutativlik xassəsi

$$a + b = b + a;\ ab = ba$$

qruplaşdırma və ya assosiatvlik xassəsi

$$(a + b) + c = a + (b + c);\ (ab)c = a(bc)$$

paylanma və ya distributivlik xassəsi

$$a(b \pm c) = ac \pm bc$$

Natural ədədlər çoxluğunda aşağıdakı təklifi aksiom kimi qəbul edəcəyik:

Peano aksiomu. *Natural ədədlər çoxluğunun istənilən altçoxluğunun ən kiçik elementi var.*

Arximed prinsipi. a,b natural ədədlərdirsə,

$$\exists m \in N \Rightarrow (m-1)a \le b \le ma.$$

Natural ədədlər çoxluğunun

$$A = \{k \in N : ka > b\}$$

qaydası ilə təyin edilmiş altçoxluğuna baxaq. Bu çoxluq boş çoxluq deyil, sonsuz çoxluqdur. Peano aksiomuna əsasən bu çoxluğun ən kiçik müəyyən bir k_0 elementi var. Onda

$$k_o a > b$$

bərabərliyi ödənilməlidir. Digər tərəfdən, k_0 ədədi bu bərabərsizliyin ödənildiyi ən kiçik natural ədəd olduğu üçün

$$(k_0-1)a \le b$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Onda $m=k_0$ məhz axtarılan natural ədəddir. Teorem isbat edildi.

a,b tam ədədlərdir və müəyyən bir c tam ədədi üçün $a=bc$. Onda deyirlər ki, a ədədi b ədədinə **tam bölünür**. c-yə a-nın b-yə bölünməsindən alınan **qismət** deyilir. Ədəbiyyatda a ədədinin b-yə bölünməsi çox vaxt $b|a$ kimi işarə edilir.

$b|a \Leftrightarrow a$ *ədədi* b *ədədinə bölünür* $\Leftrightarrow \exists c \in Z : a=bc$

a ədədi b ədədinə bölünürsə, b-yə a ədədinin **böləni**, a-ya isə b ədədinin **bölünəni** deyilir. Aydındır ki, istənilən ədədin bölənləri çoxluğu sonlu, bölünənləri çoxluğu isə sonsuz çoxluqdur.

QALIQLI BÖLMƏ

a,b verilmiş natural ədədlərdir. Onda

$$\exists m,r \in N, 0 \le r < a \Rightarrow b=(m-1)a+r$$

göstərilişi mümkündür və bu göstəriliş yeganədir.

Arximed prinsipinə əsasən

$$\exists m \in N \Rightarrow (m-1)a \le b < ma$$

bərabərsizliyi ödənilir. $r=b-(m-1)a$ qəbul etsək,

$$b=(m-1)a+r \quad 0 \le r < a$$

alarıq. İndi isə isbat edək ki, b ədədini yeganə üsulla bu şəkildə göstərmək olar. Əksini fərz edək. Tutaq ki, bundan əlavə $b=(m_1-1)a+r_1$ şəklində də göstərmək mümkündür. Onda

$$(m-1)a+r=(m_1-1)a+r_1 \Rightarrow (m-m_1)a=r_1-r$$

olmalıdır. Bu isə yalnız $m=m_1, r=r_1$ olduqda mümkündür. Doğrudan da, $m \neq m_1$ olarsa,

$$|(m-m_1)a| \ge a$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Digər tərəfdən $|r-r_1|<a$ olması aşkardır. Beləliklə, ziddiyyət almış oluruq. Teorem isbat edildi.

Xüsusi halda $r=0$ olarsa, b ədədi a ədədinə **tam bölünür**. Əgər $r \neq 0$ olarsa, r ədədinə b ədədinin a-ya bölünməsindən alınan **qalıq** deyilir.

Tam ədədlər çoxluğunda da eyni anlayışları daxil etmək olar.

b tam, a isə verilmiş natural ədədlərdir. Onda b ədədini yeganə üsulla

$$\exists m \in Z, \exists r \in N, 0 \le r < a \Rightarrow b=ma+1$$

şəklində göstərmək mümkündür.

Teoremdə iştirak edən m ədədinə b ədədinin a ədədinə bölünməsindən alınan qismət, r ədədinə isə alınan qalıq deyilir. Qalıq sıfıra bərabər olarsa, söylənilir ki, b ədədi a ədədinə tam bölünür. Bu zaman b-yə a-nın bölünəni, a-ya isə b ədədinin böləni deyilir.

17 ədədinin 10-a qalığı 7-yə, (-17) ədədinin isə 10-a qalığı 3-ə bərabərdir. Doğrudan da,

$$17=1\cdot 10+7$$
$$-17=(-2)\cdot 10+3$$

x,y natural ədədlərinin z ədədinə bölünməsindən alınan qalıqlar bərabərdirsə, deyəcəyik ki, x və y ədədləri z-ə bölünməyə nəzərən **tutuşdurula biləndirlər və ya müqayisə oluna biləndirlər.** Bunu aşağıdakı kimi yazacağıq

$$x \equiv y (\mathrm{mod}\, z)$$

İsbatı daha sonra veriləcək aşağıdakı teoremi qeyd edək:

Verilmiş ədədə nəzərən iki ədədin hasili (cəmi, fərqi) ilə uyğun olaraq onların verilən ədədə bölünməsindən alınan qalıqları hasili (cəmi, fərqi) tutuşdurula bilən-dirlər.

Başqa sözlə, *iki ədədi bir-birinə vurduqda uyğun qalıqlar vurulur, topladıqda uyğun qalıqlar toplanır, çıxdıqda isə uyğun qalıqlar çıxılır.*

$$\begin{cases} x \equiv r (\mathrm{mod}\, z) \\ y \equiv q (\mathrm{mod}\, z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \pm y \equiv r \pm q (\mathrm{mod}\, z) \\ xy \equiv rq (\mathrm{mod}\, z) \end{cases}$$

SAY SİSTEMLƏRİ

Biz, adətən, ədədlərin onluq say sistemindəki yazılış və oxunuş ilə rastlaşırıq. Eyni ilə digər say sistemləri də daxil etmək olar. Qədimlərdə on ikilik say sistemindən istifadə edilmişdir. Kompyuterlərdə ikilik, səkkizlik və s. say sistemlərindən istifadə edilir.

Onluq say sistemində 10-u aşmayan ədədlər **(0,1,2,3,4,5,6,7,8,9) rəqəmlər** adlanır və istənilən ədəd bu rəqəmlərin vasitəsilə yazılır. Hər bir yeni onluğun əmələ gəlməsi ədədin yazılışında dəyişiklik yaradır. Onluqların sayı 10 ədədinin qüvvətlərini aşanda yazılışda yeni mərtəbə daxil edilir. 10 ədədinin hansı qüvvətinin daxil olmasından asılı olaraq ədəd mərtəbələnir.

$1+10=11, 1+2\cdot 10=21, \ldots, 1+9\cdot 10=91, 1+10\cdot 10=$
$=1+0\cdot 10+1\cdot 100=101, 2+3\cdot 10+5\cdot 10^4=50032$
və s.

Əksinə, müəyyən ədəd verilmişsə, həmin ədədi 10-un qüvvətlərinin köməyilə cəm şəklində göstərmək olar. Bu, ədədin onluq say sistemində göstərilişi adlanır. Məsələn,

$$347=3\cdot 10^2+4\cdot 10+7,$$
$$602305=6\cdot 10^5+0\cdot 10^4+2\cdot 10^3+$$
$$+3\cdot 10^2+0\cdot 10+5=6\cdot 10^5+2\cdot 10^3+3\cdot 10^2+5$$

Ümumi halda p-lik say sistemində $0,1,2,\ldots, p-1$ ədədləri **rəqəmlər** adlanır və istənilən ədəd bu rəqəmlər vasitəsilə yazılır. Məsələn, ikilik say sistemində yalnız iki rəqəmdən 0 və 1-dən istifadə edilir; səkkizlik say sistemində yalnız 0,1,...,6,7 rəqəmlərindən istifadə edilir. Ədədin müxtəlif p-lik say sistemində yazılışını onluq və digər say sistemlərindəki yazılışlar ilə qarışdırmamaq üçün yazılışın sonunda, indeksdə verilən say sistemi qeyd edilir:

$$\overline{b_0 b_1 \ldots b_n}_{(p)} = b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \ldots + b_{n-1} p + b_n \qquad (1)$$

Sağ tərəfdəki cəmi onluq say sistemində adi qaydada toplasaq $\overline{b_0 b_1 \ldots b_n}_{(p)}$ ədədinin onluq say sistemində göstərilişini alarıq. Başqa sözlə, p-lik say sistemində verilmiş istənilən ədədi onluq say sistemində yazmaq üçün (1) göstərilişinin sağ tərəfini adi qaydada hesablamaq lazımdır. Bəzi misallara baxaq:

$$1111_{(2)}=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+1\cdot 2+1=13.$$
$$3201_{(4)}=3\cdot 4^3+2\cdot 4^2+1=225.$$

Əksinə –onluq say sistemində verilmiş istənilən ədədin p-lik say sistemində göstərilişi haqqında nə söyləmək olar və bu göstərilişi əldə etmək üçün alqoritm nədən ibarətdir?

$p, a \in N$ verilşmiş natural ədədlərdir və p>1. Onda $\exists a_0; a_1; \ldots; a_n < p$ mənfi olmayan tam ədədləri var ki, a ədədini yeganə üsulla

$$a=a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1} p + a_n$$

şəklində göstərmək mümkündür.

Verilən şərtlər daxilində müəyyən mənfi olmayan $n \in Z$ ədədi üçün $p^n \le a < p^{n+1}$ bərabərsizliyi ödənilir. Arximed prinsipinə əsasən müəyyən mənfi olmayan $a_0 < p$ ədədi üçün

$$a_0 p^n \le a < (a_0+1)p^n$$

bərabərsizliyi ödənilir. Anoloji mühakimələri $a-a_0 p^n$ ədədi üçün də yerinə yetirmək

olar: müəyyən mənfi olmayan $k+1<n$ ədədi üçün $p^k \le a-a_0p^n < p^{k+1}$ və müəyyən bir $a_{n-k} < p$ ədədi üçün

$$a_{n-k}p^k \le a < (a_{n-k}+1)p^k$$

bərabərsizlikləri ödənilməlidir. $k+1<n$ olarsa,

$$a_1 = a_2 = ... = a_{n-k-1} = 0$$

qəbul edirik. $a-a_0p^n-a_{n-k}p^k$ fərqinə də eyni qaydada yanaşmaq olar. Bu prosesin sonlu olması aydındır. Çünki, hər dəfə alınan fərq verilən ədəddən kiçik olmalıdır. Nəticədə, müəyyən sayda addımdan sonra sıfır alınmalıdır. Bu isə müəyyən mənfi olmayan $a_0;a_1;...;a_n < p$ tam ədədləri üçün

$$a = a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n$$

bərabərliyinin doğru olması deməkdir.

İndi isbat edək ki, a ədədini yeganə üsulla bu cür göstərmək olar. Əksini fərz edək, a ədədinin başqa bir

$$a = b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + b_{m-1}p + b_m$$

şəklində də göstərmək olar. Onda

$$a = b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + b_{m-1}p + b_m =$$
$$= a_0p^n + a_1p^{n-1} + ... + a_{n-1}p + a_n$$

bərabərliyindən

$$a_n - b_m = b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + b_{m-1}p -$$
$$-(a_0p^n + a_1p^{n-1} + ...a_{n-1}p)$$

bərabərliyini alarıq. Sol tərəfdə duran fərq p ədədindən kiçik olmalıdır. Eyni zamanda sağ tərəfdə iştirak edən ifadə p ədədinə tam bölünür. Bu isə yalnız və yalnız $a_n = b_m$ bərabərliyi ödənildikdə mümkündür. Onda

$$b_0p^m + b_1p^{m-1} + ... + b_{m-1}p = a_0p^n + a_1p^{n-1} + ...a_{n-1}p$$

bərabərliyini almış olarıq. Hər iki tərəfi p ədədinə bölsək

$$b_0p^{m-1} + b_1p^{m-2} + ... + b_{m-1} = a_0p^{n-1} + a_1p^{n-2} + ...a_{n-1}$$

bərabərliyini alarıq. Yuxarıdakı mühakimələri təkrar etsək $b_{m-1} = a_{n-1}$ bərabərliyi alınar. Və bu ardıcıllıqla davam edilərsə, $m = n;\ b_i = a_i;\ i = 1,2,...;n$ bərabərlikləri alınar. Bu isə onu göstərir ki, a-nı yuxarıdakı şəkildə yeganə üsulla göstərmək olar. Teorem isbat edildi.

Teoremin isbatından verilmiş ədədin p-lik say sistemində yazılışını əldə etmək üçün alqoritmi də əldə etmək olar: *Verilmiş a ədədinin özündə saxladığı p-nin ən yüksək qüvvəti tapılır, a-nı həmin qüvvətə bölüb qismәti və qalığı tapırlar. Qismət p-lik say sistemində ilk rəqəm olur. Qalığın üzərində yenidən həmin əməliyyat yerinə yetirilir: p-nin bir vahid əskik qüvvətinə bölüb, qismət və qalıq tapılır (ikinci addımdan başlayaraq qismət artıq sıfıra bərabər ola bilər, bu halda ikinci rəqəm olaraq sıfır yazılır). Tapılmış qismət yazılışın ikinci rəqəmi olur. Qalığı p-nin iki vahid əskik qüvvətinə bölüb qismət və qalığı tapırlar və s. bu ardıcıllıqla davam edilir. Sonda qalıqda p-dən kiçik ədəd alınır, bu p-lik say sistemində sonuncu rəqəmdir.*

Misal. 38 ədədinin ikilik, üçlük, dördlük say sistemlərində yazılışlarını tapaq.

38|32=2^5	38|27=3^3	38|16=4^2
32| 1*	27| 1	32| 2*
6|16=2^4	11|9=3^2	6|4
0| 0*	9| 1	4| 1*
6|8=2^3	*2	*2|
0| 0*		
6|4=2^2		
4| 1*		
2|2=2^1		
2| 1*		
*0|		

$38=100110_{(2)}=1102_{(3)}=212_{(4)}$

Belə də etmək olar: ədədi ardıcıl olaraq, qismətdə böləndən kiçik ədəd alınana kimi, say sisteminin əsasına bölürlər. Sonuncu natamam qismәti və ondan əvvəlki qalıqları axırdan əvvələ yazmaqla yeni say sistemində ədədin yazılışını əldə etmiş oluruq. Məsələn, 38 ədədinin dördlük say sistemində yazılışını aşağıdakı kimi də tapa bilərik:

38 | 4
36 | 9 | 4
2 | 8 | 2
1

$38 = 212_{(4)}$

10-u aşmayan say sistemlərində ədədlərin yazılışında istifadə edilən rəqəmlər onluq say sistemində rastlaşdığımız rəqəmlərdən ibarətdir. 10-u aşan say sistemlərində isə artıq bildiyimiz iki rəqəmli ədədlərə rəqəm kimi baxmaq lazım gəlir. Onluq say sistemində iki və daha çoxrəqəmli ədədə verilən say sistemində rəqəm kimi baxmaq üçün həmin ədədi mötərizələrin içərisində yazacağıq.

$(11)(12)_{(20)} = 11\cdot 20 + 12 = 232$

$1112_{(20)} = 1\cdot 20^3 + 1\cdot 20^2 + 1\cdot 20 + 2 = 8422$

$(15)69_{(16)} = 15\cdot 16^2 + 6\cdot 16 + 9 = 489$

$156_{(16)} = 1\cdot 16^2 + 5\cdot 16 + 6 = 342$

BÖLÜNMƏ ƏLAMƏTLƏRİ

Müəyyən bir say sistemində verilmiş b ədədinə bölünmə əlamətini tapmaq üçün, adətən, ədədin say sistemində göstərilişində müəyyən çevirmələr aparmaqla, b-yə bölünən toplananı ayırıb, yerdə qalan toplanan əsasında bölünmə əlaməti ifadə edilir. Bəzi hallarda bu həqiqətən çox əlverişli əlamətləri əldə etməyə imkan verir. Ancaq ola da bilər ki, alınan əlamət praktiki cəhətdən heç də əlverişli olmasın.

Misal 1. Onluq say sistemində 2-yə bölünmə əlamətini tapaq. İstənilən $\overline{xa}$ natural ədədi (a sonuncu rəqəm, x isə natural ədəddir) $10x+a$ şəklində göstərmək olar. Alınan göstərilişdə ilk toplanan 2-yə bölündüyü üçün verilən ədədin ikiyə bölünməsi yalnız və yalnız ikinci toplananın- a rəqəminin 2-yə bölünməsi ilə eyni zamanda mümkündür. Beləliklə, onluq say sistemində verilən ədədin 2-yə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt onun sonuncu rəqəminin 2-yə bölünməsidir.

Misal 2. p cüt ədəd olarsa, p-lik say sistemində ikiyə bölünmə əlaməti onluq say sistemindəki kimi qalacaq. Çünki, p-lik say sistemində istənilən ədədi $px+a$ şəklində göstərmək olar. Bu halda da ilk toplanan 2-yə tam bölünür. Buna görə də verilən ədədin ikiyə bölünməsi sonuncu rəqəmin 2-yə bölünməsinə eynigüclüdür.

Misal 3. p tək olduqda artıq bu qayda doğru olmur. Məsələn 3-lük say sistemində $1111_{(3)} = 40$ ədədi 2-yə bölünür, ancaq sonuncu rəqəm təkdir.

Misal 4. Onluq say sistemində 13-ə bölünmə əlamətini tapmağa çalışaq. Üçrəqəmli ədədlərə baxaq

$$\overline{abc} = 100a + 1b + c = (104a + 13b) - (4a + 3b - c))$$

ilk toplanan 13-ə bölünür. Beləliklə, $\overline{abc}$ şəklində üçrəqəmli ədədin 13-ə bölünməsi, $4a+3b-c$ ifadəsinin 13-ə bölünməsinə ekvivalentdir. Rəqəmlərin sayı artdıqda alınan ifadələr daha mürəkkəb formalı olurlar və ümumi şəkildə alınan əlaməti tətbiq etmək heç də asan deyil.

Çıxıqlar nəzəriyyəsində görəcəyik ki, istənilən say sistemində istənilən ədədə bölünmə əlaməti təyin etmək olar. Ancaq yuxarıda söylədiyimiz kimi bunların heç də hamısı praktiki nöqteyi-nəzərdən yararlı deyildirlər.

Əldə olunmuş əlamətlərin vasitəsilə digər ədədlərə bölünmə əlamətləri əldə etmək olar. Aşağıda görəcəyik ki, c,d qarşılıqlı sadə ədədlərdirsə, ədədin $b=cd$ hasilinə tam bölünməsi, ədədin eyni zamanda c və d ədədlərinə bölünməsinə ekvivalentdir.

ÇIXIQLAR HAQQINDA

Bildiyimiz kimi a,c verilmiş tam ədədlərdirsə,

$$\exists m \in Z, r \in N, 0 \le r < c \Rightarrow a = mc + r$$

göstərilişi mümkündür. Yuxarıda söylədiyimiz kimi, r ədədinə a-nın c-yə bölünməsindən alınan qalıq deyilir. Aydındır ki, k-cı ($k=0,1,2,\ldots, c-1$) sinif olaraq, c-yə bölmədə qalığı k-ya bərabər olan bütün tam ədədləri götürsək, c ədədinə nəzərən bütün tam ədədlər çoxluğunu c sayda kəsişməyən siniflərə bölmək olar. Bu siniflərdən hər birinə c **moduluna nəzərən çıxıqlar** deyilir və $k=0,1,2,\ldots,c-1$ kimi işarə edilir.

a,b,c tam ədədlərdir. a və b ədədlərinin c ədədinə bölünməsindən alınan qalıqlar bərabərdirsə (başqa sözlə, $a-b$ fərqi c ədədinə tam bölünürsə), deyirlər ki, a və b ədədləri c **moduluna nəzərən uzlaşandırlar və ya tutuşdurulandırlar** və bunu aşağıdakı kimi yazırlar

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\, c)$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n; b_1, b_2, \ldots, b_n$ tam ədədlər ardıcıllığı, c isə tam ədəddir və

$$a_k \equiv b_k (\mathrm{mod}\, c), k = 1,2,\ldots,n.$$

Onda

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_b (\mathrm{mod}\, c)$$
$$a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_b (\mathrm{mod}\, c)$$

Riyazi induksiyasın tətbiq edək, $n=2$ halını araşdıraq.

$$(a_1 + a_2) - (b_1 + b_2) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)$$
$$a_1 a_2 - b_1 b_2 = (a_1 - b_1) a_2 + (a_2 - b_2) b_1$$

göstərilişlərinin sağ tərəfindəki toplananlardan hər biri c-yə tam bölündüyü üçün, bu halda verilən təklif doğrudur.

$k=n$ halı üçün təklifin doğru olduğunu qəbul edək. $k=n+1$ halı üçün isbat edək.

$$S_{n(1)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$S_{n(2)} = b_1 + b_2 + \ldots + b_n,$$
$$P_{n(1)} = a_1 a_2 \ldots a_n,$$
$$P_{n(2)} = b_1 b_2 \ldots b_n$$

işarələmələrini aparaq. İnduksiyanın fərziyyəsinə görə

$$S_{n(1)} = S_{n(2)} (\mathrm{mod}\, c) \text{ və } P_{n(1)} = P_{n(2)} (\mathrm{mod}\, c).$$

Onda

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} = S_{n1} + a_{n+1},$$
$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + b_{n+1} = S_{n2} + b_{n+1},$$
$$a_1 a_2 \ldots a_n a_{n+1} = P_{n1} a_{n+1},$$
$$b_1 b_2 \ldots b_n b_{n+1} = P_{n2} b_{n+1}$$

bərabərliklərindən və $n=2$ halı üçün təklifin doğru olmasından $k=n+1$ halı üçün də verilən təklifin doğru olması alınır. Teorem isbat edildi.

$a \equiv b (\mathrm{mod}\, c)$ olarsa, istənilən natural n ədədi üçün $a^n \equiv b^n (\mathrm{mod}\, c)$ münasibəti ödənilir.

İsbatı oxucuya həvalə edirik.

a və b tam ədədlərdir. a^n qüvvətinin b-yə bölünməsindən alınan qalıqlar müəyyən nömrədən başlayaraq dövri təkrarlanır.

b-yə bölmədə alınan qalıqlar sonlu sayda olduğundan elə m və k natural qüvvətləri $(k>m)$ var ki, $a^m = a^k (\mathrm{mod}\, b)$ bərabərliyi ödənilir. $t=k-m$ işarələməsini qəbul edək. k-dan böyük hər bir n natural ədədini

$$n - m = qt + r, r < t$$

şəklində göstərmək olar. Göstərək ki,

$$a^n \equiv a^{m+r} (\mathrm{mod}\, b)$$

münasibəti doğrudur. İsbatı r qalığının qeyd edilmiş qiymətində q-yə nəzərən induksiya metodu ilə aparacağıq. $q=1$ halına baxaq:

$$a^n = a^{m+(k-m)+r} = a^{k+r} = a^k a^r \equiv a^{m+r} (\mathrm{mod}\, b).$$

Deməli, bu halda təklif doğrudur. Tutaq ki, verilən təklif $q=i$ üçün doğrudur. $q=i+1$ halı üçün təklifin doğruluğunu isbat edək. Doğrudan da,

$$a^n = a^{m+(i+1)(k-m)+r} = a^{m+i(k-m)+r} a^{k-m} \equiv$$
$$\equiv a^{m+r} a^{k-m} (\mathrm{mod}\, b) \equiv a^{m+r} (\mathrm{mod}\, b)$$

münasibətləri doğrudur. (Sonuncu keçiddə $q=1$ halı üçün təklifin doğru olmasından istifadə edilmişdir). Bu isə tələb edilən faktdır.

Misalların həllində qalıqlar cədvəli tərtib etmək faydalı olur.

Misal 1. 7^{2000} ədədinin sonuncu rəqəmini tapın.

Həlli. Ədədin sonuncu rəqəmi, həmin ədədin 10-a bölünməsindən alınan qalığa bərabər olduğundan 7-nin qüvvətlərinin 10-a qalıqlar cədvəlini tərtib edək. Növbəti qüvvətin qiymətinə uyğun qalığı tapmaq üçün əvvəlki qalığı 7-yə (qüvvətin əsasına) vurub, alınan hasili 10-a bölərək, yeni qalığı tapmaq lazımdır:

n	1	2	3	4	5
7^n	7	9	3	1	7

Bu cədvəldən aşağıdakılar aşkarlanır:

$n=4k$ şəklində ədədlər üçün $7^n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10)$
$n=4k+1$ şəklində ədədlər üçün $7^n \equiv 7 (\mathrm{mod}\ 10)$
$n=4k+2$ şəklində ədədlər üçün $7^n \equiv 9 (\mathrm{mod}\ 10)$
$n=4k+3$ şəklində ədədlər üçün $7^n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 10)$.

Xüsusi halda, $n=2000$ olduqda $7^{2000} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 10)$ alınır. Yəni 7^{2000} ədədinin sonuncu rəqəmi 1 olmalıdır.

Misal 2. $7^{2005} + 3^{2005}$ cəminin 5-ə bölündüyünü isbat edin.

Həlli. 7-nin və 3-ün qüvvətlərinin və onların cəminin 5-ə qalıqlarının birgə cədvəlini tərtib edək

n	1	2	3	4	5	6	7	8
3^n	3	4	2	1	3	4	2	1
7^n	2	4	3	1	2	4	3	1
$3^n + 7^n$	0	3	0	2	0	3	0	2

Başqa sözlə,

$n=4k$ şəklində ədədlər üçün $3^n + 7^n \equiv 2 (\mathrm{mod}\ 5)$
$n=4k+1$ şəklində ədədlər üçün $3^n + 7^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$
$n=4k+2$ şəklində ədədlər üçün $3^n + 7^n \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 5)$
$n=4k+3$ şəklində ədədlər üçün $3^n + 7^n \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$.

Xüsusi halda, $n=2005=4\cdot 501+1$ qüvvəti üçün $3^{2005} + 7^{2005} \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 5)$ münasibəti doğrudur. Yəni $3^{2005} + 7^{2005}$ cəmi 5-ə qalıqsız bölünür.

SADƏ VƏ MÜRƏKKƏB ƏDƏDLƏR

Yadımıza salaq ki, b ədədi a ədədinə bölünürsə, a-ya b-nin böləni, b-yə isə a-nın bölüneni deyilir. İstənilən natural ədədin bölənlər çoxluğu sonlu, bölünənlər çoxluğu isə sonsuz çoxluqdur. İstənilən natural ədəd özünə və vahidə bölündüyündən bu çoxluqlar boş çoxluq deyildirlər. Vahiddən fərqli istənilən natural ədədin ən azı iki böləni var.

Yalnız iki böləni olan natural ədədə **sadə ədəd** deyilir. Başqa sözlə, yalnız vahidə və özünə bölünən, vahiddən fərqli natural ədədə sadə ədəd deyilir.

2,3,5,7, 11, 13, və s. ədədləri sadə ədədlərdir. Sadə ədədlərin sırasını təyin etmək üçün natural ədədlər sırasında ardıcıl olaraq 2-nin, sonra 3-ün, sonra 5-in və s. sadə ədədlərin bütün bölünənləri silinir. Yerdə qalan ədədlər sadə ədədlərdir. Buna Eratosfen qəfəsi deyilir:

2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30

İstənilən natural ədədin vahiddən fərqli ən kiçik böləni sadə ədəddir.

İlk olaraq qeyd edək ki, istənilən ədədin vahiddən fərqli bölənlər çoxluğu natural ədədlərin aşltçoxluğu olduğundan Peano aksiomuna əsasən bu çoxluğun ən kiçik elementi var. Tutaq ki, b ədədi a ədədinin vahiddən fərqli bölənləri arasında ən kiçiyidir. İsbat etməliyik ki, b sadə ədəddir. Əksini fərz edək: b sadə deyil. Başqa sözlə, b ədədinin vahiddən və özündən

fərqli hansısa c böləni var. $b|a$ və $c|b$ olmasından $c|a$ münasibətini almış olarıq ki, bu da b ədədinin a ədədinin bölənləri arasında ən kiçik olmasına ziddir. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil. Buna görə də b sadə olmalıdır.

Təbii olaraq aşağıdakı sual ortaya çıxır: Sadə ədədlər çoxluğu sonsuzdurmu?

Evklid teoremi. Sadə ədədlər çoxluğu sonsuz çoxluqdur.

Tutaq ki $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ilk n sayda sadə ədəddir. İsbat edək ki, bu ədədlərdən böyük sadə ədəd var. Yəni

$$p = p_1 p_2 p_3 \ldots, p_n + 1$$

ədədinə baxaq. p ədədi $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ədədlərindən heç birinə bölünmür. Doğrudan da,

$$p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p_i), i = 1,2,3,\ldots,n$$

Burada iki hal ola bilər *a)* ya p özü sadə ədəddir. Başqa sözlə, ilk n sadə ədəddən böyük sadə ədəd var, *b)* ya da p sadə deyil. Onda p ədədinin ən kiçik böləni $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ ədədlərinin hər birindən fərqli olan sadə ədəd olmalıdır. Teorem isbat edildi.

Tutaq ki, p sadə ədəddir və $p|ab$. Onda ya $p|a$ ya da $p|b$.

p və n verilmiş ədədlərdir.

$$mn \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$$

olarsa, m ədədinə n ədədinin p **moduluna nəzərən tərsi** deyilir. Aydındır ki, 1 ədədi istənilən p moduluna nəzərən özünün, $p-1$ ədədi isə p moduluna nəzərən özünün tərsidir.

Vilson teoremi. p ədədinin sadə ədəd olması üçün zəruri və kafi şərt $(p-1)!+1$ ədədinin p-yə tam bölünməsindən ibarətdir. Yəni,

$$p \text{ sadə ədəd} \Leftrightarrow p|(p-1)!+1$$

Zərurilik. Fərz edək, $a = (p-1)!+1$ ədədi p-yə tam bölünür. İsbat edək p sadə ədəddir. Aydındır ki,

$$a \equiv 1 (\mathrm{mod}\, i), i = 1,2,\ldots, p-1.$$

Şərtə görə a ədədi p-yə bölünür. Deməli, p ədədi a ədədinin ən kiçik bölənidir. Yuxarıdakı teoremə əsasən p sadə olmalıdır.

Kafiliyin isbatı. İsbat edək ki, p sadə ədəddirsə, $p|(p-1)!+1$. Aşağıda 6.21-6.22 tapşırıqlarından istifadə edilir.

$p = 2$ halında hökm birbaşa yoxlanır. Fərz edək $p > 2$. Onda p tək olmalıdır.

$$(p-1)^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$$

olduğundan $2;\ldots;\ p-2$ ədədlərinin hər biri üçün p moduluna nəzərən tərs element bu ədədlər arasında olmalıdır (6.22 tapşırığına bax). Buna görə də $(p-2)! \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ münasibəti ödənilməlidir. Bu isə

$$(p-1)! \equiv p-1 (\mathrm{mod}\, p)$$

münasibətinin doğru olması deməkdir.

Hesabın əsas teoremi. Vahiddən fərqli istənilən natural ədədi yeganə qayda ilə sadə ədədlərin (vuruqların) hasili şəklində göstərmək olar.

Mütləq qiyməti sadə ədəd olan tam ədədi **sadə tam ədəd** adlandıracağıq.

Qeyd. Evklid teoremi aşağıdakı daha ümumi Dirixle teoreminin xüsusi halıdır.

Dirixle teoremi. a və b qarşılıqlı sadə natural ədədlərdirsə,

$$b, a+b, a+2b, a+3b, \ldots$$

ədədi silsiləsinin sadə ədəd olan sonsuz sayda həddi var.

BƏZİ XÜSUSİ HALLARDA ƏDƏDİN SADƏ VƏ MÜRƏKKƏB OLMASININ ARAŞDIRILMASI

İfadəni (ədədi və ya hərfi) vuruqlara ayırmaq mümkündürsə, onun aldığı qiymətlərin sadə və ya mürəkkəb olmasını söyləmək asan olur. Bunun əsasında aşağıdakı mülahizələr durur: n natural və ya tam ədədindən asılı olan müəyyən bir $P(n)$ ifadəsi verilmişdir. Müəyyən qayda ilə verilən ifadəni ümumi halda

$$P(n) = Q(n)H(n)$$

hasili şəklində göstərmək olur. Burada $P(n), Q(n), H(n)$ tam əmsallı çoxhədlilərdir. $P(n)$ şəklində göstərilən tam ədədin sadə olması üçün ya $Q(n) = \pm 1$, ya da $H(n) = \pm 1$ bərabərliklərindən biri ödənməlidir.

Misal 1. $n^3 + 1$ şəklində göstərilə bilən bütün tam sadə ədədləri tapmaq istəyirik.

$n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$ göstərilişindən aydındır ki, ya $n+1 = \pm 1$, ya da $n^2 - n + 1 = \pm 1$ bərabərlikləri ödənilməlidir. Bu halların hər birini ayrılıqda araşdırmaq lazımdır.

1-ci hal: $n+1 = -1 \Rightarrow n = -2 \Rightarrow n^3 + 1 = -7$ sadədir,

2-ci hal: $n+1 = 1 \Rightarrow n = 0 \Rightarrow n^3 + 1 = 1$ sadə deyil,

3-cü hal: $n^2 - n + 1 = 1 \Rightarrow a) n = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow n^3 + 1 = 1$ sadə deyil, $b) n = 1 \Rightarrow n^3 + 1 = 2$ sadədir.

4-cü hal: $n^2 - n + 1 = -1 \Rightarrow$ bu mümkün deyil.

Deməli, yalnız (-7) və 2 sadə ədədləri $n^3 + 1$ şəklində göstərilə bilərlər.

Bəzən çıxıqlar nəzəriyyəsinin elementlərini tətbiq etmək olur.

Misal 2. n və $n^3 + 1$ ədədlərinin eyni zamanda sadə olduğu bütün natural n ədədlərini tapın.

$n^3 + 1$ ifadəsi n-in tək qiymətlərində cüt qiymətlər alır. Cüt ədədlərdən yalnız 2 sadə ədəddir. Beləliklə, sualın araşdırılması aşağıdakı hallara gətirilir: ya $n=2$ olmalıdır, ya da $n^3 + 1$ ifadəsinin qiyməti 2-yə bərabər olmalıdır.

1-ci hal: $n = 2 \Rightarrow n^3 + 1 = 9$ mürəkkəb ədəddir. Buna görə də bu hal ola bilməz.

2-ci hal: $n^3 + 1 = 2 \Rightarrow n = 1$ olmalıdır. Bu hal da ola bilməz.

Beləliklə, n ədədinin heç bir natural qiymətində n və $n^3 + 1$ ədədləri eyni zamanda sadə ola bilməzlər.

FERMANIN KİÇİK TEOREMİ

p sadə ədəddirsə, istənilən natural n ədədi üçün

$$n^p = n (\mathrm{mod}\, p)$$

münasibəti ödənilir. Başqa sözlə n^p və n ədədlərinin p-yə bölünməsindən alınan qalıqlar bərabərdir.

Qeyd. İsbata başlamazdan əvvəl bir köməkçi faktı qeyd edək:

p sadə ədəddirsə, $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}, k \neq 0;$

ədədi p-yə tam bölünür.

Doğrudan da, p sadə olduğundan $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ ifadəsinin surətindəki p ədədinin məxrəcdə heç bir böləni ola bilməz. Digər tərəfdən məlumdur ki, $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ tam ədəddir. Buna görə də $C_p^k = \dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ ədədi p-yə tam bölünür.

Qeyd edək ki, p-nin sadə olmayan halında bu fakt doğru deyil. Məsələn $p=4$, $k=2$ halında $C_4^2 = 6$ ədədi 4-ə tam bölünmür.

Teoremin isbatını p sadə ədədinin hər bir qeyd edilmiş qiymətində n natural ədədinə nəzərən tam induksiya metodu ilə aparacağıq. $n=1$ olduqda aydındır ki, $1^p = 1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$. $n=2$ halını araşdıraq:

$2^p = (1+1)^p = 1 + C_p^1 + \ldots + C_p^{p-1} + 1 \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$

Beləliklə, induksiyanın bazası tam şəkildə əsaslandırılmışdır. Tutaq ki, verilən təklif $n = k$ ədədi üçün doğrudur. $n = k+1$ üçün isbat edək.

$$(k+1)^p = 1 + k \cdot C_p^1 + k^2 \cdot C_p^2 + \ldots +$$

$$+ k^{p-1} \cdot C_p^{p-1} + k^p \equiv 1 + k^p (\mathrm{mod}\, p).$$

Digər tərəfdən $n = k$ halı üçün təklif doğru olduğundan $k^p \equiv k (\mathrm{mod}\, p)$ münasibəti ödənilir. Onda teoremə əsasən

$$1 + k^p = 1 + k (\mathrm{mod}\, p) \text{ və ya}$$

$$(k+1)^p \equiv 1 + k (\mathrm{mod}\, p)$$

münasibətinin doğruluğu alınır. Teorem isbat edildi.

Məsələn, n-in istənilən natural qiymətində

$n^3 - n$ ədədi 3-ə, $n^5 - n$ ədədi 5-ə, $n^7 - n$ ədədi 7-yə və s.

tam bölünürlər.

Teoremi sadə ədədlərə bölmədə alınan qalıqların tapılması üçün də tətbiq etmək olar.

Misal. 1967^{1985} ədədinin 13-ə qalığını tapaq.

Həlli. $1985 = 152 \cdot 13 + 9$ və $1967 = 151 \cdot 13 + 4$ olduğundan

$$1967^{1985} \equiv 1967^{152 \cdot 13 + 9} (\mathrm{mod}\, 13) \equiv$$

$$\equiv 1967^{152+9} (\mathrm{mod}\, 13) \equiv$$

$$\equiv 1967^{12 \cdot 13 + 5} (\mathrm{mod}\, 13) \equiv$$

$$\equiv 1967^{12+5} (\mathrm{mod}\, 13) \equiv 1967^5 (\mathrm{mod}\, 13) \equiv$$

$$\equiv 4^5 (\mathrm{mod}\, 13) \equiv 10 (\mathrm{mod}\, 13)$$

2-ci, 3-cü və 4-cü müqayisələrdə Fermanın kiçik teoremi tətbiq edilmişdir.

ORTAQ BÖLƏN. QARŞILIQLI SADƏ ƏDƏDLƏR. EYLER FUNKSİYASI

İki ədədin hər ikisinin bölündüyü ədədə həmin ədədlərin **ortaq böləni** deyilir.

Artıq məlum olan aşağıdakı xassəni qeyd edək:

Xassə. $c|a, c|b$ olarsa, $\forall n, m \in N$ natural ədədləri üçün $c | na + mb$. Başqa sözlə, istənilən xətti kombinasiyada ortaq bölənlər saxlanılır.

İxtiyari ədədin bölənlər çoxluğu sonlu çoxluq olduğundan, istənilən sayda ədədin ortaq bölənləri çoxluğu da sonlu çoxluqdur. Digər tərəfdən, istənilən ədəd vahidə bölündüyü üçün iki ədədin ortaq bölənlər çoxluğu boş çoxluq deyildir. Ola bilər ki, iki ədədin ortaq bölənlər çoxluğu yalnız vahiddən ibarət olsun.

İki ədədin ortaq bölənlər çoxluğu yalnız vahiddən ibarətdirsə, bu ədədlərə **qarşılıqlı sadə ədədlər** deyilir. Yəni, iki ədədin hər ikisinin bölündüyü ədəd yalnız vahiddən ibarətdirsə, bu ədədlər qarşılıqlı sadə ədədlər sayılırlar. Xüsusi halda, vahid istənilən natural ədədlə qarşılıqlı sadə hesab edilir.

a və b ədədlərinin qarşılıqlı sadə olması üçün zəruri və kafi şərt onların ortaq sadə vuruğunun olmamasıdır.

Teoremin isbatı oxucuya həvalə olunur.

a və b qarşılılı sadə ədədlərdir. c ədədinin ab hasilinə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt həmin ədədin həm a, həm də b ədədinə bölünməsindən ibarətdir.

Zərurilik. Yaxşı məlumdur ki, hasil vuruqlardan hər birinə bölünür. Əgər c ədədi ab hasilinə bölünürsə, aydındır ki, c eyni zamanda həm a-ya, həm də b-yə bölünməlidir.

Kafilik. Fərz edək, a və b qarşılıqlı sadədirlər və c ədədi həm a-ya, həm də b-yə bölünür. İsbat edək, c ədədi ab hasilinə bölünür. c ədədi a-ya bölündüyü üçün onun bütün sadə vuruqlarını özündə saxlayır. Analoji olaraq c ədədi b-nin də bütün sadə vuruqlarını özündə saxlamalıdır. Digər tərəfdən a və b ədədlərinin ortaq sadə vuruqları olmadığından, c ədədinin sadə vuruqlar çoxluğu a və b ədədlərinin sadə vuruqları çoxluqlarının birləşməsini özündə saxlamalıdır. Beləliklə, c ədədinin sadə vuruqlara ayrılışında a və b ədədlərinin bütün sadə vuruqları iştirak etməlidir. Buna görə də c ədədi ab hasilinə bölünür.

Misal. Bu xassədən istifadə edərək məlum bölünmə əlamətlərindən digər ədədlər üçün bölünmə əlamətləri əldə etmək olar.

20-yə bölünmə əlamətini araşdıraq. 20=4·5 və 4 ilə 5 ədədləri qarşılıqlı sadə olduğundan ədədin 20-yə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt onun eyni zamanda həm 4-ə, həm də 5-ə bölünməsindən ibarətdir. Başqa sözlə, onun sonuncu iki rəqəminin əmələ gətirdiyi ikirəqəmli ədəd 4-ə bölünməlidir və sonuncu rəqəmi 0 olmalıdır. Yəni, yalnız son iki rəqəmi 00,20,40,60,80 olan ədədlər 20-yə bölünürlər.

Eyler funksiyası. n ədədinin 1, 2,..., $n-1$ ədədləri arasında qarşılıqlı sadə olduğu ədədlərin sayını göstərən funksiyanı Eyler funksiyası adlandırırlar və $\varphi(n)$ kimi işarə edirlər.

Qeyd. $\varphi(1) = 1$ və 1 vahiddən fərqli istənilən ədədlə qarşılıqlı sadə hesab edilir.

p sadə ədəddir, k isə natural ədəddir. $n = p^k$ olarsa, $\varphi(n) = p^k - p^{k-1}$.

İsbatı riyazi induksiya metodu ilə aparacağıq. $k = 1$ halında $n = p$ sadə ədəd olduğundan 1,2,..., $p-1$ ədədlərindən hər biri ilə qarşılıqlı sadədir. Başqa sözlə,

$$\varphi(n) = p - 1 = p^1 - p^0.$$

$k-1$ üçün verilən təklifin doğruluğunu qəbul edib, k üçün təklifin doğruluğunu isbat edək. Verilən ədədin $n = p^k$ ədədi ilə qarşılıqlı sadə olması, onun p^m ədədi ilə (m istənilən natural ədəddir) qarşılıqlı sadə olmasına ekvivalentdir (İsbat et!). $1,2,\ldots,p^k - 1$ ədədlərindən $n = p^k$ ədədi ilə qarşılıqlı sadə olan ədədləri iki kəsişməyən sinifə ayırmaq olar:

1) $1,2,\ldots,p^{k-1} - 1$ ədədləri arasında olanlar. Onlar həm də p^{k-1} ədədi ilə qarşılıqlı sadə olduğundan və induksiyanın fərziyyəsinə əsasən $\varphi(p^{k-1}) = p^{k-1} - p^{k-2}$ olmalıdır.

2) $p^{k-1}, p^{k-1}+1, \ldots, p^k - 1$ ədədləri arasında olanlar. Verilmiş sırada p^k ədədi ilə qarşılıqlı sadə olmayan istənilən α ədədinin p-yə nisbəti üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir

$$p^{k-2} \le \frac{\alpha}{p} \le p^{k-1} - 1.$$

Deməli, $p^{k-1}, p^{k-1}+1, \ldots, p^k - 1$ ədədləri arasında p^k ədədi ilə qarşılıqlı sadə olmayan ədədlərin sayı $p^{k-1} - p^{k-2}$ ədədinə bərabərdir. Onda, $p^{k-1}, p^{k-1}+1, \ldots, p^k - 1$ ədədləri arasında p^k ədədi ilə qarşılıqlı sadə olan ədədlərin sayı

$$p^k - p^{k-1} - (p^{k-1} - p^{k-2}) = p^k - 2p^{k-1} + p^{k-2}$$

ədədinə bərabərdir. Beləliklə,

$$\varphi(p^k) = p^{k-1} - p^{k-2} + p^k - 2p^{k-1} + p^{k-2} = p^k - p^{k-1}$$

bərabərliyini almış olarıq. Teorem isbat edildi.

Sadə vuruqlara ayrılışı $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$ olan n ədədi üçün

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\ldots\left(1 - \frac{1}{p_m}\right) =$$

$$= (p_1^{k_1} - p_1^{k_1 - 1})\ldots(p_m^{k_m} - p_m^{k_m - 1})$$

düsturu doğrudur.

Daxiletmə və xaricetmə prinsipini tətbiq edək. 1,2,..., $n-1$ sırasında n ilə qarşılıqlı sadə olmayan, sadə vuruqlardan heç olmasa birini, heç olmasa ikisini, üçünü və s. hamısını özündə saxlayan ədədlər çoxluğunun elementlərinin sayını təyin edək. Yazılışı sadələşdirmək məqsədilə $x_i = \frac{1}{p_i}$ işarələmələrindən istifadə edəcəyik.

$1,2,\ldots,n-1$ sırasında p_i vuruğunu özündə saxlayan ədədlərin sayı $\frac{n}{p_i} - 1$ ədədinə bərabərdir. Beləliklə, hansısa sadə vuruğun heç olmasa birinci qüvvətini özündə saxlayan və n ilə qarşılıqlı sadə olmayan ədədlərin sayı

$$\frac{n}{p_1}+\frac{n}{p_2}+...+\frac{n}{p_m}-m=n(x_1+...+x_m)-C_m^1$$

ədədinə bərabərdir.

p_i və p_j vuruqlarını özündə saxlayan ədədlərin sayı $\frac{n}{p_ip_i}-1$, bütün belə variantların sayı isə C_m^2 olmalıdır. Beləliklə, iki vuruğu özündə saxlayan və n ilə qarşılıqlı sadə olmayan ədədlərin sayı

$$n(x_1x_2+...+x_{m-1}x_m)-C_m^2$$

ədədinə bərabərdir və s. m sayda vuruğu özündə saxlayan ədədlərin sayı

$$\frac{n}{p_1p_2...p_m}-1$$

uyğun variantların sayı isə $C_m^m=1$ olacaq.

Beləliklə, $1,2,...,n-1$ sırasında n ilə qarşılıqlı sadə olmayan ədədlərin ümumi sayı

$$n((x_1+...+x_m)-(x_1x_2+...+x_{m-1}x_m)+...+$$
$$+(-1)^m x_1x_2...x_m)-(C_m^1-C_m^2+...+(-1)^{m-1}C_m^m)=$$
$$=n((x_1+...+x_m)-(x_1x_2+...+x_{m-1}x_m)+...+$$
$$+(-1)^m x_1x_2...x_m)-1$$

olmalıdır. Onda verilən sırada n ilə qarşılıqlı sadə ədədlərin sayı üçün aşağıdakını almış olarıq:

$$n-1-n((x_1+...+x_m)-(x_1x_2+...+x_{m-1}x_m)+...+$$
$$+(-1)^m x_1x_2...x_m)+1=n(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_m)$$

(Sonda çoxhədlilər üçün ümumiləşmiş Viyet teoremindən istifadə etdik. Oxucu bu faktı birbaşa riyazi induksiya metodu vasitəsilə əldə edə bilər.)

$\forall a,b$ qarşılıqlı sadə natural ədədləri üçün

$$\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$$

münasibəti ödənilir.

Bu teoremdən birbaşa nəticədir.

Aşağıdakı teorem artıq məlum olan Fermanın kiçik teoreminin ümumiləşməsidir.

Eyler teoremi. s və n qarşılıqlı sadə ədədlərdirsə,

$$s^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}n)$$

münasibəti ödənilir.

Xüsusi halın isbatı. Fərz edək ki, $n=p^k$. Onda $\varphi(n)=p^k-p^{k-1}$. Verilən xüsusi hal üçün teoremin doğru olduğunu isbat edək. Riyazi induksiya metodunu tətbiq edək (k-ya nəzərən). $k=1$ halında hökm Fermanın kiçik teoreminə ekvivalentdir. k-1 halı üçün (yəni $n=p^{k-1}$) hökmün doğru olduğunu qəbul edək. Başqa sözlə, qəbul edək ki,

$$s^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^{k-1})$$

və ya

$$\exists l\in N\Rightarrow s^{\varphi(h)}=lp^{k-1}+1 \quad (*)$$

münasibətləri ödənilir. $n=p^k$ şəklində ədədlər üçün hökmün doğruluğunu isbat edək.

$$\varphi(n)=p^k-p^{k-1}=p(p^{k-1}-p^{k-2})=p\varphi(h)$$

olduğunu və (*) münasibətini nəzərə alsaq

$$s^{\varphi(n)}=(lp^{k-1}+1)^p\equiv plp^{k-1}+1(\mathrm{mod}\,p^k)\equiv 1(\mathrm{mod}\,p^k)$$

lazım olan münasibətini alarıq.

Ümumi halın isbatı. $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$ şəklində olan ədəddirsə,

$$\varphi(n)=n(1-\frac{1}{p_1})...(1-\frac{1}{p_m})=$$
$$=(p_1^{k_1}-p_1^{k_1-1})...(p_m^{k_m}-p_m^{k_m-1})$$

olduğundan

$$s^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,p_j^{k_j})$$

və ya

$$s^{\varphi(n)-1}-1\equiv 0(\mathrm{mod}\,p_j^{k_j}),\ j=1,2,...,m$$

münasibətlərinin doğru olduğu alınır. $p_j, j=1,2,...,m$ müxtəlif sadə ədədlər olduğu üçün, onların istənilən qüvvətləri də öz aralarında qarşılıqlı sadədirlər. Buna görə də $s^{\varphi(n)}-1$ ədədi $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_m^{k_m}$ hasilinə də bölünür. Başqa sözlə,

$$s^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,n)$$

Teorem isbat edildi.

ƏN BÖYÜK ORTAQ BÖLƏN. ƏN KİÇİK ORTAQ BÖLÜNƏN.

Yuxarıda söyləndiyi kimi istənilən sayda ədədin ortaq bölənlər çoxluğu boş deyil və sonlu çoxluqdur. Buna görə də istənilən iki ədədin ortaq bölənləri çoxluğunun ən böyük elementi var.

Bir neçə ədədin ortaq bölənlərinin ən böyüyünə həmin ədədlərin ən böyük ortaq böləni deyilir və $\mathrm{Ə bob}(a,b,c,...)$ kimi işarə edilir. Xüsusi halda, a və b ədədləri üçün $\mathrm{Ə bob}(a,b)=1$ olması həmin ədədlərin qarşılıqlı sadə olmasına eynigüclüdür.

İstənilən iki a,b ədədi üçün elə üçüncü c ədədi tapmaq olar ki, o eyni zamanda həm a, həm də b-yə bölünsün. Məsələn, $c=a^kb^n$, (k və n natural ədədlərdir) şəklində istənilən ədəd eyni zamanda həm a-ya, həm də b-yə tam bölünür. c ədədi a və b ədədlərinin **ortaq bölünəni** adlanır. Yuxarıdakı misaldan aydın olur ki, istənilən iki ədədin ortaq bölünənləri çoxluğu sonsuz çoxluqdur. Peano aksiomuna əsasən ortaq bölünənlər çoxluğunun ən kiçik elementi olmalıdır.

Bir neçə ədədin ortaq bölünənləri çoxluğunun ən kiçik elementinə həmin ədədlərin ən kiçik ortaq bölünəni deyilir və $\mathrm{Ə kob}(a,b,c...)$ kimi işarə edilir.

a) c ədədinin a və b ədədlərinin ortaq böləni olması üçün zəruri və kafi şərt c-nin sadə vuruqları çoxluğunun a və b ədədlərinin sadə vuruqları çoxluqlarının kəsişməsinin altçoxluğu olmasından ibarətdir.

b) c ədədinin a və b ədədlərinin ortaq bölünəni olması üçün zəruri və kafi şərt c-nin sadə vuruqları çoxluğunun a və b ədədlərinin sadə vuruqları çoxluqlarının birləşməsini özündə saxlamasından ibarətdir.

Qeyd. Hökmdə ədədin sadə vuruqları çoxluğunda hər bir sadə vuruq verilən ədədin sadə vuruqlara ayrılışında iştirak etdiyi sayda iştirak edir.

Bildiyimiz kimi c ədədinin a ədədinin böləni olması üçün zəruri və kafi şərt c-nin sadə vuruqlar çoxluğunun a-nın sadə vuruqlar çoxluğunun altçoxluğu olmasından ibarətdir. Bu hökmdən *a)* və *b)* təkliflərinin hər ikisi nəticə kimi alınır.

Bu hökmdən isə öz növbəsində aşağıdakı hökm nəticə kimi alınır.

$\mathrm{Ə bob}(a,b)$ və $\mathrm{Ə kob}(a,b)$-un tapılması üçün alqoritm. Hər iki halda

1. ədədləri sadə vuruqlara ayırıb,
2. *a)* $\mathrm{Ə bob}(a,b)$-ni tapmaq üçün ayrılışlarda ortaq sadə vuruqları seçib, onların hasilini tapmaq lazımdır.

b) $\mathrm{Ə kob}(a,b)$-ni tapmaq üçün ayrılışlarda iştirak edən bütün vuruqların maksimal qüvvətlərinin hasillərini tapmaq lazımdır.

Ədədlərin ən kiçik ortaq bölünəni digər ortaq bölünənlərin bölənidir. Ən böyük ortaq bölən digər ortaq bölənlərin bölünənidir.

Ortaq bölünənin sadə vuruqları hər iki ədədin sadə vuruqlarının birləşməsini özündə saxlayır. Ən kiçik ortaq bölünənin sadə vuruqları çoxluğu istənilən ortaq bölünənin sadə vuruqlar çoxluğunun altçoxluğu olmalıdır. Buna görə də istənilən ortaq bölünən ən kiçik ortaq bölünənə bölünür. Anoloji olaraq ikinci hökm isbat edilir.

$$\mathrm{Ə bob}(ac,bc)=c\,\mathrm{Ə bob}(a,b) \text{ və}$$
$$\mathrm{Ə kob}(ac,bc)=c\,\mathrm{Ə kob}(a,b)$$
$$\mathrm{Ə bob}(a,b)\mathrm{Ə kob}(a,b)=ab.$$

Doğrudan da, əgər p sadə vuruğu a ədədinin sadə vuruqlara ayrılışında k dəfə, b ədədinin sadə vuruqlara ayrılışında m dəfə iştirak edirsə, $\mathrm{Ə bob}(a,b)$-də $\min(k,m)$

dəfə, Əkob(a,b)-də isə $\max(k,m)$ dəfə iştirak edir. ab hasilində p sadə vuruğunun iştirakı $k+m$ dəfə olmalıdır. Həmçinin Əbob(a,b)Əkob(a,b) hasilində də p-nin iştirakı

$$\min(k,m)+\max(k,m)=k+m$$

dəfə olmalıdır. İstənilən sadə vuruq üçün bu doğru olduğundan hökmdəki bərabərlik doğrudur.

Əbob$(a,b)=1$ olarsa, Əkob$(a,b)=ab$. Başqa sözlə, iki qarşılıqlı sadə ədədin ən kiçik ortaq bölünəni onların hasilinə bərabərdir.

Evklid alqoritmi. Bildiyimiz kimi xətti kombinasiyada ortaq bölən saxlanılır. Fərz edək ki $a\geq b$. $a=cb+r, r<b$ olarsa, $r=a-cb$ olduğundan r qalığı Əbob(a,b)-yə bölünür. $b=c_1r+r_1$, $r_1<r$ göstərilişindən alınan $b-c_1r=r_1$ bərabərliyindən aydındır ki, r_1 ədədi də Əbob(a,b)-yə bölünməlidir. Bu qayda ilə davam etsək hər dəfə alınan qalıq Əbob(a,b)-yə bölünməlidir. Lakin qalıqlar növbəti addımda əvvəlkindən daha kiçik olur. Deməli, onlar sonlu çoxluq əmələ gətirirlər. Buna görə də hansısa addımda qalıq sıfıra bərabər olmalıdır. Başqa sözlə, elə r_k var ki, $r_{k-1}=c_kr_k$ olmalıdır. Beləliklə, mühakimələr göstərir ki, Əbob$(a,b)|r_k$ və digər tərəfdən $r_k|a, r_k|b$ münasibətləri ödənir. Bu isə Əbob$(a,b)=r_k$ olduğunu göstərir.

Praktiki olaraq alqoritm ondan ibarətdir ki, böyük ədədi kiçik ədədə bölür, böləni alınmış qalığa, ilk qalığı alınmış yeni qalığa və s. bölürlər. Sonda qalıqsız bölmə baş verir. Bu sonuncu bölən məhz ən böyük ortaq böləndir.

48 və 18 ədədlərinin Əbob-unu tapmaq istəyirik. Öncə 48 ədədini 18-ə bölürük, qalıqda 12 alınır, 18 ədədini 12-yə bölürük, qalıqda 6 alınır, 12 ədədini 6-ya bölürük qalıqda 0 alınır. Deməli, Əbob (48,18)=6 olmalıdır. Sxematik olaraq bunu aşağıdakı şəkildə vermək olar.

* 48|18
|36|2
*18|12|
12| 1
*12|(6)
12|2
0

FİBONAÇÇİ ƏDƏDLƏRİ

Tutaq ki, bizə

$$x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots$$

ardıcıllığı verilmişdir və onlar arasında

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ n>2 \qquad (1)$$

rekurent münasibəti var. Aydındır ki, bu cür təyin olunmuş ardıcıllığın elementlərinin birqiymətli təyin olunması üçün onun birinci x_1, və ikinci x_2 elementləri də verilməlidir. x_1 və x_2-ni müxtəlif seçməklə müxtəlif ardıcıllıqlar almaq olar. Məsələn,

$x_1=1,\ x_2=3$, olduqda

1,3,4,7,11,18,29,....,

$x_1=2,\ x_2=5$ olduqda

2,5,7,12,19,31,,50,...

ardıcıllıqlarını alarıq.

$x_1=1,\ x_2=1$ olduqda isə

1,1,2,3,5,8,21,34,55,89,144,233,377.....

ardıcıllığı alınar.

$x_1=1,\ x_2=1$, olduqda

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2},\ \ n>2$$

bərabərliyini ödəyən ədədlərə Fibonaççi ədədləri deyilir, ardıcıllıq isə Fibonaççi ardıcıllığı adlanır.

Fibonaççi ədədlərinin çox maraqlı xassələri var.

1^0. $S_n=x_1+\ldots+x_n$ cəmini tapaq (birinci n-həddin cəmi)

$$x_1 = x_3 - x_2$$
$$x_2 = x_4 - x_3$$
$$\text{--------}$$
$$x_{n-1} = x_{n+1} - x_n$$

bərabərliklərini toplayaq:

$$S_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x_{n+2} - x_1 = x_{n+2} - 1. \qquad (2)$$

2^o. $x_1+x_3+\ldots+x_{2n-1}$ cəmini tapaq (birinci n tək nömrəli hədlərin cəmi)

$$x_1 = x_2$$
$$x_3 = x_4 - x_2$$
$$x_5 = x_6 - x_4$$
$$\text{--------}$$
$$x_{2n-1} = x_{2n} - x_{2n-2}$$

bərabərliklərini toplasaq

$$x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_{2n-1} = x_{2n} \qquad (3)$$

3^0. $x_2+x_4+\ldots x_{2n}$ cəmini tapaq (birinci n cüt nömrəli hədlərin cəmi)

$$S_{2n} = x_1 + x_2 + \ldots + x_{2n} =$$
$$= x_{2n+2} - 1,\ x_1 + x_3 + \ldots + x_{2n-1} = x_{2n}$$

olduğundan

$$x_2 + x_4 + \ldots + x_{2n} = x_{2n+2} - 1 - x_{2n} = x_{2n+1} - 1 \qquad (4)$$

Analoji olaraq

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots + x_{2n-1} - x_{2n} = -x_{2n+1} + 1 \qquad (5)$$

(5)-ə $x_{2n+1}-i$ əlavə etsək alarıq:

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + \ldots - x_{2n} + x_{2n+1} = x_{2n-1} + 1 = x_{2n} + 1 \qquad (6)$$

Beləliklə,

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_1 + \ldots + (-1)^n x_n = (-1)^{n+1} x_{n-1} + 1 \qquad (7)$$

İndi isə

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = x_n \cdot x_{n+1} \qquad (8)$$

olduğunu isbat edək. $\forall k$ üçün

$$x_k x_{k+1} - x_{k-1} x_k = x_k (x_{k+1} - x_{k-1}) = x_k \cdot x_k = x_k^2$$

Onda

$$x_1^2 = x_1 x_2$$
$$x_2^2 = x_2 x_3 - x_1 x_2$$
$$x_3^2 = x_3 x_4 - x_2 x_3$$
$$\text{----------}$$
$$x_n^2 = x_n x_{n+1} - x_{n-1} x_n$$

bərabərliklərini toplasaq alarıq:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 = x_n \cdot x_{n-1}.$$

Fibonaççi ədədlərinin daha bir xassəsini qeyd edək.

$$x_{n+m} = x_{n-1} x_m + x_n x_{m+1} \qquad (9)$$

(9)-u riyazi induksiya metodu ilə göstərək.

$m=1$ olduqda

$$x_{n+1} = x_{n-1} x_1 + x_n x_2 = x_{n-1} \cdot 1 + x_n \cdot 1 = x_{n-1} + x_n$$

doğrudur.

$m=2$ olduqda da bərabərlik doğrudur:

$$x_{n+2} = x_{n-1} x_2 + x_n x_3 = x_{n-1} + 2x_n =$$
$$= (x_{n-1} + x_n) + x_n = x_{n+1} + x_n.$$

Tutaq ki, bərabərlik $m=k, m=k+1$ üçün doğrudur və $m=k+2$ üçün bərabərliyi isbat edək:

$$x_{n+k} = x_{n-1} x_k + x_n x_{k+1},$$
$$x_{n+k+1} = x_{n-1} \cdot x_{k+1} + x_n \cdot x_{k-2}.$$

Bu bərabərlikləri toplasaq

$$x_{n+k+2} = x_{n+k} + x_{n+k+1} = x_{n-1}\ x_{k+2} + x_n x_{k+3}$$

Deməli (9) düsturu doğrudur.

(9) düsturunda xüsusi halda $n=m$ yazsaq alarıq:

$$x_{2n} = x_{n-1} x_n + x_n x_{n+1},\ \ x_{2n} = x_n (x_{n-1} + x_{n+1})$$

Buradan görürük ki, x_{2n} həddi x_n-ə bölünür. Digər tərəfdən

$$x_{2n} = x_n (x_{n-1} + x_{n-1}) = (x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1} + x_{n-1}) = x_{n+1}^2 - x_n^2.$$

Analoji olaraq $n=2m$ götürsək alarıq:

$$x_{3n} = x_{n+1}^3 + x_n^3 + x_{n-1}^3.$$

İndi isə daha bir xassə isbat edək:

$$x_n^2 = x_{n-1} x_{n+1} + (-1)^{n+1}. \qquad (10)$$

$n=2$ olduqda $x_2^2 = x_1 \cdot x_3 - 1$ olduğu aydındır. Tutaq ki, müəyyən κ üçün $x_k^2 = x_{k-1} x_{k+1} + (-1)^{k+1}$.

Bunun hər tərəfinə $x_k x_{k+1}$ əlavə etsək

$$x_k^2 + x_k x_{k+1} = x_{k-1} x_{k+1} + x_k x_{k+1} + (-1)^{k+1},$$
$$x_k (x_k + x_{k+1}) = x_{k+1} (x_{k-1} + x_k) + (-1)^{k+1}.$$

Buradan alırıq ki,

$$x_k x_{k+2} = x_{k+1}^2 + (-1)^{k+1} \text{ və ya}$$
$$x_{k+1}^2 = x_k x_{k+2} + (-1)^{k+2}.$$

Biz Fibonaççi ədədlərini rekurent düsturla vermişdik. İndi isə onların tapılmasının başqa bir üsulunu da göstərək.

Aydındır ki,

$$x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \qquad (11)$$

bərabərliyin ödəyən müəyyən ardıcıllıqlar ola bilər. Bunlardan biri də Fibonaççi ardıcıllığıdır.

Əgər $\{\varphi_n\}, \{\psi_n\}$ (11) ardıcıllığını ödəyirlərsə, onda *a)* $\{c\varphi_n\}$ ($c=const$); *b)* $\{\varphi_n + \psi_n\}$ də (11) bərabərliyini ödəyirlər.

Doğrudan da $\varphi_n = \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}$ bərabərliyini c-yə vursaq:

$$c\varphi_n = c(\varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}) = c\varphi_{n-2} + c\varphi_{n-1};$$

$\varphi_n = \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1}$, $\psi_n = \psi_{n-2} + \psi_{n-1}$ olduğundan

$$\varphi_n + \psi_n = \varphi_{n-2} + \varphi_{n-1} + \psi_{n-2} + \psi_{n-1} =$$
$$= (\varphi_{n-2} + \psi_{n-2}) + (\varphi_{n-1} + \psi_{n-1}).$$

Tutaq ki, bizim iki $\{\upsilon_n'\}$, $\{\upsilon_n''\}$ ardıcıllığınız var ki, onlar (11) münasibətlərini ödəyirlər, $\frac{\upsilon_n'}{\upsilon_n''} \neq c$. onda istənilən $V = \{\upsilon_1, ...\upsilon_n ...\}$ ardıcıllığının elementləri (11)-i ödəyirsə, $V = c_1V_1 + c_2V_2$, $(c_1, c_2 = const)$ şəklindədir. Burada $V_1 = \{\upsilon_n'\}$, $V_2 = \{\upsilon_n''\}$.

$\frac{\upsilon_n'}{\upsilon_n''} \neq c$ isə onda $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1''} \neq \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2''}$. Doğrudan da, əgər $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_2''} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2''}$ onda $\frac{\upsilon_1' + \upsilon_2'}{\upsilon_1'' + \upsilon_2''} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2''}$. Buradan $\frac{\upsilon_3'}{\upsilon_3''} = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2''}$.

Bu prosesi davam etdirsək alarıq ki, $\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1''} = \frac{\upsilon_n'}{\upsilon_n''}$, $\forall n \in N$. Bu isə $\frac{\upsilon_n'}{\upsilon_n''} \neq c$ şərtinə ziddir.

İndi göstərək ki, $V = c_1V_1 + c_2V_2$, yəni elə c_1 və c_2 tapaq ki,

$$c_1\upsilon_1' + c_2\upsilon_1'' = \upsilon_1,\ c_1\upsilon_2' + c_2\upsilon_2'' = \upsilon_2.$$

Onda aydındır ki:

$$V = c_1V' + c_2V''$$

olar. Biz c_1 və c_2-ni belə təyin edə bilərik.

$$c_1 = \frac{\upsilon_1\upsilon_2'' - \upsilon_2\upsilon_1''}{\upsilon_1'\upsilon_2'' - \upsilon_1''\upsilon_2'},\quad c_2 = \frac{\upsilon_1'\upsilon_2 - \upsilon_2'\upsilon_1}{\upsilon_1'\upsilon_2'' - \upsilon_2''\upsilon_2'}.$$

($\frac{\upsilon_1'}{\upsilon_1''} \neq \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_2''}$ olduğundan belə c_1 və c_2-lər var.)

Beləliklə biz ümumi şəkildə məsələni həll etmək üçün iki xüsusi həlləri, mütənasib olmayan belə ardıcıllıqlar tapmalıyıq. Biz onları həndəsi silsilə əmələ gətirən ardıcıllıqlar içərisində axtaraq. $1, q, q^2 ..... q^n ....$ ardıcıllığına baxaq. Onun (11)-in həlli olması üçün $q^{n-2} + q^{n-1} = q^n$.

Buradan: $1 + q = q^2$ və ya $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ beləliklə, $V_1 = \{q_1^n\}, V_2 = \{q_2^n\}$ (11)-in xüsusi həlləridir.

Aydındır ki, $1 + q_1 = q_1^2, 1 + q_2 = q_2^2$ və $q_1q_2 = -1$. Beləliklə, $c_1 + c_2$, $c_1q_1 + c_2q_2$, $c_1q_1^2 + c_2q_2^2 ....$ kimi ardıcıllıqların da həddləri (11)-i ödəyəcək. Xüsusi halda c_1və c_2-ni elə seçək ki, biz Fibonaççi ədədlərini alaq.

Bunun üçün

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = x_1 \\ c_1q_1 + c_2q_2 = x_2 \end{cases}$$

və ya

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1q_1 + c_2q_2 = 1 \end{cases}$$

Burada nəzərə alsaq ki,

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},\ c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$$

alarıq. Onda

$$x_n = c_1q_1^{n-1} + c_1q_2^{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} -$$

$$-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Bu dustura **Bine düsturu deyilir.**

Biz gördük ki, $q_1^2 = q_1 + 1$, onda $\left(q = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$,

$$q_1^3 = q_1q_1^2 = q_1(q_1 + 1) = q_1^2 + q_1 = q_1 + 1 + q_1 = 2q_1 + 1,$$
$$q_1^4 = q_1q_1^3 = q_1(2q + 1) = 2q_1^2 + q_1 = 2q_1 + 2 + q_1 = 3q_1 + 2.$$

Beləliklə, $q_1^k = x_kq_1 + x_{k-1}$ olduğunu isbat edək. Tutaq ki, $n=\kappa$ və $n=\kappa+1$ üçün bərabərlik doğrudur.

$$q_1^{k+1} = x_{k+1}q_1 + x_k.$$

Aydındır ki,

$$q_1^k + q_1^{k-1} = (x_k + x_{k+1})q_1 + (x_{k-1} + x_k)$$

və ya $q_1^{k+2} = x_{k+2}q_1 + x_{k+1}$. Deməli, bərabərlik bütün κ üçün doğrudur.

Analoji olaraq alırıq ki,

$$q_2^n = x_nq_2 + x_{n-1}.$$

x_n - Fibonaççi ədədi $a_n = \frac{q_1^n}{\sqrt{5}}$-ə ən yaxın tam ədəddir.

Aydındır ki,

$$|x_n - a_n| = \left|\frac{q_1^n - q_2^n}{\sqrt{5}} - \frac{q_1^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|q_2|^n}{\sqrt{5}}$$

Lakin, $|q_2| < 1$, onda $|q_2|^n < 1$ və $\sqrt{5} > 2$ olduğundan $\frac{|q_2|^n}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$. Teorem isbat olundu.

Aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur:

$$\frac{q_1^{n-\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}} \leq x_n \frac{q_1^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}.$$

Bine düsturuna görə $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^n - q_2^n)$ və $q_1q_2 = -1$ olduğundan, kifayətdir göstərək ki, $q_1^{n-\frac{1}{n}} \leq q_1^n - \frac{1}{q^n}$ və ya $q_1^{2n-\frac{1}{n}} \leq q_1^{2^n} - 1$. Buradan isə

$$q_1^{2n^2-1} \leq (q_1^{2n} - 1)^n \qquad (13)$$

n=1 olduqda

$$q_1 \leq q_1^2 - 1 \qquad (q_1 = q_1^2 - 1)$$

Tutaq ki, $n = 2$. Onda $q_1^7 \leq (q_1^4 - 1)^2$ olduğunu göstərək. Bu bərabərsizliyi biz q_1-in dərəcəsini artıqmaqla da edə bilərik. Məlimdur ki, $q_1^4 = 3q_1 + 2$

$$(q_1^4 - 1)^2 = (3q_1 + 1)^2 = 9q_1^2 + 6q_1 + 1 = 15q_1 + 10$$

Onda biz göstərməliyik ki,

$$q_1^7 = 13q_1 + 8 \leq 15q_1 + 10$$

Bu isə doğru bərabərsizlikdir.

Tutaq ki, $n > 2$ olduqda bərabərsizliyin doğruluğunu qəbul etsək $n+1$ üçün $q_1^{2(n+1)^2-1} \leq (q_1^{2n+2} - 1)^{n+1}$ olduğunu göstərməliyik. Bunun üçün göstərək ki, (13) bərabərsizliyində n-i $n+1$-lə əvəz etsək, sol tərəf q_1^{4n+2} dəfə artar, sağ tərəf isə ondan daha sürətlə artır. Doğrudan da

$$\frac{(q_1^{2(n+1)} - 1)^{n+1}}{(q_1^{2n} - 1)^n} = (q_1^{2(n+1)} - 1)\left(\frac{q_1^{2(n+1)} - 1}{q_1^{2n} - 1}\right)^n.$$

$$\frac{q_1^{2(n+1)}}{q_1^{2n} - 1} - q_1^2 = \frac{q_1^{2n+2} - 1 - q_1^{2n+2} + q_1^2}{q_1^{2n} - 1} = \frac{q_1^2 - 1}{q_1^{2n} - 1} =$$

$$= \frac{q_1}{q_1^{2n} - 1} > \frac{q_1}{q_1^n} = \frac{1}{q_1^{2n-1}}$$

olduğundan

$$\left(\frac{q_1^{2(n+1)} - 1}{q_1^{2n} - 1}\right)^n > \left(q_1^2 + \frac{1}{q_1^{2n-1}}\right)^n = q_1^{2n} + n\frac{q_1^{2n-2}}{q_1^{2n-1}} + ... > q^{2n} + 1$$

Deməli,

$$\frac{(q_1^{2(n+1)} - 1)^{n+1}}{(q_1^{2n} - 1)^n} > (q_1^{2(n+1)} - 1)(q_1^{2n} + 1) = q_1^{4n+2} + q_1^{2n+2} - q_1^{2n} - 1 =$$

$$= q_1^{4n+2} + q_1^{2n}(q_1^2 - 1) - 1 = q_1^{4n+2} + q_1^{2n+1} - 1 > q_1^{4n+2}$$

Beləliklə, $\frac{q_1^{n-1/n}}{\sqrt{5}} \leq x_n$.

Analoji olaraq göstəririk ki, $x_n \leq \frac{q_1^{n+\frac{1}{n}}}{\sqrt{5}}$.

İndi isə əmsalları Fibonaççi ədədləri olan çoxhədlinin xassələrini öyrənək.

$S_n(x) = a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$. $(a_n = x_n)$ olsun. Burada $a_1, a_2, ...a_n$ Fibonaççi ədədləridir.

Aydındır ki, Bine düsturuna əsasən

$$S_n(x) = \frac{q_1 - q_2}{\sqrt{5}}x + \frac{q_1^2 - q_2^2}{\sqrt{5}}x^2 + ... + \frac{q_1^n - q_2^n}{\sqrt{5}}x^n =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1x + q_1^2x^2 + ... + q_1^nx^n) - \frac{1}{\sqrt{5}}(q_2^x + q_2^2x^2 + ... + q_2x^n)$$

Burada iki hal maraqlıdır: $q_1x \neq 1$və $q_2x \neq 1$, yəni, $x \neq \frac{1}{q_1}$ və $x \neq \frac{1}{q_2}$.

Lakin $x \neq \frac{1}{q_1} = -q_2$, $x \neq \frac{1}{q_2} = -q_1$. Bu hallarda

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{q_1^{n+1}x^{n+1}-q_1x}{qx-1}\right)-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{q_2^{n+1}x^{n+1}-q_2x}{q_2X-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{(q_1^{n+1}x^{n+1}-q_1x)(q_2x-1)-(q_1^{n+1}x^{n+1}-q_2x)(q_1x-1)}{(q_1x-1)(q_2x-1)}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{q_1^{n+1}q_2x^{n+2}-q_1^{n+1}x^{n+1}+q_1x}{q_1q_2x^2-(q_1+q_2)x+1}-\frac{q_1q_2^{n+1}x^{n+2}-q_2^{n+1}x^{n+1}+q_2x}{q_1q_2x^2-(q_1+q_2)x+1}\right).$$

Lakin $q_1q_2=-1$, $q_1+q_2=1$, $q_1-q_2=\sqrt{5}$ olduğunu nəzərə alsaq

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{x\sqrt{5}-\left(q_1^n-q_2^n\right)x^{n+2}-\left(q_1^{n+1}-q_2^{n+1}\right)x^{n+1}}{1-x-x^2}\right)=$$

$$\frac{x-a_nx^{n+2}-a_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2} \qquad (14)$$

Burada x=1 götürsək

$$S_n(1)=a_1+a_2+...+a_n=\frac{1-a_n-a_{n+1}}{-1}=a_{n+2}-1$$

Bu düsturu biz bilirik. x=−1 olduqda da məlum düsturu alırıq:

$$S_n(-1)=a_1-a_2+...+(-1)^{n-1}a_n=\frac{-1-a_n(-1)^{n+2}-a_{n+1}(-1)^{n+1}}{-1}=$$

$$=(-1)^{n+1}a_{n-1}+1$$

İndi isə $x=\frac{1}{q_1}=-q_2$ olan hala baxaq. Bu halda

$$S_n\left(\frac{1}{q_1}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(1+1+...+1)-(q_2^2-q_2^4+...+(-1)^{n-1}q_2^{2n})=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(n-\frac{q_2^2-(-1)^nq_2^{2n+2}}{1+q_2^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(n-\frac{q_2^2}{1+q_2^2}+(-1)^nq_2^{2n}\frac{q_2^2}{1+q_2^2}\right)$$

Lakin

$$1+q_2^2=2+q_2=2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\frac{5-\sqrt{5}}{2}$$ və

$$\frac{q_2^2}{1+q^2}=\frac{1+q_2}{2+q_2}=\frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{5-\sqrt{5}}{10}$$

olduğunu nəzərə alsaq alarıq ki,

$$S_n\left(\frac{1}{q_1}\right)=\frac{n}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}-1}{10}+(-1)^nq_2^{2n}\frac{\sqrt{5}-1}{10} \qquad (15)$$

Analoji olaraq tapırıq ki, $x=\frac{1}{q_2}$ olduqda

$$S_n\left(\frac{1}{q_2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(q_1^2-q_1^4+...+(-1)^{n-1}q_1^{2n}\right)-n\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left(\frac{q_2^2-(-1)^nq_2^{2n+2}}{1+q_2^2}-n\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left((-1)^{n+1}q_1^{2n}\frac{q_1^2}{1+q_1^2}+\frac{q_1^2}{q_1^2+}-n\right)=$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{1+\sqrt{5}}{10}q_1^{2n}+\frac{1+\sqrt{5}}{10}-\frac{n}{\sqrt{5}} \qquad (16)$$

İndi isə $n\to\infty$ olduqda $S_n(x)$-in limitini öyrənək.

$$S_n(x)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_1x+q_1^2x^2+...+q_1^nx^n\right)-$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(q_2x+q_2^2x^2+...+q_2^nx^n\right)$$

olduğundan və mötərizə içində həndəsi silsilənin cəmləri olduğundan $|q_1x|<1, |q_2x|<1$ olduqda cəmləri tapa bilərik.

Lakin, $|q_2|<q_1$ olduğundan $|q_1x|<1$ olanda $|q_2x|<1$ olar. Onda $|x|<\frac{1}{q_1}$ olduqda $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$-i tapmaq olar.

Lakin biz isbat etmişik ki, $a_n=x_n\le\frac{q_1^n}{\sqrt{5}}+1$. Ona görə də

$$\lim a_nx^{n+2}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q_1^n+1}{\sqrt{5}}\right)x^{n+2}=\frac{x^2}{\sqrt{5}}\lim_{n\to\infty}(q_1x)^n+\lim_{n\to\infty}x^{n+2},$$

$|q_1x|<1$ və olduğundan $|x|<\frac{1}{q_1}<1$. Onda $\lim a_{n+1}x^{n+1}=0$. Beləliklə,

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-a_nx^{n+2}-a_{n+1}x^{n+1}}{1-x-x^2}=$$

$$=\frac{1}{1-x-x^2}\left(x-\lim_{n\to\infty}a_nx^{n+2}-\lim_{n\to\infty}a_{n+1}+x^{n+1}\right)=\frac{x}{1-x-x^2}$$

alarıq.

Burada $x=\frac{1}{2}$ yazsaq $\left(\frac{1}{2}<\frac{1}{q_1}\right)$, onda alarıq ki,

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+...+\frac{a_n}{2^n}+...=\frac{1/2}{1-1/2-1/4}=2$$

Biz Fibonaççi ədədlərini ancaq $n\ge1$ olduqda təyin etmişdik. Lakin bu ədədləri $n<0$ olduqda təyin edək:

$$x_{n-2}=x_n-x_{n-1}$$

Burada $n=2,1,0,-1,...$ və s. qiymətlər verdikdə 0 və mənfi tam ədədlər üçün

$$x_0=0, x_{-1}=1, x_{-2}=-1, x_{-3}=2,...$$

və nəhayət $x_{-n}=(-1)^{n+1}x_n$ alarıq.

FİBONAÇÇİ ƏDƏDLƏRİNİN BÖLÜNMƏ XASSƏLƏRİ

İndi Fibonaççi ədədlərinin müəyyən bölünmə xassələrinə nəzər yetirək. Aşağıdakı teorem doğrudur:

Əgər n ədədi m-ə bölünürsə, onda x_n ədədi x_m ədədinə bölünür.

Tutaq ki $n=m\cdot k, k\in Z$. Tutaq ki, $k=1$. Onda $n=m$ $x_n=x_m$ və x_n ədədi x_m-ə bölünür. Tutaq ki, x_{mk} ədədi x_m-ə bölünür. Göstərək ki, $x_{m(k+1)}$ də x_m-ə bölünür.

$$x_{m(k+1)}=x_{mk+m}=x_{mk-1}\cdot x_m+x_{mk}\cdot x_{m+1}$$

$x_{mk}\cdot x_{m+1}$, şərtə görə, x_m-ə bölünür. $x_{mk-1}\cdot x_m$-də x_m-ə bölünür. Deməli, $x_{m(k+1)}$ ədədi x_m-ə bölünür.

Beləliklə, hər hansı m ədədi üçün heç olmasa bir x_n varsa ki, x_n ədədi m-ə bölünür, onda m-ə bölünən belə ədədlər sonsuz saydadır. Çünki bu halda $x_{2n}, x_{3n}, x_{4n}...$ ədədlərinin hamısı x_n-ə deməli, m-ə də bölünəcək. Çünki $2n, 3n, 4n,...$ ədədləri n-ə bölünür.

İndi isə belə bir teorem isbat edək.

m natural ədədinin istənilən quymətlərində Fibonaççi ədədlərindən içərisindən ilk m^2-1 dənəsindən heç olmasa biri m-ə bölünür.

Tutaq ki, $\bar{k}$ ədədi k ədədinin m-ə bölünməsindən alınan qalıqdır. $x_1, x_2, ..., x_n...$ Fibonaççi ədədlərinin m-ə bölünməsindən alınan qalıqlardan belə cütlər düzəldək:

$$<\bar{x}_1,\bar{x}_2>,<\bar{x}_2,\bar{x}_3>,...,<\bar{x}_n,\bar{x}_{n+1}>,... \qquad (17)$$

Hesab edəcəyik ki, $<a_1,b_1>=<a_2,b_2>$ yalnız və yalnız $a_1=a_2, b_1=b_2$. Onda, müxtəlif cütlər (m-ə bölündükdə qalıqla alınan ədədlərə görə) m^2 sayda olacaq. Ona görə (17) ardıcıllığına m^2+1 hədd götürsək onda onlardan ən azı iki bərabəri olacaq. Tutaq ki. $<\bar{x}_k\bar{x}_{k+1}>$ ilk cütlükdür ki, (17) ardıcıllığında təkrar olunur. Göstərək ki, bu <1,1> cütüdür. Doğrudan da birinci cüt $<\bar{x}_k\bar{x}_{k+1}>(k>1)$ olsaydı, göstərək ki, (17)-də elə $<\bar{x}_\ell,\bar{x}_{\ell+1}>$ cütü tapmaq olar ki, $(\ell>k)$ $<\bar{x}_\ell\bar{x}_{\ell+1}>=<\bar{x}_k,\bar{x}_{k+1}>$.

$$x_{\ell-1}=x_{\ell+1}-x_\ell \text{ və } x_{k-1}=x_{k+1}-x_k$$

$$\bar{x}_{\ell+1}=\bar{x}_{k+1} \text{ və } \bar{x}_\ell=\bar{x}_k$$

olduğundan $x_{\ell-1}$ və x_{k-1}-in m-ə bölünməsindən alınan qalıqlar bərabər olar. Yəni $\bar{x}_{\ell-1}=\bar{x}_{k-1}$. Onda $<\bar{x}_{k-1},\bar{x}_k>=<\bar{x}_{\ell-1},\bar{x}_\ell>$ və $<\bar{x}_{k-1},\bar{x}_k>$cütü (17)-də $<\bar{x}_k,\bar{x}_{k+1}>$ cütündən əvvəl gələrdi. Buna görə də $<\bar{x}_k,\bar{x}_{k+1}>$ burada ilk təkrarlanan cütlük olmazdı. Bu isə şərtimizə ziddir. Deməli $k>1$ ola bilməz. Onda κ=1.

Deməli <1,1> (17)-də təkrarlanan ilk cütlükdür. Tutaq ki, o hər hansı t-də təkrarlanır ($1<t<m^2+1$). Deməli:

$$<\bar{x}_t,\bar{x}_{t+1}>=<1,1>$$

Beləliklə x_t və x_{t+1}-in hər birini m-ə böldükdə qalıqda 1 alınır.

Deməli $x_{t+1}-x_t$ ədədi m-ə bölünür. Lakin $x_{t+1}-x_t=x_{t-1}$ olduğundan x_{t-1} həddi m-ə bölünür. $t<m^2+1$ olduğundan teorem isbat olundu.

Beləliklə $<\bar{1},\bar{1}>$ cütü ilk təkrarlanan cütlük olduğundan alırıq ki, (17) sırasında $\bar{x}_t$-dən başlayaraq qalıqlar ardıcıllığı da

təkrarlanacaq. Beləliklə, qalıqlar ardıcıllığı periodik olacaq. Məsələn, $m=4$ olduqda qalıqlar 1,1,2,3,1,0,1,1,2,3,1,0,... olar.

Burada period 6-ya bərabərdir. Əgər n ədədi $6k+1,6k+2$, və ya $6k+5$ şəklində olduqda x_n-i 4-ə bölündükdə qalıqda 1, $n=6k+3$ şəklindədirsə qalıqda 2, $6k+4$ şəklindədirsə qalıqda 3 alınır. Əgər ədəd 6k şəklindədirsə qalıq 0 olur, deməli, 0,4-ə tam bölünür.

Fibonaççi ədədlərinin sadə və ya mürəkkəb ədəd olması da maraqlıdır. O mürəkkəbdirsə bölənləri necə ədədlərdir?

$n-$ mürəkkəb ədəddir və $n\neq 4$. Onda x_n-mürəkkəbdir.

Tutaq ki, $n=n_1\cdot n_2$, $1<n_1<n$, $1<n_2<n$, ya $n_1>2$, ya da $n_2>2$. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, $n_1>2$, buradan alınır ki, n ədədi n_1-ə bölündüyündən x_n-də $x_{n_1}-$ə bölünür. $1<x_{n_1}<x_n$ olduğundan alırıq ki, x_n-mürəkkəb ədəddir.

Fibonaççi ədədləri ardıcıllığında iki qonşu ədəd qarşılıqlı sadədir.

Yəni x_n və x_{n+1} iki qonşu ədədlərdirsə onların ümumi böləni $d>1$ yoxdur. Əksini fərz edək. Tutaq ki, $x_n=d\cdot n_1$, $x_{n+1}=d\cdot n_2$, $d>1$. Onda $x_{n-1}=x_{n+1}-x_n$ ədədi d-yə bölünür.

Buradan alırıq ki, x_n, x_{n-1} hər ikisi d-yə bölündüyündən x_{n-2}-də d-yə bölünür. Beləliklə bu prosesi davam etdirsək alarıq ki, $x_2=1-$də d-yə bölünür, bu isə $d>1$ şərtinə ziddir.

Fibonaççi ardıcıllığında x_m və x_n-in ən böyük ortaq böləni m və n-in ən böyük ortaq bölənino uyğun həddir:

$\partial BOB(x_n,x_m)=x\partial BOB_{(n,m)}$.

Tutaq ki, $m>n$. Evklid alqoritminə görə

$$m_1=nq_0+r_1 \quad , \quad 0\le r_1<n$$
$$n=r_1q_1+r_2 \quad , \quad 0\le r_2<r_1$$
$$n_1=z_2q_2+r_3 \quad , \quad 0\le r_3<r_2$$
$$r_{t-2}=r_{t-1}q_{t-1}+r_t \quad , \quad 0\le r_t<r_{t-1}$$
$$r_{t-1}=r_tq_t.$$

Deməli $\partial BOB(m,n)=r_t$. Beləliklə, $m=nq_0+r_1$ olduğundan $\partial BOB(x_m,x_n)=\partial BOB(x_{nq_0+r_1},x_n)$,

$\partial BOB(x_m,x_n)=\partial BOB(x_{nq_{0-1}x_{r_1}}+x_{nq_0}x_{r_1+1},x_n)$.

Onda $\partial BOB(x_m,x_n)=\partial BOB(x_{r_1},x_n)$.

Analoji olaraq alırıq ki,

$$\partial BOB(x_{r_1},x_n)=\partial BOB(x_{r_2},x_{r_1})$$
$$\partial BOB(x_{r_2},x_{r_1})=\partial BOB(x_{r_3},x_{r_2})$$
$$\partial BOB(x_{r_{t-1}},x_{r_{t-2}})=\partial BOB(x_{r_t},x_{r_{t-1}})$$

Deməli,

$\partial BOB(x_m,x_n)=\partial BOB(x_{r_t},x_{r_{t-1}})$

Lakin r_{t-1} ədədi r_t-yə bölündüyündən $x_{r_{t-1}}$ ədədi x_{r_t}-yə bölünür. Onda $\partial BOB(x_{r_t},x_{r_{t-1}})=x_{r_t}$. Lakin $r_t=\partial BOB(m,n)$ olduğundan

$\partial BOB(x_{r_t},x_{r_{t-1}})=x_{\partial BOB(m,n)}$

deməli,

$\partial BOB(x_m,x_n)=x_{\partial BOB(m;n)}$

Teorem isbat olundu. Bu teoremdən alırıq ki, əgər x_n ədədi x_m-ə bölünürsə onda m ədədi də n-ə bölünür. Doğrudan da x_n ədədi x_m-ə bölünərsə $\partial BOB(x_n,x_m)=x_m$. Onda $\partial BOB(x_n,x_m)=x_{\partial BOB(m;n)}$. Yəni $x_m=x_{\partial BOB(m;n)}$, yəni $m=\partial BOB(n;m)$. Bu isə o deməkdir ki, n ədədi m-ə bölünür.

Beləliklə, biz alırıq ki,

x_n-in x_m-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt n-in m-ə bölünməsidir.

Bu teoremdən istifadə edərək bir neçə bölünmə əlaməti tapaq:

1. Fibonaççi ədədinin cüt olması üçün zəruri və kafi şərt onun nömrəsinin 3-ə bölünməsidir:

$x_n=2k\Leftrightarrow n=3m$

Doğrudan da x_n-in $2=x_3$-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt n-in 3-ə bölünməsidir: $n=3m$.

2. Fibonaççi ədədinin 3-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt onun nömrəsinin 4-ə bölünməsidir:

$x_n=3k\Leftrightarrow n=4m$

Doğrudan da x_n=3, x_n-in x_4-ə, yəni 3-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt n=4m olmasıdır.

3. Fibonaççi ədədinin 4-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt onun nömrəsinin 6-ya bölünməsidir:

$x_n=4k\Leftrightarrow n=6m$

Doğrudan da $x_6=8$ ədədi 4-ə bölünür. x_n-in 8-ə bölünməsi ümün n=6κ olmalıdır.

4. Fibonaççi ədədinin 5-ə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt onun nömrəsinin 5-ə bölünməsidir.

Doğrudan da $x_5=5$. $x_n=5k\Leftrightarrow n=5m$.

5. Fibonaççi ədədinin 7-yə bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt onun nömrəsinin 8-ə bölünməsidir.
6. Fibonaççi ədədinin 16-ya bölünməsi üçün zəruri və kafi şərt onun nömrəsinin 12-yə bölünməsidir.

Fibonaççi ədədlərinin bəzi xassələrini göstərmək üçün müəyyən anlayışlar verək.

Əgər $a-b$ fərqi $m-$ə bölünürsə onda a və b ədədləri m moduluna görə tutuşdurulan (uzlaşan) adlanırlar və belə yazılır:

$a=b(modm)$.

Əgər a ədədi b-yə tam bölünürsə $a=0(modm)$ yazılır.

Biz qısa da olsa bəzi faktları verək.

$$a_1=b_1(modm),$$
$$a_2=b_2(modm),$$
$$a_n=b_n(modm)$$

isə

$a_1+a_2+...+a_m=b_1+b_2+...+b_n(modm)$

Doğrudan da

$a_1-b_1, a_2-b_2, ...a_n-b_n$

ədədlərinin hər birinə m-ə bölünürsə onda $(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+...+(a_n-b_n)=(a_1+a_2+...+a_4)-(b_1+b_2+...+b_n)$ ədədi də m-ə bölünür. Deməli, $a_1+a_2+...+a_n=b_1+b_2+...+b_n(modm)$.

Misal. Bilirik ki,

$$C_p^k=\frac{p(p-1)...(p-k+1)}{1\cdot 2...k}$$

Əgər p sadə $k\neq 0, k\neq p$ isə onda $C_p^k=o(mod\ p)$. Doğrudan da C_p^k-binomial əmsal olduğundan tam ədəddir, yəni surəti məxrəcə bölünəndir. Lakin 1,2,..., $k<p$ ona görə 1.2...κ=κ! ədədi p-yə bölünmür. Deməli p ilə κ! qarşılıqlı sadədir. Digər tərəfdən

$p(p-1)...(p-k+1)=p\cdot((p-1)...(p-k+1))$.

p ilə k! qaşılıqlı sadə olduğundan $(p-1)...(p-k+1)$ hasili $k!-a$ bölünməlidir. Tutaq ki, $(p-1)...(p-k+1)=t\cdot k!$ onda $C_p^k=tp$. Deməli, $C_p^k=0\ (mod\ p)$. Bunu belə də yazmaq olar

$(0\le k<p-1) \quad C_p^{k+1}=o(\mathrm{mod}\ p)$.

Onda $C_p^k+C_p^{k+1}=0(modp)$. Deməli, $C_{p+1}^{k+1}=0(\mathrm{mod}\ p)$.

Lemma. Tutaq ki,

$a_1=b_1(\mathrm{mod}m), a_2=b_2(\mathrm{mod}m),...,a_n=b_n(\mathrm{mod}n)$.

Onda $a_1a_2...a_n=b_1\cdot b_2...b_n(\mathrm{mod}\ m)$.

$n=1$ olduqda lemmanın hökmü aydındır. Tutaq ki, müəyyən n üçün bu bərabərlik ödənir, onu n+1 üçün də isbat edək. ($a_{n+1}=b_{n+1}(\mathrm{mod}\ m)$). Deməli,

$a_1a_2...a_n-b_1b_2...b_n$ və $a_{n+1}-b_{n+1}$

ədədlərinin hər biri m-ə bölünür. Onda

$a_1a_2...a_n=b_1b_2...b_n+m\cdot k, k\in Z$

$a_{n+1}=b_{n+1}+m\cdot s, s\in Z$

Buradan alırıq ki,

$a_1a_2...a_n\cdot a_{n+1}=b_1b_2...b_nb_{n+1}+m(b_1b_2...b_ns+b_{n+1}k+msk)$

Onda

$a_1a_2...a_{n+1}=b_1b_2...b_{n+1}(\mathrm{mod}\ m)$.

Lemma. $ac=bc(\mathrm{mod}m)$ və $\partial BOB(c,m)=1$, onda $a=b(\mathrm{mod}\ m)$.

Doğrudan da $ac=bc(\mathrm{mod}\ m)$ isə $ac-bc$ ədədi m-ə bölünür. Lakin $ac-bc=(a-b)c$ və $\partial BOB(c,m)=1$ olduğun-

dan $a-b$ fərqi m-ə bölünür. Deməli, $a=b(\mathrm{mod}\,m)$.

Çox vacib olan bir teoremi isbat edək.

Fermanın kiçik teoremi. p-sadə ədəd, a ədədi isə p-yə bölünmürsə

$$a^{p-1}=1(\mathrm{mod}\,p).$$

$a,2a,...,(p-1)a$ ədədlərinə baxaq. Bu ədədlərin istənilən ikisi p ilə tutuşdurulan deyil. Doğrudan da $ka=la(\mathrm{mod}\,p)$ olarsa, $ƏBOB(a,p)=1$ olduğundan $k=l(\mathrm{mod}\,p)$. $k-l$ ədədi p-yə bölünər, $0<k,l<p,k\neq l$ olduğundan bu ola bilməz.

$a,2a...,(p-1)a$ ədədlərinin heç biri də p-yə bölünmür. Beləliklə, bu ədədlərdən hər biri p-yə bölündükdə qalıqda müxtəlif ədədlər verir. Onları $r_1,r_2,...,r_{p-1}$ adlandıraq. Lakin bu ədədlərin sayı (p-1)-dir, ancaq p-yə bölünmədə sıfırdan fərqli qalıqların sayı da $(p-1)$-dir və onlar hamısı fərqlidir. Beləliklə, $r_1,r_2,...,r_{p-1}$ qalıqlarının hər birindən $1,2,...,p-1$ ədədləri bir dəfə iştirak edir. Onda

$$a=r_1(\mathrm{mod}p),\ 2a=r_2(\mathrm{mod}p),...,(p-1)a=r_{p-1}(\mathrm{mod}p)$$

Buradan

$$1.2...(p-1)a^{p-1}\equiv r_1r_2...r_{p-1}(\mathrm{mod}\,p)$$

lakin $\{r_1,r_2,...r_{p-1}\}$ çoxluğu $\{1,2,...,p-1\}$ ilə eyni olduğundan biz alırıq ki, $r_k=t,t\in\{1,2,...,p-1\}$, onda $1\cdot2...(p-1)a^p\equiv1\cdot2...(p-1)(\mathrm{mod}p)$.

Nəzərə alsaq ki,

$$ƏBOB(1\cdot2\cdot...\cdot(p-1),p)=1$$

alarıq ki, $a^p\equiv(p-1)(\mathrm{mod}\,p)$.

Teorem isbat olundu.

Bu teoremi tətbiq edək.Fibonaççi ədədlərinin müəyyən xassələrini öyrənək.

Fibonaççi ədədinin nömrəsi təkdirsə, onda onun bütün tək bölənləri $4t+1$ şəklindədir.

Biz Fibonaççi ədədləri üçün n tək olduqda (10)-a əsasən

$$x_n^2=x_{n-1}x_{n+1}+1 \qquad (18)$$

düsturunu göstərmişdik. Buradan

$$x_{n-1}x_{n+1}-x_n^2=x_n(x_{n-1}+x_n)-x_n^2=$$
$$=x_{n-1}^2+x_nx_{n-1}-x_n^2=-1 \qquad (19)$$

alarıq.

Tutaq ki, $p-$sadədir və x_n-in bölənidir, $p\neq2$. Onda alırıq ki, (19-a bax) $x_{n-1}^2+1=x_n^2-x_{n-1}x_n$ ədədi də x_n-ə bölünür, deməli, p-yə də bölünür. Buradan

$$x_{n-1}^2\equiv-1(\mathrm{mod}\,p).$$

Bunu $\frac{p-1}{2}$ (bu tam ədəddir) dərəcədən qüvvət yüksəltsək

$$\left(x_{n-1}^2\right)^{\frac{p-1}{2}}=x_{n-1}^{p-1}\equiv(-1)^{\frac{p-1}{2}}\ \mathrm{mod}(p).$$

$ƏBOB(x_{n-1},x_n)=1$, onda x_{n-1}ədədi p-yə bölünmür. Fermanın kiçik teoreminə görə

$$x_{n-1}^{p-1}\equiv1(\mathrm{mod}\,p)$$

Buradan alırıq ki,

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1(\mathrm{mod}\,p)$$

Yəni, $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1$.

Beləliklə $\frac{p-1}{2}$ cüt ədəddir. Buradan alırıq ki, $p=4t+1$. Teorem isbat olundu.

Fibonaççi ədədlərinin bölünmə əlamətlərinin əsas xassəsini vermək üçün aşağıdakı lemmanı verək.

Lemma. $p=5t\pm2$ şəklində sadə ədəddirsə, $5^{(p-1)/2}-1$ ədədi p-yə bölünür. $p=5t\pm2$ şəklində sadə ədəddirsə $5^{(p-1)/2}+1$ ədədi p-yə bölünür.

$p=5t\pm1$ sadə ədəddirsə, x_{p-1} həddi p-yə bölünür, $p=5t\pm2$ sadə ədəddirsə x_{p+1} həddi p-yə bölünür.

Tutaq ki, $p=5t\pm1$ sadə ədəddir. Onda Bine düsturuna görə

$$x_{p-1}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{p-1}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{p-1}\right)=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{2^{p-1}}\times$$

$$\times\left(1+C_{p-1}^1\sqrt5+C_{p-1}^2\left(\sqrt5\right)^2+...+C_{p-1}^{p-1}\left(\sqrt5\right)^{p-1}-1+C_{p-1}^1\cdot\sqrt5-\right.$$

$$\left.-C_{p-1}^2\left(\sqrt5\right)^2+...-C_{p-1}^{p-1}\left(\sqrt5\right)^{p-1}\right).$$

Buradan

$$x_{p-1}=\frac{1}{2^{p-2}}\left(C_{p-1}^1+C_{p-1}^3\cdot5+C_{p-1}^5\cdot5^2+...+C_{p-1}^{p-2}\cdot5^{\frac{p-3}{2}}\right)$$

Lakin biz göstərmişik ki, p sadə olduqda $0<k<p$ isə $C_p^k\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$. Buradan $C_{p-1}^{k-1}+C_{p-1}^k\equiv0(\mathrm{mod}\,p)$ və ya

$$C_{p-1}^{k-1}=-C_{p-1}^k(\mathrm{mod}\,p).$$

Deməli,

$$C_{p-1}^0\equiv-C_{p-1}^1\equiv C_{p-1}^2=-C_{p-1}^3\equiv...\equiv C_{p-1}^{p-1}(\mathrm{mod}\,p)$$

Lakin $C_{p-1}^0=1$ olduğundan alırıq ki, $C_{p-1}^1,C_{p-1}^3,...,C_{p-1}^{p-2}$ əmsalları -1 ilə p modulu görə tutuşdurulandır. Onda

$$2^{p-1}x_{p-1}\equiv-2(1+5+...+5\frac{p-3}{2})(\mathrm{mod}\,p)$$

və ya

$$x_{p-1}=-\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}\mathrm{mod}(p)$$

Bundan əvvəlki lemmaya əsasən $5^{\frac{p-1}{2}}-1$ ədədi p-yə bölünür. Lakin $ƏBOB(p,2)=1$ olduğundan

$$\frac{5^{\frac{p-1}{2}}-1}{2}$$

ədədi də p-yə bölünür. Beləliklə x_{p-1} həddi p-yə bölünür.

İndi isə $p=5t\pm2$ halına baxaq.

Analoji olaraq alırıq ki,

$$x_{p+1}=\frac{1}{2^p}(C_{p+1}^1+C_{p+1}^2 5+C_{p+1}^5 5+...+C_p^{p+1}5^{\frac{p-1}{2}})(\mathrm{mod}\,p)$$

Burada C_{p+1}^1,C_{p+1}^p-dən başqa hər bir həddi p-yə bölünür.

Lakin $C_{p+1}^1=C_p^{p+1}$ ədədlər p-yə böldükdə qalıqda 1 alınır. Ona görə də

$$x_{p+1}=\frac{1}{2}\left(1+5^{\frac{p-1}{2}}\right)(\mathrm{mod}\,p)$$

Lemmanı tətbiq etsək alarıq ki, x_{p+1} həddi p-yə bölünür.

Teorem isbat olundu.

İndi isə Fibonaççi ədədlərinin bölünməsini araşdıraq.

$x_{mn-1}-x_{n-1}^m$ həddi x_n^2-a bölünür.

$m=1$ olduqda

$$x_{mn-1}-x_{n-1}^m=x_{n-1}x_{n-1}=0$$

ədədi x_1^2-a bölünür və göstərək ki, $x_{mn-1}-x_{n-1}^m$ həddi x_n^2-a bölünürsə

$$x_{(m+1)n-1}-x_{n-1}^{m+1}=\left(x_{mn-1}x_{n-1}+x_{mn}x_n\right)-x_{n-1}^{m+1}$$

ədədi x_n^2-a bölünür. İnduksiyaya görə

$$x_{mn-1}=x_{n-1}^m(\mathrm{mod}\,x_n^2)$$

onda

$$x_{(m+1)n-1}-x_{n-1}^{m+1}\equiv x_n^mx_{n-1}+x_{mn}x_n-x_{n-1}^{m+1}(\mathrm{mod}\,x_n^2).$$

Lakin x_{mn} həddi x_m-ə bölündüyündən

$$x_{mn}x_n\equiv0(\mathrm{mod}\,x_n^2)$$

Onda

$$x_{(m+1)n-1}-x_{n-1}^{m+1}\equiv0(\mathrm{mod}\,x_n^2)$$

Teorem isbat olundu.

$x_{mn}-x_{n+1}^m+x_{n-1}^m$ ədədi x_n^3-a bölünür.

İsbatı induksiya metodu ilə aparaq.

$m=1$ olduqda

$$x_{mn}-x_{n+1}^m+x_{n-1}^m=x_n-x_{n+1}+x_{n-1}=0.$$

Tutaq ki, $x_{mn}-x_{n+1}^m+x_{n-1}^m$ ədədi x_n^3-a bölünür.

İsbat edək ki, $x_{(m+1)n}-x_{n+1}^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}$ ədədi də x_n^3 -a bölünür. Aydındır ki,

$$x_{(m+1)n}-x_{n+1}^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}=x_{mn-1}x_n+x_{mn}x_{n+1}-x_{n+1}^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}.$$

Lakin induksiyaya görə

$$x_{mn}\equiv x_{n+1}^m-x_{n-1}^m(\mathrm{mod}\,x_n^3).$$

Onda

$$x_{(m+1)n}-x_{n+1}^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}\equiv x_{mn-1}x_n+x_{n+1}(x_{n+1}^m-x_{n-1}^m)-$$
$$-x_{n+1}^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}(\mathrm{mod}\,x_n^3)$$

və ya

$$x_{(m+1)n}-x_{n+1}^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}\equiv x_{mn-1}x_n-$$
$$-x_{n-1}^m(x_{n+1}-x_{n-1})(\mathrm{mod}\,x_n^3).$$

Buradan

$$x_{(m+1)n}-x_{n+1}^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}\equiv x_n(x_{mn-1}-x_{n-1}^m)\ (\mathrm{mod}\,x_n^3)$$

Lakin əvvəlki teoremə əsasən $x_{mn-1}-x_{n-1}^m$ ədədi x_n^2-a bölünür. Onda $x_n(x_{mn-1}-x_{n+1}^m)$ ədədi də x_n^3 -a bölünür. Nəticədə

$$x_{(m+1)n}-x_n^{m+1}+x_{n-1}^{m+1}=0(\mathrm{mod}\,x_n^3).$$

Teorem isbat olundu.

İndi isə Fibonaççi ədədlərinin sadə bölənlərinin bir xassəsini isbat edək.

Tutaq ki, q ədədi x_n həddinin sadə bölənidir və $q \neq p, p-$ sadə ədəddir. Onda

1. $\frac{x_{np}}{x_n}$ ədədi q-yə bölünmür;
2. Əgər p sadə ədədi x_n-in tək bölənidirsə, onda $\frac{x_{np}}{x_n}$ ədədi p-yə bölünür, lakin p^2-a bölünmür;
3. Əgər x_n həddi 4-ə bölünürsə, onda $\frac{x_{2n}}{x_n}$ həddi 2-yə bölünür, ancaq 4-ə bölünmür;
4. Əgər x_n həddi 2-yə bölünürsə, lakin 4-ə bölünmürsə, onda $\frac{x_{2n}}{x_n}$ ədədi 4-ə bölünür, lakin 8-ə bölünmür.

1. Bundan əvvəl isbat etdiyimiz teoremdə $m = p$ götürsək, alarıq ki, $x_{np} - x_{n+1}^p + x_{n-1}^p$ ədədi x_n^3-a bölünür.

Lakin x_{np} həddi x_n-ə bölünür (np ədədi n-ə bölündüyü üçün). Digər tərəfdən

$$x_{n+1}^p - x_{n-1}^p = (x_{n+1} - x_{n-1})(x_{n+1}^{p-1} + x_{n+1}^{p-2}x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{p-1}) =$$
$$= x_n(x_{n+1}^{p-1} + x_{n+1}^{p-2} \cdot x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{p-1}).$$

Onda

$$\frac{x_{np}}{x_n} - (x_{n+1}^{p-1} + x_{n+1}^{p-2}x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{p-1}) \quad (21)$$

ədədi x_n^2-a bölünür.

Buradan alırıq ki, (21) fərqi x_n-ə bölünür. Yəni

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \equiv x_{n+1}^{p-1} + x_{n+1}^{p-2}x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{p-1} \pmod{x_n} . \quad (22)$$

Lakin $x_{n+1} \equiv x_{n-1} \pmod{x_n}$ olduğundan (22)-dən alırıq ki,

$$\frac{x_{np}}{x_n} = x_{n+1}^{p-1} + x_{n+1}^{p-1} + \ldots + x_{n+1}^{p-1} \pmod{x_n}$$

Bərabərliyin sağ tərəfində p hədd olduğundan

$$\frac{x_{np}}{x_n} \equiv px_{n+1}^{p-1} \pmod{x_n}$$

Beləliklə, $\frac{x_{np}}{x_n}$ və x_n hədlərinin hər hansı bir ortaq böləni p ədədinə bölünməlidir və tərsinə. Deməli,

$$\partial BOB\left(\frac{x_{np}}{x_n}, x_n\right) = \partial BOB(p, x_n)$$

Əgər q-sadədirsə və $q \neq p$, q ədədi x_n-in bölənidirsə onda $\partial BOB(p, x_n) = 1$, və ya $\partial BOB(p, x_n) = p$ olduğundan 1 və p q-yə bölünmür. Beləliklə, $\partial BOB\left(\frac{x_{np}}{x_n}, x_n\right)$ ya 1, ya da p olduğundan q-yə bölünmür. Lakin x_n həddi q-yə böləndüyündən alırıq ki, $\frac{x_{np}}{x_n}$ həddi q-yə bölünməz.

2. Əgər p ədədi x_n həddinin bölənidirsə, onda (21) fərqinin x_n^2-a bölünməsindən alınır ki,

$$\frac{x_{np}}{x_n} \equiv x_{n+1}^{p-1} + x_{n+1}^{p-2} \cdot x_{n-1} + \ldots + x_{n-1}^{p-1} \pmod{p^2}$$

x_{n+1} və $x_n - i$ p^2-a bölək:

$$x_{n+1} \equiv r_1 p + r' \pmod{p^2}, \quad x_{n+1} \equiv r_2 p + r'' \pmod{p^2}$$

Burada $0 \leq r_1, r_2, r', r'' < p$, çünki $x_{n+1} - x_{n-1} = x_n$ oduğundan o p-yə bölünür, onda r', r'' bərabər olmalıdır. Bu halda $r' = r'' = r$ olar. Lakin $r \neq 0$, çünki nə x_{n-1} nə də x_{n+1} p-yə bölünmür. Beləliklə,

$$\frac{x_{np}}{x_n} \equiv (r_1 p + r)^{p-1} + (r_1 p + r)^{p-2}(r_2 p + r) + \ldots +$$
$$+ (r_p + r)^{p-k} \cdot (r_2 p + r)^{k-1} + \ldots + (r_2 p + r)^{p-1} \pmod{p^2}$$

Sağ tərəfi sadələşdirək və p^2 bölünən hədləri ataq. κ-cı hədd $(r_1 p + r)^{p-k}(r_2 p + r)^{k-1}$-dan aşağıdakını alarıq:

$$C_{p-k}^1 r_1 p r^{p-k-1} r^{k-1} + r^{p-k} C_{k-1}^1 r_2 p r^{k-2} + r^{p-k} \cdot r^{k-1}$$

və ya

$$(p-k) p r_1 r^{p-2} + (k-1) p r_2 r^{p-2} + r^{p-1}.$$

Onda

$$\frac{x_{np}}{x_n} = \frac{p(p-1)}{2} p r_1 r^{p-2} + \frac{(p-1)(p-2)}{2} p r_2 r^{p-2} + \quad (23)$$
$$+ p r^{p-1} \pmod{p^2}.$$

Buradan $p \neq 2$ olduqda $\frac{p-1}{2}$-nin tam olduğunu nəzərə alsaq (23) bərabərliyində sağ tərəfdə duran ilk iki hədd $p^2 - a$ bölünər və nəticədə də $\frac{x_{np}}{x_n} \equiv p r^{p-1} \pmod{p^2}$ alarıq. Ferma teoreminə görə $r^{p-1} - 1$ ədədi p-yə bölünür. Onda $p r^{p-1} - p$ ədədi p^2-a bölünür.

Beləliklə alırıq ki, $\frac{x_{np}}{x_n} \equiv p \pmod{p^2}$.

Yəni $\frac{x_{np}}{x_n}$ ədədini p^2-a böldükdə qalıqda p ədədi alınır. Deməli, $\frac{x_{np}}{x_n}$ ədədi p-yə bölünür, amma p^2-a bölünmür.

3. $p=2$ olduqda isə $\frac{x_{2n}}{x_n} = 2(r_1 + r_2 + r) \pmod 4$.

x_n həddi 4-ə bölünərsə periodik olaraq qalıqların 1,1,2,3,1,0 olduğunu nəzərə alsaq, görərik ki, x_{n-1} və x_{n+1} 4-ə bölündükdə qalıqda 1 alınır. Bu halda $r_1 = r_2 = 0, r = 1$ olur və

$$\frac{x_{2n}}{x_n} \equiv 2 \bmod(4)$$

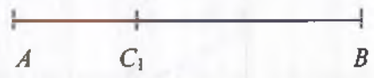
4. Tutaq ki, x_n həddi 4-ə bölünmür. Onda 1,1,2,3,1,0 qalıqlar sırası göstərir ki, $r_1 = 1, r_2 = 0, r = 1$. Onda $\frac{x_{2n}}{x_n} = 0 \pmod 4$.

Göstərək ki, $\frac{x_{2n}}{x_n}$ ədədi 8-ə bölünmür.

Doğrudan da $\frac{x_{2n}}{x_n}$ ədədi 8-ə bölünərsə onda x_{2n} həddi 16-ya bölünərdi. Onda $2n$ ədədi 12-yə bölünməlidir, yəni n ədədi 6-nın böləni olmalı idi. Onda x_n ədədi x_6-ya bölünməli idi. Buradan alırıq ki, x_n ədədi 8-ə bölünməlidir. Bu isə şərtə ziddir, çünki x_n 8-ə bölünərsə 4-də bölünür. Teorem isbat olundu.

FİBONAÇÇİ ƏDƏDLƏRİ HƏNDƏSƏDƏ

Fibonaççi ədədlərinə həndəsədə də rast gəlmək olur. Müstəvi üzərində AB parçası götürək və hesab edək ki, $|AB| = 1$, yəni AB-nin uzunluğu 1-dir. Bu parçanı elə iki hissəyə ayıraq ki, onun böyük hissəsi verilmiş parça ilə kiçik hissə arasında orta münasibətdə olsun (şəkil 1).



Şəkil 1.

Parçanın böyük hissəsini x ilə işarə etsək, onda kiçik hissə $(1-x)$ olar. Şərtə görə

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Buradan

$$x^2 + x - 1 = 0$$

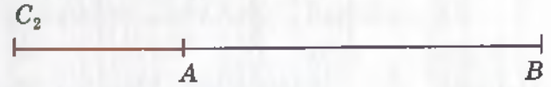
Buradan alırıq ki, $x>0$ olduqda,

$$x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Onda

$$\frac{1}{x} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(-1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = q_1$$

AB parçasının belə bölünməsinə onun qızlı bölünməsi və ya qızıl kəsilməsi deyilir.



Şəkil 2.

Əgər biz

$$x^2 + x - 1 = 0$$

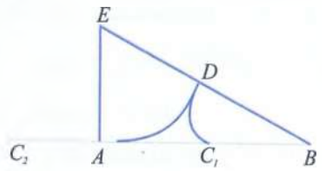
tənliyinin mənfi kökünü götürsək, yəni $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ götürsək onda parçanı bölən nöqtə C_2 parçadan kənarda olacaq (buna *xarici bölmə deyilir*).

$$\frac{C_2B}{AB} = \frac{AB}{C_2A} = q_1$$

alarıq (şəkil 2).

1⁰. Biz indi verilmiş parçanı hansı qayda ilə qızıl kəsiyə ayırmağı göstərək. Tutaq ki, $|AB|=1$ (şəkil 3) .

A nöqtəsindən AE perpendikulyarı qaldıraq və $|AE|=\frac{1}{2}$ ayıraq (Parçanı iki bərabər hissəyə bölmək mümkündür, ona görə də $|AE|=\frac{1}{2}$ olan parçanı qurmaq olar).



Şəkil 3.

Onda Pifaqor teoreminə görə

$$|EB|^2=\sqrt{|AB|^2+|AE|^2}=\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

İndi isə E-ni mərkəz qəbul edib EA radiuslu ($\frac{1}{2}$ radiuslu) çevrə çəksək və onun EB-ilə kəsişməsini D işarə etsək onda

$$|ED|=\frac{1}{2}$$

və

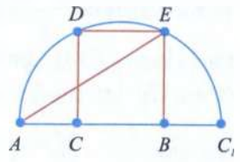
$$|BD|=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

alarıq.

Bundan sonra mərkəzi B nöqtəsində olan radiusu BD-yə bərabər çevrə çəksək və onun AB ilə kəsişməsini C_1 ilə işarə etsək onda AB-ni qızıl nisbətdə bölən C_1 nöqtəsini taparıq.

Biz C_2-ni tapmaq üçün isə, $AC_2=BC_1$ bərabərliyindən istifadə edərək tapa bilərik.

2⁰. Diametri AC_1 olan (şəkil 4) yarımdairənin daxilinə çəkilmş $CDEB$ kvadratın C nöqtəsi AB-ni qızıl nisbətdə bölür. Doğrudan da $\angle AEC_1=90°$ olduğundan



Şəkil 4.

$$|BE|^2=|AB|\cdot|BC_1|$$

Lakin $BC=BE$ olduğundan

$$|BC|^2=|AB|\cdot|BC_1|.$$

Onda

$$|BC|^2=|AB|\,|AB-BC|$$

Buradan

$$\frac{|AB|}{|BC|}=\frac{|BC|}{|AB-BC|}$$

3⁰. Düzgün 10 bucaqlının qurulmasına baxaq.

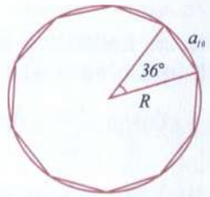
Bilirik ki,

$$a_{10}=2R\sin\frac{360^0}{2\cdot10}=2R\sin18^0$$

Deməli, sin180-ni hesablamaq lazımdır. Bilirik ki,

$$\sin36^0=2\sin18^0\cos18^0,$$

$$\cos36^0=\cos^218^0-\sin^218^0=1-2\sin^218^0.$$



Şəkil 5.

Lakin

$$\sin72^0=2\sin36^9\cdot\cos36^9=$$

$$=4\sin18^0\cdot\cos18^0(1-2\sin^218^0)$$

Onda

$$\cos18^0=4\sin18^0\cos18^0(1-2\sin^218).$$

$$1=\sin18^0(1-2\sin^218^2)$$

$\sin18^0=x$ qəbul etsək.

$$1=4x(1-2x^2)$$

və ya

$$8x^3-4x+1=0.$$

Buradan

$$8x^3-1-4x-2=0,$$

$$(2x-1)(4x^2+2x+1)-2(2x-1)=0,$$

$$(2x-1)(4x^2+2x-2)=0.$$

Onda

$$2x-1=0,$$

$$x_1=\frac{1}{2}$$

və

$$4x^2+2x-1=0$$

alarıq.

Axırıncı tənlikdən isə

$$x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\quad x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

alarıq.

$\sin18^0\neq\frac{1}{2}$, $\sin180>0$ olduğundan

$$\sin18^0=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\frac{1}{2q_1}.$$

Buradan cos360-ni də tapa bilərik

$$\cos36^0=1-2\sin^218^0=1-2\cdot\frac{1}{4q_1^2}=\frac{2q_1^2-1}{2q_1^2}=$$

$$=\frac{2+2q_1-1}{2q_1^2}=\frac{2q_1+1}{2q_1^2}=\frac{q_1^3}{2q_1}=\frac{q_1}{2}$$

Beləliklə

$$a_{10}=2R\frac{\sqrt{5}-1}{4}=R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Beləliklə a_{10} R radiusunun qızıl kəsiyindəki böyük hissədir:

Göründüyü kimi,

$$a_{10}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{R}{q_1}.$$

Bildiyimiz kimi q_1 ədədi isə Fibonaççi ədədlərində mühüm rol oynayır.

4⁰. İndi isə düzgün beşbucaqlını öyrənək. Onun dioqonalları beşbucaqlı ulduzabənzər fiqur əmələ gətirir (şəkil 6).

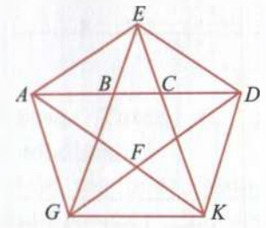
Burada

$$\angle AED=\angle EDK=\angle DKG=\angle KGA=\angle GAE=108^0,$$

$$\angle EAB=\angle EDC=36^0,$$

$$\angle ADF=108^0-72^0=36^0,$$

$$\angle AFD=180^0-2\cdot36^0=180-72^0=108^0.$$



Şəkil 6.

Onda üçbucaq AFS-dən sinuslar teoreminə görə

$$\frac{AD}{AF}=\frac{\sin108^0}{\sin36^0}=\frac{\sin72^0}{\sin36^0}=2\cos36^0=$$

$$=2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=q_1$$

Lakin $AF=AC$ olduğundan, $\frac{AD}{AF}=\frac{AD}{AC}=q_1$.

Deməli C nöqtəsi AD-ni qızıl kəsik nisbətində bölür. Digər tərəfdən qızıl kəsiyin xassəsinə əsasən

$$\frac{AC}{CD}=q_1.$$

$AB=CD$ olduğundan alırıq ki,

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BC}=q_1.$$

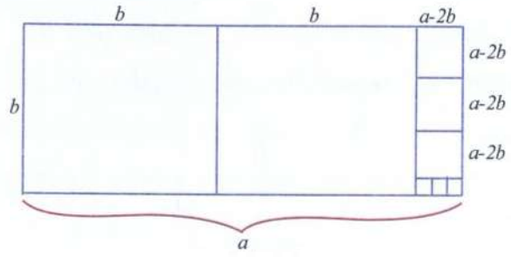
Beləliklə, BC, AB, AC, AD parçalarından hər biri özündən əvvəlkindən q_1 dəfə böyükdür. Yenə də ΔAED-dən alırıq ki,

$$\frac{AD}{AE}=\frac{\sin108^0}{\sin\frac{(180^0-108^0)}{2}}=\frac{\sin108^0}{\sin(90^0-56^0)}=\frac{\sin108^0}{\sin36^0}=$$

$$=\frac{\sin72^0}{\sin36^0}=2\cos36^0=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=q_1.$$

5⁰. Tutaq ki, bizə tərəfləri a,b olan düzbucaqlı verilmişdir. ($a>b$). Bu düzbucaqlının daxilinə ardıcıl olaraq ən böyük sahəli kvadratlar çəkək. Məsələn, birinci addımda kvadratların tərəfi b olsun. Sonra isə qalan hissədə (düzbucaqlıda) sahəsi ən böyük kvadratları çəkək. Onun tərəfi b_1 ol-

sun. Onda $r_1 \le b$. Yeni düzbucaqlı alındıqda bu prosesi davam etdirək.



Şəkil 7.

Bu o deməkdir ki, bu prosesin özü a və b tam ədədlər olduqda Evklid alqoritminə uyğun bir prosesin aparılmasıdır, yəni

$$a = bq_0 + r_1, 0 \le r_1 < b$$

Sonra isə b-ni r_1-ə bölürük:

$$b = r_1q_1 + r_2 \quad (0 \le r_1 < r_1)$$

Sonra isə

$$r_1 = q_2r_2 + r_3 \quad (0 \le r_3 < r_2)$$

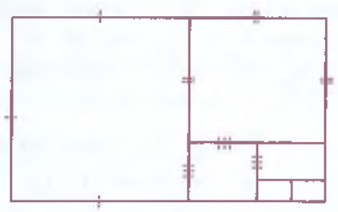
və s. beləliklə,

$$a = bq_0 + r_1,$$
$$b = r_1q_1 + r_2,$$
$$r_1 = r_2q_2 + r_3,$$
$$\text{- - - - - - - - - -}$$
$$r_{n-1} = r_{n-1}q_{n+1} + r_n,$$
$$r_{n-1} = r_nq_n.$$

Beləliklə Evklid alqoritminin tətbiqi ən böyük ortaq bölənin tapılmasına gətirir.

Əgər biz düzbucaqlını ardıcıl olaraq elə kvadratlara ayırsaq ki, onların ardıcıl olaraq tərəflərini Fibonaççi ədədləri kimi olsa, onda alınan kvadratların sahəsi (şəkil 8)

$S_1 = x_1^2$
$S_2 = x_2^2$
$S_3 = x_3^2$
- - - -
$S_n = x_n^2$



Şəkil 8.

olacaq. Onda bütün kvadratların sahəsi

$$S_k = S_1 + S_2 + ... + S_n = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_4^2$$

Lakin düzbucaqlının sahəsi x_nx_{n+1} olduğundan

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_4^2 = x_nx_{n+1}$$

alırıq. Bunu biz cəbri yolla isbat etmişdik. Bu isə bu düsturun həndəsi isbatıdır.

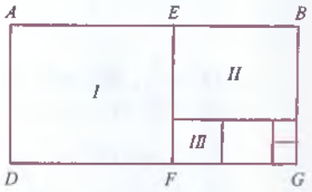
6⁰. Biz indi fərz edək ki, verilən düzbucaqlı elədir ki.

$$\frac{a}{b} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = q_1$$

Belə düzbucaqlıları qızıl nisbətli düzbucaqlılar adlandıraq. Qızıl nisbətli düzbucaqlının daxilinə tərəfi ən böyük olan kvadrat çəkək. Bu zaman yeni bir düzbucaqlı alacağıq. Göstərək ki. alınan düzbucaqlı da qızıl nisbətli düzbucaqlıdır (şəkil 9).

Tutaq ki,

$AB = a,$
$BD = b.$
$\frac{a}{b} = \frac{AB}{AD} = q_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$



Şəkil 9.

$AEFD$ kvadrat olduğundan

$$AD = DF = EF = AE = a.$$

Onda

$$EB = AB - AE = b - a$$

olar. Buradan

$$\frac{EF}{EB} = \frac{AB - EB}{EB} = \frac{AB}{EB} - 1 = \frac{a}{a-b} - 1 =$$
$$= \frac{a/b}{a/b - 1} - 1 = 1 = \frac{q_1}{q_1 - 1} - 1$$

Lakin $q_1^2 = q_1 + 1$ olduğundan

$$\frac{q_1}{q - 1} = \frac{q_1 \cdot q_1}{(q_1 - 1)q_1} = \frac{q_1^2}{q_1^2 - q_1} = \frac{q_1^2}{1} = q_1^2$$

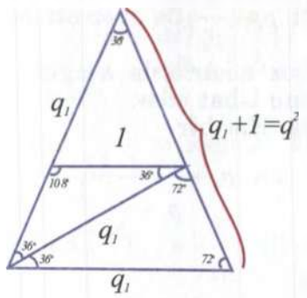
alırıq ki,

$$\frac{EF}{EB} = q_1^2 - 1.$$

Digər tərəfdən

$$q_1^2 - 1 = q_1.$$

Beləliklə alırıq ki, $\frac{EF}{EB} = q_1$.



Şəkil 10.

Beləliklə, bu prosesi davam etdirsək biz yenidən qızıl kəsikli düzbucaqlılar alacağıq.

7⁰. Biz göstərək ki, düzbucaqlı üçün etdiyimiz prosesi qızıl kəsikli üçbucaq üçün də edə bilərik.

Biz bucaqları 36^0, 72^0 və 72^0 olan itibucaqlı bərabəryanlı üçbucağı və ya bucaqları 36^0, 36^0, və 108^0 olan korbucaqlı üçbucağı qızıl kəsikli üçbucaq adlandıracağıq.

Burada böyük üçbucağın tərəfinin kiçik üçbucağın tərəfinə nisbəti

$$\frac{q_1 + 1}{q_1} = \frac{q_1^2}{q_1} = q_1$$

olar. Bu kiçik üçbucağı ayırdıqdan sonra qalan hissədən trapesiyada yenidən bərabərtərəfli üçbucaq ayırsaq yenə iki üçbucaq alırıq ki, orada da böyük tərəfin kiçik tərəfə nisbəti

$$q_1 : 1 = q_1\text{-dır.}$$

Digər üçbucaqda isə böyük tərəfin kiçik tərəfə nisbəti

$$q_1 : ((1 + q_1) - q_1) = q_1\text{-dır}$$

Bu prosessi davam etdirsək, biz yenə də üçbucaqları söylədiyimiz qaydada ayırsaq qızıl nisbətli ücbucaqlar alacağıq.

FİBONAÇÇİ ƏDƏDLƏRİ VƏ KƏSİLMƏZ KƏSRLƏR

Fibonaççi ədədləri ilə kəsilməz kəsrlərin bir əlaqəsini göstərək.

$$p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{p_2 + \cfrac{1}{p_3 + \ddots + \cfrac{1}{p_n}}}} \quad (24)$$

ifadəsinə baxaq. Tutaq ki, $p_1, p_2, ..., p_n$ – müsbət tam ədədlərdir.

p_0 isə 0-da ola bilər, yəni tam mənfi olmayan ədəddir. (24) ifadəsinə kəsilməz kəsr alınır.

Müəyyən ədədin kəsilməz kəsr şəklində yazılması onun kəsilməz kəsrə ayrılması adlanır.

Adi $\frac{a}{b}$ kəsrinin kəsilməz kəsr şəkildə yazılışını alqoritmik vasitəsilə asanlıqla almaq olar.

Doğrudan da

$$a = bp_0 + r_1,$$
$$b = r_1p_1 + r_2,$$
$$r_1 = r_2p_2 + r_3,$$
$$\text{- - - - - - - - - -}$$
$$r_{n-2} = r_{n-1}p_{n-1} + r_n,$$
$$r_{n-1} = r_np_n.$$

kimi yazsaq, onda

$$\frac{a}{b} = p_0 + \frac{r_1}{b} = p_0 + \cfrac{1}{\cfrac{b}{r_1}}.$$

Digər tərəfdən

$$\frac{b}{r_1} = p_1 + \frac{r_2}{r_1} = p_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}.$$

Onda

$$\frac{a}{b} = p_0 + \cfrac{1}{p_1 + \cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}.$$

Daha sonra

$$\frac{r_1}{r_2} = p_2 + \frac{r_3}{r_2} = p_2 + \cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}.$$

Deməli,

$$\frac{a}{b}=p_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}}.$$

Bu prosesi davam etdirsək alarıq:

$$\frac{a}{b}=p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\ddots+\cfrac{1}{p_n}}}.$$

Evklid alqoritmindən məlum olur ki, $p_n>1$. Əgər $p_n=1$ olsa idi proses bir vahid tez qurtarardı.

Asanlıqla göstərmək olar ki, $\frac{a}{b}$-nin kəsilməz kəsirlərə ayrılması yeganədir.

Tutaq ki,

$$\omega=p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\ddots+\cfrac{1}{p_n}}}$$

verilmişdir.

$$p_0,\ p_0+\frac{1}{p_1},\ p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2}},\ldots..$$

ədədlərinə baxaq və ixtisar olunmayan

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{p_0}{1}$$

$$\frac{P_1}{Q_1}=p_0+\frac{1}{p_1}$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2}}$$

$$\text{----------}$$

$$\frac{P_n}{Q_n}=\omega$$

$\frac{P_k}{Q_k}$-kəsirləri ω kəsilməz kəsrinin uyğun kəsrləri adlanır.

Aydındır ki, $\frac{P_k}{Q_k}$-dan $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$-i almaq üçün p_k-nı $p_k+\frac{1}{p_k}$ ilə əvəz etmək lazımdır.

Kəsilməz kəsirlərdə aşağıdakı hökmün doğruluğunu isbat edək.

Lemma. Hər bir

$$\omega=p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2+\ddots+\cfrac{1}{p_n}}}$$

kəsri üçün

$$P_{k+1}=P_k\cdot p_k+P_{k-1},$$

$$Q_{k+1}=Q_k\cdot p_{k+1}+Q_{k-1},$$

$$P_{k+1}\cdot Q_k-P_k\cdot Q_k=(-1)^k$$

bərabərlikləri doğrudur.

Bunu riyazi induksiya metodu ilə isbat edək:

Tutaq ki, κ=1. Onda

$$\frac{P_1}{Q_1}=p_0+\frac{1}{p_1}=\frac{p_0p_1+1}{p_1}$$

kəsri ixtisar olunmayandır. İki ixtisar olunmayan kəsrlərin bərabərliyindən

$$P_1=p_0p_1+1$$

$$Q_1=p_1$$

alırıq.

Digər tərəfdən

$$\frac{P_2}{Q_2}=p_0+\cfrac{1}{p_1+\cfrac{1}{p_2}}=\frac{p_0(p_1p_2+1)}{p_1p_2+1}$$

Burada $p_0(p_1p_2+1)+p_2$ və p_1p_2+1-in böyük böləni

$\partial BOB\ (p_2, p_1p_2+1)$-dır və

$\partial BOB(p_2, p_1p_2+1)=\partial BOB(p_2,1)=1$

Deməli

$$\frac{p_0(p_1p_2+1)+p_2}{p_1p_2}$$

kəsri ixtisar olunmayandır.

Onda,

$$P_2=p_0(p_1p_2+1)+p_2=(p_0p_1+1)p_2+p_0=P_1p_2+P_0$$

$$Q_2=p_1p_2+1=Q_1p_2+Q_0$$

Aydındır ki,

$$P_2Q_1-P_1Q_2=(-1)^1.$$

Bərabərlikləri $n=\kappa$ üçün qəbul edək, $n=k+1$ üçün doğru olduğunu göstərək.

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P_kp_{k+1}+P_{k-1}}{Q_kp_{k+1}+Q_{k-1}}$$

kəsrlərinə baxaq.

$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$-dən $\frac{P_k}{Q_k}$-ya keçmək üçün $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$-in ifadəsində

p_{k+1} ədədini $p_{k+1}+\frac{1}{p_{k+2}}$ ilə əvəz etmək lazımdır.

Onda induksiyaya görə

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{P_k\left(p_k+\frac{1}{p_{k+2}}\right)+P_{k-1}}{Q_k\left(p_{k+1}+\frac{1}{p_{k+2}}\right)+Q_{k-1}}=\frac{P_{k+1}p_{k+2}+P_{k-1}}{Q_{k+1}p_{k+2}+Q_k}$$

Göstərək ki, bu kəsr ixtisar olunmayandır. Əksini fərz edək, tutaq ki, $P_{k+1}p_{k+2}+P_k$ və $Q_{k+1}p_{k+2}+Q_k$ ədədlərinin ümumi $d>0$ böləni var. Onda,

$$(P_{k+1}p_{k+2}P_k)Q_{k+1}-(Q_{k+1}p_{k+2}+Q_k)P_{k+1}$$

ədədi də d-yə bölünəcək, lakin bu ədəd $(-1)^{k+1}$-ya bərabər olduğundan bu ola bilməz, onda iki ixtisar olunmayan kəsrlərin bərabərliyindən

$$P_{k+2}=P_{k+1}p_{k+2}+P_k,$$

$$Q_{k+2}=Q_{k+1}p_{k+2}+Q_k.$$

Göstərək ki,

$$P_{k+2}\cdot Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+1}=(-1)^{k+1}$$

Lakin

$$P_{k+1}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=P_{k+1}Q_{k+1}p_{k+2}-P_k\cdot Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+1}p_{k+2}-$$
$$-P_{k+1}\cdot Q_k$$

olduğundan və $P_{k+1}Q_k-P_kQ_{k+1}=(-1)^k$ bərabərliyinin induksiya ilə qəbil olunduğundan

$$P_{k+1}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=(-1)^{k+1}$$

alırıq.

Bu düsturdan alırıq ki,

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}=\frac{(-1)^k}{Q_k\cdot Q_{k+1}}.$$

İsbat etdiyimiz lemmadan alırıq ki,

$$P_0<P_1<P_2<\ldots$$

$$Q_0<Q_1<Q_2<\ldots$$

İndi isə bu lemmanı tətbiq edib aşağıdakı teoremi isbat edək.

x_n və x_{n+1} Fibonaççi ədədləri olarsa,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+1}}$$

x_n Fibonaççi ədədləri olsun. Onda

$$\alpha_1=1,\alpha_2=1+\frac{1}{1},\alpha_3=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}},\ldots,\alpha_n=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+1}}$$

ədədlərini təyin edək.

İsbat etdik ki, $\alpha_k=\frac{P_k}{Q_k}$. Onda $\alpha_1=1=\frac{1}{1}$ və $\alpha_2=1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1}$.

Bu halda $P_1=1,\ P_2=2$. Daha sonra

$$P_{n+1}=P_np_{n+1}+P_{n-1}=P_n+P_{n-1}$$

olduğundan

$$P_n=x_{n+1}$$

Analoji olaraq $Q_1=1, Q_2=1$ və

$$Q_{n+1}=Q_np_{n+1}+Q_{n-1}=Q_n+Q_{n-1}$$

Deməli $Q_n=x_n$.

Beləliklə

$$\alpha_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Teorem isbat olundu.

İndi isə

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

sonsuz kəsilməz kəsrə baxaq. Aydındır ki,

$$\alpha_n=\frac{x_{n+1}}{x_n}$$

Lakin x_n Fibonaççi ədədi $\frac{q_1^n}{\sqrt{5}}$ ədədinə ən yaxın tam ədəddir. Onda

$$x_n=\frac{q_1^n}{\sqrt{5}}+\theta_n,\ |\theta|<1/2$$

Buradan alırıq ki,

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{q_1^{n+1}}{\sqrt{5}}+\theta_{n+1}}{\frac{q_1^n}{\sqrt{5}}+\theta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{q_1+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{q_1^n}}{1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{q_1^n}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(q_1+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{q_1^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{q_1^n}\right)}.$$

Lakin $|\theta_n|<\frac{1}{2}$ olduğundan $|\theta_n\sqrt{5}|\le\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Deməli,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n\sqrt{5}}{q_1^n}=0.\quad (q_1>1)$$

Beləliklə,

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=q_1.$$

Qeyd edək ki, biz bu sonsuz kəsrin qiymətinin verildiyini bildikdən sonra onu belə də hesablaya bilərik.

$$x=1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+....}}$$

olduğundan

$$x=1+\frac{1}{x}.$$

Buradan

$$x^2=x+1,$$

$$x^2-x-1=0$$

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Lakin $x>0$ olduğundan

$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=q_1.$$

MERSEN ƏDƏDLƏRİ: YANILMALAR VƏ REKORDLAR

Asanca əmin olmaq olar ki, əgər n ədədi mürəkkəbdirsə, onda 2^n-1 ədədi də mürəkkəbdir. Doğrudan da,

$$2^n-1=2^{kl}-1=(2^k)^l-1=$$
$$=(2^k-1)(2^{k(l-1)}+2^{k(l-2)}+...+1).$$

Düz 1536-cı ilədək fikir yayılmışdı ki, tərs təklif də doğrudur, yəni n sadədirsə, 2^n-1 də sadə ədəd olur. Lakin Undalrikus Regius aşkar etdi ki, $2^{11}-1=2047=23\cdot89$. Buna baxmayaraq, dramatik yanılmaların uzun yolu hələ irəlidəydi. *XVII* əsrin astanasında Pyetro Antonio Kataldi $2^{17}-1$ və $2^{19}-1$-in sadə ədədlər olduğunu yoxladı və 2^n-1-in $n=23, 29, 31, 37$ üçün də sadə ədəd olduğunu hökm etməyi özünə rəva bildi. 1640-cı ildə Pyer Ferma 23 və 37 üçün bu hökmün səhv olduğunu müəyyən etdi, 1738-ci ildə isə Leonard Eyler onun 29 üçün səhv olduğunu göstərdi, lakin 31 üçün həqiqiliyini təsdiq etdi.

Bununla belə, 1644-cü ildə fransız rahib-alimi Maren Mersen bəyan etdi ki, 2^n-1 ədədi $n=2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ üçün sadədir və qalan 257-dən kiçik qalan 44 sadə n üçün sadə deyil. Lakin bu fərziyyə ilə də kolliziyasız keçinmək mümkün olmadı. Lakin rahib hər halda nə isə əldə etdi: 2^n-1 ədədi sadə olanda onu Mersen ədədi adlandırırlar.

Mersenin yanılması 1883-cü ilə kimi davam etdi, həmin il rus ruhanisi İvan Mixeyeviç Pervuşin isbat etdi ki, $2^{61}-1$ ədədi sadədir, halbuki 61 Mersenin siyahısında yox idi. Digər tərəfdən artıq *XX* əsrdə tapıldı ki, $2^{67}-1$ və $2^{257}-1$ ədədləri mürəkkəbdirlər. Mersen ədədlərinin sonsuz sayda olub-olmaması məlum deyil, məlum olanlar isə aşağıdakı cədvəldə verilmişdir.



Maren Mersen (1588–1648)

Cədvəl bu əlamətdar ədədlərin "xaç atasının" necə yanıldığını göstərir.

Ümumnəzəri faktlardan Mersen ədədləri haqqında az şey məlumdur. Məsələn, əgər $n\equiv3(mod\,4)$ sadədirsə, onda 2^n-1 $2n+1$-ə onda və yalnız onda bölünür ki, $2n+1$ sadə ədəddir.

Eləcə də Lük – Lemer testi adlanan ümumi meyar mövcuddur: tək n-lər üçün 2^n-1 onda və yalnız onda sadədir ki, $S(n-1)$ 2^n-1-ə bölünür, burada

$$S(1)=4,$$
$$S(n+1)=S(n)^2-2.$$

Mersen ədədlərinin axtarışında rekordları indi kompüterlər vurur və bu ədədlərin ümumi qanunauyğunluğu haqqında nəzəri nəticələr üzə çıxanadək belə olacaq.

MERSEN ƏDƏDLƏRİ. REKORDLAR CƏDVƏLİ

Ədədin nömrəsi	n	İl	Ədədin nömrəsi	n	İl
1	2	–	19	4253	1961
2	3	–	20	4423	1961
3	5	–	21	9689	1963
4	7	–	22	9941	1963
5	13	1456	23	11213	1963
6	17	1588	24	19937	1971
7	19	1588	25	21701	1978
8	31	1772	26	23209	1979
9	61	1883	27	44497	1979
10	89	1911	28	86243	1982
11	107	1914	29	110503	1988
12	127	1876	30	132049	1983
13	521	1952	31	216091	1985
14	607	1952	32	756839	1992
15	1279	1952	33	859433	1994
16	2203	1952	34	1257787	1996
17	2281	1952	35	1398269	1996
18	3217	1957	?	2976221	1997

* * *

FERMA ƏDƏDLƏRİ

Pyer Ferma Maren Mersenə məktublarının birində belə fərziyyə irəli sürmüşdür ki, əgər n ikinin qüvvətidirsə, 2^n+1 şəklində ədədlər mütləq sadə ədəddirlər. O bunu $n=1, 2, 4, 8$ və 16 üçün yoxladı. Ferma eləcə də bilirdi ki, n ikinin qüvvəti deyilsə, 2^n+1 sadə deyil. $2^{2^n}+1$ şəklində olan ədədlər Ferma ədədləri adlanır.

Ferma hipotezi yüz il, 1732-ci ildə Leonard Eyler

$$2^{32}+1=4\ 294\ 967\ 297=641\cdot6\ 700\ 417$$

olduğunu göstərənə kimi yaşadı.

Sonra yoxlanılan Ferma ədədləri hamısı mürəkkəb çıxdı, belə ki, ilkin fərziyyəyə əks olan təbii fərziyyə ortaya çıxır: Ferma ədədləri arasındakı sadə ədədlərin sayı sonlu deyil ki?

Ferma ədədlərinin kifayət qədər ümumi xüsusiyyətləri məlumdur. Məsələn, ixtiyari iki Ferma ədədi qarşılıqlı sadədir. Karl Qauss isbat etmişdir ki, düzgün n-bucaqlı pərgar və xətkeşin köməyi ilə onda və yalnız onda qurula bilər ki, onun tərəflərinin sayı $n=2^{2^s}\cdot p_1p_2...p_s$ olsun, buradakı bütün sadə p_i ədədləri $2^{2^n}+1$ şəklindədir. İlk 1000 qiyməti arasında belə n-lər yalnız 54 dənədir.

Ferma ədədlərinin sadə ədədlərin öyrənilməsində ümumnəzəri əhəmiyyətini aşağıdakı teorem müəyyənləşdirir:

✓ **Əgər $a\ge2$ və a^n+1 sadə ədəddirsə, onda a cütdür və $n=2^m$.**

Həndəsi silsilənin n həddinin cəmi düsturuna əsasən,

$$1+2+...+2^{n-2}+2^{n-1}=\frac{2^n-1}{2-1}=2^n-1.$$

Buradan görünür: Mersen ədədləri vuruğu 2 olan həndəsi silsilənin hədlərinin sadə cəmindən başqa bir şey deyil. Bəs niyə biz başqa vuruqlu silsilələrə müraciət etməyək?

a vuruqlu həndəsi silsilənin hədlərinin cəminin qiymətini:

$$1+a+a^2+...+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$$

ümumiləşmş Mersen ədədləri adlandıracağıq. Aydındır ki, bütün ümumiləşmiş Mersen ədədləri çoxluğu bütün tək sadə ədədlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür, belə ki, p sadədirsə və $p>2$-dirsə, onda

$$p=\frac{(p-2)p}{p-2}=\frac{(p-1)^2-1}{(p-1)-1}.$$

İndi hamı müstəqil surətdə yeni, öz Mersen ədədlərini hesablaya bilər. Cədvəlin əvvəli budur, sizsə davam etdirin.

a	$\frac{a^n-1}{a-1}$ n-lər ədədlərinin sadə olduğu
3	3, 7, 13, 71, ...
4	2.
5	3, 7, 11, 13, 47,.....
6	2, 3, 7, 29,.....
7	5,13,.....
8	3.

HESABIN ƏSAS TEOREMİ

Niyə sadə ədədləri bəzən "kərpic" ədədlər adlandırırlar? Ona görə ki, ixtiyari mürəkkəb ədəd vurmanın köməyi ilə sadə ədədlərdən qurulur. Məsələn, mürəkkəb 1998 ədədini 2, 3, 37 "kərpic" ədədlərdən belə qurmaq olar:

$$1998=2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot37.$$

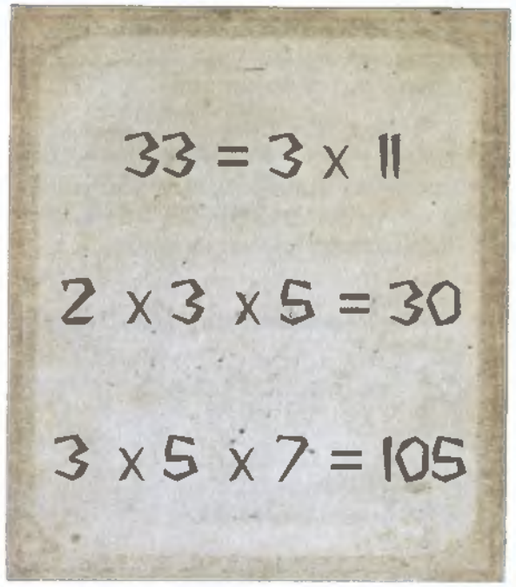
İndi asanca izah etmək olar ki, niyə 1 sadə ədəd sayılmır. Vahidin vurmadakı rolu sıfırın toplamadakı roluna bənzəyir: vahidə nə qədər vursan da, heç nə dəyişməz. 1998 ədədini sadə vuruqlara ayıraraq $1998=1\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot37$, ya $1998=1\cdot1\cdot2\cdot3\times\times3\cdot3\cdot37$ və ya daha sonsuz sayda üsulla yazmaq olar. Onların hansı düzdür? Əlbəttə, hər biri. Axı onlar mahiyyətcə heç nəylə fərq-

lənmir. Buna görə də, yaxşı olar birdəfəlik şərtləşək ki, vahid xüsusi vəziyyətdədir.

Bütün təbiiliyinə baxmayaraq isbatı müəyyən fəhm tələb edən aşağıdakı teorem doğrudur:

✓ **İxtiyari $n > 1$ ədədi ya özü sadədir, ya da sadə ədədlərin hasili şəklində göstərilir. Ədədin sadə vuruqlara ayrılışı, vuruqların ard-arda gəlmə nizamına baxmasaq, yeganədir.**

Bu hökm hesabın əsas teoremi adını almışdır.



İxtiyari ədəd ya özü sadədir, ya da sadə ədədlərin hasili şəklində göstərilə bilir.

Qüvvət işarəsindən istifadə edərək, 1998 ədədinin sadə vuruqlara ayrılışını $2^1 \cdot 3^3 \cdot 37^1$ şəklində yazmaq olar. Eyni ilə, ixtiyari natural n ədədinin ayrılışı zamanı eyni sadə vuruqları qüvvət şəklində yığıb

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$$

yazmaq olar, burada $p_1, p_2, \dots, p_\kappa$ n ədədinin müxtəlif sadə vuruqlarıdır, özü də p_1 ədədi α_1 dəfə, p_2 ədədi α_2 dəfə daxil olur və s. Əgər bu düsturda bütün $p_1, p_2, \dots, p_\kappa$ sadə ədədləri artma qaydasında düzülürlərsə: $p_1 < p_2 < \dots < p_\kappa$, onda belə ayrılış kanonik ayrılış adlanır.

Ədədin kanonik ayrılışı özünəməxsus "dosye"dir ki, ondan bu ədəd haqqında çoxlu maraqlı məlumat əldə etmək olar.

n ƏDƏDİNİN NEÇƏ BÖLƏNİ VAR?

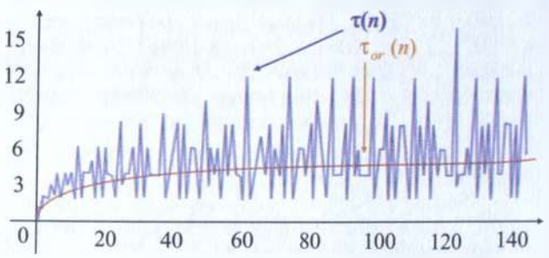
Böyük olmayan ədədlərin bölənlərinin sayını təyin etmək çətin deyil. Məsələn, 2 ədədinin cəmi iki böləni var: 1 və 2; 6 ədədinki çoxdur: 1, 2, 3, 6; məsələn, deyək ki, 180-inkilər artıq 18 dənədir: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180. Bəs araşdırılan n ədədi daha böyük olsa necə? Onun bütün bölənlərini yazmaq o qədər də cəlbedici iş deyil. n ədədinin kanonik yazılışına diqqət yetirməklə bu zəhmətli işi asanlaşdırmaq olar. Məsələn, $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ yazılışı diqqətli müşahidəçiyə göstərir ki, 180 ədədinin ixtiyari böləni yalnız aşağıdakı vuruqlardan yarana bilər: 2^0, 2^1, 2^2, 3^0, 3^1, 3^2, 5^0, 5^1. Bu zaman iki qüvvətinin hər üç variantı 3 qüvvətinin hər üç variantı və 5 qüvvətinin hər iki variantı ilə uzlaşa bilər. Cəmisi $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ sayda müxtəlif kombinasiyalar ola bilər. Əvvəllər başqa, daha az qənaətli üsulla məhz bu nəticəni almışdıq.

Beləliklə, əgər (*) kanonik ayrılışına hər hansı p sadə ədədi α qüvvəti ilə daxildirsə, onda n p-nin 0-dan α-ya qədər bütün qüvvətlərinə: $p^0, p^1, \dots, p^\alpha$ bölünür. Buna görə də yalnız bu sadə ədədin iştirak etdiyi bölənlər düz $\alpha + 1$ saydadır.

n-in bölünənlərində p_1 ədədinin qüvvətlərinin $\alpha_1 + 1$ qiymətlərinin hər birinə p_2 ədədinin qüvvətlərinin $\alpha_2 + 1$ qiymətlərindən hər biri, onların da hər birinə, öz növbəsində, p_3 ədədinin qüvvətlərinin $\alpha_3 + 1$ mümkün qiymətlərinin hər biri uyğun gələ bilər və s. Buna görə də $\tau(n)$ - n ədədinin bölənlərinin ümumi sayı –

$$\tau(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)\dots(\alpha_\kappa + 1)$$

düsturu ilə verilir.



$\tau(n)$ funksiyası və onun "yaxın qohumu" $\tau_{or}(n)$ funksiyası.

$\tau(n)$ funksiyası xam mustanq səciyyəsi daşıyır. O, ixtiyari qədər yuxarı cövlan edə bilər, lakin hər dəfə n sadə ədəd olanda funksiya ikiyə qayıdır. Lakin $\tau(n)$-in bütün qəribəlikləri və möcüzələri ilə bahəm, onun "yaxın qohumu"

$$\tau_{or}(n) = \frac{1}{n}(\tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(n))$$

funksiyası özünü "ağıllı və sinik" aparır. Alman alimi Peter Qustav Lejön Dirixle göstərmişdir ki, $\tau_{or}(n)$-ni yaxşı dəqiqliklə n-in natural loqarifmi, daha dəqiq desək,

$$\tau_{or}(n) = ln\, n + (2C - 1) + \varepsilon_n$$

ilə yaxınlaşdırmaq olar, burada $C = 0,577216\dots$ Eyler sabitidir və ε_n toplananı n-in artması ilə sürətlə sıfıra yığılır.

İLK 150 ƏDƏDİN KANONİK AYRILIŞI

1	1	51	$3 \cdot 17$	101	101
2	2	52	$2^2 \cdot 13$	102	$2 \cdot 3 \cdot 17$
3	3	53	53	103	103
4	2^2	54	$2 \cdot 3^3$	104	$2^3 \cdot 13$
5	5	55	$5 \cdot 11$	105	$3 \cdot 5 \cdot 7$
6	$2 \cdot 3$	56	$2^3 \cdot 7$	106	$2 \cdot 53$
7	7	57	$3 \cdot 19$	107	107
8	2^3	58	$2 \cdot 29$	108	$2^2 \cdot 3^3$
9	3^2	59	59	109	109
10	$2 \cdot 5$	60	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	110	$2 \cdot 5 \cdot 11$
11	11	61	61	111	$3 \cdot 37$
12	$2^2 \cdot 3$	62	$2 \cdot 31$	112	$2^4 \cdot 7$
13	13	63	$3^2 \cdot 7$	113	113
14	$2 \cdot 7$	64	2^6	114	$2 \cdot 3 \cdot 19$
15	$3 \cdot 5$	65	$5 \cdot 13$	115	$5 \cdot 23$
16	2^4	66	$2 \cdot 3 \cdot 11$	116	$2^2 \cdot 29$
17	17	67	67	117	$3^2 \cdot 13$
18	$2 \cdot 3^2$	68	$2^2 \cdot 17$	118	$2 \cdot 59$
19	19	69	$3 \cdot 23$	119	$7 \cdot 17$
20	$2^2 \cdot 5$	70	$2 \cdot 5 \cdot 7$	120	$2^3 \cdot 3 \cdot 5$
21	$3 \cdot 7$	71	71	121	11^2
22	$2 \cdot 11$	72	$2^3 \cdot 3^2$	122	$2 \cdot 61$
23	23	73	73	123	$3 \cdot 41$
24	$2^3 \cdot 3$	74	$2 \cdot 37$	124	$2^2 \cdot 31$
25	5^2	75	$3 \cdot 5^2$	125	5^3
26	$2 \cdot 13$	76	$2^2 \cdot 19$	126	$2 \cdot 3^2 \cdot 7$
27	3^3	77	$7 \cdot 11$	127	127
28	$2^2 \cdot 7$	78	$2 \cdot 3 \cdot 13$	128	2^7
29	29	79	79	129	$3 \cdot 43$
30	$2 \cdot 3 \cdot 5$	80	$2^4 \cdot 5$	130	$2 \cdot 5 \cdot 13$
31	31	81	3^4	131	131
32	2^5	82	$2 \cdot 41$	132	$2^2 \cdot 3 \cdot 11$
33	$3 \cdot 11$	83	83	133	$7 \cdot 19$
34	$2 \cdot 17$	84	$2^2 \cdot 3 \cdot 7$	134	$2 \cdot 67$
35	$5 \cdot 7$	85	$5 \cdot 17$	135	$3^3 \cdot 5$
36	$2^2 \cdot 3^2$	86	$2 \cdot 43$	136	$2^3 \cdot 17$
37	37	87	$3 \cdot 29$	137	137
38	$2 \cdot 19$	88	$2^3 \cdot 11$	138	$2 \cdot 3 \cdot 23$
39	$3 \cdot 13$	89	89	139	139
40	$2^3 \cdot 5$	90	$2 \cdot 3^2 \cdot 5$	140	$2^2 \cdot 5 \cdot 7$
41	41	91	$7 \cdot 13$	141	$3 \cdot 47$
42	$2 \cdot 3 \cdot 7$	92	$2^2 \cdot 23$	142	$2 \cdot 71$
43	43	93	$3 \cdot 31$	143	$11 \cdot 13$
44	$2^2 \cdot 11$	94	$2 \cdot 47$	144	$2^4 \cdot 3^2$
45	$3^2 \cdot 5$	95	$5 \cdot 19$	145	$5 \cdot 29$
46	$2 \cdot 23$	96	$2^5 \cdot 3$	146	$2 \cdot 73$
47	47	97	97	147	$3 \cdot 7^2$
48	$2^4 \cdot 3$	98	$2 \cdot 7^2$	148	$2^2 \cdot 37$
49	7^2	99	$3^2 \cdot 11$	149	149
50	$2 \cdot 5^2$	100	$2^2 \cdot 5^2$	150	$2 \cdot 3 \cdot 5^2$

n ƏDƏDİNİN BÖLƏNLƏRİ CƏMİ NƏYƏ BƏRABƏRDİR?

(*) kanonik ayrılışında verilmiş ədədin 1 və n də daxil olmaqla bölənlərinin cəmini hesablamaq üçün *XVIII* əsrdə məşhur ingilis riyaziyyatçısı Con Vallis tərəfindən müəyyən edilmiş

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_\kappa^{\alpha_\kappa+1} - 1}{p_\kappa - 1}$$

düsturundan istifadə etmək olar. Onu çıxarmaq üçün qeyd edək ki, n-in bölənləri bütün $p_1^{\tau_1} p_2^{\tau_2} \dots p_\kappa^{\tau_\kappa}$ şəkilli ədədlər olacaq, burada τ_1 qüvvət üstü 0-dan α_1-dək, τ_2 qüvvət üstü 0-dan α_2-dək və s. qiymətlər alır.

$$(1 + p_1 + \dots + p_1^{\alpha_1})(1 + p_2 +$$

$$+ \dots + p_2^{\alpha_2}) \dots (1 + p_\kappa + \dots + p_\kappa^{\alpha_\kappa})$$

hasilindəki bütün mötərizələri açsaq, bütün belə ədədlərin cəmini; dairəvi mötərizələrdəki hər bir ifadəni həndəsi silsilənin sonlu sayda həddinin cəmi düsturu ilə yazsaq, Vallis düsturunun özünü almış oluruq.

Misal üçün $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ ədədinin bölənləri cəmini tapaq:



Leonard Eyler. E.Handmannın işi. 1756-cı il

Riyaziyyatda indi baxılan problemlər içində ədədlərin və onların bölənlərinin təbiətinə aidiyyəti olanlar qədər daha barsızı və təklifsizi yoxdur...Bu baxımdan indiki riyaziyyatçılar bu növ araşdırmalara daha böyük əhəmiyyət verən qədim riyaziyyatçılardan çox fərqlənirlər...Bundan başqa həqiqət axtarışını onlar tərifəlayiq və insan idrakına layiq iş hesab edirdilər, qədim adamlar yaxşı hiss edirdilər ki, bu zaman fəhm güclü inkişaf edir və insan zəkası qarşısında mürəkkəb məsələləri həll etmək imkanları açılır... Qədim riyaziyyatçılar indi çoxlarının xəyali barsızlığı ucundan əhəmiyyət vermədiyi məsələlərə bu qədər qüvvə sərf etməsəydilər, riyaziyyat, ehtimal ki, belə kamilliyə çatmazdı.

Leonard Eyler

$$\sigma(2000) = \frac{2^5-1}{2-1}\frac{5^4-1}{5-1} = 31\cdot 156 = 4836.$$

Bu qiyməti bilavasitə, yəni əvvəlcə 2000 ədədinin bütün bölənlərini təyin edib, sonra onların cəmini hesablamaqla almaq çox-çox mürəkkəb olardı.

n-İ AŞMAYAN NEÇƏ NATURAL ƏDƏD n-LƏ QARŞILIQLI SADƏDİR?

Belə ədədlərin sayını təyin etmək üçün – onu $\varphi(n)$-lə işarə edək, – bizə tanış olan riyazi alətdən, Eratosfen ələyindən istifadə edək, 1-dən $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_\kappa^{\alpha_\kappa}$-dək natural ədədlər ardıcıllığına baxaq. Ondan p_1-ə bölünənləri pozaq. Belə ədədlər düz n/p_1 qədər olacaq. $n - n/p_1$ sayda p_1-ə bölünməyən ədəd qalacaq. İndi qalan ədədlərdən p_2-yə bölünənlərin hamısını pozaq, – onlar

$$\frac{n - \frac{n}{p_1}}{p_2}$$

sayda olacaq.

$$n - \frac{n}{p_1} - \frac{n - \frac{n}{p_1}}{p_2} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)$$

qalacaq.

Həmin qayda ilə $p_3, p_4, \dots, p_\kappa$-ya bölənləri eləməkdə davam edərək son nəticədə

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{p_\kappa}\right)$$

düsturuna gəlmiş oluruq.

Məsələn, 2000-dən kiçik və $2000 = 2^4 \cdot 5^3$-lə qarşılıqlı sadə natural ədədlərin sayını tapmaq üçün hesablayırıq:

$$\varphi(2000) = 2000\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = 800.$$

$\varphi(n)$ funksiyası Eyler funksiyası adlanır. Onu alim 1763-cü ildə kəşf edib.

QALIQLAR HESABI VƏ MÜQAYİSƏLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

Görkəmli ingilis yazıçısı və riyaziyyatçısı Lyuis Kerolun (bu, Çarlz Latuic Docsonun ədəbi təxəllüsüdür) "Alisa möcüzələr ölkəsində" nağılında əyləncəli bir epizod var. Alisa, Mart Dovşanı və Müqəvva ustası çay süfrəsində dünyəvi söhbət edirlər:

"Birinci Müqəvva ustası dilləndi.

– Bu gün ayın neçəsidir? – o, Alisaya tərəf çevrilərək və cibindən saat çıxararaq soruşdu. O, saata həyəcanla baxdı, onu silkələdi və qulağına tutdu.

Alisa fikirləşdi və cavab verdi:

– Dördü.

– İki gün geri qalır, – Müqəvva ustası kökünü ötürdü".

Bəlkə də bizim elektronikanın möcüzələri içində üzən müasirimiz Müqəvva ustasının sözlərində qəribə heç nə tapmayacaq. Lakin unutmamaq lazımdır ki, bu əsərin yazıldığı *XIX* əsrdə saatlar əsasən günün saatlar və dəqiqələrdə ifadə olunmuş hissəsini göstərirdi.

Möcüzələr ölkəsinin qəhrəmanlarının düşdüyü vəziyyət *XXI* əsrin astanasında aktual oldu: milyonlarla kompüterin daxili xronometrlərini dairəyə keçirmək zərurəti yarandı.

* * *

Belə bir vəziyyəti təsəvvür edin. Bir gün səhər sizə dostunuz zəng edir və bildirir: "Mən bu gün on sıfır-sıfırda yola düşürəm, mənim qatarımı doxsan səkkiz saatdan sonra qarşıla". Siz vağzala haçan getməlisiniz? 98 saata bütöv 4 sutka yerləşir və əlavə 2 saat qalıq qalır. Alınır ki, siz 4 sutka sonra saat 12-də görüşəcəksiniz.

Başqa vaxt siz özünüz köhnə dostunuza deyməк istəyəcəksiniz və 45 gün əvvəl bilet sifariş edəcəksiniz. Əgər bilet bazar ertəsi sifariş verilibsə, siz həftənin hansı günü yola düşəcəksiniz? Həftə 7 gündür. 45-i 7-yə bölsək, qalıqda üç alırıq, deməli, siz çümə axşamı yola düşəcəksiniz.

Atalar sözündə deyilir: "Qalıqlar şirindir". Gətirilən misallar göstərir ki, qalıqlar təkrarlanan, periodik proseslərin qanunauyğunluqlarını aşkar edərək, bəzən riyazi anlamda xeyli dərəcədə mühüm rol oynayır.

ƏBƏDİ TƏQVİMİN DÜSTURU

Həyətdə, əzizlərim, hansı minillikdir?
B. Pasternak.

Deyə bilərsinizmi, məsələn beş ildən sonra sizin ad gününüz həftənin neçənci gününə düşəcək? Burada bir çox başqa hallarda olduğu kimi qalıqları hesablamaq bacarığı dada yetir.

Biz istənilən yüzildə istənilən tarixin həftənin hansı gününə düşməsini təyin etmək üçü universal düstur gətirəcəyik. Fərz edək ki, n aşağıdakı nizamla həftənin gününün nömrəsi: 0 bazar günü, 1 – bazar ertəsi, 2 – çərşənbə axşamı, 3 – çərşənbə, 4 – cümə axşamı, 5 – cümə, 6 – şənbə; d – ayın günü (tarix); m – saymağı martdan başlamaq şərti ilə ayın nömrəsi: 1 – mart, 2 – aprel, ...12 – fevral (belə nömrələmə düsturu çıxararkən fevralda günlərin sayının dəyişkən olması ilə bağlı rahatsızlıqları aradan qaldırmağa imkan verir). Daha sonra, fərz edək ki, y ilin yüzillikdəki nömrəsi, c yanvarın əvvəlki ilin 11-ci, fevralın 12-ci ayı olmasını nəzərə almaqla yüzilliklərin sayıdır. (Məsələn, söhbət 2000-ci ildən gedirsə, yanvar və ya fevrala düşən tarix üçün $y = 99$, $c = 19$, digər aylara düşən tarixlər üçünsə $y = 0$, $c = 20$ götürmək lazımdır).

Bu işarələrdə həftənin gününün tapılması üçün düstur belədir: n W ədədinin 7-yə bölünməsindən alınan qalıqdır, burada

$$W = d + \left[\frac{13m-1}{5}\right] + y + \left[\frac{y}{4}\right] + \left[\frac{c}{4}\right] - 2c.$$

Burada kvadrat mötərizələr ədədin tam hissəsini, yəni həmin ədədi aşmayan ən böyük tam ədədi göstərir. Məsələn, $[3,4] = 3$, $[-3,14] = -4$, $[3] = 3$.

W hətta mənfi ədəd olsa belə, onun yeddiyə bölünməsindən alınan qalıq sıfırdan böyük və ya sıfıra bərabər olacaq. Məsələn 8 mart 2000-ci il tarixi üçün $W = -25 = 7\cdot(-4) + 3$. Buna görə də $n = 3$, yəni bu, çərşənbədir.

"SİNFİ TƏBƏQƏLƏŞMƏ"

Əgər hər hansı natural m ədədi götürsək, onda digər tam ədədləri ona bölən zaman m müxtəlif qalıq qalacaq: 0, 1, 2, ..., m –1. m-ə bölünən zaman eyni qalıq verən ədədləri bir sinifdə birləşdirək. Beləliklə, "m ədədi nöqteyi-nəzərdən" bütün tam ədədlər m müxtəlif sinfə bölünür. Aydındır ki, m nə qədər böyükdürsə, sinif dəstləri o qədər genişdir. Belə ki, m =1 olduqda cəmisi bir sinif – tam ədədlər sinfi; m =2 olduqda iki sinif – cüt və tək ədədlər alırıq və s.

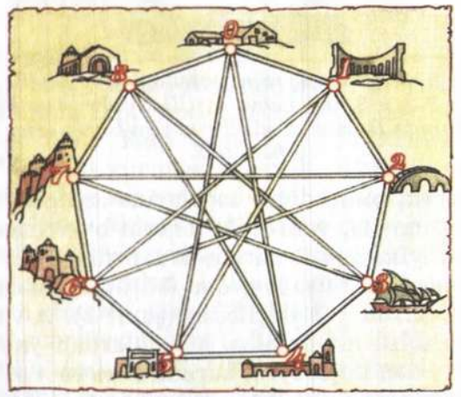
Tam ədədlərin "cəmiyyətinin sinfi strukturunun" uçotu bir sıra məsələlərin həllində faydalı olur. Məsələn, belə məsələnin: ixtiyari tam n üçün $n^3 - n$ 6-ya bölünür.

$n^3 - n$ ifadəsində n-i mötərizə xaricinə çıxaraq, yerdə qalanları isə kvadratların fərqi düsturu ilə ayıraq:

$n^3 - n = = n(n^2 - 1) = n(n-1)\cdot(n+1)$ və ya $(n-1)n(n+1)$. Bu üçə bölünən zaman müxtəlif qalıqlar verən üç ardıcıl tam ədədin hasilidir. Deməli, onlardan biri mütləq 3-ə və azı biri 2-yə bölünür. Deməli, bütün hasil $6 = 2\cdot 3$ -ə bölünür (axı 2 və 3 ədədləri öz aralarında qarşılıqlı sadədirlər).

n ədədi haqqında əlavə informasiyaya malik olsaydıq, məsələn, n-in cüt olduğunu bilsəydik, biz daha çox hökm verə bilərdik, məsələn, n^3 – n-in 12-yə və hətta 24-ə bölünməsi kimi. (Bunu müstəqil surətdə əsaslandırmağa çalışın.)

Hər hansı m ədədinin doğurduğu bütün siniflərin nümayəndələrindən olan ədədlər dəstəsini formalaşdırmaq üçün m ardıcıl tam ədəd götürmək qətiyyən zəruri deyil. Bu məqsəd üçün



Şəkil 1. Təpələri 0-dan m – 1-dək ədədlərlə nömrələyək və hər hansı bir təpədən yola düşərək n addımla o biri təpələrə keçəcəyik. n və m qarşılıqlı sadədirsə, ilkin nöqtəyə qayıdanadək bütün təpələri keçəcəyik (burada m = 9, n = 4).

$$n,\ n+d,\ n+2d,\ n+(m-1)d \qquad (*)$$

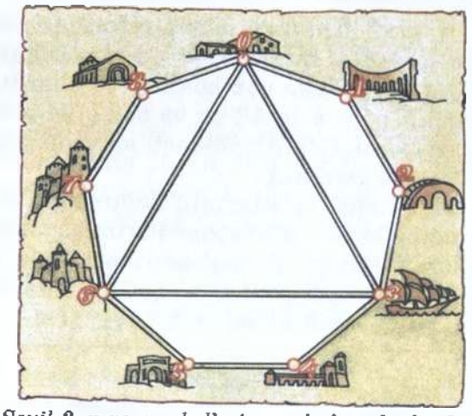
ədədi silsiləsinin ardıcıl hədləri uyğun gələ bilər, bir şərtlə ki, d m-lə qarşılıqlı sadə olsun. Həqiqətən, (*) ardıcıllığının κ-cı və l-ci ədədlərinin fərqinə baxaq: $d(\kappa - l)$. d m-lə qarşılıqlı sadə olduğundan və $|\kappa - l| < m$ olduğundan $d(\kappa - l)$ m-ə bölünmür. Deməli, bu ardıcıllığın hədləri arasında m-ə bölünərkən eyni qalıq verən ikisi yoxdur.

İsbat olunmuş hökmdən, xüsusi halda, çıxır ki, əgər m və n ədədləri qarşılıqlı sadədirsə, onda

$$n,\ 2n,\ 3n,\dots,\ (m-1)n,\ mn$$

ardıcıllığının hədləri m-ə bölünmə zamanı qalıqların 0-dan m – 1-dək tam dəstini verir. Buna əmin olmaq üçün (*) ardıcıllığında $d = n$ yazmaq kifayətdir.

Bu nəticəni fransız riyaziyyatçısı və fiziki Lui Puansonun etdiyi kimi həndəsi illüstrasiya etmək mümkündür. Qabarıq m-bucaqlının təpələrini 0-dan m–1-dək ədədlərlə nömrələyək. Hər hansı bir təpədən yola



Şəkil 2. n və m ədədləri qarşılıqlı sadə deyilsə, (m = 9, n = 3), biz yalnız m / D təpədən keçəcəyik, burada D m və n ədədlərinin ən böyük ortaq bölənidir.

düşərək, onun digər təpələrinə ardıcıl yox, n addımı ilə, yəni $n-1$ nöqtəni buraxmaqla keçəcəyik. n m-lə qarşılıqlı sadədirsə, biz ilkin nöqtəyə düşənə qədər bütün təpələr: 0, 1, 2, ..., $m-1$ keçiləcək (şəkil 1). n və m qarşılıqlı sadə deyilsə, biz onlardan yalnız m/D –dən keçəcəyik, burada D m və n ədədlərinin ən böyük ortaq bölənidir (şəkil 2).

MODULA GÖRƏ MÜQAYİSƏLƏR VƏ ONLARIN XASSƏLƏRİ

a və b ədədlərinin m natural ədədinə bölünmələri zamanı bərabər qalıqlara malik olmaları faktını alman riyaziyyatçısı Karl Fridrix Qauss belə yazmağı təklif etmişdi: $a \equiv b \ (mod\ m)$ (belə oxunur: m moduluna görə a ilə b müqayisə ediləndir). Bu yazılış müqayisə adlanır. Müqayisələrə bir neçə misal: $-4 \equiv 3 (mod\ 7)$; $1997 \equiv 1 (mod\ 4)$; $8\kappa + 1 \equiv 1 (mod\ 8)$, burada κ tam ədəddir.

İki a və b ədədlərinin b modulu üzrə müqayisə edilən olduğuna əmin olmaq üçün onların hər birinin m-ə bölünməsinin qalıqlarını tapmaq heç də vacib deyil. Onların fərqinə baxmaq kifayətdir:

✓ **$a - b$ fərqi m-ə bölünürsə və yalnız bu halda $a \equiv b \ (mod\ m)$**

Müqayisələr xeyli dərəcədə bərabərliklərin xassələrinə bənzəyən xassələr aşkar edir. Bərabərlikləri bir-biriylə toplamaq, vurmaq, birini digərindən çıxmaq olar – nəticədə doğru bərabərlik alınır. Eyni şey müqayisələr üçün də doğrudur:

✓ **Əgər ixtiyari a, b, c, d tam ədədləri elədirlərsə ki, m modulu üzrə a b ilə, c isə d ilə müqayisə ediləndir, onda $a + c$ və $b+d$, $a - c$ və $b - d$, ac və bd ədədləri də həmin modul üzrə müqayisə ediləndir.**

Müqayisələrin əvəzinə müvafiq fərqləri götürsək, bu xassəni asanca isbat etmək olar. Məsələn, axırıncı xassəni isbat edək. Fərz edək ki, $a \equiv b \ (mod\ m)$ və $c \equiv d \ (mod\ m)$. Onda $a - b$ m-ə bölünür və $c - d$ m-ə bölünür. Lakin $ac - bd = a(c - d) + d(a - b)$ olduğundan $ac - bd$ m-ə bölünür. Deməli, $ac \equiv bd \ (mod\ m)$, bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

Natural qüvvətə yüksəltmək çoxqat vurmağa müncər edilir, buna görə də

✓ **Əgər $a \equiv b \ (mod\ m)$, onda $a^\kappa \equiv b^\kappa \ (mod\ m)$.**

Bərabərliyin sol və sağ tərəflərini sıfırdan fərqli eyni bir kəmiyyətə bölmək olar. Müqayisələrlə bunu, ümumiyyətlə, etmək olmaz, Lakin

✓ **Əgər c və m ədədləri qarşılıqlı sadədirsə və $ac \equiv bc \ (mod\ m)$, onda $a \equiv b \ (mod\ m)$.**

Digər tərəfdən, müqayisənin hər iki tərəfini modulla eyni zamanda eyni bir ədədə bölmək olar:

✓ **Əgər $ac \equiv bc \ (mod\ mc)$, onda $a \equiv b \ (mod\ m)$.**

Müqayisələrin xassələrini bilərək, bizi yalnız hər hansı m ədədinə bölmənin qalığı maraqlandırırsa, mürəkkəb hesabi ifadələri sadələşdirmək olar. Axı bu halda tam ədədlərdən toplama, çıxma və vurma əməllərinin köməyi ilə alınmış ixtiyari cəbri ifadədə bu ədədləri, nəticəni dəyişmədən, onların m-ə bölünməsinin qalıqları ilə əvəz etmək olar.

Məsələn, fərz edək ki, 2^{1997} ədədini 7-yə bölərkən qalığı bilmək zəruridir. Bu məsələni birbaşa həll etmək çox çətindir. Müqayisələr nəzəriyyəsi xilas edir:

$2^{1997} \equiv (2^3)^{665} \cdot 2^2 \equiv 1^{665} \cdot 4 \equiv 4 \ (mod\ 7)$

Cavab: 4.

Digər məsələ: x, y tam ədədlərində

$$7x - 23y = 1997$$

tənliyini həll etmək tələb olunur.

$7x$ toplananından azad olmaq üçün bu tənliyin sol və sağ tərəflərini 7 modulu üzrə müqayisə edək:

$$-2y \equiv 2 \ (mod\ 7),$$

çünki $7x \equiv 0 \ (mod\ 7)$ və $-23y \equiv -2y \ (mod\ 7)$, $1997 \equiv 2 \ (mod\ 7)$. 3 və 7 qarşılıqlı sadə olduğundan alınmış müqayisənin hər iki tərəfini 3-ə vura bilərik:

$$-6y \equiv 6 \ (mod\ 7)$$

Buradan $-6y \equiv y \ (mod\ 7)$ nəzərə almaqla alırıq:

$$y \equiv 6 \ (mod\ 7)$$

Deməli, $y = 6 + 7\kappa$, burada κ ixtiyari tam ədəddir. y-in tapılmış qiymətini ilkin tənlikdə yazaraq alırıq: $7x - 23(7\kappa + 6) = 1997$ və tapırıq ki, $x = 305 + 23\kappa$. Cavab:

$$\begin{cases} x = 305 + 23\kappa, \\ y = 6 + 7\kappa, \end{cases}$$

κ ixtiyari tam ədəddir.

Müqayisələr nəzəriyyəsini mürəkkəb hesablamaların yoxlanması üçün də tətbiq etmək olar. Fərz edək ki, $1997 \cdot 1999 = 3\,991\,003$ vurması aparılıb. Alınan bərabərliyin hər iki tərəfini 9 modulu üzrə müqayisə edək. Ədədin özünün və onun rəqəmlər cəminin 9 modulu üzrə müqayisə edilən olduğu faktından istifadə etməklə bunu asanca etmək olar ("Bölünür, ya bölünmür" məqaləsinə bax). Bu halda müqayisə doğru olmadı: $1997 \cdot 1999 \equiv 8 \cdot 1 \equiv 8 (mod\ 9)$ və $3\,991\,003 \equiv 7 \ (mod\ 9)$. Deməli, hesablamalarda səhv var. Doğrudan da, düzgün cavab 3 992 003-dür.

Lakin hər halda nəzərə almalısınız: müvafiq yoxlama bir çox halda səhvi aşkar etməyə imkan versə də, onun yoxluğuna zəmanət vermir.

TURNİRİN CƏDVƏLİNİ NECƏ TƏRTİB ETMƏLİ

Fərz edək ki, idman yarışında N komanda iştirak edir və qalibi müəyyən etmək üçün onların hər biri digər hər bir komanda ilə bir oyun oynamalıdır. Turnirin cədvəlini elə tərtib etmək tələb olunur ki, komandalarda artıq "boşdayanmalar" olmasın. Bunda da bizə müqayisələr nəzəriyyəsi kömək edər.

N-in cüt olduğunu şərtləşək. Belə deyilsə, bir fiktiv komanda daxil edək – onunla "oyun" kimin üçünsə məcburi, digəri üçün halal istirahət olacaq. Hər bir komandaya turnir cədvəlində nömrə verək: $x = 1, 2, ..., N - 1, N$.

İlk $N - 1$ komandaya baxaq. r-ci turda ($r = 1, 2, ..., N - 1, N$) x komandasının qarşıdaşı kimi

$$\begin{cases} x + y \equiv r \ (mod\ (N-1)) \\ x \neq y \end{cases}$$

şərtlərini ödəyən y komandasını təyin edək.

$x + y \equiv r \ (mod\ (N - 1))$ müqayisəsi ödənilərkən x və y nömrələrinin üst-üstə düşməsi ancaq $2x \equiv r \ (mod\ (N - 1))$ halında mümkündür. Bu da öz növbəsində cüt r üçün $x = \frac{r}{2}$ və tək r üçün $x = \frac{r+N-1}{2}$ olduqda mümkündür.

Belə halda komandaya qarşıdaş kimi N nömrəli komandanı təyin edək.

Beləliklə, turnirin bütün şərtləri ödəniləcək:

1. Bir turda müxtəlif komandalar müxtəlif rəqiblərlə qarşılaşacaq.
2. İxtiyari komanda müxtəlif turlarda müxtəlif qarşıdaşlarla oynayır.
3. $N - 1$ tur qurtaran zaman hər bir komanda digər hər biriylə oynayır.

Altı iştirakçı üçün turnir cədvəli aşağıdakı kimidir.

r \ x	1	2	3	4	5	6
1	5	4	6	2	1	3
2	6	5	4	3	2	1
3	2	1	5	6	3	4
4	3	6	1	5	4	2
5	4	3	2	1	6	5

r-ci sətrin və x-ci sütunun kəsişməsində komandanın r-ci turda oynayacağı qarşıdaşın nömrəsi durur.

QEYRİ-MÜƏYYƏN TƏNLİKLƏR

İxtiyari məsələnin həllini düşünərkən onda hansı kəmiyyətlərin istifadə olunmasına diqqət yetirmək həmişə xeyirlidir. Onlar tam olmaya bilərlərmi? Bəs müsbət və ya mənfi ola bilərlərmi? Cavabda böyük, yoxsa, əksinə, lap kiçik ədəd gözlənilir? Hətta az əhəmiyyətli detal belə nəinki məsələnin həllində səhvi istisna etmək, eləcə də həllin özünü tapmağa imkan verir. Buna misalda əmin olaq.

Fərz edək ki, akvariumda səkkizayaqlılar və dəniz ulduzları yaşayır. Səkkizayaqlıların 8, dəniz ulduzlarınınsa 5 ayağı var. Cəmisi 39 ətraf sayılır. Akvariumda neçə heyvan var?

İlk baxışdan elə görünür ki, verilənlər çatışmır. Məsələn, əgər x-lə dəniz ulduzlarının, y-lə səkkizayaqlıların sayını işarə etsək,

məsələnin şərti bircə tənlik yazmağa imkan verər: $5x + 8y = 39$. Məchulların sayı tənliklərin sayından çox olduğu belə tənlik və ya tənliklər sistemi qeyri-müəyyən adlanır.

Qeyd edək ki, heyvanların sayı tam olmayan və mənfi ədədlərlə ifadə oluna bilməz. Deməli, əgər x tam ədəddirsə, onda

$$y = \frac{39 - 5x}{8}$$

tam və qeyri-mənfi olmalıdır. Deməli, $39 - 5x$ ifadəsi 8-ə qalıqsız bölünməlidir. Variantların adicə sərf-nəzər edilməsi göstərir ki, bu yalnız $x = 3$-də ola bilər. Buradan $y = 3$ alırıq.

Bizim burada istifadə etdiyimiz variantların sərf-nəzər edilməsi metodu böyük ədədi verilənləri olan məsələlərdə narahatlıq törədir. Qədim hind riyaziyyatçılarının səpilmə metodu və ya enmə metodu adlandırdığı ümumi metoddan istifadə etmək qatqat yaxşıdır.

BİRDƏRƏCƏLİ TƏNLİKLƏRİ NECƏ HƏLL ETMƏLİ?

a, b məlum tam əmsallı

$$ax + by = c \qquad (*)$$

bir dərəcəli qeyri-müəyyən tənliyinin tam ədədlərdə həllinin qədim reseptini bizə artıq tanış olan

$$5x + 8y = 39$$

tənliyində araşdıraq.

Ən kiçik əmsala malik olan məchulu götürək və onu digər məchulla ifadə edək:

$$x = \frac{39 - 8y}{5}.$$

İndi isə tam hissəni ayıraq:

$$x = 7 - y + \frac{4 - 3y}{5}.$$

Əgər $(4 - 3y)/5$-in qiyməti tam olacaqsa, bütün ədəd tam olacaq. Bu o zaman mümkündür ki, $4 - 3y$ ədədi 5-ə qalıqsız bölünsün. Əlavə tam z dəyişənini daxil edərək axırıncı şərti $4 - 3y = 5z$ şəklində yazaq. Biz ilkin tənlik tipli, lakin daha az əmsallı tənliyə gəldik. Onu y və z dəyişənlərinə nəzərən həll etmək lazımdır.

Həmin prinsiplə hərəkət etməkdə davam edirik:

$$y = \frac{4 - 5z}{3} = 1 - z + \frac{1 - 2z}{3}.$$

y-in tam olması üçün $1 - 2z$-in 3-ə bölünməsi zəruridir: $1 - 2z = u$ (yenə də ancaq tam qiymətlər qəbul edən əlavə u dəyişəni qəbul edilib). Buradan artıq işlənmiş sxem üzrə alırıq

$$z = \frac{1 - 3u}{2} = \frac{1 - u}{2} - u.$$

Davam edək...z ədədi onda tam olar ki, $1 - u$ 2-yə qalıqsız bölünsün: $1 - u = 2v$, burada v ixtiyari tam ədəddir. Buradan $u = 1 - 2v$ alırıq. Artıq kəsrlər yoxdur, enmə qurtarıb.

İndi uğurla "yuxarı qalxmaq" qalıb. Əvvəl z, sonra y, nəhayət x-i v vasitəsi ilə ifadə edək:

$$z = 3v - 1,$$

$$y = 3 - 5v,$$

$$x = 3 + 8v.$$

$x = 3 + 8v$, $y = 3 - 5v$ düsturları ilkin tənliyin tam ədədlərdə ümumi həllini verir.

Bizi təkcə qeyri-mənfi ədədlər maraqlandırdıqda isə bütün tam həllərin içində $x \geq 0$, $y \geq 0$ şərtlərinin ödəndiyi, deməli,

$$\begin{cases} 3 + 8v \geq 0, \\ 3 - 5v \geq 0 \end{cases}$$

olduğu halları seçmək lazımdır. Bu tənliklər birlikdə ancaq $v = 0$ olduqda ödənilir. Bu halda $x = 3$, $y = 3$.

(*) qeyri-müəyyən tənliyinin həllərini axtararkən biz fərz edirdik ki, onun tam həlli mütləq var. Bu həmişə belədirmi? a, b əmsalları elədirlərsə ki, tənliyin sol tərəfi müəyyən ədədə bölünür, sağ tərəfi isə yox, onda bu tənliyin həlli yoxdur. Daha dəqiq: a, b, c əmsallı birinci dərəcəli qeyri-müəyyən (*) tənliyi onda və yalnız onda tam ədədlərdə həll ediləndir ki, c sərbəst həddi a və b ədədlərinin ən böyük ortaq böləninə bölünür.

İKİDƏRƏCƏLİ TƏNLİKLƏR

Qeyri-müəyyən tənlikləri antik dövrün axırıncı böyük riyaziyyatçısı İsgəndəriyyəli Diofantın (*III* əsr) şərəfinə diofant tənlikləri adlandırırlar. Diofantın bizə gəlibçatmış altı "Hesab" kitabında həllər və izahatlarla birgə 189 məsələ var. Onlardan biriylə: "Verilmiş kvadratı iki kvadrata ayırmaq" məsələsi ilə tanış olaq.

Bu məsələ a parametrinin (Diofantda o, tam və rasionaldlr) verilmiş qiymətində x və y məchulları üçün ikinci tərtib $x^2 + y^2 = a^2$ tənliyinə ekvivalentdir. Verilmiş tənliyin sadə həlləri məchulların birinin sıfır qiymətində alınır. Diofant digər həlləri

$$y = \kappa x - a$$

əvəzləməsi aparmaqla axtarır, burada κ ixtiyari rasional ədəddir. Nəticədə ilkin tənlik $(\kappa x - a)^2 + x^2 = a^2$ şəklinə gətirilir, buradan x və y məchulları üçün:

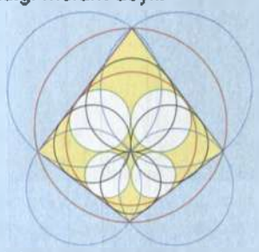
$$x = a\,\frac{2\kappa}{\kappa^2 + 1}, \quad y = a\,\frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1}$$

rasional ifadəsi alınır.

ELEMENTLƏRİNİN UZUNLUQLARI TAM ƏDƏDLƏR OLAN FİQURLAR

Tərəflərinin uzunluqları tam ədəd olan düzbucaqlı üçbucaqlar var. Beş oxşar xassəli digər fiqurlar da varmı?

Sən demə, həm tilləri, həm də diaqonalları tam ədəd olan paralelepipedlər var. Onlardan biri tilləri, 4, 6 və 12 olan düzbucaqlı paralelepipeddir. Tilləri və yan üzlərinin diaqonalları tam ədədlər olan düzbucaqlı paralelepipedlər də var. Bu şərti, məsələn, tilləri 44, 117 və 240 olan paralelepiped ödəyir. Lakin həm tillərinin uzunluğu, həm öz diaqonalları, həm də üzlərinin diaqonallarının tam ədədlər olduğu paralelepipedlərin mövcud olub-olmadığı məlum deyil.



Tərəfləri 210, 280 və 350 olan iki eyni düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzlarının üst-üstə düşməsilə alınmış dördbucaqlı heyrətamizdir. Onun bütün tərəfləri, diaqonalları, daxiline və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları, çevrələrin mərkəzləri, çevrələrə toxunma nöqtələri və tərəflər və diaqonallar arasındakı məsafələr tam ədədlərdir.

Diofant üsulu pifaqor ədədlər üçlüklərini – düzbucaqlı üçbucağın tərəflərini ifadə edən, yəni $x^2 + y^2 = z^2$ tənliyini ödəyən x, y, z tam ədədlər dəstini tapmağa imkan verir. Belə üçlüyə misal 3, 4, 5 ədədləridir.

$x^2 + y^2 = z^2$ qeyri-müəyyən tənliyini

$$\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$$

şəklində yazaq. Ona Diofantın yuxarıda sadalanan mühakimələrini tətbiq edərək

$$\frac{x}{z} = \frac{2\kappa}{\kappa^2 + 1}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\kappa^2 - 1}{\kappa^2 + 1}$$

ifadəsini alırıq.

Həlli tam ədədlərdə tapmaq üçün $\kappa = m/n$ yazaq, burada m, n ixtiyari tam ədədlərdir və $n \neq 0$. Onda

$$\frac{x}{z} = \frac{2mn}{m^2 + n^2}, \quad \frac{y}{z} = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}.$$

Və $x = 2mn$, $y = m^2 - n^2$, $z = m^2 + n^2$ götürmək olar.

Təxminən 1630-cu ildə "Hesab"ın tərcüməsi dahi fransız riyaziyyatçısı Pyer Fermanın əlinə düşdü. Diofantın ölməz əsəri Fermanı çox incə və dərin nəzəri-ədədi araşdırmalara ilhamlandırdı. Ferma Diofantın yolu ilə gedərək, xüsusi halda, isbat etdi ki, a natural ədədi onda və yalnız onda iki tam x, y ədədlərinin kvadratları cəmi şəklində göstərilə bilər ki, a-nın 4-ə bölünməsi zamanı 3 qalığı verən bütün sadə bölənləri a-ya cüt qüvvətlə daxil olsun. O eləcə də belə ədədlərin müxtəlif (x,y) cütlərinin miqdarı üçün düstur tapdı.

Fermanın Diofantın kitabının vərəqlərinin kənarlarında qeyd kimi yazdığı "Hipotenuzu, eləcə də düzbucaq əmələ gətirən tərəflərin cəmi kvadrat olan düzbucaqlı üçbucağı ədədlərdə tapmalı" məsələsi də məşhur oldu. Bu, hipotenuzunun z uzunluğunun və katetlərin uzunluqlarının $x + y$ cəminin tam kvadrat olduğu x, y, z pifaqor ədədlər üçlüklərini tapmaq məsələsi sonsuz sayda həllə malikdir. Onların ən minimalını Ferma tapmışdır: $x = 4\,565\,486\,027\,761$,

$y = 1\,061\,652\,293\,520$,

$z = 4\,687\,298\,610\,289$

(burada $z = 2\,165\,017^2$ və

$x + y = 2\,372\,159^2$).

Daha bir qeyri-müəyyən tənliyin də taleyi əlamətdardır.

Arximed öz dövründə Günəş Allahı Heliosa məxsus olan dörd sürüdə otlayan dörd rəng çalarlı öküzlər haqqında məsələni tərtib etmişdi. O, məsələni şeir formasında Kirenli Eratosfenə yolladı. Məsələ $x^2 - 4\,729\,494\,y^2 = 1$ tənliyinə müncər edilir. Öküzlərin ümumi sayı $7766 \cdot 10^{205541}$ ədədi ilə ifadə olunur. Qoca Helios bu boyda sürünü nəinki öz yuvasında – Günəş sistemində, heç ağılın dərk etdiyi Kainatın hüdudlarında da yerləşdirə bilməzdi. Görünür, öz opponentinə praktiki olaraq həlledilməz məsələni yollayan və aşağıdakı sözlərlə müraciət edən Arximed hiyləgərlik edirdi:

Ey qərib diyarlı, əgər sən baş işlədib
hər sürüdəki ədədi tapsan
Və mənə dəqiq söyləsən,
Onda qələbə ilə qürurlanaraq get,
hesab olunacaq ki,
Bu müdriklikdə sən hər şeyi ötmüsən.
$x^2 - ay^2 = 1$

şəkilli tənlik "Pel tənliyi" adlanır. Eyler səhvən bu tənliyin bir həlli üsulunun riyaziyyatçı Con Pelə məxsus olduğunu güman etmişdi. Ferma bu tənliyi tam ədədlərdə həll edə bilmişdi. Sonralar aydın olmuşdu ki, *XII* əsr hind riyaziyyatçısı Bhaskara onun öhdəsindən gəlibmiş, lakin onun üsulu elmə naməlum qalmışdı.



Diofantın "Hesab"ının titul vərəqi. 1575-ci il.

İki məchullu iki dərəcəli qeyri-müəyyən tənliklər bizim günlərimizdə tam tədqiq olunub. Müasir metodlar, həllər varsa, bütün həlləri təyin etməyə və ya həllərin olmamasını əsaslandırmağa imkan verir. Lakin dərəcəsi ikidən yuxarı tənliklər üçün məsələ xeyli qəlizdir.

David Hilbertin 1900-cü ildə Parisdə Riyaziyyatçıların *II* beynəlxalq konqresində ifadə etdiyi məşhur problemlərdən biri aşağıdakıdır: fərz edək ki, ixtiyari diofant tənliyi verilmişdir, onun tam ədədlərdə həllinin olub-olmadığını sonlu addımların sayı ilə bilməyə imkan verən metodu göstərmək tələb olunur.

1970-ci ildə Leninqrad riyaziyyatçısı Yuri Vladimiroviç Matiyaseviç isbat etdi ki, belə ümumi metod mövcud deyil.

BÖYÜK FERMA TEOREMİ

ƏSRARƏNGİZ HÖKM

Bu teoremi Pyer Ferma Diofantın ikinci "Hesab" kitabının səhifələrinin kənarlarında aşağıdakı kimi səslənən 8-ci məsələnin qarşısında yazmışdı: "Verilmiş kvadratı iki kvadrata ayırmalı". Başqa sözlə, verilmiş a üçün

$$x^2 + y^2 = a^2$$

tənliyini rasional ədədlərdə həll etmək gərəkdir. Ferma qeyd etmişdir: "Kubu iki kuba, kvadrato-kvadratı iki kvadrato-kvadrata və ümumiyyətlə, kvadratdan yuxarı və sonsuzluğa qədər ixtiyari qüvvəti həmin üstlü iki qüvvətə ayırmaq olmaz. Mən bunun həqiqətən möcüzəli isbatını kəşf etdim, lakin kitabın vərəqlərinin kənarları bunun üçün çox dardır".



Bəlkə də nəsillər mənə minnətdar olacaqlar ki, mən onlara qədimdəkilərin heç də hər şeyi bilmədiklərini isbat etdim və bu məndən sonra məşəli oğullara ötürməyə gələnlərin şüuruna nüfuz edəcək...

Pyer Ferma
(1601-1665)

Başqa sözlə,

$$x^n + y^n = z^n$$

qeyri-müəyyən tənliyinin $n \geq 3$-də $x, y, z \neq 0$ şərtini ödəyən x, y, z rasional həlləri yoxdur.

Bu hökm elə böyük və (ya sonuncu) Ferma teoremidir ki, onun da isbatını riyaziyyatçılar 350 il axtarmışlar.

Ferma özü böyük teoremin yalnız $n = 4$ üçün isbatını qoyub getmişdir. 1738-ci ildə teoremin bu halını Leonard Eyler bir də isbat etdi. Lakin onun $n = 3$ üçün isbatı verə bilməsi üçün daha 30 il lazım oldu. Bu isbatların ideyaları ilə tanış olduqda görürük ki, dördüncü dərəcələr üçün isbat kubunkundan niyə bu qədər asandır.

SONSUZ ENMƏ METODU

$n = 2$ halından başlayaq, belə ki, o, sonralar lazım olacaq. Bir halda ki

$$x^2 + y^2 = z^2$$

tənliyini ödəyən ixtiyari rasional ədədlər üçlüyünü onların ortaq məxrəcinə vurmaqla tam ədədlərə çevirmək olar, bu tənliyi tam ədədlərdə həll etmək kifayətdir. Bunun necə edildiyi haqqında "Qeyri-müəyyən tənliklər" məqaləsində danışılıb. Nəticəni yada salaq: $n = 2$ üçün Ferma tənliyinin ixtiyari tam ədədli həllini

$$x = p^2 - q^2,\ y = 2pq,\ z = p^2 + q^2$$

şəklində yazmaq olar, burada p və q ixtiyari tam ədədlərdir, özü də bütün mümkün olan qarşılıqlı sadə p və q üçün tənliyin qarşılıqlı sadə x və y-li bütün həlləri alınacaq.

KİÇİK FERMA TEOREMİ

Aşağıdakı hökm kiçik Ferma teoremi adlanır:

✓ **Əgər a ədədi p sadə ədədinə bölünmürsə, onda elə λ üstü mövcuddur ki, $a^\lambda - 1$ p-yə bölünür, özü də λ $p - 1$-in bölənidir, Xüsusi halda, $a^{p-1} - 1$ p-yə bölünür.**

Bu teorem bütün elementar ədədlər nəzəriyyəsinin əsas teoremidir. Leonard Eyler onun üçün bir neçə müxtəlif isbat tapıb. Bundan əlavə, o, kiçik teoremi p sadə deyil, a ilə qarşılıqlı sadə olan ixtiyari tam ədəd olduğu hal üçün ümumiləşdirib.

Bu düsturlar hələ pifaqorçulara məlum idi və buna görə də onların verdikləri ədədlər üçlükləri adətən pifaqor üçlükləri adlanır. Onların ən məşhuru (3, 4, 5) $p = 2$, $q = 1$ olduqda alınır. $p = 3$, $q = 2$ yazsaq, daha bir məşhur və qədim həll – (5, 12, 13) – tapacağıq.

Beləliklə, $n = 2$-də Ferma tənliyi sonsuz çox həllə malikdir və $n > 2$ olduqda, o, bəyan etdiyi kimi, heç bir həll yoxdur!

Böyük Ferma teoremi, haqlarında irəlidə söhbət gedəcək bir çox riyazi nəzəriyyə ilə bağlıdır. İndi yalnız onu deyək ki. Ferma onun tam ədədli düzbucaqlı üçbucağın sahəsi ilə əlaqəsini bilirdi. Onun Diofantın "Hesabına" qeydlərindən birində deyilir: " Ədədli düzbucaqlı üçbucağın (yəni tərəfləri tam ədədlər olan – Redaktorun qeydi) sahəsi kvadrat (tam ədədin) ola bilməz". Ferma sonra bu hökmün $n = 4$ halında böyük teorema ekvivalent olduğunu göstərmiş və onu isbat etmişdir.

Həqiqətən, fərz edək ki, katetləri x, y və hipotenuzu z tam ədədlər olan düzbucaqlı üçbucaq verilmişdir. Və onun sahəsi

$$S = \frac{1}{2}xy$$

tam ədədin kvadratıdır. Fərz edək ki, x və y qarşılıqlı sadədirlər (əks halda x və y ədədlərini, eləcə də onlarla birgə z-i x və y-in ən böyük ümumi böləninə bölmək olardı). Onda pifaqor üçlükləri üçün düsturları nəzərə almaqla $S = pq(p^2 - q^2)$, burada p, q və $p^2 - q^2$ – qarşılıqlı sadə ədədlərdir. Lakin bir neçə qarşılıqlı sadə vuruğun hasili kvadrata bərabərdirsə, onda bu vuruqların hər biri də kvadrat olmalıdır: $p = \alpha^2$, $q = \beta^2$, $p^2 - q^2 = \gamma^2$, $\alpha^4 - \beta^4 = \gamma^2$. Beləliklə, əgər məsələdə baxılan düzbucaqlı üçbucaq mövcud olsaydı, onda fərqi kvadrat olan iki dördüncü qüvvət (tam ədədlərin) göstərmək olardı. Ferma isbat etmişdir ki, bu, mümkün deyil. Və deməli, belə fərqin dördüncü qüvvətə bərabər olması heç mümkün deyil ki, bu da böyük teoremin $n = 4$ halında isbatıdır. Bu isbat Fermanın bizim günlərimizə gəlib çatmış yeganə tam nəzəri-ədədi isbatıdır. Burada o, güclü metod – sonsuz (və ya qeyri-müəyyən) enmə metodunu tətbiq etmişdir. Bu metodun ideyasını bizim misalımızda izah edək.

$x^4 + y^4 = z^2$ bərabərliyinin mümkünsüzlüyünü isbat etmək lazımdır. Əksini fərz edək: o, x_1, y_1, z_1 tam müsbət ədədləri üçün ödənilir. Enməni həyata keçirmək üçün ən böyüyünün (z_2) birinci üçlüyün ən böyük ədədindən (z_1) kiçik olduğu başqa bir x_2, y_2, z_2 tam ədədlər üçlüyünün də baxılan tənliyi mütləq ödəyəcəyini isbat edirik. Yeni həll haqqında eyni mühakimələri yürütmək və üçüncü x_3, y_3, z_3 ədədlər üçlüyünü, burada $z_3 < z_2$, axtarmaq olar. Və Ferma yazdığı kimi, "beləcə sonsuzluğa qədər əvvəlkindən kiçik olan tam ədədlər tapacağıq. Lakin bu, mümkün deyil, belə ki, hər hansı bir tam ədəd verilibsə (Ferma onun müsbət olduğunu fərz edirdi. – Redaktorun qeydi.), onda ondan kiçik tam ədədlər sonsuzluğu mövcud deyil".

Ferma bəyan edirdi ki, ədədlər haqqında bütün əlamətdar teoremlərini məhz bu

üsulla isbat edib. Enmə nəzəriyyəsi bu gün də ədədlər nəzəriyyəsində böyük rol oynayır.

$n = 4$ ÜÇÜN BÖYÜK FERMA TEOREMİ

Ferma $n = 4$ üçün öz teoreminin qənirsiz isbatını vermişdir, lakin Eylerin isbatı daha aydın və daha qısadır. Buna görə də burada məhz ona baxacağıq.

Fərz edək ki, $x^4 + y^4 = z^2$, yəni $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$ şərtini ödəyən x, y, z ədədlər üçlüyünü tapmışıq. Pifaqor üçlüyü üçün düsturlardan istifadə edək. Alırıq:

$$x^2 = p^2 - q^2,\ y^2 = 2pq,\ z = p^2 + q^2.$$

Hesab etmək olar ki, x və y, deməli, p və q ədədləri də qarşılıqlı sadədir. Onda $y^2 = 2pq$ cüt olduğundan x^2 tək olmalıdır. Lakin $x^2 = p^2 - q^2$, deməli, p və q müxtəlif cütlüyə malikdir, özü də p tək, q cüt olmalıdır. Doğrudan da, cüt ədədin kvadratı 4-ə bölünür, tək ədədin kvadratı 4-ə bölünəndə 1 qalıq verir (belə ki, $(2l + 1)^2 = 4l^2 + 4l + 1$). Buna görə də p – cüt, q – tək ədəd olsaydı, $p^2 - q^2$ fərqi $4k-1$ şəklində olardı, yəni kvadrat olmazdı (axı bütün kvadratlar 4-ə bölünərkən 0 və ya 1 qalıq verir). Biz yenə də pifaqor tənliyi: $x^2 + q^2 = p^2$ alırıq və q-nün cüt olduğunu nəzərə almaqla onun həllini

$$x = r^2 - s^2,\ q = 2rs,\ p = r^2 + s^2$$

şəklində yaza bilərik.

x və q qarşılıqlı sadə ədədlər olduğundan (əks halda x və $y^2 = 2pq$ ümumi vuruğa malik olardı), r və s də qarşılıqlı sadədirlər. Bu zaman rs $(r^2 + s^2)$ $pq/2 = y^2/4$ kvadratdır, deməli, hər iki ədəd və $r^2 + s^2$ ədədi də kvadrat olmalıdır: $r = \alpha^2$, $s = \beta^2$, $r^2 + s^2 = \gamma^2$. Eyni $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^2$ tənliyi ödəyən yeni ədədlər üçlüyü – α, β, γ tapılmışdır. Onun ən kiçik γ ədədi z-dən kiçikdir:

$$\gamma^2 = r^2 + s^2 = p < p^2 + q^2 = z < z^2.$$

Beləliklə biz enməni həyata keçirdik və Ferma və Eylerin ardınca bu qərara gələ bilərik ki, teorem isbat olundu.

$n = 3$ HALINDA BÖYÜK FERMA TEOREMİ: EYLER CƏHDİ

Eyler $n = 3$ halında Ferma teoremini 1768-ci ildə isbat etmişdir. Bundan ötrü tamamilə yeni ideya tələb olundu. Bu ideya adi tam ədədlər haqqında məsələləri araşdırarkən $a + b\sqrt{-n}$ şəkilli ifadələr tətbiq etməkdən ibarət idi, burada a, b tam ədədlər və $n > 0$-dır. (Mənfi ədədlərin kökləri olan ifadələrə hansı məna verilməsi haqqında "Kompleks ədədlər" fəslinə bax.) Eyler bu barədə J. L. Laqranja yazırdı: "Mən sizin irrasional, hətta xəyali ədədləri analizin təkcə rasional ədədlər hissəsinə tətbiqinizə heyran qaldım. Artıq neçə ildir ki, məndə də oxşar ideyalar baş qaldırıb...mən burada (Rusiyada. – Redaktorun qeydi) rus dilində tam cəbri çap etdirərək onda bu üsulu müfəssəl təsvit etmişəm və mən göstərmişəm ki, $x^2 + ny^2 = (p^2 + nq^2)^\lambda$ tənliyini həll etmək üçün aşağıdakı tənliyi həll etmək kafidir: $x + y\sqrt{-n} = (p + q\sqrt{-n})^\lambda$."

Öz isbatında Eyler $\alpha = a + b\sqrt{-3}$ şəklində ifadələrə baxmışdır. Və burada o, fövqəladə mühüm addım etdi: bu ifadələrə tam ədədlərin xassələrini şamil etdi. Bu nə deməkdir? Adi tam ədədlər üçün zəngin riyaziyyat mövcuddur: onları nəinki toplamaq, çıxmaq, vurmaq olar, eləcə də onların arasından vahidi, sadə ədədləri, qarşılıqlı sadə ədədləri ayırmaq olar. Nəhayət, ixtiyari ədədin sadə vuruqlara ayrılmasının yeganəliyi haqqında fundamental teorem mövcuddur. Fərz edirdilər ki, həmin xassələr ancaq 1, 2, 3,...natural sırasına aiddir və "tam ədəd" anlayışı heç bir ümumiləşməyə yer qoymur. Eyler fərz etdi ki, $\alpha = a + b\sqrt{-3}$ şəklində ədədlər eyni xassələrə malikdir, onların arasında da sadə ədədlər var, onlar üçün də sadə vuruqlara ayrılmanın birqiymətliliyi qanunu doğrudur. Bundan çıxış edərək o, $n = 3$ halında böyük teoremi isbat etdi. Lakin Eyler öz fərziyyələrini əsaslandırmadı. Bu məsələlər *XIX* əsrdə yenə də riyaziyyatçıların qarşısında və yenə də Ferma teoreminin isbatı ilə əlaqədar durdu.

$n = 3$ HALINDA BÖYÜK FERMA TEOREMİNİN İSBATININ İDEYASI

$$x^3 + y^3 = z^3 \qquad (*)$$

qeyri-müəyyən tənliyinin tam müsbət həllərinin olmadığını isbat etmək tələb olunur. İsbatı enmə metodu ilə aparacağıq. Fərz edək ki, (*) tənliyi (x, y, z) həllərinə malikdir. İsbat edək ki, onda o, birincidən kiçik olan başqa (x_1, y_1, z_1) həllinə də malikdir (x_1, y_1, z_1 ədədlərinin ən böyüyü x, y, z ədədlərinin ən böyüyündən kiçikdir). Həmin mühakimə ilə (x_1, y_1, z_1)-dən (x_2, y_2, z_2)-yə keçirik və s. Lakin verilmiş tam müsbət ədəddən kiçik olan yalnız sonlu sayda tam müsbət ədədlər var. Deməli, ilkin fərziyyə doğru deyil.

Beləliklə, fərz edək ki, (x, y, z) həlli mövcuddur. x, y, z ədədlərini qarşılıqlı sadə hesab edəcəyik. Onda aydındır ki, onların ikisi tək, biri cüt olmalıdır. Fərz edək ki, x və y tək, z cütdür (əks halda, əgər x cütdürsə, mühakimə $x^3 = z^3 - y^3$, y cüt olanda isə $y^3 = z^3 - x^3$ kublar fərqinə nəzərən aparılacaq). $p = (x + y)/2$, $q = (x - y)/2$ yazaq, buradan $x = p + q$, $y = p - q$. p və q ədədləri müxtəlif cütlükdə olmalıdırlar. (*) tənliyində yazıb alırıq

$$x^3 + y^3 = 2p(p^2 + 3q^2) = z^3.$$

z cüt, $p^2 + 3q^2$ tək ədəd olduğundan z^3 8-ə və p-yə bölünür və cüt olmalıdır. Deməli, q təkdir. Eləcə də qeyd edək ki, p və $p^2 + 3q^2$ yalnız bir ümumi vuruğa – 3-ə malik ola bilərlər. Buna görə də Eyler iki hala baxır:

1) p 3-ə bölünmür,

2) p 3-ə bölünür.

İkinci hal asanca birinciyə müncər edildiyindən biz yalnız birinci hala baxacağıq.

Beləliklə, p və q ədədləri qarşılıqlı sadədirlər, bundan əlavə, p cüt, q təkdir, lakin bir halda ki, p 3-ə bölünmür, deməli, p və $p^2 + 3q^2$ qarşılıqlı sadədirlər. Sonrakı isbatı aparmaq üçün Eyler cəsarətli addım atır – $p^2 + 3p^2$-nı vuruqlara ayırır:

$$p^2 + 3q^2 = (p + q\sqrt{-3})(p - q\sqrt{-3}).$$

Və bu vuruqlara elə baxır ki, sanki onlar tam ədəddirlər. Xüsusi halda $2p(p + q\sqrt{-3})(p - q\sqrt{-3}) = z^3$ olduğundan bütün vuruqlar qarşılıqlı sadədirlər. Eyler fərz edir ki,

$$2p = f^3,\ p + q\sqrt{-3} = (r + s\sqrt{-3})^3,$$

$$p - q\sqrt{-3} = (r - s\sqrt{-3})^3.$$

$r \pm s\sqrt{-3}$-i kuba yüksəldərək və $(\sqrt{-3})^2 = -3$ qəbul edərək o alır:

$$p = r(r - 3s)(r + 3s),$$
$$q = 3s(r + s)(r - s).$$

Burada r, s müxtəlif cütlüklü ədədlərdir, özü də, göründüyü kimi, r cüt, s tək olmalıdır.

Digər tərəfdən, $2p = f$, yəni $2r(r - 3s)(r + 3s) = f$. Bütün vuruqlar qarşılıqlı sadədirlər, onda onların hər biri kub olmalıdır:

$$r + 3s = g^3,\ r - 3s = h^3.$$

Deməli, $2r = h^3 + g^3 = f$.

Biz (*) tənliyinin yeni (f, g, t) həllini aldıq ki, o da (x, y, z) birinci həllindən kiçikdir. Beləliklə, hökm etmək olar ki, $n = 3$ üçün Ferma tənliyinin tam müsbət həlləri yoxdur.

BÖYÜK TEOREM VƏ CƏBRİ ƏDƏDLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

1847-ci il martın 1-də məşhur fransız riyaziyyatçısı və fiziki Qabriel Lame Paris elmlər akademiyasının iclasında böyük teoremin yeni isbatını məruzə etdi. Bu zaman o,

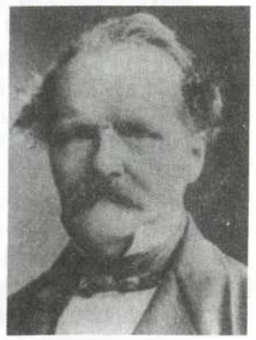
$$b_0 + b_1\xi + b_2\xi^2 + \ldots + b_{\lambda-1}\xi^{\lambda-1}$$

şəkilli ədədlərlə əməliyyat aparırdı., burada b_i tam, ξ 1-dən fərqli elə bir kompleks ədəddir ki, $\xi^\lambda = 1$. Qeyd edək ki, $\lambda = 3$-də Lame ədədləri Eylerin tətbiq etdiklərini saxlayır. Həqiqətən, $\xi^3 - 1 = (\xi - 1)\cdot(\xi^2 + \xi + 1)$, lakin $\xi \neq 1$, deməli, $\xi^2 + \xi + 1 = 0$, buradan

$$\xi_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}.$$

Lame öz isbatında o müddəadan çıxış edirdi ki, (*) şəkilli ədədlər üçün adi hesabın bütün qanunları, xüsusi halda, sadə vuruqlara ayrılmanın birqiymətliliyi qanunu doğrudur.

Digər məşhur fransız riyaziyyatçısı, Jozef Liuvil qeyd etmişdir: "...edilmiş cəhdlər (yəni Lamenin isbatı. – Redaktorun qeydi.) mənə göstərdi ki, kompleks ədədlər üçün əvvəlcə hasilin sadə vuruqlara yalnız bir üsulla ayrıla biləcəyi haqqında elementar fərziyyəyə oxşar olan teoremi təyin etmək lazım idi. Lamenin analizi mənim bu fikrimi yalnız qətiləşdirdi. Burada doldurulması lazım gələn boşluqlar yoxdur ki?"



Ernst Kummer (1810-1893)

Toxunulan məsələlər cəbri ədədlərin, yəni tam əmsallı tənliklərin kökləri olan ədədlərin hesabına aiddir ("Transendent ədədlər" məqaləsinə bax). Liuvilin qeydi nəticəsində riyaziyyatın bu bölməsi, demək olar ki, bir il fransız alimlərinin diqqət mərkəzində oldu. Onunla israrla Lame özü, Pyer Vansel, hətta böyük Ogüsten Koşi

BÖYÜK FERMA TEOREMİNƏ "AXIRINCI HÜCUM"

XX əsrin sonu riyaziyyatçılar üçün böyük sensasiya ilə əlamətdar oldu: böyük Ferma teoremini isbat etmək cəhdləri axır ki uğurla başa çatdı!

1995-ci ilin yayında aparıcı riyaziyyat jurnallarından birində – "Riyaziyyat annalları"nda – teoremin tam isbatı dərc olundu. İki məqaləyə bölünən bu isbat bütün nömrəni tutmuşdu. İsbatın əsas hissəsi Prinston universitetinin (ABŞ) professoru, 42 yaşlı ingilis riyaziyyatçısı Əndryü Vaylsa məxsus idi. O, teoremlə beş il ərzində "vuruşmuşdu". Axırıncı mərhələdə işə Oksford universitetinin professoru Riçard Teylor qoşulmuşdu. O, Vaylsın ilkin isbatındakı boşluqları aradan qaldırmağa kömək etmişdi.

Bu ilkin isbatı Vayls 1993-cü il iyunun 23-də Kembricdə İsaak Nyuton adına Riyazi elmlər institutunda oxuduğu mühazirələr silsiləsində şərh etmişdi. Bu, gərgin zahid həyatının məhsulu idi. Vaylsın etirafına görə, zövcəsindən başqa heç kim onun bu oblastda işlədiyini bilmirdi.

Vaylsın ideyaları $x^n + y^n = z^n$ Ferma tənliyi və

$$y^2 = x(x - a^n)(x - c^n) \qquad (*)$$

tənliyi ilə verilən elliptik əyrilər arasında əlamətdar əlaqəyə əsaslanırdı (ilk dəfə ona fransız riyaziyyatçısı İv Eleqarş 1970-ci ildə diqqət yetirmişdi). Əvvəllər, 1955-ci ildə yapon riyaziyyatçısı Yutaka Taniyama elliptik əyrilər çoxluğunun modulyarlıq adlanan bir xassəsini hipotez şəklində ifadə etmişdi. 1985-ci ildə alman alimi Gerhard Frey fərz etdi ki, (*) əyriləri üçün bu hipotezin doğruluğundan Ferma teoremini çıxarmaq olar, 1986-cı ildə isə amerikalı Kenet Ribert Freyin fərziyyəsini isbat etdi. Beləliklə, Ferma teoremini isbat etmək üçün Taniyamanın hipotezini isbat etmək qalırdı. Məhz bunu da Vayls kembric mühazirələrində şərh etdi.

Az tanınmış riyaziyyatçıdan belə cəsarəti kimsə gözləmirdi. Mütəxəssislər Vaylsın isbatını yoxlamağa başladılar. Və bir neçə aydan sonra (böyük teoremin isbatında dəfələrlə olduğu kimi) onlar Vaylsın isbatında boşluqlar gördülər. Lakin onu ideyalarının bütövlükdə dərin, gözəl və müasir olduğu qəbul edildi.



Əndryü Vayls (1952)

Vayls isbatı düzəltməyə girişdi. Demək olar ki, bir il keçdi və 1994-cü ilin avqustunda o, Sürixdəki növbəti Beynəlxalq riyazi konqresə dəvət aldı. Riyaziyyat aləmi səbirsizliklə onun məruzəsini gözləyirdi. Vayls, əlbəttə ki, öz çıxışına kimi isbatı qurtarmaq istəyirdi, lakin çatdırmadı. Həmkarları görürdülər ki, hətta məruzəyə lap az qalmış da o, auditoriya yanındakı pilləkənlərdə oturub işləyir. Və nəhayət, kafedraya qalxan Vayls gözləməkdə olan zala bildirəndə ki, o hələ isbatı tamamlamayıb, sürəkli alqışlar qopdu.

Lakin artıq 1994-cü ilin 19 sentyabrında, konqresdən cəmisi bir ay sonra, Uaylsın sözlərinə görə, ona vəhy gəldi və bu da ona (əməkdaşlığa cəlb edilmiş Teylorla birgə) mövcud boşluğu doldurmağa kömək etdi. Bu dəfə isbat ən vasvası yoxlamalardan çıxdı və dərc edildi. Böyük teoremin 350 illi isbat tarixi belə tamamlandı.

Bəs Fermanın isbatı (o, mövcud olsaydı) Vaylsınkına oxşar ola bilərdimi? Vaylsın bu barədə fikri belədir: "Ferma belə isbata malik ola bilməzdi. Bu, iyirminci əsrin isbatıdır".

məşğul olurdular. On- ların araşdırmaları sonralar halqa – tam ədədlərin toplama və vurmaya görə xassələrinin ən ümumi halda əks olunduğu riyazi obyekt anlayışının formalaşmasına gətirdi.

Lakin 1847-ci ilə qayıdaq. Həmin yaz alman riyaziyyatçısı Ernst Kummer Liuvilə məktubunda öz heyrətamiz kəşfi haqqında məlumat verdi. Sən demə, (*) şəklində ədədlərin sadə vuruqlara ayrılması haqqında teorem doğru deyil. Bu zaman Kummer sadə ədəd anlayışının özünü dəqiqləşdirdi.

Natural sadə ədədləri aşağıdakı xassələrin ixtiyari biri ilə səciyyələndirmək olar:

1) onlar vahiddən fərqli ixtiyari iki vuruğun hasilinə ayrılmırlar;

2) ab hasili sadə p ədədinə bölünürsə, onda vuruqlardan azı biri p-yə bölünməlidir.

Adətən bu xassələrin birincisini sadə ədədin tərifi kimi qəbul edir, ikincisini isə isbat edirlər.

Kummer müəyyənləşdirdi ki, (*) şəkilli ədədlər 1 xassəsinə malik olub, 2 xassəsinə malik olmaya bilərlər. Bu necə ola bilər? Ən adi tam ədədlərlə misallar göstərək.

Fərz edək ki, yalnız cüt ədədlərimiz var. Onda 2, 6, 10, 14, ...ədədləri 1 xassəsinə əsasən "sadə" olacaqlar (onların bölənlərindən biri təkdir, lakin biz ona baxmırıq), lakin 2 xassəsi onlar üçün ödənmir. Məsələn, $60 = 2 \cdot 30 = 6 \cdot 10$, yəni $6 \cdot 10$ hasili 30 "sadə" ədədinə bölünür, lakin vuruqların heç biri ona bölünmür. 60 ədədi burada iki müxtəlif üsulla "sadə" vuruqlara ayrılıb. (*) şəkilli ədədlər üçün sadə ədədlərə ayrılmanın birqiymətli olmadığını görmək çətin idi, lakin o, ilk dəfə $\lambda = 23$-də üzə çıxır.

Cüt ədədlərlə olan misal belə bir ideyaya gətirir: əgər (*) şəkilli ədədlərə tək ədədlərin müəyyən oxşarını əlavə etsəydik, onda sadə vuruqlara ayrılışın birqiymətliliyi bərpa oluna bilərdi. Ernst Kummer belə də elədi. O, daxil etdiyi obyektləri ideal vuruqlar adlandırdı və onların köməyi ilə n sadə üstlərin geniş sinfi üçün böyük teoremi isbat etdi. Lakin o, teoremi ümumi halda isbat edə bilmədi. Əvəzində onun (*) şəkilli ədədlərin hesabını qurmaq yolu *XIX* əsrdə məhsuldar inkişaf aldı. Cəbri ədədlərin ən ümumi halqalarının hesabını alman riyaziyyatçıları L. Kroneker və Y. B. P. Dedekind qurdular. Dedekind cəbrə yeni mühüm obyektlər – ideallar daxil etdi.

HƏR HALDA O SÜBUT EDİLDİ!

XX əsrdə böyük teoremin sürətlə inkişaf edən riyazi nəzəriyyə – cəbri həndəsə ilə əlaqəsi aşkar edildi. Məhz bu nəzəriyyənin çərçivəsində uğur əldə edildi. Teoremin isbatında bir neçə riyaziyyatçının payı var, lakin nöqtəni ingilis alimi Əndryü Vayls qoydu. Vaylsın isbatı çox mürəkkəbdir. O, elliptik əyrilərin bir məsələsinin həllinə, yəni üçüncü dərəcəli cəbri əyrilərə münсər edilir.

Böyük Ferma teoremi elə bil xüsusi xarakter daşıyır. Lakin onu isbat etmək cəhdləri riyaziyyatı yeni ideyalarla, metodlarla, nəzəriyyələrlə zənginləşdirdi. Böyük teoremin yenilməz keçilməz əhəmiyyəti elə bundadır.

HƏQİQİ ƏDƏDLƏR

RASİONAL ƏDƏDLƏR

Əyləncəli riyaziyyat folklorunun xəzinəsində belə bir məsələ var: "Şüşə qab tıxacla birgə 11 sikkə edir, özü də şüşə qab tıxacdan on sikkə bahadır. Tıxac neçəyədir?" Bu məsələnin ləzzəti ondadır ki, çox düşünmədən hamı: "Tıxacın dəyəri bir sikkədir" cavabını verir. Və əlbəttə, səhv edirlər! Bəziləri, yoxlama aparır və öz səhvinə əmin olandan sonra bildirir ki, məsələnin ümumiyyətlə həlli yoxdur. Həqiqətən, bu məsələ tam ədədlərdə həll olunmur, lakin onun həlli üçün uyğun gələn kəsr ədədlər mövcuddur: qabın dəyəri on yarım sikkə, tıxacınkı yarım sikkədir.

Qədim zamanlarda tam və kəsr ədədlərə müxtəlif cür yanaşırdılar. "Əgər sən vahidi bölmək istəyirsənsə, riyaziyyatçılar sənə güləcək və imkan verməyəcək", – Afina Akademiyasının banisi Platon yazırdı. Lakin heç də bütün qədim yunan riyaziyyatçıları Platonla razılaşmırdılar. Arximed və İsgəndəriyyəli Heron kəsrlərlə sərbəst rəftar edirdilər. Hətta natural ədədlərə müqəddəs həyəcanla yanaşan Pifaqor musiqi şkalası nəzəriyyəsini yaradaraq əsas musiqi intervallarını kəsrlərlə əlaqələndirirdi. Doğrudur, Pifaqor və onun şagirdləri kəsr anlayışının özündən istifadə etmirdilər. Onlar yalnız ədədlərin nisbətindən danışmağı özlərinə rəva görürdülər.

Maraqlıdır ki, *XVIII* əsrin bir çox Avropa hesab dərsliklərində kəsrlər bölməsi kitabın sonunda yerləşirdi. İngilis maarifçisi Con Kersi Vingetin "Hesab"ının 16-cı nəşrinin (London, 1735) girişində bu adəti belə izah edir: "Riyaziyyatla onun pul haqq-hesablarında, ticarətdə və digər oxşar əlavələrdə faydalı olduğu qədər tanış olmaq üçün ...indi tam ədədlər hesabının sadə və faydalı şərhi verilir ki, bununla da kəsrlərin dik yollarına buraxılış açılır. Onları da görən bəzi tələbələr elə məyus olurlar ki, dayanır və hayqırırlar: "Non plus ultra (latınca " bundan artıq heç nə" – Redaktorun qeydi.), biz o yana getməyəcəyik!".

Bizə məlum olan riyazi əsərlərin birinin məhz kəsrlərlə əməliyyat çalışmalarından başlanması, buna görə, əlamətdardır.

KƏSRLƏRLƏ ƏMƏLİYYAT QAYDALARI

İxtisar: $\frac{m \cdot a}{m \cdot b} = \frac{a}{b}$, əgər $m \neq 0$.

Toplama və çıxma: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}$,

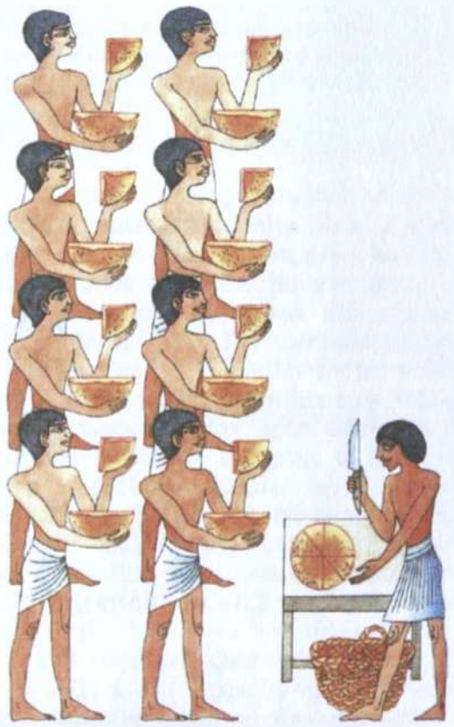
$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}$.

Vurma və bölmə: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$,

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

ALİKVOT KƏSRLƏR

Raynd papirusu adlanan papirus e. ə. 1650-ci ildə katib Axmes tərəfindən üzü köçürülmüş qədim Misir riyazi mətnidir ("Qədim Misir" məqaləsinə bax). Onda yalnız surətləri 1 olan kəsrlərə baxılır. İstisna



7 çörəyi 8 bərabər hissəyə necə bölməli.

yalnız 2/3 kəsri üçün edilib. Misirlilərin üstünlük verdiyi $1/n$ (n natural ədəddir) şəklində kəsrlər müasir riyaziyyatda alikvot kəsrlər (latınca aliquot – "bir neçə" sözündən) adlanır. Hər hansı ədədi alikvot kəsrlərin cəmi şəklində təqdim etmək üçün bəzən böyük ixtiraçılıq göstərmək lazım gəlirdi. Məsələn, 2/43 ədədi papirusda belə ifadə olunub:

$$\frac{2}{43} = \frac{1}{42} + \frac{1}{86} + \frac{1}{129} + \frac{1}{301}.$$

Ədədləri hər dəfə vahidin hissələrinin cəminə toplayaraq onlar üzərində hesabi əməllər aparmaq çox namünasibdir. Misirlilərin alikvot ədədlərə hərisliyinin hər hansı bir izahı varmı? Belə bir məsələyə baxaq: "7 çörəyi 8 adam arasında bölməli".

Müasir məktəbli məsələni yəqin ki, belə həll edərdi: hər bir çörəyi 8 bərabər hissəyə bölüb hər bir adama hər çörəkdən bir hissə verməli. Axmesdə isə bu məsələ belə həll olunub:

$$\frac{7}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

olduğundan hər bir adama bir çörəyin yarısını, dörddə birini və səkkizdə birini vermək gərəkdir. Və bizim məktəbliyə 49 kəsim etmək lazım gələrdisə, Axmesə cəmisi 17-si lazım gələrdi, yəni Misir üsulu, demək olar ki, 3 dəfə qənaətcildir.

ALTMIŞLIQ VƏ ONİKİLİK KƏSRLƏR

Altmışlıq say sistemindən istifadə edən babillilər kəsrlərlə çox incə rəftar edirdilər. Beynəlnəhr (İki çayarası) əhalisinin öz ədəd sistemini yaratmalarındakı ardıcıllıq və əsaslılıq heyrət doğurur: onlar altmışlıq əsası nəinki tam ədədlərə, eləcə də kəsrlərə də tətbiq edirdilər.

Onikilik kəsrlər qədim Romada yayılmışdılar. Sonralar çəki vahidi olan miss sikkəni (ass) romalılar 12 bərabər hissəyə – unsiyalara bölürdülər. Qədim Roma məktəblərində kəsrlərlə hesablamalara xüsusi diqqət ayrılırdı. Horatsi "Poeziya elmi"ndə müəllimin şagirdlə belə bir dialoqunu gətirir:

"Albinin oğlu! mənə söylə: əgər biz beş unsiya götürüb birini çıxsaq, nə qalar?"
– "Assın üçdə biri".
– Çox gözəl!

Lakin sən öz varidatını xərcləməl Bəs əvvəlki beşə birini əlavə etsək, cəmi nə olar?"
– "Yarım".

Gördüyümüz kimi, gənc romalı qabiliyyətlə onikilik kəsrlər üzərində əməllər aparırdı:

$$\frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}; \quad \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

RASİONAL ƏDƏD ANLAYIŞI

Albinin oğlu orta əsrlər avropalılarına ləyaqətli misal ola bilərdi. Hətta min beş yüz il sonra da onlar kəsrlər üzərində əməllərə qeyri-adi sənət kimi baxırdılar. Məsələn, Peruc, Neapol, Milan, Florensiya, Roma və Venesiyada riyaziyyatı tədris edən Luka Paçolini kəsrlər barəsində "vurma" sözünün işlədilməsi özündən çıxarırdı, çünki bu zaman hasil vuruqlardan kiçik olurdu.

Kəsrlərin vurulması ilə digər məna çətinliyi də bağlıdır. Ədədi n natural ədədinə vurmaq onu toplanan kimi n dəfə götürmək deməkdir, lakin nəyisə, məsələn, 2/3 dəfə götürməyin heç bir mənası yoxdur. " 2/3-ə vurmaq" sözünü necə başa düşmək lazımdır? Müasir məktəbli deyər: "2/3-ə vurmaq iki dəfə üçdə biri götürmək deməkdir".

Terminlərin mənasının dəyişməsi və genişlənməsi ilə biz digər hallarda da, məsələn, mənfi ədədləri daxil edərkən rastlaşırıq. Aydındır ki, 2 almadan 3 alma çıxmaq olmaz, lakin bununla belə, temperatur 2 dərəcədən 3 dərəcəyə düşə bilər. Bunu biz təbii qəbul edirik.

Beləliklə, m/n şəklində olan ədədlər, (burada m, n tam və $n \neq 0$,) rasional ədədlər adlanır. Əgər $n = 1$-dirsə, m/n rasional ədədi tam ədəddir.

Bütün tam ədədlər çoxluğunda çıxma əməlinin qeyri-məhdud yerinə yetirilə bilənlik xassəsinə: ixtiyari tam ədəddən ixtiyari tam ədədi çıxmaq olar – uyğun olaraq rasional ədədlər oblastında bölmə əməli qeyri-məhdud yerinə yetirilə bilənlik əldə edir. Axı bir kəsri digər kəsrə bölərkən biz yenə kəsr alırıq. Yeganə istisna sıfırdır: ona bölmək olmaz.

Beləliklə, rasional ədədlər üzərində ixtiyari hesabi əməli (toplama, çıxma, vurma, bölmə) həyata keçirərək biz bu ədədlərin hüdudlarından çıxmırıq. Hər dörd hesabi

əməlin verildiyi və onların bu çoxluğun hüdudlarından çıxarmadığı belə ədədlər çoxluğu meydan adlanır.

Niyə sıfır xüsusi vəziyyətdə bulunur? Məsələ bundadır ki, heç olmasa bir dəfə sıfıra bölməyə icazə versək, biz müxtəlif möcüzələrə hazır olmalıyıq. Məsələn, $0 \cdot 1 = 0 \cdot 2$ bərabərliyinin hər iki tərəfini sıfıra bölsək, $1 = 2$ alırıq və beləliklə nə istəsən "isbat" etmək olar.

ONLUQ KƏSRLƏR

Bizim günlərdə adi kəsrlərdən nadir hallarda istifadə edilir, onluq kəsrlərə üstünlük verirlər. Lakin heç də hər bir adi kəsri sonlu onluq kəsr şəklində təsvir etmək mümkün olmur. Belə ki, 1/7-i onluq kəsr şəklində yazmaq üçün sonsuz sayda işarə tələb olunur: 0,1428671...



Simon Stevin (1548-1620)

Bəs niyə insanlar adi kəsrlərdən onluq kəsrlərə keçdilər? Ona görə ki, onlar üzərində əməllər, xüsusən toplama və çıxma çox sadədir. 3/50 və 7/40 kəsrlərini toplayaq. Əvvəlcə onların ən kiçik ortaq bölünənini tapmaq (bu, 200 ədədidir), sonra onu 50-yə bölmək və nəticəni (4 ədədini) birinci kəsrin surət və məxrəcinə vurmaq lazımdır. 12/200 alınır. Sonra 200-ü 40-a bölmək və nəticəni (5 ədədini) ikinci kəsrin surət və məxrəcinə vurmaq lazımdır. Biz kəsrləri ortaq məxrəcə gətirdik. Yalnız indi biz surətləri toplaya və 47/200 cavabı ala bilərik. Bu kəsrləri onluq yazılışda təqdim etsək, 3/50 = 0,06 və 7/40 = 0,175, cəm ani alınır. Əlbəttə ki, 1/7 ədədini müəyyən dəqiqliklə yazmaq lazım gəlir, məsələn, 0,143 və ya 0,14387, lakin axı həyatda hər şey öz dəqiqlik hüdudlarına malikdir.

Bu gün biz onluq kəsrlərdən təbii və sərbəst istifadə edirik. Lakin bizə təbii gələn nəisə orta əsr alimləri üçün əsl əlhəd daşına dönmüşdü. Qərbi Avropada *XVI* əsrdə tam ədədlərin geniş yayılmış onluq təsvir sistemi ilə birgə hesablamalarda hər yerdə hələ babillilərin qədim ənənələrinə gedib-çıxan altmışlıq kəsrlərdən istifadə olunurdu. Həm tam, həm kəsr ədədlərin yazılışını vahid sistemə gətirmək üçün holland alimi Simon Stevinin işıqlı zəkası gərək oldu. Belə görünür ki, Stevin üçün onluq kəsrlərin kəşfinə onun tərtib etdiyi mürəkkəb faiz cədvəlləri təkan vermişdir. 1585-ci ildə o, onluq kəsrlərin izahını verdiyi "Onluq" kitabını nəşr etdirdi. Stevinin işarələri, onun həmkarları və xələflərinki kimi, kamilliyi ilə fərqlənmirdi. Onlar 3,1415 ədədini belə yazırdılar:

3 ⓪ 1 ① 4 ② 1 ③ 5 ④ (S. Stevin),

0 I II III IV
3. 1 4 1 5 (Y. X. Beyer),

3|1415 (A. Jirar).

Yalnız *XVIII* əsrin birinci çərəyində kəsr ədədləri adi onluq nöqtənin köməyi ilə yazmağa başladılar. Bir sıra ölkələrdə, o cümlədən, Rusiya və Azərbaycanda nöqtə əvəzinə vergüldən istifadə edilir. Onu 1661-ci ildə alman riyaziyyatçısı Andreas Bökler daxil etmişdir.

DE

THIENDE

Leerende door onghehoorde lichticheyt allen rekeningen onder den Menschen noodich vallende, afveerdighen door heele ghetallen sonder ghebrokenen.

Beschreven door SIMON STEVIN *van Brugghe.*



TOT LEYDEN,
By Christoffel Plantijn
M. D. LXXXV

Simon Stevinin kitabının titul səhifəsi

SONLU VƏ DÖVRİ ONLUQ KƏSRLƏR

Hər hansı adi m/n kəsrini onluq kəsr şəklində göstərmək üçün "bucaqlı" bölmə məktəb üsulundan istifadə etmək kifayətdir. Müəyyən hallarda belə bölmə sonlu sayda əməliyyatdan sonra qurtaracaq və biz sonlu onluq kəsr alacağıq: $3/25 = 0{,}12$, digər hallarda isə bölmə prosesi sonsuz olacaq: $1/3 = 0{,}3333\ldots$ m/n kəsrinin şəklinə görə bunu əvvəlcədən demək olarmı? Sən demə, əgər n ədədinin sadə vuruqlara ayrılışında ancaq 2 və 5 ədədlərinə rast gəlinirsə, onluq kəsr sonlu olacaq; əks halda onluq yazılışda mütləq periodik təkrarlanan ədədlər qrupu – dövr baş qaldıracaq.

Fərz edək ki, 0,199819981998... dövri onluq kəsri var... Onu həm də dövrü mötərizələrdə göstərməklə 0,(1998) şəklində yazırlar. Onu müəyyən adi kəsr şəklində göstərmək olarmı? Qeyd edək ki, əgər biz verilmiş kəsri 10000-ə vursaq, yəni vergülü 4 işarə sağa çəksək və 1998 çıxsaq, onda yenə də həmin şəkildə kəsrə malik oluruq. Onu x-lə işarə edərək $10000x - 1998 = x$ alırıq, buradan

$$x = \frac{1998}{9999} = \frac{222}{1111}.$$

İlkin kəsrə başlanğıc həddi 0,1998 və vuruğu 1/10000 olan sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi kimi baxsaq, eyni nəticə alınır ("Ədədi və həndəsi silsilələr" məqaləsinə bax).

Alman riyaziyyatçısı Karl Fridrix Qauss hələ öz uşaqlıq illərində qarşıya belə bir sual qoydu: p 2 və 5-dən fərqli sadə ədəddirsə, $1/p$ kəsrinin dövrü nəyə bərabər olacaq? Ədədlər nəzəriyyəsində teorem var ki (kiçik Ferma teoremi), sadə p ədədi üçün $10^{p-1} - 1$ p-yə bölünür, buna görə də $10^{p-1} = pk + 1$ yazmaq olar, burada k müəyyən natural ədəddir. Buradan $1/p \cdot 10^{p-1} = k + 1/p$ alırıq, bu isə o deməkdir ki, əgər $1/p$ onluq kəsrində vergülü $p-1$ işarə sağa keçirsək, eyni kəsr hissəli ədəd alınacaq. Deməli, $p - 1$ dövrün mislinə bərabərdir. Eyni mülahizələri tətbiq etməklə, dəqiqləşdirmək olar: periodun uzunluğu r-in elə ən kiçik qiymətinə bərabərdir ki, $10^r - 1$ p-yə bölünür.

Əgər biz $1/6 = 0{,}1666\ldots$, $7/30 = 0{,}2333\ldots$ kimi ədədlərə baxsaq, görərik ki, dövr vergüldən dərhal sonra başlanmır. Bu niyə belə olur. Sən demə, saf dövri onluq kəsrlər, yəni, dövrü dərhal vergüldən sonra başlayanlar, yalnız o hallarda peyda olur ki, ixtisar olunmayan m/n kəsrinin məxrəci 2 və 5-ə bölünmür.

Biz rasional ədədlərin çoxşaxəli xassələrinin yalnız kiçik hissəsinə baxdıq. Onların bir sıra müəmmalarını özünüz də açа bilərsiniz. Bundan ötrü sizə yalnız qələm, kağız və bir az da dəyanət gərəkdir.

İRRASİONAL ƏDƏDLƏR

Bilirik ki, irrasional ədədlər sonsuz dövri onluq kəsrlərlə ifadə olunur, məsələn 1/1998 = 0,000500500500... ədədi kimi. Lakin heç şey onluq kəsr şəklində yazılışında heç bir dövrü olmayan ədədi təsəvvür etməyə mane ola bilməz. Belə ədədlər irrasional ədədlər adlanır.

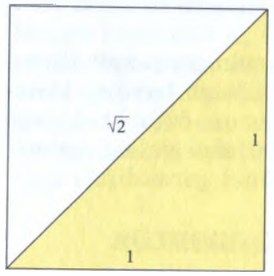
"AĞILSIZ" ƏDƏDLƏRİN TARİXİ

İrrasional ədədlərin tarixi hələ e. ə. *VI* əsrdə pifaqorçuların heyrətamiz kəşfinə gedib çıxır. Hər şeysə, sanki sadə sualdan başladı: tərəfi 1 olan kvadratın diaqonalı nəyə bərabərdir?

Diaqonal kvadratı hər birində hipotenuz rolu oynadığı iki eyni düzbucaqlı üçbucağa ayırır. Buna görə də, Pifaqorun teoremindən çıxdığı kimi, kvadratın diaqonalı $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$-yə bərabərdir. Dərhal mikrokalkulyatoru götürüb kvadrat kök alma düyməsini basmaq istəyi yaranır. Tabloda 1,4142135 görürük. Hesablamaları yüksək dəqiqliklə yerinə yetirən daha kamil kalkulyator 1,414213562373 göstərər. Güclü müasir kompüterin köməyi ilə $\sqrt{2}$-ni vergüldən sonra yüzlərlə, minlərlə, milyonlarla işarə dəqiqliyi ilə hesablaya bilərik. Lakin hətta ən yüksək imkanlı kompüter belə, nə qədər çox işləsə də, nə $\sqrt{2}$ ədədinin onluq işarələrini hesablaya bilər, nə də onlarda hansısa dövr aşkar edə bilər.

Pifaqorun və şagirdlərinin kompüteri olmasa da, bu faktı məhz onlar əsaslandırdılar. Pifaqorçular isbat etdilər ki, kvadrat və onun tərəfinin ümumi ölçüsü (yəni diaqonalda da, tərəfdə də tam dəfə yerləşən parça) yoxdur. Deməli, onların nisbəti – $\sqrt{2}$ ədədi – m və n tam ədədlərinin nisbəti şəklində ifa-

də olunmur. Əgər bu belədirsə, əlavə edək ki, $\sqrt{2}$ ədədinin onluq ayrılışı heç bir müntəzəm qanunauyğunluq aşkar etmir. Yeni riyazi obyekt tapan pifaqorçular tamamilə karıxdılar. Onlar hesab edirdilər ki, dünyanın ümumi harmoniyasının əsasında tam ədədlər və onların nisbətləri dayanmalıdır. Onlar heç bir digər ədədləri tanımırdılar. Və birdən bu harmoniya dağılır – prinsipcə tam ədədlərin nisbəti olmayan ədədlər mövcuddur!



Tərəfi 1 olan kvadratın diaqonalının uzunluğu irrasional ədəddir.

Pifaqorun şagirdlərinin yaşadığı təşviş haqqında əfsanələr gəzir. Onlar öz kəşflərini gizli saxlayırdılar. Lakin Metapontlu Hippas insanlara ölçülməyən kəmiyyətlərin "dəhşətli" sirrini açdı və Göylər onu cəzalandırdı: o, fırtına vaxtı dənizdə batdı.

Digər əfsanəyə görə, Hippasa qarğış edən pifaqorçular özləri ona rəmzi qəbir qazdılar, "elə bil ki, haçansa onların yoldaşı olan adam həqiqətən fani dünyadan köçdü", – antik filosof Yamvlix belə yazırdı. Buna, nəsə, inanmaq olmur, axı pifaqor ittifaqının üzvləri bir-birinin dadına yetmələri və möhkəm dostluq telləriylə seçilirdilər.

Artıq Platon "Dövlət" dialoqunda kvadratın diaqonalının və tərəfinin ortaq ölçüsüz olması haqqında mühakimə yürüdərək "rasional" və "irrasional" anlayışlarından istifadə etmişdi. Onlara Evklidin "Başlanğıclar"ının onuncu kitabında rast gəlinir. "İrrationalis" sözü latıncadan tərcümədə "ağılsız" anlamındadır. Maraqlıdır ki, orta əsr Avropasında irrationalis sözü ilə birgə başqa termin – surdus – "kar" və ya "lal" da işlənirdi. Bu ada görə, orta əsrlər riyaziyyatçıları üçün irrasional ədədlər elə əndirabadi idilər ki, onlar hərfi mənada "nə danışa, nə eşidə" bilirdilər.

Lakin yunanlara qayıdaq. Onların əvvəlcə irrasional ədədləri qarşıladığı heyrət və kədər yeni riyazi obyektlərə maraq və diqqətlə əvəz olundu. E. ə. *IV* əsrdə Kirenli Feodor $\sqrt{N}$ ədədlərinin irrasionallığını isbat etdi, onun şagirdi Teetet isə N dəqiq kvadrat olmayan tam ədəd olduqda $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ şəkilli bütün ədədlərin irrasionallığını əsaslandırdı. Teetet bununla kifayətlənmədi, sonralar o, sübut etdi ki, N dəqiq kub olmayan tam ədəd olduqda $\sqrt[3]{N}$ şəkilli bütün ədədlər irrasionaldır və eləcə də $\sqrt{M+N}$, $\sqrt{M}+\sqrt{N}$, $\sqrt{\sqrt{M}\sqrt{N}}$ şəklində irrasionallıqlara baxdı.

PİFAQORÇULARIN KƏŞFLƏRİNİN İZİYLƏ

$\sqrt{2}$ ədədinin irrasional olduğunu necə isbat etməli? Fərz edək ki, $m/n = \sqrt{2}$ şərtini ödəyən m/n rasional ədədi mövcuddur. m/n kəsrini ixtisar olunmayan hesab edəcəyik (axı ixtisar olunan kəsri həmişə ixtisar olunmayan hala gətirmək olar). Bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldərək $m^2 = 2n^2$ alırıq. Buradan m-in cüt olması qənaətinə gəlirik, yəni $m = 2k$. Buna görə də $m^2 = 4n^2$ və deməli, $4k^2 = 2n^2$ və ya $2k^2 = n^2$. Lakin onda alınır ki, n ədədi də cütdür, bu isə ola bilməz, belə ki, m/n kəsri ixtisar olunmayandır. Ziddiyyət yaranır.

Bizə fərziyyəmizin doğru olmadığı və $\sqrt{2}$-yə bərabər olan m/n rasional ədədinin mövcud olmadığı nəticəsinə gəlmək qalır.

RASİONAL, YOXSA İRRASİONALDIR

Əgər a və b ədədləri rasionaldırlarsa və b tam deyilsə, onda əksər hallarda a^b *irrasionaldır. Məsələn,* $a = 2, b = 1/2$, *onda* $a^b = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. *Bəs əksinə? Elə* a *və* b *ədədləri mövcuddurmu ki,* a^b *rasional olsun?*

İsbat edək ki, onlar mövcuddur. $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ədədini götürək. O, rasionaldırmı? Ani demək olmur, bu ədədin təbiətini necə aydınlaşdırmaq da aydın deyil. Lakin gəlin hər iki imkana baxaq.

Əgər bizim $c = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ ədədimiz rasionaldırsa, deməli, o da axtarılan ədəddir. Bəs c ədədi irrasional olsa necə? Onda onu $\sqrt{2}$ qüvvətinə yüksəldək və d ədədi alaq:

$$d = c^{\sqrt{2}} = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 2.$$

Belə çıxır ki, d nəinki rasional, həm də tamdır. Buna görə də, əgər c irrasionaldırsa, onda axtarılan ədədlər

$$a = c, b = \sqrt{2}$$

olacaq.

Beləliklə, biz a^b ədədinin rasional ədəd olduğu a və b irrasional ədədlər tapmadıq, əvəzində isbat etdik ki, belə ədədlər mövcuddur. Riyaziyyat üçün belə vəziyyət tipikdir. Tez-tez konkret misallarla maraqlanmadan lazımi xassələri olan obyektin mövcudluğuna əmin olmaq mühüm olur.

Tərifdən istifadə edərək, irrasional ədədləri uşaq konstruktorunun detallarından oyuncaq yığılan kimi onluq rəqəmlərdən yığmaq olar. Ədədlərin peyda olmasının heç bir periodikliyə tabe olmamasının qayğısına qalmaq lazımdır. Belə ki, vahidin ardıcıl olaraq bir, iki, üç və s. mövqe sonra rast gəlindiyi 0,10100100010... ədədi və ya onluq yazılışında sıfırdan sonra bütün natural ədədlərin yerləşdiyi

0, 12345678910111213... ədədi irrasional olacaq.

Verilmiş ədədi konstruksiyanın məhz irrasional ədəd olduğunu isbat etmək qat-qat çətin olur. $\pi = 3{,}1415927...$, $e = 2{,}7182818...$ kimi məşhur ədədlərin irrasionallığını əsaslandırmaq böyük əmək nəticəsində mümkün oldu. $C = lim(1 + 1/2 + +1/3 + ... + 1/n - lnn)$ Eyler sabiti haqqında isə hələlik müəyyən heç nə demək olmaz. Onun rasional olub-olmadığının aydınlaşdırılması hələ qarşıdadır.

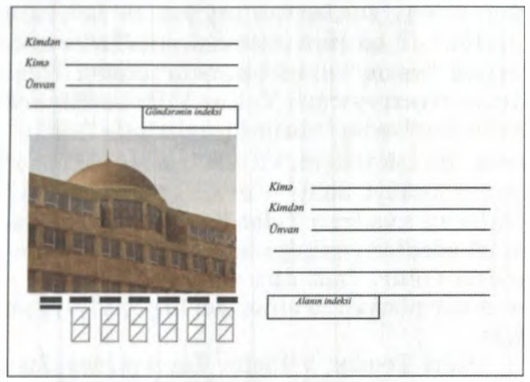
İRRASİONAL ƏDƏDLƏRİN RASİONALLARLA YAXINLAŞMASI

Poçt yollayışında hər şey ardıcıl göstərilir: əvvəlcə ölkə, sonra bölgə, şəhər, küçə, ev, mənzil. Eləcə də ixtiyari irrasional ədədin ədəd oxu üzərində mövqeyini onu təsvir edən onluq kəsrdə vergüldən sonra rəqəmlərin müxtəlif miqdarına baxmaqla ixtiyari dəqiqliklə bilmək olar. Belə ki, 1,41; 1,414;... kəsrləri $\sqrt{2}$-ni onluq, yüzlük, minlik və s. dəqiqliklə təyin etməyə imkan verir. Bu ədədlərin hər biri rasionaldır və biz, beləliklə, $\sqrt{2}$ irrasional ədədinin rasional ədədlər ardıcıllığı ilə yaxınlaşmasını alırıq.

İxtiyari irrasional ədədi ixtiyari dəqiqliklə rasional ədədlər sırası ilə yaxınlaşdırmaq olar, belə ki, sonuncular ədəd oxunda "çox sıx" yerləşirlər: ixtiyari iki rasional ədəd arasında həmişə digər rasional ədədlər var. Məsələn, ixtiyari iki rasional ədədin ədədi ortasını götürsək, onların arasında yerləşən rasional ədəd almaq olar. Ona görə də verilmiş irrasional ədədə "ən yaxın" rasional ədəd mövcud deyil.

Müxtəlif ədədlərin kvadrat köklərinin müəyyən yaxınlaşmalarını artıq qədim babillilər bilirdilər – bu barədə eramızdan bir neçə əsr əvvəl tərtib edilmiş mixi lövhələr şahidlik edir. $\sqrt{2}$-nin yaxınlaşmasını, (özü də verilmiş məxrəcdə ən yaxşısını) hələ qədim yunanlar bilirdilər. Onu Smirnalı Teon təsvir edib (*II* əsr).

Yeni dövrün riyaziyyatı qarşıya yeni məsələlər qoydu. Əgər m/n kəsrinin n məxrəcini qeyd etsək, onda məxrəci n-ə bərabər və ya ondan kiçik olan rasional ədədlər arasında verilmiş w irrasional ədədinə ən yaxşı yaxınlaşma axtarmaq olar. Elə görünə bilər ki, yaxınlaşma dəqiqliyi kiçik – haradasa $1/n$ kəmiyyəti tərtibində olacaq. Ancaq, sən demə, w ədədinə elə m/n rasional yaxınlaşmaları mövcuddur ki, onlar üçün yaxınlaşma dəqiqliyi yüz, min, milyon dəfə yaxşıdır!



Poçt göndərişində ünvan ardıcıl göstərilir...

XIX əsrdə alman riyaziyyatçısı Peter Qustav Lejön Dirixle göstərdi ki, hər hansı w irrasional ədədinin m/n şəklində yaxınlaşmaları arasında w-dən nəinki $1/n$, hətta $1/n^2$ qədər fərqlənənlər var. Sonralar Dirixlenin nəticələrini alman riyaziyyatçısı Adolf Qurviç və fransız alımı Emil Borel gücləndirdilər. Onlar sübut etdilər ki, ixtiyari w irrasional ədədi üçün $|w - m/n| < 1/(n^2\sqrt{5})$ bərabərsizliyinin ödəndiyi sonsuz sayda m/n yaxınlaşmaları mövcuddur, özü də bu formulda $\sqrt{5}$ ədədi artırıla bilməz.

RASİONAL + İRRASİONAL

Rasional və irrasional ədədlər bir yerdə həqiqi ədədlər çoxluğunu təşkil edir. Həqiqi ədədlərin sisteminin qurulması *XIX* yüzillikdə Y. V. R. Dedekind, Q. Kantor, K. T. B. Veyerştrass və digər riyaziyyatçıların səyləri ilə başa çatdırıldı. Həqiqi ədədlərin məcmusu obrazı düz xəttdir. Müstəvidə düz xətt keçirək, onun üzərində iki nöqtə seçək və fərz edək ki, onlardan biri sıfırı, digəri vahidi əks etdirir. Vahid parçanı sıfırdan hər iki tərəfə ayıra-ayıra düz xətt üzərində tam ədədlərin $\{m\}$ təsvirini almış oluruq. Vahid parçanı yarıya bölək və onu hər iki tə-

rəfə ayıraraq $\{m/2\}$ ədədinin təsvirini almış oluruq. Sonra parçanı 3, 4, 5, ..., n və s. hissəyə bölərək biz $1/n$ uzunluqlu parçaları ayıracağıq və $\{m/n\}$ ədədlərinin təsvirini alacağıq.

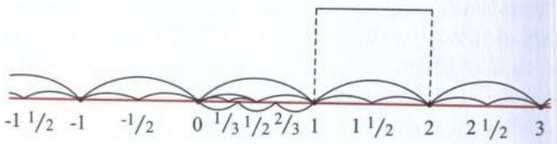
Lakin hər halda bu yolla biz bütün düz xətti doldura bilməyəcəyik. Aydındır ki, sıfırdan tərəfi 1 olan kvadratın diaqonalını ayırsaq, bu parçanın sonu bizim qurduğumuz rasional nöqtələrin heç biri ilə üst-üstə düşmür. $\sqrt{2}$ ədədini rasional ədədlərin arasındakı "yarıq" kimi təsəvvür etmək olar. Alman riyaziyyatçısı Yulius Vilhelm Rixard Dedekind "yarıq" sözünün əvəzində "kəsik" terminini işlətmişdi. $\sqrt{2}$ ədədi rasional ədədləri iki hissəyə bölür – kvadratı 2-dən kiçik olanlar və kvadratı 2-dən böyük olanlar. Rasional ədədlər çoxluğu belə dedekind kəsikləri ilə dolur. İndi düz xətt dolmuş olur – onun hər nöqtəsinə müəyyən bir ədəd uyğun gəlir.

Karl Teodor Vilhelm Veyerştrass özgə yolla getmişdir: kəsiklərin yerinə o, artan məhdud rasional ədədlər ardıcıllıqlarına baxdı ("Ardıcıllıqlar" məqaləsinə bax). Onların hər biri tamamilə müəyyən irrasional ədədi təsvir edir. Məsələn, $\sqrt{2}$-nin onluq işarələrini ardıcıl şəkildə hesablayaraq biz bu ədədi təsvir edən {1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142;...} ardıcıllığını almış oluruq.

Natural ədədlər: 1, 2, 3,...	
Tam ədədlər: ..., –2, –1, 0, 1, 2,...	Kəsr ədədlər
Rasional ədədlər: –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ... $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}$ 0, 123, 0, 456(56)	İrrasional ədədlər
Cəbri ədədlər: $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$ şəkilli tənliklərin kökləri, burada a tam ədədlərdir	Transendent ədədlər: e, π və s.

Həqiqi ədədlərin tipologiyası

Həqiqi ədədlər üçün toplama, çıxma, vurma və bölmə (sıfıra bölmədən başqa) əməllərini yenidən təyin etmək lazım gəlir. Üsullardan biri a və b ədədlərinin hər birini təsvir edən $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ götürmək, sonra isə $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$, $\{a_n b_n\}$, $\{a_n/b_n\}$ (axırıncı halda b_n-lər arasında sıfır olmamalıdır) ardıcıllıqlarını tərtib etmək lazımdır. Bu ardıcıllıqlar $a + b$, $a - b$, ab və a/b-ni təsvir edəcəklər.



Düz xətt həqiqi ədədlərin məcmusu obrazıdır.

Bu yolla qurulmuş ədədlər meydan (yeri gəlmişkən, bu termini məhz Dedekind daxil edib), onlar üçün "böyükdür" və "kiçikdir" münasibətlərinin təyin olunduğunu nəzərə alsaq isə xətti nizamlanmış meydan əmələ gətirir.

ZƏNCİRVARİ KƏSRLƏR

Dişli çarx layihəçilərinə belə bir məsələ yaxşı tanışdır. Fərz edək ki, iki dişli çarxdan bucaq sürətlərinin nisbəti (ötürmə əmsalı) $\sqrt{2}$-yə yaxın olan dişli ötürmə quraşdırmaq tələb olunur. Ədəd irrasional olduğundan, çarxlardakı dişlərin heç bir sonlu sayında ötürmə əmsalının dəqiqliklə ona bərabər olmasına nail olmaq olmaz. Bunu bu və ya digər təqribilik dərəcəsi ilə etmək olar.

Məsələn, böyük çarxda 14, kiçikdə 10 diş götürsək, $\kappa = 1{,}4$ ötürmə əmsalı alırıq. Bu, $\sqrt{2}$-yə kobud yaxınlaşmadır. Əgər böyük çarxda 14142, kiçikdə 10 000 diş olarsa, yaxınlaşma daha dəqiq olacaq: κ=1,14242. Prinsipcə, istər bir, istərsə də digər çarxda dişlərin sayını artırmaqla ötürmə əmsalının $\sqrt{2}$-yə istənilən qədər yaxşı yaxınlaşmasını əldə etmək olar. Lakin dişlərin miqdarının artırılması onların ölçülərinin kiçilməsinə və deməli, möhkəmliyin itirilməsinə aparır.

Sual doğur: çarxlardakı dişlərin elə m və n sayını seçmək olarmı ki, m/n nisbəti $\sqrt{2}$-yə yaxşı yaxınlaşsın, eyni zamanda m və n ədədləri nisbətən böyük olmasın? Qeyd edək ki, n ədədinin 10-un qüvvəti olması qətiyyən şərt deyil.

Böyük olmayan məxrəcli kəsrlərin ixtiyari tam olmayan ədəd üçün onun yaxşı yaxınlaşmasının tapılması üsulu zəncirvari kəsrlər nəzəriyyəsində təklif edilir. Onunla da indi tanış olacağıq.

KANONİK ZƏNCİRVARİ KƏSRLƏR

Zəncirvari kəsrlər (digər adı kəsilməz kəsrlərdir) ilk dəfə *XVI* əsrdə meydana gəlib. Kanonik zəncirvari kəsr

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \dots}}}$$

şəkilli ifadədir, burada a_0 ixtiyari tam ədəd, a_1, a_2, a_3, ...verilmiş kəsrin natamam qismətləri və ya elementləri adlanan tam müsbət (natural) ədədlərdir. Bu elementlərin miqdarına əsasən sonlu və sonsuz zəncirvari kəsrləri fərqləndirirlər. Məsələn,

$$1 + \frac{1}{2},\ 1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}},\ 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \dots}}},$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}$$

kimi ifadələr zəncirvari kəsrlər olacaqlar. Onların birinci ikisi sonlu, sonrakılar sonsuz zəncirvari kəsrlərdir.

Zəncirvari kəsrlərin gözəl riyazi konstruksiya olub-qalmamağı üçün iki tip məsələni həll etməyi öyrənmək mühümdür:

1) zəncirvari kəsr verilmişdir, onun qiymətini təyin etmək tələb olunur;

2) həqiqi ədəd verilmişdir, müvafiq zənzirvari kəsr qurmaq tələb olunur.

ZƏNZİRVARİ KƏSRİN QİYMƏTİNİ NECƏ TƏYİN ETMƏLİ

Əgər zəncirvari kəsr sonludursa, onda məsələ bu və ya digər zəhmətli hesablamaya müncər edilir, nəticə isə rasional ədəd olacaq. O, sonsuz olanda isə işlər tamam başqa cür olacaq.

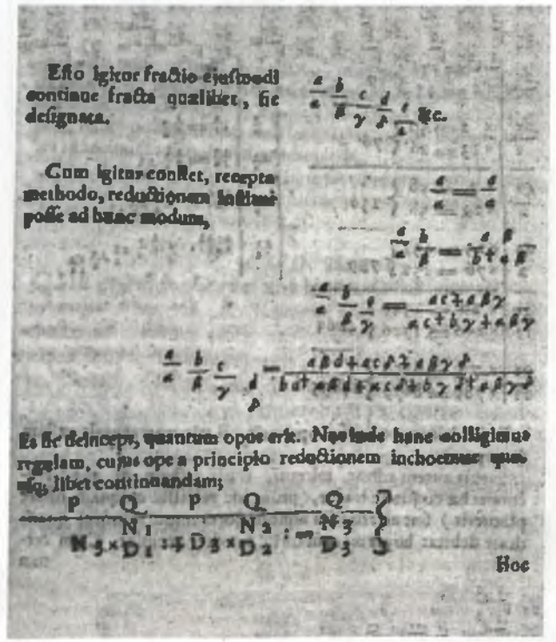
Sonsuz kanonik zəncirvari kəsri sonluya "çevirməklə", yəni "quyruğunu" atmaqla onun təqribi qiymətini almaq olar:

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12}.$$

Bu zaman biz neçə "mərtəbə" saxlayacağıqsa, nəticə bir o qədər dəqiq olacaq. Lakin belə həll çətin ki, riyaziyyatçıların xoşuna gələ.



Zəncirvari kəsrlər oyuncaqlara uyğun qurulublar: növbəti kəsrin məxrəcində zəncirvari kəsr "gizlənir".



Con Vallisin zəncirvari kəsrlərin izah edildiyi "Sonsuzluğun hesabı" kitabının bir səhifəsindən fraqment. 1656-cı il.

Bəzən kəsilməz kəsrin qiymətini tapmağa uğurlu müşahidə kömək edir. Məsələn,

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}$$

ifadəsində birinci kəsrin məxrəci bütün ifadədən tam bir vahid çoxdur:

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}=1+\left(1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}\right).$$

Axtarılan kəmiyyəti x-lə işarə edərək

$$x=1+\frac{1}{1+x},\ \text{yaxud}$$

$$x(1+x)=(1+x)+1$$

tənliyini alırıq, buradan $x^2=2$ və $x=\pm\sqrt{2}$. Mənfi kök aşkar şəkildə uyğun gəlmir. Onu atırıq və son nəticədə alırıq:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}=\sqrt{2}.$$

Eləcə də aşkar edirik ki,

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}$$

kəsri $\Phi=(\sqrt{5}-1)/2$ Fidi ədədinə bərabərdir ("Fidi ədədi və qızıl kəsik" məqaləsinə bax).

Belə üsul ixtiyari periodik zəncirvari kəsrin qiymətini müəyyən etməyə imkan verir. Qeyd etmək lazımdır ki, natamam qismətlərin periodik təkrarlanması tam əmsallı kvadrat tənliklərin kökləri olan bütün irrasional ədədlərə – və yalnız onlara – xasdır. Bu faktı 1770-ci ildə dahi fransız riyaziyyatçısı və mexaniki Jozef Lui Laqranj isbat etmişdir.

Daha yüksək tərtibli çoxhədlilərin köklərinin strukturunda hər hansı qanunauyğunluğun olması hələlik məlum deyil. Riyaziyyatın bu oblastı tədqiqatlar üçün, deməli, kəşflər üçün də açıq qalır.

ZƏNCİRVARİ KƏSRİ NECƏ QURMALI

İxtiyari ədədi kanonik zəncirvari kəsrə ayırmaq yeknəsəq proses olub iki çoxdəfəli təkrarlanan və bir-biriylə növbələnən əməldən: "bolluğu almaqdan" və "qalığı çevirməkdən" ibarətdir. Buna 1997/31-in misalında baxaq.

Əvvəlcə ədədi tam hissənin (bolluğun) və kəsrin (qalığın) cəmi şəklində göstəririk:

$$\frac{1997}{31}=64+\frac{13}{31}.$$

Əgər, bu halda olduğu kimi, qalıq sıfırdan fərqlidirsə, onu $\dfrac{1}{31/13}$ şəklində (qalığın çevrilməsi) yazmaq olar. Özü də bu kəsrin məxrəci həmişə vahiddən böyükdür.

İndi eyni əməlləri artıq 31/13 ədədi ilə edirik:

$$\frac{31}{13}=2+\frac{5}{13}=2+\frac{1}{13/5}$$

və deməli,

$$\frac{1997}{31}=64+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{13/5}}.$$

Bu prosesi davam etdirərək son ucda alacağıq:

$$\frac{1997}{31}=64+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}.$$

İrrasional ədəd üçün onun zəncirvari kəsrə ayrılması prosesi sonsuz olaraq davam edir. Lakin bu halda da bəzən kəsrin şəklini təyin etmək olur. Misal kimi $\sqrt{5}\approx 2{,}236..$ ədədinə baxaq. Onun tam hissəsi 2-dir, deməli qalıq $\sqrt{5}-2$-dir. Qalığın çevrilməsindən sonra ifadə

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{1/(\sqrt{5}-2)}$$

şəklini alır.

Mötərizə daxili kəsrin surət və məxrəcini $\sqrt{5}+2$-yə vuraq:

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{1/(\sqrt{5}-2)}=2+\frac{1}{\dfrac{\sqrt{5}+2}{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}}.$$

Kvadratların fərqi düsturuna əsasən,

$$(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)=5-2^2=1.$$

Buna görə də

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}.$$

Axırıncı düsturun sağında $\sqrt{5}$ yerinə onun özünü "sonsuz dəfə" yazsaq, alırıq:

$$\sqrt{5}=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}}.$$

MÜNASİB KƏSRLƏR

İxtiyari α ədədi üçün kanonik zəncirvari kəsri qurmaq prosesini hansısa addımda qırmaq olar və necə deyərlər, münasib kəsr alınar. Bu termin təsadüfən meydana gəlməyib, münasib kəsrlər doğrudan da ədədlərin yaxınlaşması üçün "münasibdirlər". Özünüz mühakimə edin, münasib kəsri adi ixtisar olunmayan p/q kəsri şəklində yazsaq, onda o, α ədədindən $1/q^2$-dan çox və məxrəci q-nü keçməyən ixtiyari digər adi kəsr qədər az fərqlənməyəcək. Beləliklə, hər bir münasib kəsr bu mənada ən yaxşı yaxınlaşma verir.

Zəncirvari kəsrlərin bu xassəsi məqalənin əvvəlində qoyulmuş dişli çarxlar haqqında məsələni həll etməyə imkan verir.

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}$$

ədədi üçün münasib kəsrlərə baxaq. Ardıcıl hərəkət edəcəyik:

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=1{,}5;$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}=\frac{7}{5}=1{,}4;$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}=\frac{17}{12}\approx 1{,}4166..$$

Say hesabı ilə artıq beşinci kəsr – $99/70 = 1{,}4142857...$ dəqiqliyinə görə bizim əvvəldə iki çarxın ötürmə əmsalını yaxınlaşdırmağa çalışdığımız 14142/10000 kəsri ilə rəqabətdədir, surət və məxrəc isə bu dəfə, demək olar ki, 150 dəfə azdır! Beləliklə, təsəvvürəgəlməz dərəcədə çoxsaylı dişlər – 14 142 və 10 000 əvəzinə onların daha məqbul sayı ilə də – 99 və 70 – keçinmək olar.

ÜMUMİLƏŞMİŞ ZƏNCİRVARİ KƏSRLƏR

"Çoxmərtəbəlilərin" surətlərində müstəsna qaydada vahidlərin dayanması tələbindən əl çəksək, biz yeni tip hesabi "qurğular" – ümumiləşmiş zəncirvari kəsrlər alarıq:

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\cfrac{b_3}{a_3+\ldots}}},$$

burada $a_0, a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ tam ədədlərdir.

Ümumiləşmiş zəncirvari kəsrlər öz kanonik prototipləri ilə xarici oxşarlıqlarını saxlayaraq hər halda onlardan fərqlənirlər: hər hansı həqiqi ədədi qeyri-kanonik zəncirvari kəsr şəklində təsvir etmək artıq təkcə yeganə üsulla olmur.

Belə ki, $\sqrt{3}$ ədədi

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\ldots}}}},\quad 1+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\ldots}}},$$

$$2-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\cfrac{1}{4-\ldots}}}$$

ayrılışına və bir çox başqa ayrılışlara malikdir.

ZƏNCİRVARİ KƏSRLƏR VƏ TƏQVİM

"Gündüz və gecə – gün keçdi", "Qış və yay – il keçdi"...Uzaq zamanlardan insanlar aşkar etmişdilər ki, ən mühüm zaman parçaları – il və sutka– müxtəlif təbiət prosesləri ilə təyin olunur. Lakin ilin sutkaların tam sayı ilə ölçülmədiyini onlar çox sonra anladılar. Axı ili sutkaların tam sayı ilə ölçsək, tədricən "artıq" saniyələr, dəqiqələr yığılacaq (və ya qaçacaq) və onlar da vaxt keçdikcə günlər, həftələr və ayları təşkil edəcək.

B. e. 46-cı ilində Yuli Sezar alimlər qarşısında təqvimdəki səhvlərdən yaxa qurtarmaq vəzifəsini qoydu. İsgəndəriyyəli alim Sozigenin təklifi ilə o belə bir sistem daxil etdi: hər dördüncü il 365 sutkalıq adi ildən bir sutka uzun olmalıdır. (Sonralar nömrələri 4-ə bölünən illəri uzun və ya visokos illər hesab etməyə başladılar,) Yuli Sezarın şərəfinə belə təqvimi yulian təqvimi adlandırmağa başladılar. Lakin o da xətasız deyildi – yulian ilinin orta uzunluğu əsil ilinkindən 11 dəqiqə 14 saniyə çoxdur.

Avropada növbəti təqvim islahatına 1582-ci ildə Roma Papası *XIII* Qriqori cəhd etdi. Bu zaman əsil və yulian illəri arasındakı fərq 10 günə çatırdı. O, italyan həkimi və riyaziyyatçısı Luici Lilio tərəfindən təklif edilmiş layihəni həyata keçirdi. İndi də istifadə etdiyimiz bu təqvim qriqorian təqvimi adlanır.

Qriqorian təqvimində sadə və uzun illərin növbələşməsi saxlanılır, lakin ona belə bir qayda əlavə edilir: əgər ilin nömrəsi iki sıfırla qurtarırsa və yüzlüklərin sayı 4-ə bölünmürsə, onda bu il sadə ildir (1700, 1800, 1900-cü illər sadə, 2000-ci il uzun ildir). Qriqorian təqviminə əsasən, ilin orta uzunluğu 365 sutka 5 saat 49 dəqiqə 12 saniyə təşkil edir ki, bu da həqiqi ildən 26 saniyə çoxdur. Belə dəqiqlik tamamilə məqbuldur, çünki 1 günlük səhv təxminən 3300 ilə yığılacaq.

Gəlin təqvim probleminə zəncirvari kəsrlər nəzər nöqtəsindən baxaq. İlin uzunluğunu sutkalarla ifadə edək və bu kəmiyyəti

$$1 \text{ il} = 3656,\ 242199... = 365 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + ...}}}} \text{ gün.}$$

sonsuz kəsri şəklində təsvir edək. Onun üçün münasib kəsrlər ardıcıllığı belədir:

$$365;\ 365\frac{1}{4};\ 365\frac{7}{29};\ 365\frac{8}{33};\ 365\frac{31}{128};\ ...$$

Bu kəsrlərin hansı sizin daha çox xoşunuza gəlir. $365\frac{1}{4}$-i götürək. Bu halda 4 ildə 1 "artıq" gün qaçacaq və biz yulian təqvimini alacağıq.

$365\frac{8}{33}$ –i götürək. İndi 33 ildə 8 "artıq" gün qaçır və bu, fars riyaziyyatçısı və şairi Ömər Xəyyamın təklif etdiyi təqvimdir. O hətta qriqorian təqvimindən də dəqiqdir.

$365\frac{31}{128}$ –i götürsək, ona uyğun müvafiq fantastik dəqiqlikli təqvim alırıq ki, ona görə də ilin orta uzunluğu həqiqi qiyməti ildə cəmi 1 saniyə aşacaq! 1864-cü ildə Derpt universitetinin (indiki Tartu) professoru İohann Henrix Medler *XX* əsrdə Rusiyada belə bir təqvim daxil etməyi təklif etdi. Ona görə, uzun illər yulian sistemi ilə sayılarsa, hər 128 ildən bir bir uzun ili buraxmaq lazım gəlirdi. Prosedur sadədir, lakin...Ya adi mühafizəkarlığın, ya da başqa səbəblərin ucundan bu təqvim həyata keçirilmədi.

Ümumiyyətlə, sonsuz ümumiləşmiş zəncirvari kəsrlərlə son dərəcə ehtiyatla davranmaq gərəkdir. Yoxsa "palçığa batmaq olar". Məsələn,

$$1 = \frac{2}{3-1}$$

ifadəsinə baxaq. Əgər məxrəcdəki 1-i $\frac{2}{3-1}$ ekvivalent ifadəsi ilə əvəzləsək, alırıq:

$$1 = \frac{2}{3 - \frac{2}{3-1}}.$$

Bu əməliyyatı məxrəcdə dayanan yeni vahidə nəzərən təkrar etsək və yenə də bu şəkildə davam etsək,

$$1 = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - ...}}}$$

sonsuz kəsrini qurmuş olarıq. Digər tərəfdən, eyni qaydada hərəkət edərək 2 ədədini sonsuz zəncirvari kəsr şəklində təsvir etmək olar:

$$2 = \frac{2}{3-2} = \frac{2}{3 - \frac{2}{3-2}} = ... = \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - \cfrac{2}{3 - ...}}}.$$

Nə alınır? Qurulmuş zəncirvari kəsrlər bir-birinə bərabərdir, deməli, onların alındığı ədədlər də bərabərdir, yəni 1 = 2. Paradoks!

* * *

Zəncirvari kəsrlər üçün hesabi əməllərin sadə və rahat yerinə yetirilməsi qaydaları yoxdur, bununla belə onlar bir sıra nəzəri araşdırmalarda və tətbiqi məsələlərdə, məsələn, səma mexanikası məsələlərində uğurlu tətbiqlərini tapırlar.

HƏQİQİ ƏDƏDLƏRİN AKSİOMATİKASI HAQQINDA

R həqiqi ədədlərin ümumi nəzəriyyəsinin aksiomatik qurulmasında dörd qrup aksiom iştirak edir:

1. Toplama əməli və onunla bağlı olan aksiomlar,
2. Vurma əməli və onunla bağlı olan aksiomlar,
3. Həqiqi ədədlərin müqayisəsi haqqında aksiomlar,
4. Və sonuncu–«həqiqi ədədlərin tamlığı»nı təmin edən aksiomlar qrupu. Bu qrup aksiomlar həndəsi olaraq «ədəd oxunda boşluğun olmaması» və ya «istənilən parçanın uzunluğa malik olması» kimi başa düşülə bilər.

Hesabi əməllər. X verilmiş çoxluğunun istənilən (a,b) şəklində nizamlanmış cütünə müəyyən bir c elementi qarşı qoyulmuşdursa, onda deyirlər ki, X çoxluğunda **binar əməl** təyin edilmişdir. Müstəvinin altçoxluqları arasında birləşmə və kəsişmənin, koordinat başlanğıcı ətrafında iki dönməyə qarşı onların ardıcıl yetirilməsi ilə alınan dönmənin təyin etdiyi əməllər binar əməllərə misallardır. Həqiqi ədədlər çoxluğunda müəyyən xassələrə malik olan iki müxtəlif binar əməlin verilməsi qəbul edilir. Şərti olaraq onlara **toplama və vurma əməli** deyilir.

Toplama əməli. Həqiqi ədədlərin istənilən a və b cütü (a və b toplananları) üçün aşağıdakı xassələrə malik olan (+) toplama əməli təyin edilmişdir:

- *Kommutativlik xassəsi*: $a+b=b+a$. Toplananların yerini dəyişdikdə cəm dəyişmir.

- *Assosiativlik xassəsi*: $(a+b)+c=a+(b+c)$. Bu aksiom üç və daha çox ədədin toplanmasında birqiymətliliyi təmin edir.

- *Sıfırın varlığı*: Elə 0 ədədi var ki, istənilən həqiqi a ədədi üçün $a+0=a$.

- *Ədədin əksinin varlığı haqqında aksiom.*: İstənilən a ədədi üçün elə b ədədi var ki, $a+b=0$. Verilən xassəyə malik olan b ədədinə a ədədinin **əksi** deyilir və $b=-a$ kimi işarə edilir.

Vurma əməli. Həqiqi ədədlərin istənilən a və b cütü üçün aşağıdakı xassələrə malik olan $(\cdot)$ vurma əməli təyin edilmişdir:

- *Kommutativlik xassəsi* : $ab=ba$. Vuruqların yerini dəyişdikdə hasil dəyişmir.

- *Assosiativlik xassəsi*: $(ab)c=a(bc)$. Toplamada olduğu kimi vurmada da bu aksiomla üç və daha çox vuruğun hasili birqiymətli təyin edilir.

- *Vahidin varlığı*: elə **1** ədədi var ki, istənilən həqiqi a ədədi üçün $a\cdot 1=a$,

- *Sıfırdan fərqli ədədin tərsinin varlığı haqqında aksiom*: İstənilən $a\neq 0$ ədədi üçün elə b ədədi var ki, $ab=1$. Verilən xassəyə malik olan b ədədinə a ədədinin **tərsi** deyilir və

$$b=\frac{1}{a}=a^{-1}$$

kimi işarə edilir. Başqa sözlə, sıfırdan fərqli istənilən həqiqi ədədin tərsi var.

- *Toplama və vurma arasında əlaqələndirici distrübutivlik xassəsi*

$$(a+b)c=ac+bc.$$

X çoxluğunda təyin edilmiş müəyyən bir əməl assosiativlik xassəsinə malikdirsə, bu əmələ nəzərən sıfır varsa və istənilən elementin əksi varsa, onda deyilir ki, X çoxluğu verilən əmələ görə **qrup** əmələ gətirir. Bundan əlavə təyin edilmiş əməl kommutativlik xassəsinə malik olarsa, alınan qrup **kommutativ qrup və ya Abel qrupu** adlanır. Toplamaya nəzərən qrup **additiv**, vurmaya nəzərən qrup isə **multiplikativ** qrup adlandırılır.

Beləliklə,

a) Həqiqi ədədlər çoxluğu toplamaya nəzərən Abel qrupu əmələ gətirir,

b) $R\setminus\{0\}$ çoxluğu isə vurmaya nəzərən Abel qrupu əmələ gətirir.

X çoxluğunda təyin edilmiş iki binar əməl *a)* və *b)* xassələrinə malik olarlarsa, X çoxluğu **sahə və ya meydan** adlanır. Beləliklə, R həqiqi ədədlər çoxluğu toplama və vurmaya nəzərən sahə əmələ gətirir.

Həqiqi ədədlər çoxluğunda

a) sıfır yeganədir.

b) vahid yeganədir.

c) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$.

d) istənilən ədədin əksi yeganədir.

e) sıfırdan fərqli istənilən ədədin tərsi yeganədir.

a) Fərz edək ki, 0_1 və 0_2 verilmiş xassələrə malik olan sıfırlardır. Onda

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2.$$

Başqa sözlə, $0_1 = 0_2$.

b) Fərz edək ki, 1_1 və 1_2 verilmiş xassələrə malik olan vahidlərdir. Onda

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2.$$

Başqa sözlə, $1_1 = 1_2$.

c) Doğrudan da,

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0,$$

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0.$$

d) Tutaq ki, *a* *a* verilmiş ədəd, *b* və *c* isə onun əksi olan ədədlərdir. Onda

$$b = b + 0 = b + (a + c) = (b + a) + c = 0 + c = c.$$

e) Tutaq ki, $a \neq 0$ verilmiş ədəd, *b* və *c* isə onun tərsi olan ədədlərdir. Onda

$$b = b \cdot 1 = b \cdot (a \cdot c) = (b \cdot a) \cdot c = 1 \cdot c = c.$$

a və (*-b*) ədədlərinin cəminə *a* və *b* ədədlərinin **fərqi** deyilir və $a + (-b) = a - b$ kimi işarə edilir. $b \neq 0$ olarsa, *a* və $\left(\frac{1}{b}\right)$ ədədlərinin hasilinə *a* ədədinin *b* ədədinə **qismət**i deyilir və $a\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$ kimi işarə edilir.

Həqiqi ədədlərin müqayisəsi. Həqiqi ədədlər arasında aşağıdakı xassələrə malik olan < münasibəti təyin edilmişdir:

- *Tam nizamın olması haqqında aksiom.* $a \neq b$ olarsa, ya $a < b$, ya da $b < a$. Başqa sözlə, bərabər olmayan istənilən iki həqiqi ədəd müqayisə ediləndirlər.

- *Antisimmetriklik.* $a < b$ olarsa, $b < a$ olması mümkün deyil,

- *Tranzitivlik.* $a < b, b < c$ olarsa, $a < c$ münasibəti doğrudur.

$-a < b$ olarsa, istənilən *c* həqiqi ədədi üçün $a + c < b + c$ münasibəti ödənilir.

$0 < a, 0 < b$ olarsa, $0 < ab$ münasibəti ödənilir.

$a < b$ yazılışı «*a* ədədi *b* **ədədindən kiçikdir**» kimi oxunur. $a < b$ yazılışının əvəzinə $b > a$ yazılışından istifadə edilə bilər və bu «*b* ədədi *a* ədədindən böyükdür» kimi oxunur. Sıfırdan böyük olan ədədə **müsbət**, sıfırdan kiçik olan ədədə isə **mənfi** ədəd deyilir. $a \leq b$ yazılışı «*a* **kiçik və ya bərabərdir** *b* « və ya «*a* **ədədi** *b* **ədədini aşmır və ya** *b* **ədədindən böyük deyil**» kimi oxunur və $a = b$ və ya $a < b$ təkliflərinin dizyunksiyasından ibarətdir. $a \geq b$ yazılışı «*a* **böyük və ya bərabərdir** *b* « və ya «*a* **ədədi** *b* **ədədindən kicik deyil**» kimi oxunur və $a = b$ və ya $a > b$ təkliflərinin dizyunksiyasından ibarətdir. Ucları *a* və *b* ədədləri olan açıq, qapalı, yarımqapalı intervallar və ya aralıqlar adi qaydada təyin edilirlər:

$$(a;b) = \{x \in R : a < x < b\}$$

$$[a;b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$$

$$[a;b) = \{x \in R : a \leq x < b\}$$

$$(a;b] = \{x \in R : a < x \leq b\}$$

a) Qarşılıqlı əks ədədlər eyni işarəli ola bilməzlər.

b) İki müsbət ədədin cəmi müsbət ədəddir.

c) Əks işarəli iki ədədin hasili mənfi ədəddir.

d) İki mənfi ədədin hasili isə müsbət ədəddir.

e) $a < b$ olması üçün zəruri və kafi şərt $0 < b - a$ bərabərsizliyinin ödənilməsindən ibarətdir.

a) Tutaq ki, $0 < a$. Bərabərsizliyin hər iki tərəfinə $(-a)$ ədədini əlavə etsək

$$-a = -a + 0 < -a + a = 0$$

bərabərsizliyini almış olarıq. Digər hal da anoloji isbat olunur.

b) Fərz edək $0 < a$ və $0 < b$. Onda $-b < 0 < a$ və ya $-b < a$. Sonuncu bərabərsizliyin hər iki tərəfinə *b* ədədini əlavə etsək

$$0 = -b + b < a + b$$

bərabərsizliyini alarıq.

c) Tutaq ki, $a < 0, 0 < b$. İsbat edək $ab < 0$. Əksini fərz edək $0 < ab$. $a < 0$ olduğundan $0 < -a$ olmalıdır. Onda $0 < -ab$ bərabərsizliyi ödənilməlidir. Digər tərəfdən

ab və (*-ab*) ədədləri qarşılıqlı əks ədədlərdirlər. Buna görə də onların hər ikisi eyni zamanda müsbət ola bilməz. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil.

d) Tutaq ki, $a < 0, b < 0$. Onda *c*) bəndinə əsasən

$$-(ab) = (-a)b = a(-b) < 0$$

olmalıdır. Buna görə də $(-ab)$ ədədinin əksi olan *ab* ədədi müsbət ədəddir.

e) $a < b$ bərabərsizliyi ödənilirsə, hər iki tərəfə $(-a)$ ədədini əlavə etsək

$$0 < b - a$$

bərabərsizliyini və əksinə $0 < b - a$ bərabərsizliyi ödənilirsə, hər iki tərəfə *a* ədədini əlavə etsək $a < b$ bərabərsizliyini almış olarıq.

e) bəndinin hökmünə əsasən iki ədəd arasında $a < b$ müqayisə qaydası $0 < b - a$ qaydası ilə eyniləşdirilə bilər. Başqa sözlə, *b* və *a* ədədlərinin fərqinin müsbət ədəd olmasını *b* ədədinin *a* ədədindən böyük olması üçün tərif qəbul etmək olar. Məktəb kursunda iki həqiqi ədəd arasında müqayisə qaydası bu üsulla təyin edilir.

Həqiqi ədədlərin tamlığı. Həqiqi ədədlərin tamlığını əks etdirən müxtəlif aksiomlar daxil etmək olar. Adətən, bunlardan müəyyən birini aksiom kimi daxil edib, digərlərini teorem kimi isbat edirlər və ya bütün bu qrup aksiomların eynigüclü olmaları müəyyən bir teorem şəklində ifadə edilir. Bütün kurs ərzində həndəsi olaraq aydın təsəvvür edilən iki faktı aksiom kimi qəbul edəcəyik:

1. Arximed prinsipi-vahid qəbul edilmiş parçanın ardıcıl toplanması ilə istənilən məsafəni aşmaq olar;

2. Bir-birinin daxilində olan parçaların ortaq nöqtəsinin olmasını əks etdirən Kantor prinsipi.

Riyazi olaraq bunları daha dəqiq aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

Arximed prinsipi. $0 < a, 0 \leq b$ olarsa, elə *n* natural ədədi var ki, $b \leq na$.

Kantor prinsipini ifadə etmək üçün aşağıdakı anlayışı daxil etməyə ehtiyac var:

$I_k = [a_k; b_k]$, $k = 1,2,3,\ldots$ verilmiş qapalı intervallar sisteminin istənilən iki I_i və I_j elementi üçün $I_i \subset I_j$ və ya $I_i \supset I_j$ münasibətlərindən heç olmasa biri ödənilirsə, verilmiş sistem biri-birinə daxil olan qapalı intervallar sistemi adlanır.

Kantor prinsipi. $I_k = [a_k; b_k]$, $k = 1,2,3,\ldots$ bir-birinə daxil qapalı intervallar sistemidirsə, onların kəsişməsi boş çoxluq deyil.

Bu prinsipi bərabərsizliklər dilində aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

Tutaq ki, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$, $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots$, və istənilən i, j nömrələri üçün $a_i \leq b_j$ münasibətləri ödənilir. Onda

$$a_i \leq x \leq b_i, i = 1,2,3,\ldots \qquad (1)$$

bərabərsizliklərinin heç olmasa bir ortaq həlli var. Başqa sözlə, (1) sisteminin həlli var.

İsbat etmək olar ki, verilən dörd qrup aksiom həqiqi ədədlər çoxluğunu birqiymətli təyin edir və real model olaraq elementar riyaziyyatdan yaxşı məlum olan ədəd oxunu qəbul etmək olar. Söylənilən faktı isbatsız qəbul edəcəyik.

Rasional ədədlər. Həqiqi ədədlərin aksiomatik verilişində natural və rasional ədədlər anlayışları aşağıdakı kimi təyin edilə bilərlər.

Vahidin ardıcıl toplanması ilə alınan ədədlər **natural ədədlər** adlanır və artıq bizə məlum olan işarələmələr saxlanır:

1+1=2, 2+1=3, 3+1=4 və s.

Natural ədədlər çoxluğu ənənəvi olaraq *N* hərfi ilə işarə edilir. Natural ədədlər, onların qarşılıqlı əksi olan ədədlər və sıfır birlikdə **tam ədədlər** adlanır. Tam ədədlər çoxluğu *Z* hərfi ilə işarə edilir. Bildiyimiz kimi klassik mənada təyin edilmiş natural ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlər çoxluğunun toplama və vurmaya, tam ədədlər çoxluğu isə toplama, vurma və çıxmaya nəzərən qapalı alt çoxluqlarıdır. Yeni daxil edilmiş mənada natural və tam ədədlər çoxluğu da verilən xassələrə malikdir.

a) Natural ədədlər çoxluğu toplama və vurmaya nəzərən qapalı çoxluqdur.

b) Tam ədədlər çoxluğu toplamaya nəzərən Abel qrupu əmələ gətirir; vurmaya nəzərən isə qapalı çoxluqdur.

a) İnduksiya metodunu tətbiq edək. $n \in N$ ədədinin qeyd edilimiş qiymətində

ikinci toplanana nəzərən induksiya metodunu tətbiq edəcəyik. $n+1$ ədədi tərifə görə natural ədəd olmalıdır. Fərz edək $m \in N, m \neq 1$. Onda aydındır ki, $(m-1) \in N.k = n+(m-1)$ ədədinin natural olması qəbul edilərsə,

$$n+m = n+(m-1) = k+1 \in N$$

olması tərifə əsasən doğrudur.

$n \in N$ ədədinin verilmiş qiymətində ikinci vuruğa nəzərən induksiya metodunu tətbiq etmək olar. $1 \cdot n$ və $2 \cdot n = n+n$ ədədlərinin natural olması aşkardır. Tutaq ki, $m \in N$ və $m \neq 1$. Onda induksiyada qəbul edilmiş tərklif və natural ədədlər çoxluğunun toplamaya nəzərən qapalı olmasına əsasən

$$nm = n(m-1+1) = n(m-1)+n \in N$$

münasibəti doğrudur. *b*) bəndinin hökmü də anoloji qaydada isbat edilir.

Tam ədədlərin bütün mümkün qismətlərindən ibarət olan çoxluğa **rasional** ədədlər çoxluğu deyilir və Q kimi işarə edilir. Bu çoxluğun hər bir elementi rasional ədəd adlanır. İstənilən kəsri sonlu addımdan sonra ixtisar olunmayan kəsr şəklində göstərmək olar. Bundan sonra rasional ədəd deyildikdə məhz ixtisar olunmayan kəsrlər nəzərdə tutulacaq. Rasional olmayan həqiqi ədədlərə **irrasional** ədədlər deyilir.

Rasional ədədlər çoxluğu toplama və vurmaya nəzərən sahə əmələ gətirir.

Həqiqi ədədlərin aksiomlarından aşkardır.

Verilən xəssənin ədədlərin rasional və ya irrasionallığının araşdırılmasına tətbiqləri ilə tez-tez rastlaşmaq olar.

Misal. *b* və *c* müsbət ədədləri arasında

$$b^2+2b-3c^4-18c^2-26=0$$

münasibəti ödənilərsə, onlardan heç olmasa birinin irrasional olduğunu isbat edin.

Həlli. Verilən münasibəti aşağıdakı ekvivalent şəkildə yazmaq olar:

$$b^2+2b+1 = 3(c^4+6c^2+9)$$

və ya. $$\frac{(b+1)^2}{(c^2+3)^2} = 3.$$

b və *c* ədədlərindən heç biri irrasional ədəd olmazlarsa, 3 ədədi hansısa rasional ədədin tam kvadratına bərabər olardı ki, bu da mümkün deyil.

Həqiqi ədədlər üçün müqayisə aksiomları rasional ədədlər üçün də doğrudur. Ancaq, rasional ədədlər çoxluğunda Kantor prinsipi ödənilmir. Beləliklə, Kantor prinsipinin həqiqi ədədlərin tamlığında həlledici rolu olduğu aşkar görünür.

Burada yenidən rasional ədədlərin adi nəzəriyyəsinə qayıtmaq istərdik. Bildiyimiz kimi, istənilən adi kəsri sonlu və ya sonsuz dövri onluq kəsr şəklində göstərmək olar.

Rasional ədədi onluq kəsrə çevirdikdə məxrəcə bölmədə mümkün qalıqlar sonlu çoxluq təşkil etdiyindən, sonlu addımdan sonra qalıqlar dövri təkrarlanırlar. Bu isə qismətdə uyğun yerlərdə rəqəmlərin təkrarı deməkdir. Başqa sözlə, istənilən rasional ədəd dövri onluq kəsr şəklində göstərilə bilər. İstənilən dövri onluq kəsri adi kəsr şəklində göstərmək olar. Başqa sözlə, onluq kəsrlər kimi rasional ədədlər çoxluğu dövri onluq kəsrlər çoxluğu ilə üst-üstə düşür.

Rasional ədədin sonlu onluq kəsr şəklində göstərilə bilməsi üçün zəruri və kafi şərt məxrəcin sadə vuruqlarının 2 və 5-dən ibarət olmasından ibarətdir.

$r = \frac{n}{m}$ ixtisar olunmayan kəsrində $m = 2^k 5^q$ olarsa, $r = \frac{(n2^q 5^k)}{10^{k+q}}$ göstərilişi doğrudur. Bu ədədin sonlu onluq kəsr olması aydındır.

Fərz edək $r = \frac{m}{m}$ ixtisar olunmayan kəsrinin məxrəcinin 2 və 5-dən başqa sadə vuruğu var və sonlu onluq kəsr şəklində göstərilə bilər. Başqa sözlə,

$$\exists p, b \in N \Rightarrow \frac{n}{m} = \frac{b}{10^k}$$

və ya $$10^k n = bm.$$

$\text{ƏBOB}(n,m) = 1$ olduğundan $\Rightarrow m \mid 10^k$.

Bu isə m ədədinin 2 və 5-dən fərqli sadə vuruğu olmasına ziddir.

İndi isə rasional ədədə uyğun onluq kəsrlərin saf və qarışıq olmasını araşdıraq. Saf dövri onluq kəsrlər

$$\frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}}{\underbrace{99\ldots9}_{k}} \qquad (2)$$

şəklində, qarışıq dövri onluq kəsrlər isə

$$\frac{\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}}{\underbrace{99\ldots9}_{k} \cdot 10^m} \qquad (3)$$

şəklində göstərilə bilər. (2) göstərilişindən aydındır ki, saf dövri onluq kəsr şəklində yazılan rasional ədədin məxrəcində 2 və 5 sadə vuruqları iştirak edə bilməz. Digər tərəfdən, 2 və 5 ilə qarşılıqlı sadə olan istənilən q ədədi üçün

$$\exists n \in N \Rightarrow 10^n \equiv 1 (\text{mod}\, q)$$

və ya

$$10^n - 1 \equiv 0 (\text{mod}\, q)$$

münasibətləri ödənir. Başqa sözlə, məxrəci 2 və 5 ilə qarşılıqlı sadə olan istənilən kəsr müəyyən tamamalayıcı vuruğa vurulmaqla (2) şəklində göstərilə bilər. Yürüdülən mühakimələri aşağıdakı kimi xülasə etmək olar:

Yalnız məxrəci 2 və 5 ilə (və ya 10 ilə) qarşılıqlı sadə olan rasional ədədlər saf dövri onluq kəsrlər şəklində göstərilə bilərlər. Ədədin qarışıq dövri onluq kəsr şəklində göstərilişə malik olması üçün isə zəruri və kafi şərt məxrəcin 10 ilə qarşılıqlı sadə olmamasından ibarətdir.

Zəncirvari kəsrlər. $q_1, q_2, \ldots, q_n$ natural ədədlərdir.

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + .}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$q_{n-1} + \cfrac{1}{q_n}$$

Yazılışı qısaltmaq məqsədi ilə kəsrin əvəzinə $[q_1, q_2, \ldots, q_n]$ yazılışından istifadə edəcəyik. İstənilən sonlu zəncirvarı kəsrin rasional ədəd olması aydındır. Aşağıdakı teorem bu faktın tərsinin də doğru olduğunu göstərir.

İstənilən müsbət rasional ədədi sonlu zəncirvari kəsr şəklində göstərmək olar.

Fərz edək $q = \frac{m}{n}$ verilmiş rasional ədəddir. $m \geq n$ olarsa, $q = q_1 + \frac{n_1}{m_1}, n_1 < m$ göstərişi mümkündür. Digər tərəfdən

$$\frac{n_1}{m} = \frac{1}{\frac{m}{n_1}}; m > n_1$$

olduğundan

$$\frac{m}{n_1} = q_2 + \frac{n_2}{n_1}; n_2 < n_1$$

və ya $$q = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{n_2}{n_1}}$$

göstərişi mümkündür. Anoloji prosesi $\frac{n_2}{n_1}$ kəsri üçün də etmək olar. Alınmış $n_1, n_2, n_3, \ldots$ ədədləri azalan natural ədədlər ardıcıllığı təşkil etdiyi üçün bu proses sonlu olacaq. Başqa sözlə, müəyyən sayda addımdan sonra $n_{k-1} > 1$ və $n_k = 1$ münasibətləri ödənilməlidir. Beləliklə, q ədədi üçün

$$q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + .}}$$

$$\ldots\ldots$$

$$q_{k-1} + \cfrac{1}{q_k}$$

və ya $q = [q_1, q_2, \ldots, q_k]$ göstərişi doğrudur. Burada $q_k = n_{k-2}$ qəbul edilmişdir.

Misal 1. $\frac{29}{47}$ ədədinin zəncirvari kəsr şəklində yazılışını tapaq:

$$\frac{29}{47} = \cfrac{1}{1+\cfrac{18}{29}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{11}{18}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{11}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{4}{7}}}} =$$

$$= \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{3}{4}}}}} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}}}}$$

Beləliklə, $\frac{29}{47}$=[0;1;1;1;1;1;1;3] göstərişi alınmış olar.

m və n natural ədədlərdir. $\frac{m}{n}$=$=[q_1,q_2,\ldots,q_k]$ və $n_1,n_2,n_3,\ldots,n_{k-1},n_k$ ədədləri teoremin isbatında alınan ədədlərdir. Onda

$$\text{ƏBOB}(m,n)=n_{k-1}$$

münasibəti ödənilir.

Başqa sözlə, m və n ədədlərinin ən böyük ortaq bölənini tapmaq üçün m/n kəsrini zəncirvarı kəsrə ayırıb, məxrəcin surətə bölündüyü anda dayanmaq lazımdır. Alınan surət məhz verilən ədədlərin ən böyük ortaq böləni olacaq.

Diqqət yetirilərsə, bu ƏBOB-un tapılması üçün Evklid alqoritmindən başqa bir şey deyil.

Teoremin isbatında alınmış $n_1,n_2,n_3,\ldots$ ədədlərindən hər biri m və n ədədlərinin xətti kombinasiyasından ibarətdir. Məsələn, aydındır ki,

$$n_1=m-q_1n.$$

buna görə də $n_1,n_2,n_3,\ldots$ ədədlərindən hər biri ƏBOB(m,n) ədədinə tam bölünür. Yuxarıdakı göstərilişdə

$$q_{k-1}+\frac{1}{q_k}=\frac{n_{k-3}}{n_{k-2}}=q_{k-1}+\frac{n_{k-1}}{n_{k-2}}$$

olduğundan n_{k-1} ədədi n_{k-2} ədədinin böləni olmalıdır. Digər tərəfdən

$$q_{k-1}n_{k-2}+n_k=n_{k-3}$$

olduğundan n_{k-1} ədədi n_{k-3} ədədinin də böləni olmalıdır. Anoloji mühakimələrdən alınır ki, n_k ədədi $n_1,n_2,n_3,\ldots,n_{k-1}$ ədədlərinin və ən nəhayət m və n ədədlərinin də böləni olmalıdır. Buna görə də

$$\text{ƏBOB}(m,n)=n_{k-1}.$$

Misal 2. ƏBOB(18; 24)-ü tapaq.

Həlli. $\frac{18}{24}$ kəsrinin zəncirvari kəsr şəklində göstərilişində

$$\frac{18}{24}=\frac{1}{1+\frac{6}{18}}$$

artıq ikinci addımda 18 ədədi 6-ya tam bölünür. Buna görə də ƏBOB(18,24)=6.

Zəncirvari kəsrlərdən adi kəsrlərin ixtisar edilməsi üçün istifadə etmək olar. Bunun üçün verilən kəsri zəncirvari kəsr şəklində göstərib, sonuncu addımda (misal 3-də olduğu kimi) ortaq böləni ixtisar etdikdən sonra alınan zəncirvari kəsri yenidən adi kəsrə çevirmək lazımdır.

Misal 3. $\frac{90}{24}$ kəsrini ixtisar edək. Verilən kəsrin zəncirvari kəsr şəklində göstərilişini tapaq.

$$\frac{90}{24}=3+\frac{1}{1+\frac{6}{18}}=3+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

[3;1;3] zəncirvari kəsrini adi kəsrə çevirsək $\frac{15}{4}$ ixtisar olunmayan kəsrini alarıq.

Uyğun kəsrlər.

$q=[q_1,q_2,\ldots,q_k,q_{k+1},\ldots,q_n]$ verilmiş sonlu zəncirvari kəsrinin $[q_1,q_2,\ldots,q_k]$ parçasına uyğun ixtisar olunmayan

$$\frac{P_k}{Q_k}$$

kəsrinə verilən kəsrin k-cı **parçasına uyğun kəsr** deyilir.

Verilən $[q_1,q_2,\ldots,q_k,q_{k+1},\ldots,q_n]$ sonlu zəncirvari kəsrinin xassələrini araşdıraq. Bunun üçün $\frac{P_k}{Q_k}$ kəsrinin əvəzinə ixtisar edilməmiş $\frac{B_k}{C_k}$ kəsrlərinə baxaq.

$$\frac{B_1}{C_1}=\frac{q_1}{1}\Rightarrow B_1=q_1;C_1=1$$

$$\frac{B_2}{C_2}=q_1+\frac{1}{q_2}=\frac{q_2q_1+1}{q_2}\Rightarrow B_2=q_2B_1+1;C_2=q_2$$

$$\frac{B_3}{C_3}=q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3}}=\frac{q_3(q_1q_2+1)+q_1}{q_2q_3+1}=\frac{q_3B_2+B_1}{q_3C_2+C_1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_3=q_3B_2+B_1;C_3=q_3C_2+C_1$$

Alınmış münasibət $B_k;C_k$ ədədləri arasında

$$B_k=q_kB_{k-1}+B_{k-2};C_k=q_kC_{k-1}+C_{k-2} \quad (4)$$

rekkurent münasibətlərinin ödənildiyini söyləməyə əsas verir və bu doğrudan da belədir. İsbatı tam induksiya prinsipi əsasında aparacağıq. İnduksiyanın bazası artıq ($k=3$ halında) əldə edilmişdir. (1) münasibətinin k ədədi üçün doğru olduğunu qəbul edib, $k+1$ ədədi üçün isbat edək.

$$q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+.}}=$$

$$.....$$

$$q_k+\frac{1}{q_{k+1}}$$

$$=\frac{(q_k+\frac{1}{q_{k+1}})B_{k-1}+B_{k-2}}{(q_k+\frac{1}{q_{k+1}})C_{k-1}+C_{k-2}}=$$

$$=\frac{q_{k+1}(q_kB_{k-1}+B_{k-2})+B_{k-1}}{q_{k+1}(q_kC_{k-1}+C_{k-2})+C_{k-1}}=\frac{q_{k+1}B_k+B_{k-1}}{q_{k+1}C_k+C_{k-1}}$$

İlk bərabərlikdə təklifin k uzunluqlu parça üçün doğru olmasından istifadə edilib. Qeyd etmək lazımdır ki, $k=3$ halında rekkurent formula əldə edilərkən q_1,q_2,q_3 ədədlərinin natural olmasından heç bir yerdə istifadə edilməyib. Deməli, verilən təklif q_1,q_2,q_3 ədədlərinin istənilən həqiqi qiymətləri üçün də doğrudur. Düsturun doğruluğu k uzunluqlu parça üçün qəbul edilmişsə, $q_k+\frac{1}{q_{k+1}}$ cəmini bir ədəd kimi qəbul edib, $(k+1)$ uzunluqlu parçadan k uzunluqlu parçaya keçmək olar. Yuxarıda adı çəkilən bərabərlikdə məhz bu fakt tətbiq edilib.

(4) münasibətindən alınan bəzi xassələri qeyd edək:

1. B_1-dən başqa ($B_1=0$ ola bilər) bütün B_k və C_k ədədləri natural ədədlərdir və $C_1=1$

2. B_k və C_k ədədləri azalmayan ardıcıllıq təşkil edirlər. Doğrudan da,

$$B_k=q_kB_{k-1}+B_{k-2}\geq B_{k-1}$$

$$C_k=q_kC_{k-1}+C_{k-2}\geq C_{k-1}$$

bərabərsizliklərinin ödənməsi aşkardır.

3. $B_kC_{k-1}-B_{k-1}C_k=(-1)^k$ (5)

bərabərlikləri ödənilir. İsbat üçün riyazi induksiya prinsipini tətbiq edək:

$k=2$ olarsa,

$$B_2C_1-B_1C_2=(q_2q_1+1)\cdot1-q_2q_1=(-1)^2$$

Verilən təklifin k üçün doğruluğunu qəbul edib $(k+1)$ üçün doğru olmasını isbat edək.

$$B_{k+1}C_k-B_kC_{k+1}=(q_{k+1}B_k+B_{k-1})C_k-$$

$$-B_k(q_{k+1}C_k+C_{k-1})=B_{k-1}C_k-B_kC_{k-1}=$$

$$=-(B_kC_{k-1}-B_{k-1}C_k)=(-1)^{k+1}$$

B_k və C_k ədədləri qarşılıqlı sadə ədədlərdir.

Doğrudan da d ədədi B_k və C_k ədədlərinin ortaq bölənidirsə,

$$B_kC_{k-1}-B_{k-1}C_k$$

ədədi də d ədədinə bölünməlidir. (5) bərabərliyi doğru olduğundan, bu yalnız $d=1$ olduqda mümkündür. $P_k=B_k$, $Q_k=C_k$ münasibətləri ödənilir.

İki ardıcıl uyğun kəsr arasında

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}} \quad (6)$$

münasibəti ödənilir.

(6) münasibətini əldə etmək üçün (5) bərabərliyinin hər iki tərəfini Q_kQ_{k-1} hasilinə bölmək lazımdır.

k-nın tək qiymətləri üçün $\frac{P_k}{Q_k}<\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$.

k-nın cüt qiymətləri üçün $\frac{P_k}{Q_k}>\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$

bərabərsizlikləri ödənilir.

Cüt nömrələrə uyğun kəsrlər ardıcıllığı azalır, tək nömrələr üçün alınan uyğun kəsrlər ardıcıllığı isə nömrələrin artması ilə artır.

(6) münasibətlərini tətbiq edək

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k-1}}$$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq

$$\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-2}}{Q_{k-2}}=\frac{(-1)^k(Q_{k-2}-Q_k)}{Q_kQ_{k-1}Q_{k-2}} \qquad (7)$$

Bərabərliyi alınır. Q_k ardıcıllığının monoton artan olduğunu nəzərə alsaq (7) bərabərliyinin sol tərəfi k-nin tək qiymətlərində müsbət, k-nın cüt qiymətlərində isə mənfi qiymətlər alır.

Beləliklə, yuxarıdakı nəticələrdən

$$\frac{P_2}{Q_2}>\frac{P_4}{Q_4}>\ldots>\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}>\ldots>\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}>\ldots>\frac{P_3}{Q_3}>\frac{P_1}{Q_1}$$

bərabərsizlikləri alınır. Başqa sözlə, cüt nömrəli uyğun kəsrlər azalaraq yuxarıdan, tək nömrəli uyğun kəsrlər isə artaraq aşağıdan verilmiş zəncirvari kəsrə yaxınlaşırlar.

$q=[q_1,q_2,\ldots,q_k,q_{k+1},\ldots,q_n]$ zəncirvari kəsrinə k-cı uyğun kəsr $(k-1)$-ci uyğun kəsrindən daha yaxındır. Başqa sözlə,

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|<\left|\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q\right|.$$

$x_{k+1}=[q_{k+1},\ldots,q_n]$ işarələməsini aparsaq

$$q=\frac{x_{k+1}P_k+P_{k-1}}{x_{k+1}Q_k+Q_{k-1}}$$

bərabərliyini almış olarıq. Bu bərabərlikdən x_{k+1} ədədini tapaq

$$x_{k+1}=\frac{P_{k-1}-qQ_{k-1}}{qQ_{k-1}-P_k}=\frac{Q_{k-1}}{Q_k}\cdot\frac{\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q}{q-\frac{P_k}{Q_k}}$$

Beləliklə,

$$x_{k+1}\cdot\frac{Q_k}{Q_{k-1}}=\cdot\frac{\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q}{q-\frac{P_k}{Q_k}} \qquad (8)$$

bərabərliyi ödənilməlidir. $x_{k+1}>1$ və $Q_k\geq Q_{k-1}>0$ olduğunu nəzərə alsaq, sağ tərəfdə surət və məxrəcdəki ifadələrinin eyni işarəli olması və

$$\frac{\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q}{q-\frac{P_k}{Q_k}}>1$$

bərabərsizliyinin ödənilməsi zəruridir. Bu sonuncu isə yalnız və yalnız

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|<\left|\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q\right|$$

bərabərsizliyi ödənildikdə mümkündür. Nəticə isbat edildi.

(Laqranj teoremi). k-cı uyğun kəsr məxrəcləri Q_k ədədini aşmayan kəsrlər arasında verilən zəncirvari kəsrə ən yaxın kəsrdir. Başqa sözlə,

$$\beta\leq Q_k,\alpha\in N\Rightarrow\left|\frac{\alpha}{\beta}-q\right|\geq\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|.$$

Bu ifadənin əksini fərz edək. Tutaq ki, $\beta\leq Q_k$ şərtini ödəyən müəyyən bir $\frac{\alpha}{\beta}$ kəsri üçün

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-q\right|<\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|$$

bərabərsizliyi ödənilir. Yuxarıdakı nəticələrə əsasən $\frac{\alpha}{\beta}$ kəsri $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}};\frac{P_k}{Q_k}$ kəsrləri arasında yerləşir. Beləliklə,

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|<\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}\right|$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Elementar çevrilmələrdən sonra

$$\left|\frac{\alpha Q_{k-1}-\beta P_{k-1}}{\beta Q_{k-1}}\right|<\frac{1}{Q_kQ_{k-1}}$$

və ya

$$|\alpha Q_{k-1}-\beta P_{k-1}|<\frac{\beta}{Q_k}\leq 1$$

bərabərsizliyini almış olarıq, $\alpha,Q_{k-1},\beta,P_{k-1}$ ədədlərinin natural olduğunu nəzərə alsaq, bu yalnız və yalnız

$$\alpha Q_{k-1}\beta P_{k-1}=0 \text{ və ya } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$$

olduqda mümkündür. Onda

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|>\left|\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q\right|$$

bərabərsizliyi ödənilməli olardı ki, bu da yuxarıdakı nəticəyə ziddir. Başqa sözlə, fərziyyəmiz doğru deyil.

Yuxarıdakı nəticələr $\frac{P_k}{Q_k}$ uyğun kəsrinin q ədədinə yaxınlıq dərəcəsini təyin etməyə imkan verir. Doğrudan da,

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|<\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\right|=\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}<\frac{1}{Q_k^2}.$$

Yəni, $q\approx\frac{P_k}{Q_k}\left(\pm\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}\right)$ və ya $q\approx\frac{P_k}{Q_k}\left(\pm\frac{1}{Q_k^2}\right)$ qəbul etmək olar.

BƏZİ NƏTİCƏLƏR. İRRASİONAL ƏDƏDLƏRİN KƏSİLMƏZ KƏSRLƏR VASİTƏSİ İLƏ GÖSTƏRİLİŞİ

q müsbət rasional ədədinin zəncirvari kəsr şəklində göstərilişinə uyğun alqoritmi aşağıdakı kimi xülasə etmək olar:

ilk mərhələdə q ədədinin tam hissəsi ayrılır, ikinci addımda q ədədinin kəsr hissəsinin tərsinin tam hissəsi ayrılır; üçüncü addımda alınmış kəsr hissənin tərsinin tam hissəsi ayrılır və s.

Aşağıdakı işarələmələri aparsaq,

$$x_1=q;x_2=\frac{1}{\{x_1\}};\ldots;x_k=\frac{1}{\{x_{k-1}\}};x_{k+1}=\frac{1}{\{x_k\}};\ldots$$

bu alqoritmi aşağıdakı kimi yaza bilərik:

$$q_1=[x_1];q_2=[x_2];\ldots;q_k=[x_k];\ldots$$

və k ədədinin istənilən qiymətində

$$q=[q_1;q_2;\ldots;q_k;x_{k+1}]=q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\ldots+\cfrac{1}{q_k+\cfrac{1}{x_{k+1}}}}}$$

bərabərliyi doğrudur. Nəticədə

$$x_{k+1}\cdot\frac{Q_k}{Q_{k-1}}=\cdot\frac{\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q}{q-\frac{P_k}{Q_k}}$$

münasibəti ödənilir. $x_{k+1}>1$ və $Q_k\geq Q_{k-1}>0$ olduğundan

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|<\left|\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}-q\right|$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Bu isə q ədədinin $\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}$ və $\frac{P_k}{Q_k}$ ədədləri arasında yerləşdiyini söyləməyə əsas verir və

$$\left|\frac{P_k}{Q_k}-q\right|<\left|\frac{P_k}{Q_k}-\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}\right|=\frac{1}{Q_kQ_{k+1}}<\frac{1}{Q_k^2}.$$

Diqqət yetirilərsə, sadalanan faktlar və mühakimələrin əldə edilməsində q ədədinin rasional olmasından heç bir yerdə istifadə edilmir. Deməli, istənilən irrasional α ədədi üçün anoloji mühakimələr öz qüvvəsində qalır və uyğun kəsrlər verilən ədədə yığılır.

İstənilən α irrasional ədədini sonsuz zəncirvari (kəsilməz) şəklində göstərmək olar.

$\sqrt{2}$ ədədinin zəncirvari kəsr şəklində göstərilişini tapaq.

$$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}=$$

$$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$$

Artıq ikinci addımda kəsr hissə təkrar olmağa başlayır. Beləliklə, $\sqrt{2}=[1;2;2;\ldots]=$ $=[1;(2)]$ dövri zəncirvari kəsr şəklində göstəriliş alınır.

Hansı irrasional ədədlər dövri zəncirvari kəsr şəklində göstərilişə malikdirlər? Verilən suala cavab olaraq isbatsız aşağıdakı teoremin doğru olduğunu qeyd etmək istərdik.

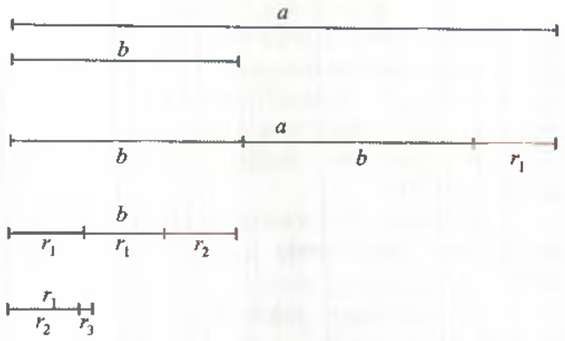
Yalnız tam əmsallı kvadrat tənliyin kökləri dövri zəncirvari kəsr şəklində göstərilişə malikdirlər.

Başqa sözlə, yalnız $\frac{a+\sqrt{b}}{c};a,b,c\in N$ şəklində irrasional ədədlər dövri zəncirvari kəsr şəklində göstərilişə malikdirlər.

Qeyd edək, tam əmsallı kvadrat tənliyin kökü olan irrasional ədədlərə **kvadratik irrasional** ədədlər deyilir.

EVKLİD ALQORİTM

Bizim bircinsli cisimlərlə işimiz olan zaman tez-tez belə bir sual ortaya çıxır: onların hansı böyükdür? Boşqabdakı hansı alma ən böyükdür? Hansı şəhər böyükdür: Gəncə, yoxsa Sumqayıt? İki düz xətt parçası varsa, onların hansının böyük olduğunu demək çətin deyil. Lakin onların uzunluqları nisbətinin nəyə bərabər olduğunu, başqa sözlə, birinin digərindən neçə dəfə böyük olduğunu demək çətindir.



Şəkil 1. a və b parçalarının ümumi ölçüsünün təyini.

Bu suala cavab vermək üçün a və b parçalarının ümumi ölçüsünü, yəni elə parçanı tapmaq lazımdır ki (beləsi mövcuddursa), o istər a, istərsə də b parçalarında tam dəfə yerləşsin. Rahatlıq üçün bu parçaların uzunluğunu da a və b hərfləri ilə işarə edəcəyik. Aydındır ki, $a = b$ olduqda verilmiş parçalardan hər biri ümumi ölçü rolunu oynaya bilər. Lakin fərz edək ki, $a > b$-dir. Onda b parçasını a parçasında maksimal dəfə yerləşdirə bilərik. Əgər a parçası b parçasının tam miqdarı ilə tükənirsə, onda b parçası onların ümumi ölçüsü olacaq. Lakin çox ehtimal ki, b parçası a parçasında tam dəfə yerləşməsin və kiçik r_1 "tikəsi" qalsın. İndi onun özünü a və b parçalarının ümumi ölçüsü kimi sınaqdan keçirmək təbiidir. O, b parçasında tam sayda yerləşərsə, bu rola uyğun gələ bilər. Lakin bu dəfə yenə də r_2 qalığı alsaq, onda növbəti addımda r_2 parçasını, lakin bu dəfə r_1 parçasına nəzərən və s., sınaqdan keçirəcəyik. Əgər son ucda elə bir r_k parçası alınsa ki, əvvəlki r_{k-1} qalığında yəm sayda yerləşsin, elə o da bütün parçaların ümumi ölçüsü olacaq. Yox, əgər bu proses heç vaxt qurtarmazsa, onda a və b parçalarının ümumi ölçüsü yoxdur – onlar ortaq ölçülü deyillər.

Eyni metodu parçalara deyil, tam ədədlərə tətbiq etmək olar. Onda söhbət a və b ədədlərinin ən böyük ortaq bölənindən gedəcək. Məsələn, $a = 2000$, $b = 360$ götürək. Bu zaman ardıcıl surətdə alacağıq:

$$2000 = 360 \cdot 5 + 200;$$

$$360 = 200 \cdot 1 + 160;$$

$$200 = 160 \cdot 1 + 40;$$

$$160 = 40 \cdot 4.$$

Buradan belə qənaətə gəlirik ki, 2000 və 360 ədədlərinin ən böyük ortaq böləni 40-dır.

Bu metod ilk dəfə Evklidin "Başlanğıclar"ında xatırlanıb və tarixə "Evklid alqoritmi" kimi düşüb. Onu bərabərliklər zənciri şəklində yazaq:

$$a = bn_1 + r_1;$$

$$b = r_1 n_2 + r_2;$$

$$r_1 = r_2 n_3 + r_3;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{k-1} = r_k n_{k+1}.$$

Bu zəncirdən a/b təsviri kanonik zəncirvari kəsr şəklində ("Zəncirvari kəsrlər" məqaləsinə bax) nisbətən asanlıqla alınır:

$$\frac{a}{b} = n_1 + \frac{r_1}{b} = n_1 + \frac{1}{n_2 + \dfrac{r_2}{r_1}} =$$

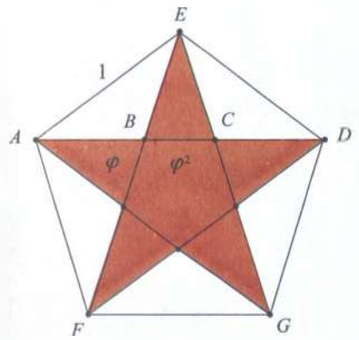
$$= n_1 + \frac{1}{n_2 + \dfrac{1}{n_2 + \dfrac{r_3}{r_2}}} = \ldots = n_1 + \frac{1}{n_2 + \dfrac{1}{n_3 + \dfrac{1}{n_4 + \ldots}}}.$$

Bax beləcə Evklid alqoritminin qəflətən zəncirvari kəsrlərlə bağlılığı məlum oldu.

FİDİ ƏDƏDLƏRİ VƏ QIZIL KƏSİK

Beşguşəli ulduz – pentoqram adamları həmişə formasının kamilliyi ilə cəlb edirdi. Pifaqorçular məhz onu öz ittifaqlarının simvolu seçmişdilər. Elə o da sağlamlıq amuleti sayılırdı. Bizim günlərimizdə də beşguşəli ulduz bir çox ölkələrin bayraqlarını və gerblərini bəzəyir. Onun cazibədarlığının səbəbi nədədir?

Məsələ bundadır ki, bu fiqurda onu təşkil edən parçaların nisbətlərinin heyrətamiz bərabərliyi müşahidə olunur. Şəkil 1-ə baxın: inanılmaz olsa da, lakin $AD : AC = AC : CD = AB : BC = AD : AE = AE : EC$. Ulduzun simmetriyasından istifadə edərək, bu bərabərlik sırasını hələ çox davam etdirmək olar.



Şəkil 1. Beşguşəli ulduz – pentoqram. Bu fiqurda parçaların nisbətinin heyrətamiz sabitliyi müşahidə olunur. Burada AD : AC = AC : CD = AB : BC = = AD : AE = AE : EC və s.

Birinci bərabərliyə təfsilatı ilə baxaq. C nöqtəsi AD parçasını iki qeyri-bərabər hissəyə bölür və böyük hissə kiçik hissəyə bütün parça böyük hissəyə olan nisbətdə münasibətdədir. Bəs bu nisbət nəyə bərabərdir? Onu tapmaq üçün AD parçasını a, AC-ni b kimi qəbul edək. $CD = a - b$ olduğundan, $a : b = b : (a - b)$ və ya $a^2 = ab + b^2$. Hər iki tərəfi b^2-a bölərək və axtarılan a/b nisbətini Φ hərfi ilə işarə edərək

$$\Phi^2 = \Phi + 1 \qquad (*)$$

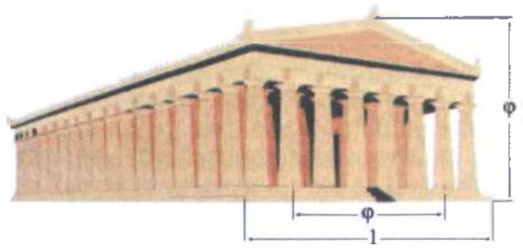
tənliyini alırıq ki, onun da yeganə $\Phi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1{,}618034..$ müsbət kökü var. Çox vaxt böyük parçanın kiçiyə nisbətini deyil, tərs kəmiyyəti – kiçik parçanın böyüyə nisbətinə – $1/\Phi$-yə baxırlar. Onu φ hərfi ilə işarə edək və o, $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0{,}618034..$-ə bərabərdir. Yeri gəlmişkən, (*) tənliyinin ikinci kökü φ - dir.

Φ və φ "fi" yunan hərfinin böyük və kiçik formalarıdır. Belə işarələmə e. ə. V əsrdə yaşamış qədim yunan heykəltəraşı Fidinin şərəfinə qəbul edilmişdir. Fidi Afinadakı Parfenon məbədinin tikintisinə rəhbərlik edib. Bu məbədin ölçülərinin nisbətində φ ədədinə dəfələrlə rast gəlinir (şəkil 2).

Siz, əlbəttə, diqqət yetirdiniz ki, Φ və φ ədədlərinin qiymətləri yalnız birinci rəqəmlə fərqlənir. Bu fakt Φ üçün olan (*) tənliyinin özündə qoyulub. Onu Φ-yə bölək:

$$\Phi = 1 + 1/\Phi = 1 + \varphi,$$

buradan görünür ki, Φ və φ ədədləri düz 1 qədər fərqlənirlər.



Şəkil 2. Parfeonun tənasüblərində φ ədədi dəfələrlə iştirak edir.

Yeri gəlmişkən, əgər bu tənliyi $\Phi = \sqrt{1 + \Phi}$ şəklində yazsaq, onda kök altındakı Φ-ni $\sqrt{1 + \Phi}$ ilə əvəz edərək alırıq ki, $\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}}$. Bu proseduru dəfələrlə sonsuzluğa qədər təkrar edərək

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots}}}}$$

düsturunu çıxarırıq.

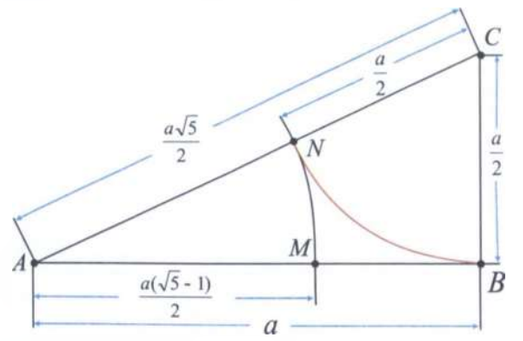
Daha bir gözəl düstur budur:

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}.$$

O, çevrilmiş $\Phi = 1 + 1/\Phi$ tənliyində məxrəcdəki Φ-ni

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\Phi}}$$

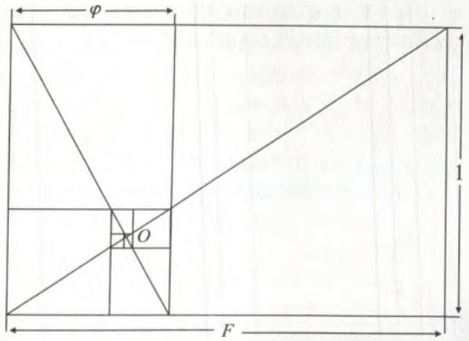
ifadəsi ilə əvəz etdikdə və sonra bu prosesi sonsuz təkrar etdikdə alınır.



Şəkil 3. AB parçasının pərgar və xətkeşlə həyata keçirilmiş qızıl kəsiyi.

Parçanı Φ nisbətində necə bölməli? Pərgar və xətkeşim köməyi ilə belə qurma artıq Evklidin məşhur "Başlanğıclar"ında təsvir olunub. O, şəkil 3-də göstərilib. Əvvəlcə *AB* parçasına uzunluğu *AB* parçasının yarısına bərabər olan *BC* perpendikulyarını quraq. Sonra *AC* parçasını keçirək – bu, *ABC* üçbucağının hipotenuzudur. Sonra iki çevrə təsvir edək: biri mərkəzi *C* nöqtəsində və *BC* radiuslu, digəri isə mərkəzi *A* nöqtəsində və *AN* radiuslu olmaqla, (burada *N* birinci çevrənin *AC* parçasıyla kəsişmə nöqtəsidir). İkinci çevrənin *AB* parçasını kəsdiyi *M* nöqtəsi onu Φ nisbətində bölür, yəni $AM : MB = \Phi$. Φ ədədinin ifadə etdiyi əndazə, bir çox tədqiqatçıların şəhadətinə əsasən, göz üçün ən xoşdur. Leonardo da Vinçi hesab edirdi ki, insan bədəninin ideal tənasübləri Φ ədədi ilə bağlı olmalıdır. Parçanı Φ nisbətində bölməyi o, qızıl kəsik adlandırdı. Bu termin bizim günlərə qədər saxlanılıb. İntibah dövründə qızıl kəsik rəssamlar, heykəltəraşlar və memarlar arasında çox məşhur idi. Məsələn, yağlı boya ilə çəkilən peyzajların əksəriyyətində üfüq xətti kətanı hündürlüyə görə Φ-yə yaxın nisbətdə bölür. Şəklin ölçülərini seçəndə isə çalışırdılar ki, enin uzunluğa nisbəti də Φ-yə bərabər olsun. Belə düzbucaqlını "qızıl düzbucaqlı" adlandırmağa başladılar.

Əgər "qızıl düzbucaqlı"dan kvadrat kəsilsə, yenə də "qızıl düzbucaqlı" alınacaq və bunu sonsuzluğa qədər davam etdirmək olar. Şəkil 4-dən görünür ki, birinci və ikinci düzbucaqlıların diaqonallarını keçirsək, onların *O* kəsişmə nöqtəsi bütün alınan "qızıl düzbucaqlılara" aid olacaq.



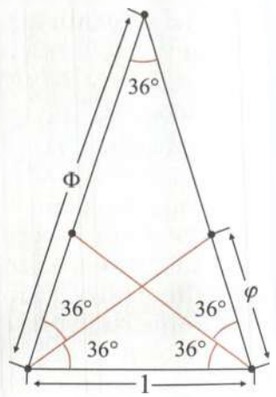
Şəkil 4. "Qızıl düzbucaqlı" Ondan kvadrat kəssək, yenə də "qızıl düzbucaqlı" qalacaq və bu prosesi sonsuzluğa qədər davam etdirmək olar. Birinci və ikinci düzbucaqlıların diaqonalları isə bütün alınan "qızıl düzbucaqlılara" mənsub olan D nöqtəsində kəsişəcək.

Əlbəttə ki, "qızıl üçbucaq" da olur. Şəkil 1-də bu, bərabəryanlı *FEG, EAC* və *BEC*



Leonardo da Vinçi "qızıl üçbucaqdan" öz məşhur "Coxonda"sında istifadə etmişdir.

üçbucaqlarıdır ki, onların da yan tərəfləri və oturacaqlarının uzunluqları nisbəti Φ-yə bərabərdir. Belə üçbucağın əlamətdar xassələrindən biri ondan ibarətdir ki, onun oturacağına bitişik bucaqlarının tənbölənləri oturacağın özünə bərabərdir (şəkil 5).



Şəkil 5. "Qızıl üçbucaq". Onun oturacağına bitişik bucaqların tənbölənlərinin uzunluğu onun oturacağının uzunluğuna bərabərdir.

"Qızıl kuboid" də var – bu, tillərinin uzunluqları Φ, 1, φ olan paralelepipeddir. Onun səthinin sahəsi Φ, diaqonalı 2-dir (bunu yoxlaya bilərsiniz). Buradan alınır ki, onun ətrafına çəkilmiş sferanın radiusu 1 və deməli, onun sahəsi 4π-dir. Buna görə də bu sferanın səthinin "qızıl kuboidin" səthinə nisbəti π:Φ-yə bərabərdir.

Φ ədədinin üçüncüdən başlayaraq hər bir həddinin iki əvvəlinkinin cəminə bərabər olduğu Fibonaççi ardıcıllığı ilə: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,...sıx bağlı olduğu məlum oldu ("Ardıcıllıqlar" məqaləsinə bax). Xüsusi halda, Φ ədədinin *n*-ci qüvvəti əlamətdar düsturla ifadə olunur:

$$\Phi^n = \frac{1}{2}(a_n\sqrt{5} + b_n).$$

Burada a_n *n*-ci Fibonaççi ədədi, b_n isə Fibonaççi ardıcıllığının prinsipi ilə qurulan 1, 3, 4, 7, 11, 18, 2...ardıcıllığının *n*-ci həddidir.

TRANSSENDENT ƏDƏDLƏR

"Transsendent ədəd" ifadəsini yəqin ki, hamı eşidib. Məktəbdə adətən bildirirlər ki, π və *e* ədədləri transsendent ədəddir. Lakin bunun nə demək olduğunu heç də hamı anlamır.

"Transsendentis" latın sözünü "o biri tərəfli" kimi tərcümə etmək olar. Doğrudanmı burada da "o biri dünya" var? Və onda riyaziyyatçılar "bu tərəfli" ədədlər dedikdə nəyi nəzərdə tuturlar?

1, 2, 3,... natural ədədlərindən çıxış etsək, dörd riyazi əməlin – toplamanın, çıxmanın, vurmanın və bölmənin – köməyi ilə bütün rasional ədədlər və yalnız onlar alınır. Buna görə də rasional ədədləri tam əsasla "hesabi" adlandırmaq olar.

n-ci dərəcədən kökalma əməliyyatını daxil etməklə başqa ədədlər də almaq olar, məsələn:

$$\sqrt{2};\ \sqrt[3]{4} + \sqrt[5]{6};\ \sqrt{\frac{1997}{\sqrt[19]{97} + \sqrt[199]{7}}}\sqrt{\frac{\sqrt{1998} + \sqrt{1999}}{2000}}.$$

İsbat edilmişdir ki, ixtiyari belə ədəd bu və ya digər tam əmsallı cəbri tənliyin, yəni

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

tənliyinin köküdür, burada a_i tam ədədlərdir.

Beləliklə, cəbri ədədlər tam əmsallı cəbri tənliklərin kökləri olan ədədlərdir. Riyaziyyatçılar məhz onları "bu tərəfli", adi ədədlər hesab edirlər.

Doğrudur, *XIX* əsrdə məlum oldu ki, cəbri tənliklərin heç də bütün köklərini dörd hesabi əməlin və kökalmanın köməyi ilə ifadə etmək olmur ("Yüksək dərəcəli tənliklər" məqaləsinə bax). Məsələn,

$$x^5 - 4x - 2 = 0$$

tənliyinin "radikallarda" həlli yoxdur. Belə ki, cəbri ədədlər aləmi əvvəllər fərz edildiyindən daha mürəkkəb çıxdı.

DAİRƏ MAGİYASININ AŞILMASI

İki min il yarım əvvəl qədim yunan riyaziyyatçıları təkcə pərgar və xətkeşin köməyi ilə verilmiş dairəyə bərabər olan (yəni eyni sahəyə malik olan) kvadratın qurulması məsələsinə girişdilər. Onlar hesab edirdilər ki, yalnız pərgar və xətkeş gözəllik və harmoniyanın ilahi qanunlarına cavab verir və digər alətlərlə qurmaları inkar edirdilər ("Qədim dövrün üç məşhur məsələsi" məqaləsinə bax). "Dairənin kvadraturası haqqında" bu məsələnin çoxsaylı uğursuz cəhdləri alimləri tədricən o fikrə gəlməyə sövq etdi ki, o, ümumiyyətlə həlledilməzdir. Lakin "sövq etmək" isbat etmək demək deyil.



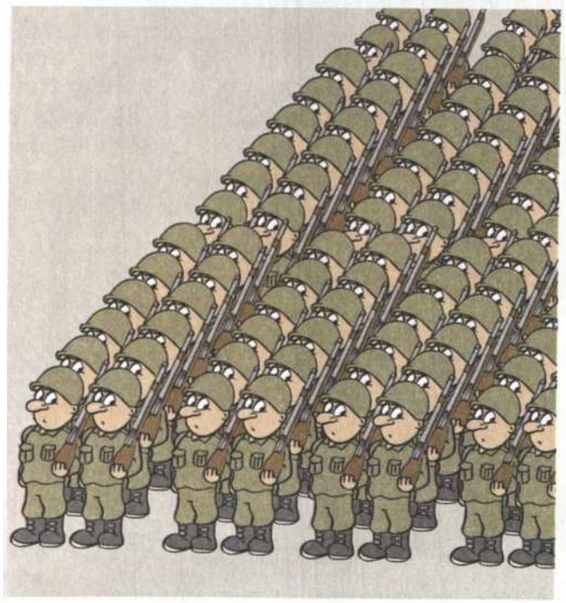
Dairənin kvadraturası – çoxəsrlik tarixi olan məsələdir.

Dairənin kvadraturası məsələsini həll etmək – uzunluğu $\sqrt{\pi}$ olan parçanı qurmaq deməkdir. Axı belə parçada qurulmuş kvadrat π-yə bərabər olan sahəyə, yəni radiusu vahid olan dairənin sahəsinə malik olacaq. Bununla belə pərgar və xətkeşin köməyi ilə aparılan qurmalar, onları cəbri dilə çevirsək, dörd hesab əməlinin yerinə yetirilməsinə və kvadrat köklərin alınmasına müncər edilir. Belə ki, məsələ bu beş əməlin köməyi ilə π ədədini ifadə etməkdən gedir.

1882-ci ildə alman riyaziyyatçısı Karl Ferdinand Lindeman isbat etdi ki, π ədədi transsendentdir və deməli, nəinki kvadrat radikalların köməyi ilə təsvir oluna bilməz, ümumiyyətlə tam əmsallı heç bir cəbri tənliyin kökü ola bilməz. Dairənin kvadraturası haqqında məsələyə belə nöqtə qoyuldu.

SAYSIZ-HESABSIZ QOŞUN

Kiməsə elə gələr ki, transsendent ədədlərin sayı cüzidir: π və e – vəssəlam. Əslində isə məsələ belə deyil. Müəyyən mənada transsendent ədədlər hətta cəbri ədədlərdən çoxdur: əgər cəbri ədədləri "nömrələmək", yəni hər bir cəbri ədədə ayrıca natural ədəd qarşı qoymaq mümkün olarsa, transsendent ədədlər belə hesaba gəlmirlər – onlar saysız-hesabsız qoşundur!



Transsendent ədədlər saysız-hesabsız qoşundur.

Hələ 1744-cü ildə Leonard Eyler belə bir hipotez irəli sürdü ki, demək olar ki, bütün a və b-lər üçün $\log_a b$ ədədləri tam əmsallı çoxhədlilərin kökü ola bilməzlər. 1844-cü ildə fransız riyaziyyatçısı Jozef Liuvil transsendent ədədlərin ilk misallarını qurdu. Digər riyaziyyatçılar da Liuvilin reseptindən istifadə edərək belə ədədləri aşkar etməyə başladılar. *XIX* əsrin axırlarına yaxın artıq Eyler hipotezi sübut edilmişdi və Karl Veyerştrass demək olar ki, bütün cəbri α-lar üçün $\sin\alpha$ və $\cos\alpha$ ədədlərinin transsendentliyini əsaslandırdı.

David Hilbert 1900-cü ildə Riyaziyyatçıların *II* beynəlxalq konqresində çıxış edərək *XIX* əsrin gələcək yüzilliyə miras qoyduğu 23 problemi ifadə etdi. Yeddinci problem α^β şəklində ədədlərin transsendentliyinə toxunurdu, burada α 0 və 1-dən fərqli cəbri ədəd, β rasional olmayan cəbri ədəddir. 1934-cü ildə Hilbert problemini alman alimi Teodor Şnayder həll edərək α^β ədədlərinin transsendentliyini təsdiq etdi.

π ƏDƏDİ

Çevrə uzunluğunun onun diametrinə nisbəti sabit kəmiyyətdir və çevrənin uzunluğundan asılı deyil. Bu nisbəti ifadə edən ədədi "periferiya" (yunanca "çevrə") sözünün ilk hərfi π ("pi") ilə işarə etmək qəbul olunub. π ədədi sonsuz dövri olmayan onluq kəsrlə ifadə olunur və təqribən 3,141592653589...-a bərabərdir.

Uzaq qədimlərdə hesab edilirdi ki, çevrə diametrdən düz üç dəfə böyükdür. Bu məlumatlar Qədim Beynəlnəhreynin (İki çayarası) mixi lövhələrində var. Eyni anlamı Bibliya mətnindən çıxarmaq olar: "Və baldan tökülmüş dəniz düzəltdi, – onun bu kənarından o biri kənarına qədər on dirsək idi, – tamam girdə idi. Otuz dirsək mələk otu onu hər tərəfdən qucaqlayırdı". Beləliklə, π ədədinin birinci yaxınlaşması 3 idi. Lakin atrıq e.ə. *II* minillikdə qədim Misirin riyaziyyatçıları daha dəqiq nisbət tapırdılar. Təxminən e. ə. 1650-ci il tarixli Raynd papirusunda π ədədi üçün $(16/9)^2$ qiyməti gətirilir ki, bu da onluq yaxınlaşmada 3,16-dır.

E. ə. *VI* əsrədək riyazi elm qədim Yunanıstanda sürətlə inkişaf etdi. Məhz qədim yunan həndəsəçiləri ciddi şəkildə isbat etdilər ki, çevrənin uzunluğu onun diametri ilə

mütənasibdir ($l = 2\pi R$; R – çevrənin radiusu, l – onun uzunluğudur), dairənin sahəsi isə çevrə uzunluğunun və radiusunun hasillərinin yarısına bərabərdir:

$$S = \frac{1}{2} l \cdot R = \pi R^2.$$

Bu isbatı Knidli Yevdoksa və Arximedə aid edirlər.

π ƏDƏDİNİN İLK RƏQƏMLƏRİNİ NECƏ YADDA SAXLAMALI

π = 3,14... ədədinin ilk üç rəqəmini yadda saxlamaq çətin deyil. Daha çox işarənin yadda saxlanılması üçün isə əyləncəli deyimlər və şeirlər mövcuddur. Məsələn,

"Mən o sözü o qədər bilsəydim, nə olardı" deyimində sözlərdəki hərflərin sayı ($\pi \approx 3{,}1415$) ədədindəki işarələri müəyyən edir.

Yuvarlaqlanmamış 101 işarə isə belədir:

3, 14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510 53209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679.

E. ə. *III* əsrdə Arximed "Dairənin ölçülməsi" əsərində 6-dan 96 bucaqlıyadək çevrə daxilinə və xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlıların perimetrlərini hesabladı. Beləliklə o, müəyyən etdi ki, π ədədi $3\frac{10}{71}$ və $3\frac{1}{7}$ hüdudlarındadır, yəni $3{,}1408 < \pi < 3{,}1428$. $3\frac{1}{7}$ qiyməti indiyə kimi tətbiqi məsələlər üçün π ədədinin çox yaxşı yaxınlaşması hesab olunur. Daha dəqiq $3\frac{17}{120}$ ($\pi \approx 3{,}14166$) yaxınlaşmasını Klavdi Ptolomey tapmışdır, lakin ondan o qədər də istifadə olunmur.

Hindlilər və ərəblər elə hesab edirdilər ki, $\pi = \sqrt{10}$. Bu qiyməti *VII* əsr hind riyaziyyatçısı Brahmaqupta göstərir. *III* əsrdə Çin alimləri Tszu Çun Çji 355/113 yaxınlaşmasını aldı ($\pi \approx 3{,}1415927$). O, avropalılara naməlum qaldı və onu yenə yalnız 1585-ci ildə holland riyaziyyatçısı Adrian Antonis tapdı.

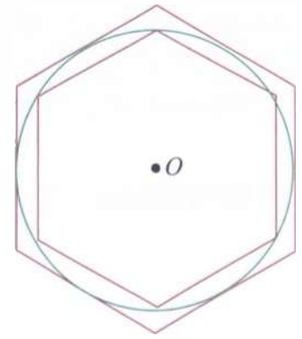
XVI əsrin axırlarında Avropa riyaziyyatında rasional və irrasional ədədlər anlayışları formalaşmışdı. Əksəriyyət π-nin irrasional olduğuna əmin olsalar da, bunu heç kim isbat edə bilmirdi. Eyni zamanda bəzi riyaziyyatçılar π ədədini hesablamaqda davam edirdilər. Holland alimi Ludolf van Seylen 1615-ci ildə onun üçün 32 düzgün onluq işarə tapdı, bu yaxınlaşmanı ludolf ədədi adlandırdılar.

Riyazi analiz inkişaf etdikcə onun metodları π ədədinin təyini üçün tətbiq olunmağa başladı. Bu işdə, demək olar ki, bütün məşhur riyaziyyatçılar: F. Viyet, X. Hüygens, C. Vallis, Q. V. Leybnis, L. Eyler iştirak edirdilər. Onlar π üçün sonsuz hasil, sıra cəmi, sonsuz kəsr şəklində müxtəlif ifadələr alırdılar.

Məsələn, Qotfrid Vilhelm Leybnis 1674-cü ildə $\pi/4$ ədədini sıra cəmi kimi "Ədədi sıralar" məqaləsinə bax) ifadə edən aşağıdakı düsturu müəyyənləşdirdi:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots,$$

Lakin bu sıra çox ləng yığılır. İsaak Nyutonun qeyd etdiyi kimi, π-nin on işarə dəqiqliyi ilə hesablamaq üçün 5 milyard ədədin cəmini tapmaq və buna min ilə yaxın vaxt sərf etmək lazım gələrdi.



Daxilə və xaricə çəkilmiş çoxbucaqlıların sayını ikiqat artırmaqla π ədədinin get-gedə daha dəqiq qiymətini almaq olar.

Londonlu riyaziyyatçı Con Meçin 1706-cı ildə

$$arctg\, x + arctg\, y = arctg\, \frac{x+y}{1-xy}$$

düsturundan istifadə edərək

$$arctg\, 1 = 4\, arctg\, \frac{1}{5} - arctg\, \frac{1}{239}$$

ifadəsini aldı.

Onda $arctg\, 1 = \frac{\pi}{4}$ əvəzləməsi aparmaq və

$arctg\, x$ $(arctg\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots)$

sıralarını yazmaq

$$\frac{\pi}{4} = \left(4\frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \ldots\right)$$

ECAZKAR KAMİLLİK DÜSTURU

π ədədi ilə çoxlu gözəl düstur bağlıdır:

$$\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\dots}$$

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots \quad \text{(F. Viyet),}$$

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\dots \quad \text{(C. Vallis),}$$

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\dots \quad \text{(L. Eyler),}$$

(burada çoxlu nöqtə ədədi qurmaların davam etdirilməli olduğunu bildirir). **(L. Eyler)**

Belə bir düstur da var:

$$\pi\approx 2^{\kappa-1}\cdot\underbrace{3\sqrt{2-\sqrt{2+2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}_{\kappa\ \text{radikal}},\quad \kappa\ge 2 \qquad (*)$$

Əgər əvvəlki düsturlar riyazi analizin sambalı kurslarında əsaslandırılırlarsa, axırıncı münasibəti çıxarmaq üçün standart məktəb dərsliyindən götürülmüş məlumatlar kifayətdir. Məlumdur ki, 1 diametrli çevrə daxilinə çəkilmiş n-bucaqlının tərəfi

$$p_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}$$

düsturu ilə hesablanır.

n-in böyük qiymətlərində p_n perimetri təxminən π ədədinə bərabərdir. $n=3\cdot 2^\kappa$ yazaq, onda $p_n=3\cdot 2^\kappa\sin 60/2^\kappa$ bucağının sinusunu, yarım arqumentin triqonometrik funksiyaları üçün eyniliklərdən istifadə etməklə başqa cür də ifadə etmək olar:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

Müxtəlif κ-lar üçün tapırıq:

$\kappa=1$: $\cos\frac{60^\circ}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\kappa=2$: $\sin\frac{60^\circ}{4}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$,

$\cos\frac{60^\circ}{4}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$;

$\kappa=3$: $\sin\frac{60^\circ}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$,

$\cos\frac{60^\circ}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$;

.....

κ: $\sin\frac{60^\circ}{2^\kappa}=\frac{1}{2}\underbrace{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{3}}}}}_{\kappa\ \text{radikal}}$.

Artıq buradan bilavasitə (*) düsturunu alırıq.

düsturuna gətirir ki, o da bu çağa kimi π ədədini təqribi hesablamaq üçün ən yaxşı düsturlardan hesab olunur. Həmin on dəqiq işarənin tapılması üçün cəmisi bir neçə saatlıq əl əməyi tələb olunur. Con Maçin özü π-ni yüz düzgün işarə ilə hesablamışdı.

SADƏ ƏDƏDLƏR VƏ π

Kəsrlərin sonsuz hasilinə baxaq:

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{14}\cdots$$

Burada surətlərdə ancaq sadə ədədlər dayanıb, məxrəclər isə bir vahid fərqlənir. Bu zaman məxrəc $4n+1$ şəklindədirsə, o, surətdən böyük və əks halda kiçikdir.

Leonard Eyler sübut etmişdir ki, bu sonsuz hasil $\frac{\pi}{2}$-yə, yəni yarımçevrənin onun diametrinə nisbətinə bərabərdir.

1766-cı ildə alman riyaziyyatçısı İohann Lambert π ədədinin irrasionallığını ciddi isbat etdi: π ədədi, surət və məxrəc nə qədər böyük ədədlər olsa da, adi kəsr şəklində təsvir edilə bilməz. Lakin π ədədinin tarixi bununla bitmədi.

XIX əsrin sonunda Münhen universitetinin professoru Karl Ferdinand Lindeman isbat etdi ki, π transsendent ədəddir, yəni o, heç bir $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0=0$ tam əmsallı cəbri tənliyin kökü ola bilməz. Onun isbatı dairənin kvadraturası haqqında qədim riyazi məsələyə nöqtə qoydu. Min illər boyu o, riyaziyyatçıların səylərinə təslim olmurdu və "dairənin kvadraturası" deyimi hətta həlledilməz problemin sinonimi̇nə çevrilmişdi. Məlum oldu ki, məsələnin "müəmmalı inadkarlığı məhz π ədədinin təbiəti ilə bağlıdır.

π ədədinin transsendentliyinin kəşfinin xatirəsi kimi Münhen auditoriyasının qarşısında Lindemanın büstü qoyulub. Onun postamentində içərisində π hərfi yazılmış bərabər sahəli kvadratla kəsişən dairə təsvir edilib.

Bizim zamanımızda EHM-lərin köməyi ilə π ədədi vergüldən sonra milyonlarla



Ludolf van Seylen Arximed metodu ilə daxilə və xaricə çəkilmiş çoxbucaqlıların tərəflərini ikiqat artırırdı. Beləliklə o, çox illər sərf etməklə π ədədinin 32 onluq işarəsini hesabladı. π ədədinin hesablanmasının sonrakı tarixi elə bir idman yarışını xatırladır ki, gah bu, gah da digər idmançı irəli çıxır, yıxılır, durur və yeni qüvvə ilə qələbəyə can atır.

düzgün işarə ilə hesablanıb. Lakin belə dəqiqlik elmilikdən çox texniki maraq kəsb edir.

e ƏDƏDİ

$e\approx 2{,}718281828459\dots$ ədədi riyaziyyatın mühüm sabitlərindən biridir. Tərifə görə o, n intəhasız artıqda

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (*)$$

ardıcıllığının limitinə bərabərdir. e işarəsini 1736-cı ildə Leonard Eyler daxil etmişdir. O, onluq yazılışda bu ədədin ilk 23 işarəsini təyin etmişdir.

e ədədinin verilməsi üsulu riyaziyyat üçün mühüm olan belə bir faktı gözəl əks etdirir ki, bir çox ədədlər bəzi ardıcıllıqların limiti kimi təyin oluna bilərlər. (*) ardıcıllığının limitinin varlığını isbat etməzdən əvvəl onun monotonluğunu (bütün n–lər üçün $x_n>x_{n-1}$) və məhdudluğunu (bütün n-lər üçün $2<x_n<3$) təyin edirlər. Veyerştrass teoreminə əsasən, ardıcıllıq monoton və məhduddursa, o yığılır, yəni n-in sonsuzluğa yaxınlaşması zamanı bu ardıcıllığın hədlərinin yaxınlaşdığı ədəd var.

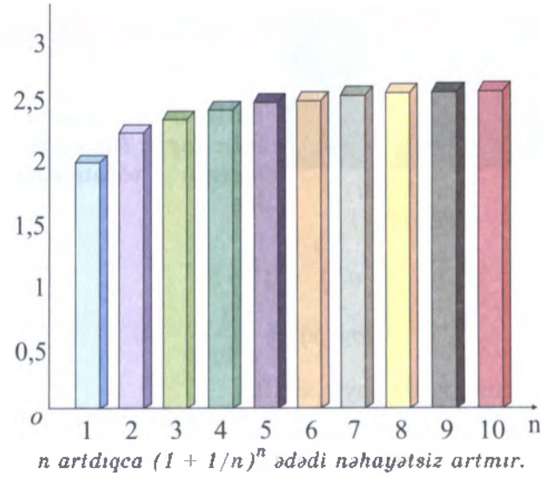
x_n-i Nyuton binomu düsturu ilə açsaq, sübut edə bilərik ki, e ədədi digər ardıcıllığın da limitidir:

$$s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!},$$

$$e=\lim_{n\to\infty}s_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\dots$$

Burada $\kappa!=1\cdot 2\cdot 3\dots\kappa$ ("κ faktorial"oxunur). Bu düstur, e ədədinin təyinindəki hesablamalar üçün daha münasibdir, belə ki, s_n qiymətini taparaq sonrakı qiyməti hesablamaq üçün əvvəlki ədədə cəmisi bir toplanan əlavə etmək lazımdır:

$$s_{n+1}=s_n+\frac{1}{(n+1)!}.$$



n artdıqca $(1+1/n)^n$ ədədi nəhayətsiz artmır.

Artıq $n=10$ olduqda s_n cəmi, e ədədinin əsl qiymətindən $3\cdot 10^{-8}$ qədər fərqlənir, buna görə də s_{10} e ədədinin yeddi düzgün işarə ilə yaxınlaşmasını verir.

e ədədi riyazi analizdə mühüm rol oynayır. Eksponent adlanan e əsaslı üstlü funksiya heyrətamizdir, onun törəməsi özünə bərabərdir.

SƏLƏMÇİ HAQQINDA MƏSƏLƏ

Aşağıdakı məsələnin ideyası məşhur İsveçrə riyaziyyatçılar sülaləsinin nümayəndəsi Yakob Bernulliyə məxsusdur.

Bir sələmçi bir tacirə müəyyən miqdarda pulu o şərtlə vermişdi ki, taçir bir ildən sonra istiqrazı ikiqat ölçüdə qaytaracaq. Tacir növbəti dəfə ona pul üçün müraciət etdikdə, sələmçi müqavilənin şərtlərini dəyişdirdi: birinci yarımildə qaytarılası məbləğ bir dəfə yarım artacaq, müddətin ikinci yarısı bitəndə isə yeni yaranmış məbləğ daha bir dəfə yarım artacaq. Sələmçi hesabladı ki, beləliklə o, istiqrazın ilkin məbləğini 9/4 dəfə artırar.

Tədricən sələmçinin beynində daha hiyləgər plan yarandı: qaytarılası məbləği kəsilməz olaraq artırmaq. Məhz belə: tacirə borc verildiyi bütün vaxt müddətini böyük sayda n bərabər aralıqlarına bölmək. Hər bir aralıq qurtararkən borcun məbləği $1 + 1/n$ dəfə artmalıdır. Belə ki, müddət bitərkən ilkin istiqraz $(1+1/n)^n$ dəfə artmalıdır. "Bu, yəqin ki, çox böyük ədəddir", – sələmçi fikirləşdi.

Tacir bu düsturu özü üçün çıxararkən belə mühakimə yürütdü: "Bir tərəfdən qüvvət üstü n artaraq bütün qüvvəti sonsuzluğa dartır, belə ki, onun əsası $1 + 1/n$ vahiddən böyükdür. Belə görünə bilər ki, borcun arasıkəsilməz artması çox böyük pul məbləğinə – sələmçi üçün ifrat gəlirə, mənim üçünsə ifrat ziyana gətirəcək. Lakin digər tərəfdən, $1 + 1/n$ əsası vahiddən böyük olsa da, o, n artdıqca sürətlə vahidə yaxınlaşır. Lakin bu tərs ədədi hansı qüvvətə yüksəltsən də, ancaq vahid alacaqsan...".

Həqiqətən, $(1 + 1/n)$ ifadəsi n artdıqca həm də eyler ədədi adlanan $e = 2{,}718281828459045...$ ədədinə yaxınlaşır ki, bu, ən əlamətdar riyazi sabitlərdən biri, natural loqarifmin əsasıdır.

e ədədinin ilk işarələrini yadda saxlamaq çətin deyil: iki, vergül, 7, Türkmənçay müqaviləsinin bağlandığı il.



Şarl Ermit (1822-1901)

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

e əsaslı loqarifmik funksiya natural loqarifm adlanır və $ln\ x$-lə işarə edilir. Onun törəməsi aşağıdakı qayda ilə hesablanır:

$$(ln\ x)' = \frac{1}{x},$$

üstlü a^x və loqarifmik $log_a x$ funksiyalarının törəmələri isə

$$\left(a^x\right)' = a^x ln\ a,$$

$$(log_a x)' = \frac{1}{x\ ln\ a}$$

düsturları ilə təyin edilir.

Eyler triqonometrik funksiyalar və xəyali üstlü eksponent arasında əlaqə müəyyən etmişdir:

$$e^{ix} = cos\ x + i\ sin\ x,$$

yaxud

$$cos\ x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

$$sin\ x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Bu düsturlardan əlamətdar bərabərlik çıxır:

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Bu bərabərlik **0, 1, e, π** ədədlərini və xəyali vahidi əlaqələndirir.

e ƏDƏDİNİN İRRASİONALLIĞININ İSBATI

e^{-1} ədədini sıraya ayırmaq olar:

$$e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ...$$

İlk $n + 1$ həddi α_n ilə:

$$\alpha_n = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!},$$

sonsuz "quyruğu" isə β_n ilə işarə edək:

$$\beta_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} + ...$$

İşarəsini növbə ilə dəyişən sıranın mütləq qiymətləri monoton artırsa, qalıq mütləq qiymətcə onun birinci həddindən kiçikdir:

$$0 < |\beta_n| = (-1)^{n+1}\beta_n < \frac{1}{(n+1)!} \qquad (*)$$

$a_n = n!\alpha_n$, $b_n = n!\beta_n$ yazaq. (*) bərabərsizliyindən istifadə etsək, tapırıq ki, a_n natural ədəddir və

$$0 < (-1)^{n+1} b_n < \frac{1}{n+1}.$$

Buradan çıxır ki, heç bir n üçün $n!e^{-1} = a_n + b_n$ ədədi tam deyil. Buna görə də $1/e$ deməli, e ədədi rasional deyil.

Hətta burada gətirilən azsaylı misallar da göstərir ki, e ədədi ilə ali riyaziyyatın ən müxtəlif bölmələrində rastlaşmaq olar. e sabitini, lazımi əsas olmadan, loqarifmləri icad edən şotland riyaziyyatçısı Con Neperin şərəfinə neper ədədləri adlandırırlar. Həqiqətən, 1614-cü ildə çap edilmiş loqarifmlər cədvəlini qurarkən Neper $0{,}9999999^{10\,000\,000}$ ədədindən istifadə etmişdir. Lakin nəzərə almaq lazımdır ki, e ədədinin təyinində iştirak edən limit anlayışı Neperin dövründə riyaziyyatda hələ formalaşmamışdı.

GÖZƏL İTTİFAQ

İki sabitin – π və e – "taleyi" birləşib. Bir düsturda duran bu cütü riyaziyyatın müxtəlif sahələrində: ədədlər nəzəriyyəsində, sıralar nəzəriyyəsində, differensial tənliklər nəzəriyyəsində, ehtimal nəzəriyyəsində görmək olar. Məsələn, hind riyaziyyatçısı Srinivaso Ramanucanın kəşf etdiyi düsturda olduğu kimi. Əgər

$$a = 1 + \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + ...,$$

$$b = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{1 + ...}}}}}$$

onda

$$a + b = \sqrt{\frac{\pi e}{2}}.$$

Bu düsturu, şübhəsiz, riyaziyyatın inciləri sırasına aid etmək olar. Nə sonsuz sıra, nə onun solundakı zəncirvari kəsr ayrı-ayrılıqda π və e ədədləri ilə ifadə olunmur, lakin cəmdə onlar belə bir heyranedici kombinasiya verirlər!

KOMPLEKS ƏDƏDLƏR

YENİ ƏDƏDLƏR NƏYƏ LAZIMDIR?

"Ədəd sözü"nü işlədəndə ilk ağlımıza gələn natural ədədlər – 1, 2, 3, 4, 5, ... olur. Natural ədədlərdən müxtəlif əşyaları sayarkən istifadə edirik. Natural ədədlər çatışmadıqda rasional ədədlərdən istifadə edirik. Daha doğrusu, sonlu onluq kəsrlərlə ifadə olunan kəsr ədədlərdən istifadə edirik. Sonlu onluq kəsrlər istənilən dəqiqliklə hər cür hesablamanı yerinə yetirməyə imkan verir.

Ədədlərdən daha nəyi gözləmək olar?

Son zamanlar bizə deyirlər ki, ortaq ölçüsü olmayan kəmiyyətlər də var. Məsələn, kvadratın diaqonalı ilə tərəfinin ortaq ölçüsü yoxdur. Onların uzunluqları nisbəti rasional olmayan $\sqrt{2}$ ədədinə bərabərdir. Bu zaman ən asan üsul, yeni olan irrasional ədədləri tanımaqdır. Çünki hər dəfə "$x^2=2$" tənliyini həll edin əvəzinə deyirik ki, "elə x ədədi tapaq ki, x^2 ədədi 2-dən çox fərqlənməsin".

Bu şəkildə qurulmuş həqiqi ədədlər çoxluğu bizim tək praktiki ehtiyaclarımızı ödəmir, həm də müəyyən nəzəriyyəni tamamlayır.

Həqiqi ədədlər çoxluğu bizə, müxtəlif məsələləri çətinlik çəkmədən tənlik qurmaqla həll etməyə imkan verir.

Əlbəttə ki, bu çoxluğun da öz qaydaları və çatışmazlıqları var. Məsələn, sıfır¬ra bölmək olmaz, mənfi ədədlərdən cüt dərəcədən kök almaq olmaz və s.

Əlbəttə ki, araşdırmanı ardıcıllıqla davam etdirsək, bu, o qədər də çətin deyildir. Bununla da hər şey bitirmi? Belə bir misala baxaq: $\sqrt[6]{1}$-i hesab etmək olar ki, həm 1-ə, həm də -1-ə bərabərdir. $\sqrt[6]{-1}$-i isə təyin etmək mümkün deyil. Digər tərəfdən, $\frac{1}{6}$ nədir? Bu eyni zamanda $\frac{2}{12}$-dir. Lakin $\sqrt[6]{-1}=(-1)^{\frac{1}{6}}$, $(-1)^{\frac{2}{12}}=\sqrt[12]{(-1)^2}=\sqrt[12]{1}$ və axırıncıdan kök almaq olur.

Daha bir məsələ:

$$(-1)^2=(-1)^{\frac{4}{2}}=\left[(-1)^{\frac{1}{2}}\right]^4=(\sqrt{-1})^4$$

Bundan başqa, -1-in kvadrat kökü olmadığından, dördüncü dərəcədən də kökü yoxdur.

Deməli, hətta -1-i kvadrata da yüksəltmək olmaz? Kimsə elə gəlir ki, bu, həqiqi ziddiyyətlər deyil.

Ədədlər üzərində əməllərə əlavə elə məhdudiyyətlər qoymaq olar ki, belə vəziyyətlər yaranar. Ancaq belə məhdudiyyətlər həmişə ağlabatandırmı?

Təsəvvür edin ki, hər hansı məsələni, bu məhdudiyyətlərə əməl etmədən həll etmək mümkün olduğu halda, "qanuni" üsulla həllini tapmaq olmur. Bu halda bu məhdudiyyətlərdən imtina etmək olmazmı?

Mənfi kəmiyyətlərdən kök almağın mümkün olmaması halı çevrilə bilməyən kub tənliklərin həlli zamanı baş vermişdi.

KUB TƏNLİKLƏRİN ÇEVRİLƏ BİLMƏYƏN HALI

Kvadrat tənliklərin həlli üçün olan ümumi düstur onun əmsalları vasitəsilə ifadə olunduğu kimi, analoji düstur kub tənliklərinin həlli üçün də mövcuddur. ("Kub tənliklərinin həlli" məqaləsinə bax). Bu düstur Kardano düsturu adlanır. Bu düstur onu ilk dəfə çap etdirən Kardanonun şərəfinə adlandırılmışdır. Məsələn, $x^3=30x+36$ tənliyi üçün Kardano düsturuna görə

$$x=\sqrt[3]{18+\sqrt{-676}}+\sqrt[3]{18-\sqrt{-676}}$$

alınar.

Kvadrat kökün altında mənfi ədəd alınır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, tənliyin kökü x = 6-dır.

Fərz edək ki, mənfi ədəd olan köklər mövcuddur. Onda, əgər $A+\sqrt{-B}$ ifadəsindən kub kök almağı öyrənsək, (Bax: "Kompleks ədədlərin qüvvətə yüksəldilməsi və kökünün alınması"məqaləsinə)

$\sqrt[3]{18+\sqrt{-676}}$ və $\sqrt[3]{18-\sqrt{-676}}$

İfadələrini hesablamaq olar. Nəticədə,

$$3+\sqrt{-1} \text{ və } 3-\sqrt{-1}$$

alarıq.

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

düsturundan istifadə edib, $(3+\sqrt{1})$-i kuba yüksəldib,

$$(3+\sqrt{-1})^3=27+3\cdot9\cdot\sqrt{-1}+3\cdot3\left(\sqrt{-1}\right)^2+$$
$$+\left(\sqrt{-1}\right)^3=27-9+(27-1)\sqrt{-1}=$$
$$=18+26\sqrt{-1}=18+\sqrt{-676}$$

alarıq.

Analoji olaraq $(3-\sqrt{-1})^3=18-\sqrt{-676}$ olar.

Ona görə

$$x=\sqrt[3]{18+\sqrt{-676}}+\sqrt[3]{18-\sqrt{-676}}=$$
$$=(3+\sqrt{-1})+(3-\sqrt{-1})=6$$

Göründüyü kimi, "qəribə" köklər asanlıqla ixtisar olunur. Biz adi tənliyi həll etdik və kökünün həqiqi (hətta natural) ədəd olduğunu tapdıq. Bunun üçün aralıq mərhələlərdə "qeyri-adi" ədədlərdən istifadə etmək məcburiyyətində idik. Ən əsası, yalnız, düşünməkdən başqa heç bir üsulla bu həlli tapmaq mümkün deyil!

İndi bizim üç yolumuz var:

- Məhdudiyyətlərə sözsüz tabe olub, hər cür yeniliklərdən imtina edib, hesab etmək ki, bizdə çevrilə bilməyən tənliklərin heç bir həlli üsulu yoxdur;
- "Başımızı quma salıb" tənliklərin həllində hər dəfə $\sqrt{-A}$ $(A=0)$ şəkilli ifadəyə keçəndə "bağışlayın" demək, qayıdarkən "qanuni yerə" çatanda özünü heç nə baş verməmiş kimi göstərmək;
- Yeni üsullardan aralıq mərhələlərdə istifadə etmək və bu üsulların araşdırılması ilə məşğul olmaq, tərifini vermək, xassələrini araşdırmaq, hesab əməllərindən istifadə etməyi öyrənmək.

Dərhal olmasa da, riyaziyyatçılar üçüncü yolu seçdilər və mükafatlandırıldılar. Artıq "qəribə" köklər elektrotexnika, aerodinamika və digər bilik sahələrində istifadə edilir.

HƏQİQİ + XƏYALİ = KOMPLEKS

Beləliklə, adət etdiyimiz həqiqi (tam mənada həqiqi mövcud olan") ədədlərdən başqa, müsbət həqiqi A ədədi $\sqrt{-A}$ şəkilli ədədlərə də baxmaq lazımdır.

Bu hansı ədədlərdir? Onlara necə "əl vurmaq" olar? Bu sualların cavabı yoxdur. Biz sadəcə qəbul etdik ki, onlar var. Təbii olaraq bu ədədləri xəyali ədədlər, yəni "həqiqi olmayan" ədədlər adlandırıblar.

Hər halda biz, az da olsa, xəyali ədədlər haqqında bilirik. Məsələn, kvadrata yüksəldəndə onlar mənfi ədədlər verir, sonra isə $-A=A(-1)$ onda $\sqrt{-A}=\sqrt{A}\cdot\sqrt{-1}$, $\sqrt{A}$ adi həqiqi ədəddir. Deməli, istənilən xəyali ədədi $\sqrt{-1}$ xəyali ədədi ilə ona uyğun həqiqi ədədə hasili şəklində göstərmək olar. Beləliklə, bizim çoxlu sayda anlaşılmaz obyektlərin yerinə yalnız bir dənə adi olmayan obyektimiz var, digərləri isə vurma əməli ilə yerinə yetirilir. Razılaşın ki, belə hal daha asandır. $\sqrt{-1}$ ədədini xəyali ədədlər arasında "inşaat bloku" kimi istifadə olunan xəyali vahid adlandırırlar və Leonard Eylerin təklifinə görə onu i hərfi ilə (latın dilində "imaginarius – xəyali") işarə edirlər. Xəyali vahidin əsas xassəsi, onun sadə bərabərliklə ifadə olunmasıdır.

$$i^2=-1$$

Amma kub tənliklərin həlli bizə göstərir ki, həqiqi və xəyali ədədlərdən başqa, biz, həqiqi və xəyali ədədlərin cəmi olan $A+\sqrt{-B}$ şəkilli ədədlərə baxaq. Belə ədədlər kompleks ədədlər, yəni ki, mürəkkəb ədədlər adlanırlar.

İndi isə, bu dediklərimizin sonunda kompleks ədədin tərifini verək: a, b verilmiş həqiqi ədədlər, i isə xəyali vahid olduqda $a+bi$ şəklində olan ifadəyə *kompleks ədəd* deyilir.

KOMPLEKS ƏDƏDLƏRİN XASSƏLƏRİ

$z=a+bi$ (*) kompleks ədədində a və b həqiqi ədədlər, $i=\sqrt{-1}$ xəyali vahid, a top-

lananı həqiqi hissə, *bi* toplananı xəyali hissə adlanır.

a həqiqi hissəsini və *b* hissənin əmsalını

$$a = \mathrm{Re}\cdot z \quad b = \mathrm{Im} z$$

KVADRAT TƏNLİK HAQQINDA

Əgər sizə desələr ki, "Diskriminantı sıfırdan kiçik olan kvadrat tənliyin həlli yoxdur", o zaman siz cavab verə bilərsiniz ki, "həqiqi ədədlər çoxluğunda həlli yoxdur, lakin kompleks ədədlər çoxluğunda iki kökü var". Belə bir tənliyə baxaq:

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \qquad (*)$$

Ümumi düsturdan alarıq:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} = 1 \pm \sqrt{-4}$$

Burada diskriminant D=−4 mənfi ədəddir. Amma kompleks ədədlər ilə tanışlıq bizi artıq şübhələrdən azad edir:

$$x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-4} = 1 \pm 2\sqrt{-1} = 1 \pm 2i$$

Beləliklə, (*) tənliyin iki kompleks kökü var: $x_1 = 1 + 2i \qquad x_1 = 1 - 2i$

Buradan alınır ki, istənilən həqiqi ədəd elə kompleks ədəddir ki, onun xəyali hissəsi sıfıra bərabərdir. Məsələn,

$$0 = 0 + 0\cdot i$$
$$1 = 1 + 0\cdot i \quad \text{və s.}$$

Xəyali ədəd elə kompleks ədəddir ki, onun həqiqi hissəsi sıfıra bərabərdir. Xəyali hissəsi isə sıfırdan fərqlidir.

$$i = 0 + 1\cdot i$$

Kompleks ədədləri cəbri ifadələrdə olduğu kimi toplamaq və vurmaq olar. Eyni zamanda vurmanın və toplamanın qruplaşdırma (assosiativlik), yerdəyişmə (kommutativlik), paylama (distributivlik) qanunları öz qüvvəsində qalır.

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$
$$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$
$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$
$$z_1 z_2 = z_2 z_1$$
$$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$
$$(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$$

Sıfırın və birin xüsusi qiyməti olduğu kimi qalır.

$$z + 0 = z, \qquad z \cdot 0 = 0, \qquad z \cdot 1 = z$$

i – xəyali vahidin rolu tamamilə fərqli olub, "adi" hesabda oxşarı yoxdur.

$$i^2 = (-i)^2 = -1$$

"Çox" və "az" anlayışları kompleks ədədlər çoxluğunda öz mənalarını itirirlər. Məsələn, 5 + 6*i* və 6 + 5*i* kompleks ədədlərinin hansının böyük olduğunu deyə bilmərik. Yalnız onların həqiqi və xəyali hissələrini müqayisə etmək olar.

TOPLAMA, ÇIXMA, VURMA

Şübhə etmirik ki, həqiqi ədədlər üzərində hesab əməlləri apararkən, nəticə həqiqi ədəd olacaq (sıfıra bölmək istisna olmaqla)

Kompleks ədədlər üzərində hesab əməlləri apararkən, əmin olmaq lazımdır ki, nəticədə kompleks ədəd alınacaq. Bu o deməkdir ki, istənilən hesab əməlinin nəticəsi standart şəkildə (*) düsturla verilməlidir.

Toplamadan başlayaq.

$$z_1 = a + bi$$
$$z_2 = c + di$$
$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

Deməli, iki kompleks ədədin cəmi elə kompleks ədəddir ki, həqiqi hissəsi bu kompleks ədədlərin həqiqi hissələrinin cəminə, xəyali hissəsi isə xəyali hissələrinin cəminə bərabərdir.

Analoji olaraq iki kompleks ədədin fərqini tapmaq olar.

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

Vurmaya keçək. Əgər mötərizələri açıb, $i^2 = -1 - i$ nəzərə alsaq, alarıq:

$$z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + bci + adi - bd =$$
$$= (ac - bd) + (bc + ad)i$$

Beləliklə, kompleks ədədlərin toplanması, çıxılması, vurulması üçün düsturu (*) almış olduq.

Kompleks ədədlərin bölünməsi bir qədər çətindir.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

Onu həqiqi ədədə gətirmək üçün əlavə araşdırma aparmalıyıq.

QOŞMA KOMPLEKS ƏDƏDLƏR

Adətən *i* xəyali vahidi −1-in kvadrat kökü kimi təyin edirlər. İkisindən hansıdır? "Müsbət" demək olmaz, çünki xəyali ədədlər üçün "müsbət" və "mənfi" anlayışları müəyyən edilməyib. Bu, Mark Tvenin dolaşıq bir düşüncəsinə oxşayır: iki əkizdən biri batıb, digəri başa düşə bilmir – o batıb yoxsa onun qardaşı. Xoşbəxtlikdən aydın olur ki, narahat olmağa əsas yoxdur. *i* və −*i*-nin kompleks ədədlər arasındakı rolu mütləq simmetrikdir. *i* və $-i$ = −1-in eynihüquqlu kökləridir. Bu simmetriya ona gətirir ki, hər bir $z = a + bi$ kompleks ədədinin $\bar{z} = a - bi$ "əkizi" var. Belə "əkizlər" qoşma kompleks ədədlər adlanır (*b* = 0 olduqda *z* həqiqi ədəd olur və özü-özünə qoşma olur $z = \bar{z}$).

Qoşma kompleks ədədlər maraqlı xassələrə malikdir. İlk əvvəl onların cəmi və hasili həqiqi ədədlərdir.

Həqiqətən,

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a$$
$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$$

Alman alimi Karl Fridrix Qauss $a^2 + b^2$ ifadəsini kompleks ədədin norması adlandırıb. Normanın kvadrat kökünü isə (dəqiq desək, müsbət qiymətini) fransız riyaziyyatçısı Ogüsten Koşi kompleks ədədin modulu adlandırıb. Çox vaxt onu *r* və ya mütləq qiymət ilə

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

işarə edirlər.

Buradan qoşma ədədlərin aşağıdakı xassəsi alınır:

Onların normaları və modulları həmişə bərabərdir.

Toplama, çıxma və vurma düsturlarını təhlil edərkən başqa xassələrini asanlıqla isbat etmək olar.

$$\bar{z}_1 + \bar{z}_2 = \overline{z_1 + z_2}$$
$$\bar{z}_1 - \bar{z}_2 = \overline{z_1 - z_2}$$
$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 z_2}$$

KOMPLEKS ƏDƏDLƏRİN BÖLÜNMƏSİ

İndi isə, kompleks ədədlərin bölünməsini hesablamaq elə də çətin olmayacaq.

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$ qismətini standart şəklə (*) gətirmək üçün məxrəcdəki xəyali vahiddən azad olmaq lazımdır (axı iki qoşma kompleks ədədin hasili həqiqi ədəddir). Nəticədə:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} =$$
$$= \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

Qısası $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}$

Ola bilər ki, kompleks ədədlərin vurulması, bölünməsi və başqa xassələri kiməsə çox çətin, hətta süni görünə bilər. O halda, baxılmış anlayışların daha inandırıcı görünməsi üçün kompleks ədədlərin həndəsi izahı ilə tanış olmaq lazım gəlir.

KOMPLEKS ƏDƏDLƏRİN HƏNDƏSƏSİ

XVII əsrdə ingilis alimi Con Vallis ilk dəfə xəyali ədədləri əyani şəkildə göstərməyə cəhd etmişdir. O, müxtəlif variantlar vermişdir. Onlardan biri $\sqrt{-1}=\sqrt{1\cdot(-1)}$ xəyali vahidin 1 və -1-in həndəsi ortası şəklində göstərilməsi idi. Deməli, $\sqrt{-1}$ tərəfləri 1 və -1 olan düzbucaqlı ilə müadil olan kvadratın tərəfidir. Vallisin ideyaları onun müasirləri tərəfindən ciddi qarşılanmadı.

1799-cu ildə danimarkalı riyaziyyatçı Kaspar Vessel kompleks ədədlərin sadə həndəsi təsvirini verdi, lakin onun işi diqqətdən kənarda qaldı. Yalnız otuz il sonra Karl Fridrix Qauss "Bikvadrat çıxılmaların nəzəriyyəsi" adlı əsərini çap etdirdi. Bu əsərdə Vesselin verdiyi kimi kompleks ədədin həndəsi təsvirini təqdim etdi.

Vessel və Qaussun ideyaları o qədər aydındır ki, əvvəllər, alimlərimizin heç birinin bu qərara gələ bilməməsinə təəccüblənə bilərik.

KOMPLEKS MÜSTƏVİSİ VƏ İKİ OX

Ədəd oxunda həqiqi ədədləri nöqtə şəklində göstərmək olur. Bunun üçün koordinat başlanğıcını (sıfır nöqtəsini), müsbət istiqaməti və vahid parçanı seçmək lazımdır. Bu zaman hər bir həqiqi ədədə ədəd oxu üzərində bir nöqtə və əksinə, hər nöqtəyə bir həqiqi ədəd uyğun olar.

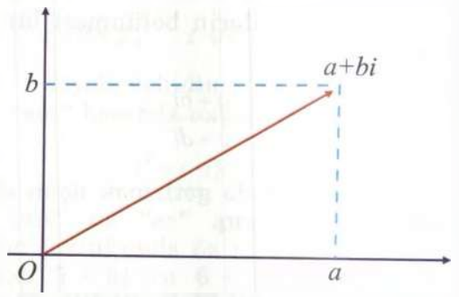
Eyni qayda ilə ədəd oxunda bi xəyali ədədini təsvir etmək olar: nöqtənin b koordinatı bi ədədini göstərir, b-ni i-yə vurmaq isə fikrdə də olar. Deməli, ədəd oxunda həm həqiqi, həm də xəyali ədədləri təsvir etmək üçün iki ox götürmək lazımdır. Onları uyğun olaraq həqiqi ox və xəyali ox adlandırıb, sıfır nöqtəsində kəsişən və birbirinə perpendikulyar vəziyyətdə yerləşdirək. Vessel və Qaussun əsas ideyası elə bundan ibarət idi.

Aydınlıq üçün müsbət istiqamətdə sağa yönəlmiş ox həqiqi ox, yuxarı yönəlmiş ox xəyali ox olsun. Hesablama vahidi (miqyas) hər iki ox üçün eyni olsun.

Deməli, bizim həndəsi təsvirimizdə xəyali ədədlər həqiqi ədədlərə "perpendikulyar yerləşdirilib". Bəs, kompleks ədədlər? Onlar ədəd oxlarının yerləşdiyi bütün müstəvidə "yerləşiblər".

Müstəvi üzərində istənilən nöqtə götürüb, oxlar üzərində proyeksiyalarını quraq.

Tutaq ki, nöqtənin proyeksiyasının həqiqi ox üzərində koordinatı a, xəyali ox üzərində koordinatı b-dir (şəkil 1).



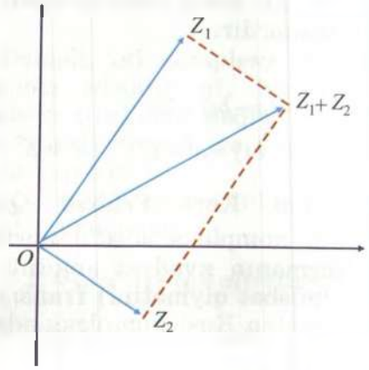
Şəkil 1

Belə hesab etmək olar ki, bu nöqtə $a + bi$ kompleks ədədinin təsviridir. İndi cəsarətlə deyə bilərik ki, müstəvinin hər bir nöqtəsinə bir kompleks ədəd uyğun gəlir. Əksinə, hər bir $a + bi$ kompleks ədədinə müstəvinin bir nöqtəsi uyğun gəlir. Belə olduqda müstəvinin nöqtələri ilə kompleks ədədlər arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var.

KOMPLEKS ƏDƏDİ VEKTOR KİMİ

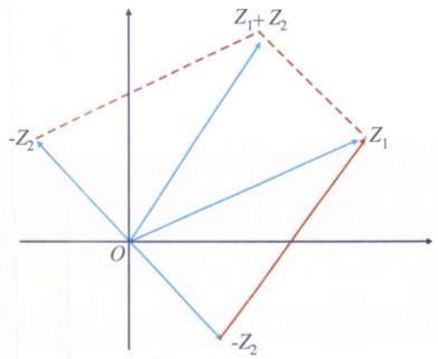
Koordinat başlanğıcını və $a + bi$-ni təsvir edən nöqtəni birləşdirək. Bu bizə nə verir? Göründüyü kimi çox şey.

Hər şeydən əvvəl, kompleks ədədlərin toplanması və çıxılmasını əyani surətdə görmək olar.



Şəkil 2

z_1 və z_2 iki kompleks ədədi təsvir edək. Onlar üzərində paraleloqramın dördüncü təpəsi kompleks ədədə uyğun olub z_1+z_2 cəminə bərabərdir (şəkil 2). İki kompleks ədədin fərqini göstərmək üçün 2-ci vektoru əks istiqamətdə yönəltmək lazımdır. Ya da z_2-dən z_1-ə tərəf istiqamətlənən vektoru koordinat başlanğıcından keçirmək lazımdır (şəkil 3). 0 ədədi sıfır vektorudur, qoşma-kompleks ədədlər isə həqiqi oxa nəzərən simmetrikdirlər.



Şəkil 3

Nəhayət, $z = a + bi$ kompleks ədədinə uyğun olan vektorun uzunluğunu hesablamaq olar. Bunun üçün Pifaqor teoremindən istifadə edək. Şəkil 1-dən aydındır ki, vektorun uzunluğu katetləri a və b olan düzbucaqlı üçbucağın hepetenuzunun uzunluğuna $\sqrt{a^2+b^2}$-na bərabərdir. Bu isə z kompleks ədədinin moduludur.

z kompleks ədədinə uyğun olan vektorun uzunluğu, onun moduluna, yəni $|z|$-ə bərabərdir. Bu nəticəni kompleks ədədlərin toplanmasının həndəsi təsvirinə tətbiq etmək olar.

Bir halda ki, üçbucağın bir tərəfi digər iki tərəfin cəmindən çox deyil, ona görə $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$. Yəni kompleks ədədlərin cəminin modulu onların modullarının cəmindən çox deyil.

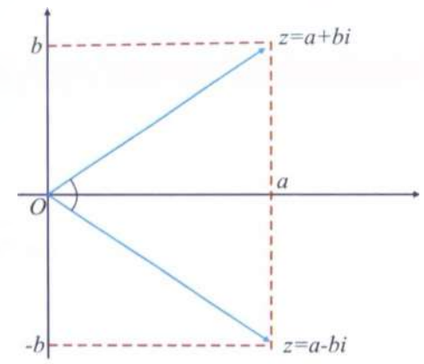
KOMPLEKS ƏDƏDİN ARQUMENTİ

Məlumdur ki, vektor tək uzunluğu ilə deyil, həm də istiqaməti ilə təyin olunur.

İstiqaməti vermək üçün həqiqi oxun müsbət istiqaməti ilə vektorun istiqaməti arasındakı bucaqdan istifadə etmək lazımdır. Bu, kifayət etmir. İki qoşma $z=a+bi$ və $\bar{z}=a-bi$ kompleks ədədlərini götürək. Müstəvi üzərində onlar həqiqi oxa nəzərən simmetrik yerləşmiş vektorlardır. Həm də, onların həqiqi oxla əmələ gətirdiyi bucaqlar bərabərdir.

Buradan alınır ki, bucağın qiymətini bildikdə, biz uyğun gələn iki istiqamətdən birini seçə bilmirik.

Bu qeyri-müəyyənlikdən azad olmaq üçün bucağın ölçülməsi istiqamətini, mənfi bucaqlar anlayışını bilmək lazımdır. Ədəd oxunun müsbət istiqamətindən saat əqrəbinin əks istiqamətində ölçülən bucaq müsbət, saat əqrəbi istiqamətində ölçülən bucağın qiyməti mənfi hesab olunur. Belə olduqda z ədədi (şəkil 4) üçün bucaq müsbət, $\bar{z}$ ədədi üçün bucaq mənfidir. Bu bucağı kompleks ədədin arqumenti adlandırıb $\varphi=\arg z$ ilə işarə edirlər. Adətən, onu dərəcə ilə yox, radianla ölçürlər.



Şəkil 4

Beləliklə, biz vektorun istiqamətini birqiymətli olaraq verməyi öyrəndik. Digər anlaşılmazlıq isə, istiqamətlənmiş vektora yeganə arqumentin uyğun olmamasıdır.

Tutaq ki, bucağı saat əqrəbinin əks istiqamətində ölçəndə arqument $\frac{\pi}{4}$-ə bərabərdir. Amma saat əqrəbi istiqamətində də hesablamağa heç nə mane olmur. Onda bir tam dövr (2π) edib - $(2\pi-\frac{\pi}{4})=-\frac{7\pi}{4}$ alarıq.

Bu qaydanı davam etdirib, bucağın ölçüsünü tam dövrlər sayı qədər artırıb (azaldıb) vektoru əvvəlki vəziyyətinə gətirmək olar. Bir dövr 2π olduğundan, tam dövrlər sayı $2\pi k$ olar. Burada k istənilən tam ədəddir. Belə çıxır ki, φ z kompleks ədədinin arqumentidirsə, istənilən sonsuz sayda qiyməti olan

$$\varphi + 2\pi k \quad (k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots)$$

arqumenti də z kompleks ədədinin arqumentidir.

Bu çoxqiymətlilikle nə etmək olar?

φ arqumenti üçün sərhəd qoyub demək olmazmı ki, onun qiyməti məsələn, $-\pi$-dən π-yə qədər və ya 0-dan 2π-yə qədər olsun? Məlum olur ki, digər səbəblərə görə münasib deyil ("Kompleks ədədlərin qüvvətə yüksəldilməsi və kökünün alınması" məqaləsinə bax). Hər kompleks ədədə yeganə modul və sonsuz sayda arqumentin uyğun gəlməsi ilə razılaşmaq lazım gəlir. Sıfır üçün arqument ümumiyyətlə istənilən ədəddir. İndi kompleks ədədi tək koordinatlar cütü ilə yox, modul – arqument cütü ilə də təyin etmək olar. Qarşıda yeni sual durur: bir üsuldan digərinə və əksinə necə keçmək olar? Köməyimizə triqonometriya gəlir.

KOMPLEKS ƏDƏDİN TRİQONOMETRİK ŞƏKLİ

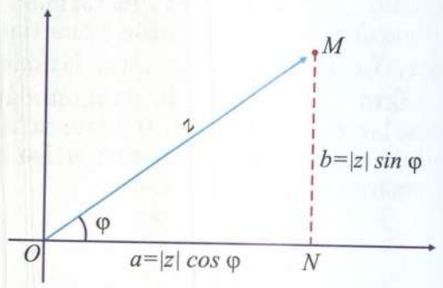
Kompleks müstəvisində istənilən $z=a+bi$ kompleks ədədini götürüb, $\overrightarrow{OM}$ vektoru şəklində təsvir edək. M nöqtəsinin həqiqi ox üzərində proyeksiyası N olsun. OMN düzbucaqlı üçbucağın ON və MN katetləri uyğun olaraq a və b-yə, OM hipotenuzu isə $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ -na bərabərdir. Triqonometriyadan bilirik ki, bitişik katetin hipotenuzun uzunluğuna nisbəti kosinusa, qarşıdakı uzunluğunun hipotenuzun uzunluğuna nisbəti isə sinusa bərabərdir. Beləliklə,

$$a = \operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos\varphi$$

$$b = \operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin\varphi$$

Burada φ – z kompleks ədədinin arqumentidir. Belə olduqda

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Şəkil 5

Əlbəttə ki, kompleks ədədin triqonometrik şəkli vərdiş etdiyimizdən çox böyük görünür. Amma gəlin, triqonometrik şəkildə yazılmış iki kompleks ədədi bir-birinə vuraq.

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$$

və

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

Mötərizələri açıb, i^2-nı -1 ilə əvəz etsək alarıq:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)x$$

$$x(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_1||z_2|[(\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 -$$

$$-\sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1)]$$

kiçik mötərizələrdə, iki bucağın cəminin kosinusu və sinusu düsturunu nəzərə alsaq, alarıq:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

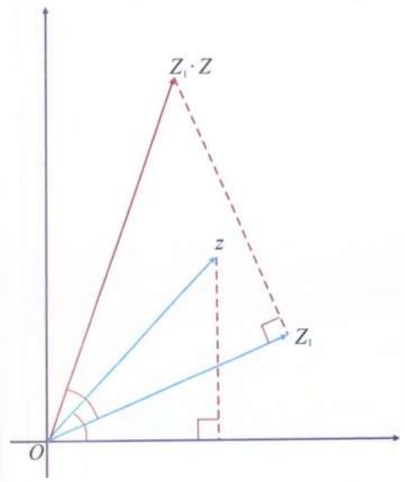
Gözlənilməz və gözəl nəticə:

Kompleks ədədləri bir-birinə vurmaq üçün, onların modullarını vurmaq, arqumentlərini isə toplamaq lazımdır.

Asanlıqla isbat etmək olar ki:

Bölmə zamanı əksinə: modulları bölmək və arqumentləri isə çıxmaq lazımdır.

— vektoru $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks ədədinə vurma zamanı, onu $|z|$ dəfə uzatmaq və φ bucağı qədər döndərmək (şəkil 6) lazımdır.



Şəkil 6

— bölmə zamanı vektoru $|z|$ dəfə sıxmaq və bucağı $-\varphi$ qədər döndərmək lazımdır.

Biz əmin olduq ki, kompleks ədədin triqonometrik şəkli adi kompleks ədəd qədər yararlıdır. Əsas odur ki, onlardan hansını istifadə etmək daha münasibdir.

Toplama və çıxmada həqiqi hissələri bir, xəyali hissələri bir toplandığından kompleks ədədlərin adi şəklindən istifadə etmək daha münasibdir. Söhbət vurma və bölmədən gedərsə, bu zaman kompleks ədədlərin triqonometrik şəklindən istifadə etmək daha münasibdir.

KOMPLEKS ƏDƏDLƏRİN QÜVVƏTƏ YÜKSƏLDİLMƏSİ VƏ KÖKÜNÜN ALINMASI

Triqonometrik şəkildə verilmiş kompleks ədədi qüvvətə yüksəltmək və kökünü almaq daha asandır.

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ kompleks ədədini n-ci dərəcədən natural üstlü qüvvətə yüksəldək. Burada r – kompleks ədədin modulu, φ – arqumentidir. n – natural üstlü qüvvətə yüksəltməni, n sayda eyni ədədlərin hasili ilə əvəz etmək olar. Bilirik ki, vurma zamanı modullar vurulur, arqumentlər isə toplanır. Ona görə nəticədə modul r^n-ə, arqumenti isə $n\varphi$-yə bərabər olar.

z kompleks ədədinin φ arqumentini φ-dən "tam dövrlərin sayı" qədər fərqlənən $\varphi + 2\pi$ -ilə əvəz etmək olar. Bu zaman z^n ədədinin arqumenti $n\varphi + 2\pi n$ -ə bərabər olar. $\sin x$ və $\cos x$ funksiyaları 2π dövrlü funksiya olduğundan heç nə dəyişmir.

Beləliklə,

$$[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Bu düstur 1701-ci ildə ingilis alimi Abraham de Muavr tərəfindən kəşf edilmiş və onun şərəfinə Muavr düsturu adlandırılmışdır.

Kompleks ədədin vurulması və bölünməsində arqument özünü kompleks ədədin qüvvətə yüksəldilməsindəki kimi aparır. Həqiqətən, vurma zamanı arqumentlər toplanır, bölmə zamanı çıxılır. Belə olduqda

$\cos\varphi + i\sin\varphi = A^{\varphi}$ olduğunu təxmin etmək olmaz. Burada, A – φ-nin bütün qiymətlərində istənilən ədəddir. 1743-cü ildə Leonard Eyler göstərib ki, belə ədəd $A = e^i$ -dir. Burada $e \approx 2{,}71828\ldots$ – Eylerin məşhur ədədidir, i isə xəyali vahiddir. Beləliklə, Eylerin düzgün düsturu

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Burada $\varphi = \pi$ yazsaq, $\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ nəzərə alsaq, riyaziyyatın beş məşhur əsas sabitlərini – sıfır, bir, xəyali vahid və eyni zamanda məşhur π və e ədədləri arasındakı münasibəti alarıq.

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Bu bərabərlik həmişə müxtəlif rəylərə səbəb olurdu. Məşhur gəmiqayıran və riyaziyyatçı Akademik Aleksey Nikolayeviç Krılovun sözlərinə görə bu bərabərlikdə

gizli olaraq hesab (0 və 1), cəbr (i), analiz (e) və həndəsə (π) simvolları birləşmişlər.

Eyler düsturunun köməyi ilə biz daha bir kompleks ədədin yığcam təsvirini alırıq:

$$z = re^{i\varphi}$$

Bu düstur eksponensial təsvir forması adlandırılır.

u həqiqi ədədi üçün $r=e^u$ (u həqiqi ədədi r-in natural loqarifmasına bərabər olmalıdır: $u = lnr$) olarsa, $z = e^{u+i\varphi}$ alarıq.

MUAVR DÜSTURU VƏ TRİQONOMETRİYA

Muavr düsturunun köməyi ilə $n\alpha$-nın sinus və kosinusunu α-nın sinus və kosinusları ilə ifadə etmək olar.

Məsələn, $n = 2$ olsun, onda

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

alarıq.

Sol tərəfi açsaq,

$$(\cos^2\varphi - i\sin^2\varphi) + i\sin\varphi\cos\varphi = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi$$

alırıq.

Həqiqi və xəyali hissələrini bərabərləşdirsək, dərhal, ikiqat bucağın sinus və kosinusu üçün iki düstur alarıq:

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$$

Eyni qayda ilə üçqat bucağın sinus və kosinusunun düsturunu asan tapmaq olar.

İndi təəccüblü deyil ki, kompleks ədədlər dövri proseslərin təsviri zamanı geniş tətbiq olunur. Məsələn, dəyişən cərəyanın dövrələrində (bax: "Kompleks ədədlər və elektrotexnika" məqaləsinə.)

İndi z kompleks ədədinin n-ci dərəcədən kökünü ala bilərik (n natural ədəddir).

$$\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = (re^{i\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{i\varphi}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$$

Deməli, n-ci dərəcədən kökü alarkən, modulun n-ci dərəcədən kökünü adi üsulla almaq, arqumenti isə n-ə bölmək lazımdır. Amma kompleks ədədin arqumenti $2\pi k$ dəqiqliyi ilə təyin olunduğundan

$$\varphi + 2\pi k \ (k \in z)$$

arqumentləri üçün də olan hala baxaq.

EYLER DÜSTURUNU NECƏ ƏLDƏ ETMƏK OLAR?

Məlumdur ki, sinx, cosx və e^x funksiyalarını qüvvət sırası kimi göstərmək olar (bax: "Qüvvət sırası" məqaləsinə).

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{7!} + \ldots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

Sonuncu düsturda x yerinə ix yazsaq, alarıq:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Bu düsturda həqiqi və xəyali hissələri sinx və cosx sırası ilə müqayisə etsək,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

alarıq.

Eyler düsturundan istifadə edərək $sinx$ və $cosx$ (həqiqi arqument üçün) funksiyaları üçün

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

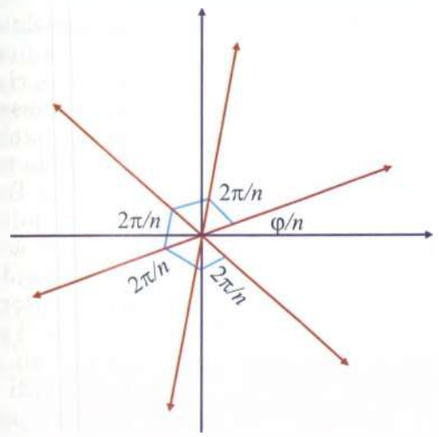
alarıq.

Bu düsturların köməyi ilə triqonometrik funksiyaların bütün xassələrini çıxarmaq olar.

Belə edək:

$$\sqrt[n]{re^{i(\varphi+2\pi k)}} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)\right]$$

Biz görürük ki, müxtəlif $\kappa = 0, 1, 2, \ldots, n-1$-ə, müxtəlif bölünməyən 2π arqumentləri uyğun gəlir. Deməli, istənilən kompleks ədədin n sayda n-ci dərəcədən kökü var və arqumentlərin "qonşu" qiymətlərinin fərqi $\frac{2\pi}{n}$-ə bərabərdir (şəkil 1-də $n = 6$ üçün nümunə verilmişdir.)



Şəkil 1

Beləliklə, istənilən kompleks (həmçinin həqiqi ədəd) ədədin n sayda n-ci dərəcədən kökü var.

Məsələn, z=1-ə baxaq: kvadrat kökdən (n=2) başlayaq.

$$\sqrt{1} = \cos\frac{2\pi k}{2} + i\sin\frac{2\pi k}{2} = \cos\pi k + i\sin\pi k$$

Burada, κ=0 və ya κ=1. İki kök alırıq:

1) $\cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\cdot 0 = 1$
2) $\cos\pi + i\sin\pi = -1 + i\cdot 0 = -1$

Gözlənildiyi kimi, onların hər ikisi həqiqidir. n=3 halı daha maraqlıdır.

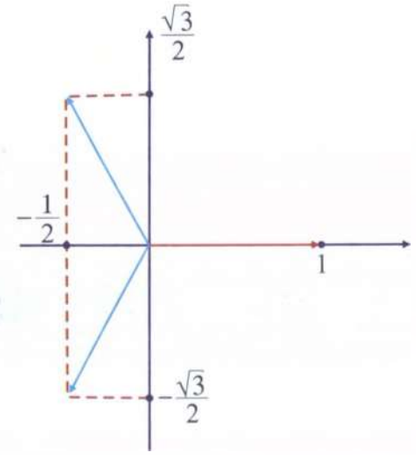
$$\sqrt[3]{1} = \cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3} \text{-nin}$$

κ = 0, 1 və 2 olduqda 3 kökü var.

1) $\cos 0 + i\sin 0 = 1 + i\cdot 0 = 1$
2) $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
3) $\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Bunlardan birincisi 1-in kub kökü dür. Digər ikisi isə aşkar deyil (şəkil 2). Yoxlamaq üçün onlardan birini, məsələn, ikincisini kuba yüksəldək.

$$\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}((-1)^3 + 3i\sqrt{3} +$$
$$+9 - i\cdot 3\sqrt{3}) = \frac{1}{8}(9-1) = 1$$



Şəkil 2

4-cü dərəcədən kök aldıqda 1; −1; i; $-i$ və s. alırıq. Tam araşdırma aparmaq üçün, kompleks ədədin arqumentinin sıfırdan fərqli halına baxaq. Məsələn, -1-in kvadrat kökünə baxaq. Burada modul 1-ə, arqument isə π-yə bərabərdir.

$$\sqrt{-1} = \cos\left[\frac{\pi}{2} + \pi k\right] + i\sin\left[\frac{\pi}{2} + \pi k\right]$$

düsturunda κ = 0 və κ = 1 olarsa, i və $-i$ kimi iki kökü olar.

TƏNLİKLƏR VƏ BƏRABƏRSİZLİKLƏR

HESABDAN CƏBRƏ QƏDƏR. SİRLƏR AÇIQLANIR

Təsəvvür edin ki, çəkisi demək olar ki, olmayan pul kisəsində hansısa miqdarda eyni dəyərdə pul sikkələri var. İçinə baxmadan pul kisəsində sikkələrin sayını necə öyrənə bilərik? Çox asan bir üsulla tapmaq olar: pul kisəsini tərəzinin bir tərəfinə qoyub, digər tərəfini isə sikkələrin köməyi ilə tarazlaşdırmaqla (şəkil 1). Bunun üçün nə qədər sikkə tələb olunsa, o qədər də pul kisəsində sikkə var.



Şəkil 1



Şəkil 2

Satıcıların, kimyaçıların və əczaçıların sınanmış aləti daha da çətin vəziyyətlərdə köməyə gəlir: qoy tarazlıq vəziyyətində olan tərəzinin sol gözündə bilinməyən miqdarda sikkə ilə pul kisəsi və daha 5 sikkə, digər gözündə isə 15 dənə sikkə olsun. Pul kisəsində sikkələrin sayını öyrənmək üçün tərəzinin hər gözündən 5 sikkə olsun, bu zaman tarazlıq pozulmur. Deməli, pul kisəsinin içində 10 dənə sikkə var (şəkil 2).

Məchul kəmiyyət olan bərabərsizlik haqqında düşünən ilk müdriklərimizin zamanında, əlbəttə ki, nə sikkə, nə də pul kisələri var idi. Amma, naməlum sayda əşyalar yerləşən anbarlar, küpələr, səbətlər mövcud idi.

Bizim eramızdan əvvəl II minillikdə Misir mirzəsi Axmes yazırdı " Elə yığın axtarılır ki, onun üçdə ikisi, yarısı və yeddidə biri birlikdə 37 eləsin". İki çayarası, Hindistan, Çin və Yunanıstanın qədim riyazi məsələlərində naməlum qiymətlər vasitəsi ilə bağda tovuzquşlarının və sürüdə öküzlərin sayını, mülkün bölünməsi zamanı əşyaların məcmusunu ifadə edirdilər. Belə məsələlərin həlli ilə yazarlar, məmurlar və sirli biliklərin məlum olduğu kahinlər yaxşı bacarırdılar.

Bizə çatan mənbələrə görə məsələləri qədim alimlər naməlum kəmiyyətlərlə ümumi üsulla həll edirdilər. Təkcə yunan riyaziyyatçısı İsgəndəriyyəli Diofantin "Hesab" kitabında tənliklərin həlli ardıcıl izahla ifadə olunmuşdur. Amma, ilk dəfə belə məsələnin həll edilməsi IX əsrdə yaşamış Bağdad alimi Məhəmməd Musa Əl-Xarəzminin əsərində göstərilmişdir. "Əl – cəbr" sözü onun elmi əsərinin adının bir hissəsidir. Kitab "Kitab əl-cəbr əl mükabala" (Bərpa etmə və qarşı qoyulma haqqında kitab") adlanır. Bir müddət keçdikdən sonra bu ad hamıya tanış olan "cəbr" sözünə çevrildi və əsər tənliklərin həlli haqqında elmin əsasını qoydu.

Əl-Xarəzmi ilk dəfə tənliklərlə, satıcılar tərəzi ilə rəftar etdiyi kimi rəftar etməyə başladı. Tutaq ki, tənlik

$$5x-16=20-4x$$

bərabərliyi ilə verilmişdir. Satıcı belə nəticəyə gələcək ki, əgər tərəzinin hər iki gözünə eyni sayda əşya qoysa, heç nə dəyişməyəcək.

Vardı: 5x – 16 = 20 – 4x
Əlavə etdi: + 16 +16
Oldu: 5x = 36 – 4x

Bu qanuni əməliyyatdan sonra sol hissədə 16 rəqəmi itdi, sağ hissədə əmələ gəldi (bərpa olundu). Eyni qayda ilə iki hissəyə 4x əlavə etmək olar.

Vardı: 5x = 36 – 4x
Əlavə etdi: + 4x +4x
Oldu: 9x = 36

Yenə də sağ tərəfdən 4 x ifadəsi itdi, amma sol hissədə müsbət işarəsi ilə bərpa olundu $9x=36$ sadə bərabərlikdən $x=4$ olduğunu asan hesablamaq olar.

Məhəmməd Əl–Xarəzmi çıxılanı tənliyin bir tərəfindən digər tərəfinə keçirmək əvəzinə "müqayisəetmə"(əl- mükabala) işlətmişdir.

Tənliyin hər iki tərəfinə eyni ədədi əlavə edib və çıxdıqda doğru bərabərlik alındığı kimi, eyni zamanda tənliyin hər

iki tərəfini eyni bir ədədə vurduqda və böldükdə (əlbətdə ki, o, sıfır deyilsə) doğru bərabərlik alınar. Əsas prinsip: Əgər eyni miqdarlar üzərində eyni əməllər icra edilsə, onda nəticədə yenə də eyni miqdar olacaq. Əl-Xarəzminin əsərinin oxucularının əlində xüsusi bir "sehrli çubuq" rolunu oynayırdı. Amma bu çubuqdan çox ehtiyatla istifadə etmək lazımdır. (bax, "Yeni sehrbazlığa başlayanlara bir neçə məsləhət və ya tənlikləri necə həll etməli" məqaləsinə).

RƏQƏMLƏR YERİNƏ HƏRFLƏR

Əl-Xarəzminin əsərində məchul kəmiyyətlər və ümumiyyətlə, onlar ilə yanaşı gedən hesablamalar, tənliklərin çevrilməsi söz ilə ifadə olunurdu.

Cəbrin inkişafının ilk illərində məşhur olan belə bir izah üsulunu elm tarixçiləri ritorik (xatırladaq ki, ritorika – natiqlik istedadıdır) adlandırırdılar.

Cəbrdə yeni bir irəliləyiş XVI əsr fransız alimi Fransua Viyetin adı ilə bağlıdır.

O, birinci olaraq, tənliklərdə əmsalları və naməlum kəmiyyətləri hərflərlə işarə etmişdir. Amma məchul kəmiyyətlərin latın əlifbasının sonuncu hərfləri (x, y və ya z ilə işarə olunmasını Viyetin həmvətəni Rene Dekartdan ("Hərflə işarələmənin yaranması") öyrənmişik. Viyetin ixtirası birbirinə oxşar məsələlər üçün ümumi həlli tapmağı asanlaşdırdı.

Tutaq ki, Moskvadan 160 km məsafədə olan stansiyadan sürəti 85 km/saat olan qatar çıxır. Nə qədər vaxtdan sonra o, Moskvadan 500 km məsafədə olacaq?

Əgər qatar, Moskvadan 395 km məsafədə olan stansiyadan 70 km/saat sürətlə çıxarsa, məsələnin həlli necə dəyişəcək? Bu iki məsələ yalnız başlanğıcı ilə fərqlənir. Ona görə məsələnin şərtini ümumi şəkildə vermək lazımdır. Əgər qatar Moskvadan a km məsafədə olan məsafədən v km /saat sürət ilə əks istiqamətdə çıxarsa, nə qədər vaxtdan sonra o, paytaxtdan b km məsafədə olacaq? Məsələnin şərti aşağıdakı tənliklə ifadə olunur.

$$a+vt=b$$

Tənliyi t məchuluna nəzərən həll edib, alırıq:

$$t=\frac{b-a}{v}$$

Bu a, b, v ədədi parametrləri üçün ümumi düsturdur. Məsələn a=395 km, b=500 km v=70 km/saat olarsa,

$$t=\frac{500-395}{70}=1{,}5\,(\text{saat})$$

Düstur eyni olduğu halda, həllər müxtəlifdir. Həqiqətən riyaziyyat – müxtəlif şeylərə eyni ad vermək istedadıdır. Bu çox ağıllı və dərin mənalı aforizm müasir riyaziyyatın çoxlu sahələrinin yaradıcısı Anri Puankareyaya məxsusdur. "Elm və üsul" əsərində Puankareyə xüsusi ilə alimin quru faktları görməsini yox, daha da dərinliyə baxmaq, faktların mənasını başa düşmək ümumiləşdirmələr aparmaq istedadını üzə çıxarırdı: "Ən adi nümunə cəbr düsturudur, çünki, o təkcə hərfləri rəqəmlərə dəyişdirməklə bütün rəqəmli məsələlərin həllini bizə verir. Bu düsturun hesabına bir dəfə yerinə yetirilən cəbri hesablamaları bir neçə dəfə rəqəmli hesablamalar aparmaq məcburiyyətindən azad edəcək".

Puankarenin sözləri bizim kompyuter texnikası əsrində müstəsna dərəcədə aktualdır. Kompyuterlər cəbr düsturlarının dilini başa düşməyi öyrəniblər və çoxrəqəmli məlumatları emal etməyə (yəni, bu düsturlara görə hesablamaq) qadirdir. Hazırcavab olmaq üçün yalnız başlanğıc rəqəmləri daxil etmək qalır.

HƏMİŞƏ DÜZ OLAN BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Düstur dilində gözəl bir xassə var: qısalıq, məsələn, toplamanın yerdəyişmə qanunu: "toplananların yerini dəyişdikdə cəm dəyişmir". Bu, sadə bir bərabərliklə ifadə olunur.

$$a+b=b+a$$

Riyaziyyatda dəyişənlərin istənilən qiymətlərində doğru olan bərabərliyə eynilik deyilir. Bacarıqlı hesablayıcının əlində eynilik, istedadlı ifaçının əlində skripka kimidir. Tutaq ki, 23+32+17+28 cəmini

hesablamaq lazımdır. Toplananların yerini dəyişdirməyin mümkünlüyündən istifadə edərək 23+17+32+28=40+60=100 alarıq. Burada da həmçinin toplamanın qruplaşdırma qanunundan istifadə olunub:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

Mötərizə hesablama ardıcıllığını göstərir: Əvvəlcə mötərizənin içərisindəki əməl yerinə yetirilir, sonra isə növbəti əməl yerinə yetirilir. Qruplaşdırma qanunu göstərir ki, əmələri ardıcıl yerinə yetirmək vacib deyil. Cəmi tez hesablamaq üçün ((23 + +32)+17)+28 –i (23+17)+(32+28) cəmi ilə əvəz etmək lazımdır.

Vurma üçün də yerdəyişmə və qruplaşdırma qanunları yerinə yetirilir.

$$ab = ba$$
$$(ab)\,c = a\,(bc)$$

Digər tərəfdən ən təəccüblü və gözəl "cəbr fokusları" üçün vurmanın paylama qanunu iki əməli: vurma və toplama əməllərini birləşdirir.

$$a\,(b+c) = ab+ac$$

Riyazi hesablamalarda bu qanunu müxtəlif formalarda istifadə edirlər. Əgər $a\,(b+c)$ ifadəsini ona bərabər olan $ab+ac$ ifadəsi ilə əvəz etmək lazımdırsa, onda deyirlər ki, mötərizələri açmaq lazımdır, yəni, a-nı c-yə , a-nı b-yə ayrılıqda vurub toplamaq lazımdır.

Bu zaman ən əsası mötərizənin qabağında dayanan rəqəmin xoşrəftar ofisiant kimi, mötərizədə olan bütün müştərilərə xidmət etdiyini yaddan çıxarmamaq lazımdır. Yerdəyişmə qanununa uyğun olaraq $a(b+c) = (b+c)\,a$, yəni ki, fərqi yoxdur " ofsiant" hansı tərəfdə dayanıb – cavab eyni olacaq $ab+ac$ ifadəsini $a\,(b+c)$ ifadəsi ilə əvəz edildikdə deyirlər ki, a dəyişəni mötərizə xaricinə çıxarılır. Belə dəyişdirmə bizə hesab əməllərinə qənaət etmək imkanı verir: ab və ac hasillərinin cəmi $(b+c)$ cəminin a-ya hasilinə bərabərdir.

Bu qanundan istifadə edərək cəbrin əsas düsturlarından biri olan iki ədədin cəminin kvadratı düsturunu çıxaraq.

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

və ya eyni ilə

$$(a + b)\,(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

Bərabərliyin sol tərəfi göstərir ki, vurmanın paylama $x\,(y+z) = =xy + xz$ qanunundan istifadə etmək lazımdır. Təkcə "aktyorları" dəvət etmək qalır. y-i a, z-i b, x – i $(a+b)$ ilə əvəz edək.

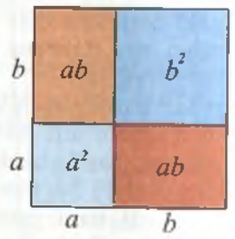
Bu əvəzləmə yerinə qoyma adlanır.

$$(a+b)\,(a+b) = (a+b)\,a + (a+b)\,b$$

Mötərizələri açıb, oxşar hədləri islah edib alarıq:

$$(a+b)^2 = a^2+ba+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$$

Şəkil 2-də bu düsturun həndəsi mənası "dildə" düzbucaqlının sahəsi kimi izah olunur.



Şəkil 2

Hərfi işarələrdən əvvəl riyaziyyatçılar fikirlərini elə bu dil vasitəsilə izah edirdilər. Bu dilin izi hələ də qalmaqdadır. Düsturlar sadə olduqca asandır. Məsələn, ikinci və üçüncü dərəcəyə biz kvadrat və kub deyəndə asan və aydın olur. Daha çətin məsələləri təsvir edən qədim mətnlərdə həllər yox, həlləri təsvir etmək bacarığı və oxucuların belə təsvirləri oxumaq hövsələsi heyranlıq doğurur. Elə buna görə riyaziyyatda hərflərin daxil edilməsi riyaziyyatın inkişafı üçün təkan verdi.

Müxtəsər vurma düsturlarından biri olan cəmin kvadratı düsturunu hər bir məktəbli bilməlidir. Toplamanın və vurmanın qanunlarından istifadə etməklə çox asanlıqla düsturları almaq olar:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab+b^2$$
$$(a-b)\,(a+b)+a^2\,b^2$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$
$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$$
$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3+b^3$$
$$(a - b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$$

Göründüyü kimi bu bərabərliklər tənliklərin həllində asanlıqla istifadə olunur.

YENİ SEHRBAZLIĞA BAŞLAYANLARA BİR NEÇƏ MƏSLƏHƏT VƏ YA TƏNLİYİ NECƏ HƏLLİ ETMƏLİ

Yeni sehrbazlığa başlayan, gülməli mahnının qəhrəmanı ovsunçuluqla məşğul ola bilmirdi. Nəticədə tufan yerinə keçi, fil yerinə ütü alınırdı. Tənliyi həll etmək üçün çox ehtiyatla bir neçə çevirmələr (cəbri çevirmələr) aparmaq lazımdır. Məsələn, $x^2=x$ tənliyinin həllini belə araşdıraq: "Əgər tənliyin hər tərəfini x-ə bölsək, $x=1$" alarıq. Hər halda " artıq şeylərdən qurtulmağa çalışmaqla biz, səhvə yol verərək tənliyin qanuni $x=0$ həllini itirmiş olarıq. Cəbr məsələlərində və imtahan suallarında olan bu tələdən məktəblilər və abituriyentlər həmişə qorunurlar. Bu tələyə necə düşməmək olar?

Hər şeydən əvvəl tənliklərin həllində siz başa düşməlisiniz ki, nə ilə məşğulsunuz.

"TƏNLİYİ HƏLL ETMƏK NƏ DEMƏKDİR?

$A(x)=B(x)$ şəklində olan tənliklərə birməchullu tənliklər deyilir. $A(x)$ və $B(x)$ ifadəsində x məchuldur. Bu ifadələrə hesab əməlləri, ədədlər, parametr adlanan başqa hərflər daxil ola bilər.

x dəyişəninin tənliyin hər iki tərəfini doğru bərabərliyə çevirən bütün qiymətləri çoxluğu tənliyin təyin oblastı (bəzən dəyişənin mümkün qiymətləri çoxluğu) adlanır.

Tənliyin kökü və ya həlli, məchulun elə qiymətinə deyilir ki, tənlikdə məchulun qiymətini yerinə yazdıqda doğru ədədi bərabərlik alınsın. Tənliyi həll etmək, onun bütün köklərini tapmaq və ya kökünün olmadığını sübut etmək deməkdir.

Bəzi tənliklər var ki, onlar hazır düsturlarla həll edilir. Bunlar xətti tənliklər, kvadrat tənliklər, $f(x)=a$ şəkilli tənliklərdir. f standart şəkilli (qüvvət və ya üstlü funksiya sinus, kosinus, tangens və kotanges) funksiyadır. Belə tənliklər sadə tənliklərdir. Məsələn $x^3 = a$ tənliyinin kökü $\sqrt[3]{a}$-ya , $log_3 x$=a tənliyinin həlli 3^a-ya bərabərdir. $cosx=a$ tənliyinin həlli isə

$$x=\pm arccosa+2\pi n (n=0;\ \pm1,\ \pm2,\ ....)$$

düsturu ilə hesablanır. Kub tənliklərin həlli üçün də belə düstür var, lakin bu düsturlar sadə tənliklərə aid olunmur.

Beləliklə, istənilən tənliyin həllini sadə hala gətirmək əsas məsələdir.

TƏNLİYİ NECƏ SADƏLƏŞDİRMƏLİ

Tənliklər iki əsas üsulla sadələşir: dəyişmənin əvəz edilməsi və vuruqlara ayırma. Məsələn: $x^4+ax^2+b=0$ bikvadrat tənliyi $y=x^2$ əvəzləməsi ilə, $2cos^2x+cosx-1=0$ triqonometrik tənliyi $y=x^2$ əvəzləməsi ilə həll olunur. Ümumiyyətlə, $F(f(x))=0$ şəkilli tənlikdə $y=f(x)$ əvəzləməsini aparmaq lazımdır. Verilən tənliyi həll etməkdən $F(y)=0$ və $f(x)=y$ tənliklərini həll etmək daha asandır. Tənliyi vuruqlara ayırmaq onu $f(x)\cdot g(x)=0$ şəklində göstərməkdir. Bu tənliklərin birlikdə həlli verilmiş tənliyin həllidir. Əlbəttə, burada da bir tələ gizlənib. Bir tənliyi digər iki tənliklə əvəz etdikdə, məsələdə təyin oblastı genişlənə bilər: birinci tənlikdə təyin oblastı f və g-nin kəsişməsinə, sonrakı iki tənlikdə f və g-nin birləşməsinə bərabərdir. Belə ki, $\sqrt{x}\,(x+1)=0$ tənliyinin bir kökü $(x=0)$ olduğu halda

$$\sqrt{x}=0 \text{ və } x+1=0$$

tənliklərinin birlikdə iki $(x=0,\ x=-1)$ kökləri var. $x-3x-2=0$ tənliyinin həllinə baxaq. Tənliyin bir kökünü $x=-1$-i asanlıqla tapmaq olar. İsbat etmək olar ki, əgər x_0 $P(x)$ çoxhədlisinin köküdürsə çoxhədli $x-x_0$ -a bölünür. Vuruqlardan biri $x-x_0$ –dır (bu Bezu teoreminin nəticəsidir). Bu vuruqlara ayırmanı yerinə yetirək -sol tərəfdən $x+1$ vuruğunu mötərizə xaricinə çıxaraq

$$x^3-3x-2=x^3+x^2-x^2-3x-2=x^2(x+1)-$$

$-(x^2+x)-2x-2=(x+1)(x^2-x-2)$

İfadəyə eyni $(...+x^2 - x^2...)$ ifadəsinin əlavə olunması və çıxılması qaydasından istifadə etdik. Bu sadə və yararlı üsul " Taras Bulbanın üsulu" adlanır (Mən səni yaratmışam, mən də səni məhv edəcəm" xatırladır). Sonra kvadrat tənliyi həll etmək qalır. Sadələşdirmənin əsas üsulları bunlardır. Bəzi hallarda hansı əvəzləməni aparmaq, necə vuruqlara ayırmaq olduqca çətin olur. Burada müvəffəqiyyət standart şəkildə düsturları bilməkdən, təcrübədən, məntiqdən və uğurdan asılıdır.

KİMSƏ İTİRİR, KİMSƏ TAPIR

Tutaq ki, siz tənliyi necə sadələşdirmək yolunu tapmısınız. İndi elə çevirmələr aparmaq lazımdır ki, nə tənliyin kökləri itsin, nə də kənar köklər alınsın. Bununla əlaqədar bu vacib məsələyə baxaq. $Y_1 \Rightarrow Y_2$ işarə olunur. Tənliyin kökləri üst-üstə düşərsə, onlara eynigüclü ($Y_1 \Leftrightarrow Y_2$) tənliklər deyilir. Məntiqi cəhətdən həll üçün iki yol var: ya nəticələrə yol verirsiniz, ya da yalnız eynigüclü keçidlər edirsiniz. Üçüncü yol verilməyib: əgər bu mərhələlərin birində tənliklərdən biri digərinin nəticəsi deyilsə, deməli, siz köklərdən birini itirmisiniz.

Tənliyin iki həllini müqayisə edək:

$$\sqrt{x+1} = x - 1 \qquad (*)$$

İstənilən ədəd verilmiş tənliyi ödədiyi kimi, həm də kvadrata yüksəltmə nəticəsində alınmış

$$x+1=x^2-2x+1$$

tənliyini də ödəyir. Bu kvadrat tənlik verilən tənliyin nəticəsidir. Onun kökü

$$x_1=0 \quad və \quad x_2=3$$

(*) tənliyində bu kökləri yerinə yazsaq, görərik ki, $x=0$ kənar kökdür. O, düzgün olmayan $1=-1$ bərabərliyini verir. İkinci kök yoxlamanı ödəyir. Beləliklə, birinci addım: nəticəyə giriş və alınan kökləri yoxlamaq

İkinci həllə baxaq

$$\sqrt{x+1}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x-1)^2 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \end{array}\right. \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$$

Fiqurlu mötərizə sistem işarəsidir. Bu işarə ona daxil olan tənliklərin və bərabərsizliklərin həllinin kəsişməsini, kvadrat mötərizə isə həllərin birləşməsini göstərir. Digərləri aydın olduğundan ancaq birinci keçidi izah edək. Verilmiş tənlik $A=B$, harada ki, $A=\sqrt{x+1}$, $B=x-1$. Kökdən azad olmaq üçün hər tərəfi kvadrata yüksəldək. Bu keçid eynigüclü deyil. $A^2=B^2$ -ı üçün $A=B$ və $A=-B$ ödənilir. (məhz ikinci, "kənar" haldır və bizə birinci halda $x_1=0$ kənar kökünü verdi). Eynigüclülüyü təmin etmək üçün əlavə olaraq A və B -nin eyni işarəli olması şərtini qoymaq lazımdır. Kvadrat kökün tərifinə görə $A\geq 0$, ona görə $B=x-1\geq 0$ şərti ödənməlidir.

Xatırladaq ki, kökdən azad olarkən tənliyin oblastı genişlənir. Kök işarəsi, içərisində oturan cinin sərbəstliyini əlindən almış küpə bənzəyir. (kök işarəsi altında mənfi ədəd ola bilməz) Əgər kök işarəsi itərsə, cin çıxar və elə şeylər edər ki, əvvəllər bu işlər haqqında o, yalnız arzu edə bilərdi. Ümumiyyətlə $\left(\sqrt{f(x)}\right)^2$ - nı $f(x)$ ilə əvəz edəndə $f(x)\geq 0$ şərtini yazmaq lazımdır. (f) tənliyi üçün $x+1\geq 0$ şərti olmalıdır. Biz onu unutmuşuq, ona görə ki, bu şərt $x+1=(x-1)^2$ bərabərliyində özü-özlüyündə alınır. Beləliklə, həllin ikinci yolu eynigüclü keçid üsulu olub, əlavə şərtlər, ayrı-ayrı hallara baxılması, həllər çoxluğunun toxunulmazlığından ibarətdir. Sözsüz ki, tənliyin həlli asan görünür. Amma tənliyin özü də asandır. Elə məsələlər də vardır ki, onların köklərini araşdırmaq, onun həllinin tapılmasından asan deyil.

Eynigüclü keçid üsulunda çatışmayan cəhət tənliyin yavaş-yavaş "budaqlanmağa və izləmək asan olmayan yeni şərtlərin yaranmasından ibarətdir. Başa düşməliyik ki, bu yerdə tələyə düşməmək üçün həllə yaxşı nəzarət etmək lazımdır.

Eynigüclü keçid üsulu üçün daha bir əsas dəlil var. Yalnız bu yol ilə bərabərsizlikləri həll etmək olar (bərabərsizliyin həllini əvəz etmə üsulu ilə yoxlamaq olar). Bizim sizə tövsiyəmiz – bu üsulu öyrənin və bir neçə ən asan hal istisna olmaqla həmişə istifadə edin.

Bunun üçün eynigüclülüyü pozan səbəbləri izləmək lazımdır. Adətən tənlikləri necə çevirirlər və bu çevirmələri nə törədə bilər.

CƏBRİ "SIRALAR"

Əgər siz tənliyin hər iki tərəfinə eyni ədəd əlavə etsəniz, bu həllərə heç bir təhlükə yaratmaz. Amma, əgər bu, ədəd deyil, funksiyadırsa, məsələn, $\frac{1}{x}$; onda ehtiyatlı olun. x=0 tənliyinin bir kökü var. Amma $x+\frac{1}{x}=\frac{1}{x}$ tənliyinin kökü yoxdur. Funksiya əlavə etdikdə, tənliyin təyin oblastı pozulur. Əgər təyin oblastı genişlənərsə, onda tənlik üçün müəyyən məhdudiyyətlər qoyun, əgər yığılırsa, tənliyin kökünün funksiyasının təyin oblastına daxil olduğunu yoxlayın.

Belə bir qayda vurmaya da aiddir. Bundan başqa tənliyin həllində məchulun elə qiymətini əlavə etmək olar ki, vuruq sıfıra bərabər olar. Yoxlamaq lazımdır, bu kənar köklər vermir ki?

Tənliyə daxil olan ifadəni onunla eynigüclü olan ifadə ilə əvəz etmək olar. Nəzərə almaq lazımdır ki, eynilik iki cürdür. Mütləq eynilik elə $A=B$ bərabərliyinə deyilir ki, A və B ifadələrinin təyin oblastları və bu təyin oblastında dəyişənin bütün qiymətlərində ədədi qiymətləri bərabər olsun. Bu, məsələn, müxtəsər vurma və ya sinus, kosinus üçün toplama düsturlarıdır. Belə eynilikdən təhlükəsiz istifadə etmək olar. Amma digər eynilik də var. Məsələn $\left(\sqrt{A}\right)^2=A$ və ya $\lg xy=\lg x+\lg y$

Onların təyin oblastları müxtəlif olub, bir qayda olaraq, biri digərinin daxilindədir. (loqarifmik eyniliyin sol tərəfində x və y eyni işarə ilə, sağ tərəfində ancaq müsbət). Belə eynilik nisbi eynilik adlanır. Təyin oblastı haqqında dediklərimiz nisbi eyniliyə də aiddir. Nəhayət, tənliyin hər iki tərəfini eyni funksiya qədər dəyişdirdikdə, köklərin itməsi ilə rastlaşırsınız. Əgər funksiya hər yerdə təyin olunmayıbsa, onda tənliyin təyin oblastı daralacaq. Digər tərəfdən $f(x)$ funksiyası qarşılıqlı birrəqəmli deyilsə, yəni $f(x_2)=f(x_2)$ bərabərliyində $x_1\neq x_2$, $A=B$ tənliyindən $f(A)=f(B)$ tənliyinə keçəndə kənar köklər alına bilər. Belə funksiyaların əsas (praktikada yeganə) nümunəsi $f(x)=x^2$ və siz artıq bilirsiniz ki, bu halda özünüzü necə "sığorta" edə bilərsiniz.

Dərsliklərdə, ali məktəblərə qəbul üçün vəsaitlərdə eynigüclü çevirmələrə aid çoxlu standart sxem verilmişdir. Məsələn, tənlikdə kökdən azad olmaq. Qısa məsləhətlə də keçinmək olar: təyin oblastının dəyişilməsi ilə ehtiyatlı olun!

KVADRAT TƏNLİKLƏR

$a\neq 0, a,b,c$ həqiqi ədədlər olduqda $ax^2+bx+c=0$ şəklində olan tənliklərə kvadrat tənlik deyilir. Əgər, $a=1$ olarsa, tənlik çevrilmiş kvadrat tənlik, $a\neq 1$ olarsa, çevrilməmiş kvadrat tənlik adlanır.

İlk dəfə kvadrat tənliyi qədim Misir riyaziyyatçıları həll etmişlər. Riyazi papirusların birinin üzərində belə bir məsələ var: "Sahəsi 12, eni uzunluğunun $\frac{3}{4}$ hissəsinə bərabər olan düzbucaqlı şəklində olan sahənin tərəflərini tapın".

Həllinə baxaq:

Sahənin uzunluğu x olsun, onda eni $\frac{3}{4}x$ olar. Sahəsi $S=\frac{3}{4}x^2$ olduğundan alarıq: $\frac{3}{4}x^2=12$

Papirusda bu kvadrat tənliyin düzgün həlli göstərilmişdir: 12-ni $\frac{3}{4}$-ə böl.

$$12:\frac{3}{4}=12*\frac{4}{3}=16$$

Beləliklə, $x^2=16$ papirusda göstərilib: "Sahənin uzunluğu 4-ə bərabərdir"

Minilliklər keçdikdən sonra cəbrə

mənfi ədədlər daxil oldu. $x^2 = 16$ tənliyini həll edərkən, $x_1=4$, $x_2=-4$ kimi iki ədəd alırıq. Əlbəttə, Misir məsələsində biz $x=4$ qəbul etdik, çünki sahə ancaq müsbət kəmiyyətlərlə göstərilir.

Misir riyaziyyatçıları ilə müqayisədə Çayarası alimləri böyük addımlarla irəliləyiblər. Onlar çevrilmiş kvadrat tənliyin həlli üçün qayda tapıblar. $x^2+px+q=0$, harada ki, p və q istənilən həqiqi ədəddir. Babilistan məsələlərinin birində tələb olunur ki, düzbucaqlı şəklində sahənin uzunluğunu (x ilə işarə edək) və onun enini (y) tapmaq tələb olunur: Düzbucaqlı şəklində sahənin uzunluğunu və iki enini topladıqda 14, sahəsi 24 olar. Onun tərəflərini tapın. Sistem tənlik quraq.

$$\begin{cases} x+2y=14 \\ xy=24 \end{cases}$$

İkinci tənlikdən $y=\frac{24}{x}$ alıb birinci tənlikdə yerinə yazsaq. $x+\frac{48}{x}=14$ alarıq.

Buradan $x^2-14x+48=0$ kvadrat tənliyini alırıq. Onun həlli üçün x^2-14x ifadəsinə hər hansı ədəd əlavə edək ki, tam kvadrat alınsın.

$$x^2-14x=x^2-2\cdot 7x=$$
$$=x^2-2\cdot 7x+7^2-7^2=(x-7)^2-49$$

İndi tənliyi belə yazarıq:

$(x-7)^2-49+48=0$ və ya $(x-7)^2=1$

Biz misirlilər tərəfindən də həll edilə bilən kvadrat tənlik aldıq.

Mənfi ədədləri bilməyən qədim riyaziyyatçılar $x-7=1$, $x=8$ alıblar. Əlbəttə, $y=\frac{24}{8}=3$ Yəni, sahəsinin uzunluğu 8, eni isə 3-ə bərabərdir. Ümumiyyətlə, $(x-7)^2=1$ kvadrat tənliyinin iki kökü var.

1) $x-7=1$ buradan $x=8$, $y=3$

2) $x-7=-1$, buradan $x=6$, $y=\frac{24}{6}=4$

VİYET DÜSTURU

İstənilən çevrilmiş x^2+px+0 (*) tənliyinin həlli düsturunun necə alındığına baxaq. Cəmin kvadratı düsturunu yazaq:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

a-nı x ilə əvəz edək.

$$(x+b)^2=x^2+2xb+b^2 \ (**)$$

Alınmış ifadəni tənliyimizlə müqayisə edək. Asanlıqla görmək olar ki, $b=\frac{p}{2}$ yazsaq, (*) tənliyinin sol tərəfi, tam kvadrat (**) tənlikdən yalnız sabitləri ilə fərqlənir. Bu müşahidə həllin əsas yolunu çatdırmağa çalışır. (*) tənliyində ikihədlinin kvadratını ayırmaq lazımdır.

$$(x+\frac{p}{2})^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$$

$\left(-\frac{p}{4}+q\right)$ ifadəsini sağ tərəfə keçirmək qalır. Bundan sonra (*) tənliyi $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\frac{p^2}{4}-q$ şəklini alır.

Aydındır ki, x-in heç bir qiymətində $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ mənfi ədəd ola bilməz. Əlbəttə ki, əgər $\frac{p^2}{4}-q<0$ olarsa, kvadrat tənliyin həqiqi kökü yoxdur. Tutaq ki, $\frac{p^2}{4}-q>0$ Onda axırıncı tənlikdən kvadrat kök alsaq,

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

alarıq.

Buradan

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q} \quad \text{və} \quad x^2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

kökləri alarıq. Və ya müxtəsər şəkildə

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Bu düstur Viyet düsturu adlanır. Viyet XVI əsrin axırlarında yaşamış fransız riyaziyyatçısı olub, cəbri işarələrin yaranmasında böyük rolu olmuşdur (İntibah dövrü: şərəfli ixtiralar məqaləsinə bax.)

KVADRAT TƏNLİYİN DİSKRİMİNANTI

Viyet düsturunda kökaltı ifadə diskriminant (latın dilində diskriminans – "bölüşdürən", ayırdedici") adlanır və D hərfi ilə işarə olunur. Bizim çevrilmiş kvadrat tənlik üçün $D=\frac{p^2}{4}-q$ Həqiqətən, diskriminantın işarəsindən asılı olaraq kvadrat tənliklərin həllinin üç halına baxırıq:

$D<0$ olduqda kvadrat tənliyin kökü yoxdur. $D>0$ olduqda kvadrat tənliyin 2 müxtəlif x_1 və x_2 kökləri var, hansı ki, Viyet düsturunda verilib. Əgər $D=0$ olarsa? Bu zaman $q=\frac{p^2}{4}$; (*) tənliyinin sol tərəfi tam kvadrat şəklində olar.

$$(x+\frac{p}{2})^2=0$$

Belə ki, bunun yeganə $x=-\frac{p}{2}$ kökü var. Bu halda Viyet düsturu $x_1=x_2=-\frac{p}{2}$ - ni verir. Müəyyən olunmuş bu iki kök üst-üstə düşür (həm də deyirlər ki, ikiqat kökə malikdir)

VİYET TEOREMİ

Fransua Viyet kvadrat tənliyin əmsallarından yalnız, onun köklərinin ümumi düsturunda deyil, eyni zamanda tənliyin köklərinin onun əmsalları vasitəsi ilə ifadə edilməsində istifadə etmişdir. Bu, Viyet teoremi adlanır.

Əgər x_1 və x_2 $x^2+px+q=0$ kvadrat tənliyinin kökləridirsə, onda

$$x_1+x_2=-p$$
$$x_1\cdot x_2=q$$

olar.

Hərfi hesablamalar teoremləri cəbri çevrilmələrin köməyi ilə isbat etməyə imkan verir. Biz bilirik ki, $D\geq 0$ olduqda kvadrat tənliyin kökü $x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ düsturu ilə tapılır.

İndi cəbri çevirmələri düzgün yerinə yetirməklə Viyet teoremi isbat olunmuş olar.

BABİLİSTAN CƏDVƏLİNDƏN MƏSƏLƏ

"Mən uzununu və enini topladım 27 aldım. Uzunluqla enin fərqini sahəyə əlavə etdim və 183 aldım. Uzunluğu, eni və sahəni tap". Tutaq ki, uzunluq x, eni y – dır. Sistem tənlik alırıq:

$$\begin{cases} x+y=27 \\ (x-y)+xy=183 \end{cases}$$

Birinci tənlikdən $y=27-x$ alırıq. Bu ifadəni ikinci tənlikdə yerinə yazsaq, mötərizələri açıb, oxşar hədləri islah etsək, kvadrat tənlik alınar:

$$x^2-29x+210=0$$

Diskriminantı hesablayaq:

$$D=\left(-\frac{29}{2}\right)^2-210=\frac{841}{4}-210=\frac{1}{4}$$

Nəhayət kökləri tapaq.

$$x_{1,2}=\frac{29}{2}\pm\frac{1}{2}, \quad x_1=15, \quad x_2=14$$

Beləliklə, biz sahənin uzunluğu üçün iki müxtəlif qiymət tapırıq: 15 və 14.

$$y=27-x$$

düsturundan istifadə edərək, sahənin enini taparıq.

$y_1=27-15=12$

$y_2=27-14=13$

və onun sahəsi

$$s_1 = 15 \cdot 12 = 180$$
$$s_2 = 14 \cdot 13 = 182$$

Qədim riyaziyyatçı da hesablamalar nəticəsində 15 və 14 almışdı. Amma uzunluq üçün yalnız 15, eni üçün 12 götürdü. Sahə 180 oldu. Biz isə, daha bir həll, uzunluğu 14, eni 13, sahəni isə 182 alarıq.

ƏN BÖYÜK TORPAQ SAHƏSİNİ NECƏ HASARLAMAQ OLAR?

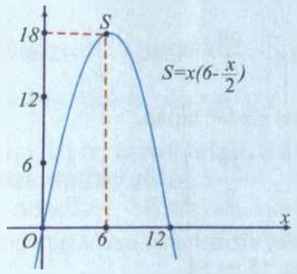
Uzunluğu 12 m olan hasar çəkmək üçün tikinti materialları var. Biz evə bitişik düzbucaqlı şəklində ən böyük sahəli hasar çəkmək istəyirik. Onun ölçüləri necədir? Tutaq ki, sahənin uzunluğu x, eni y, sahəsi $S=xy$ - dir. $x+2y=12$ tənliyindən alarıq: $y = 6 - \frac{x}{2}$.

Bu qiyməti sahə düsturunda yerinə yazsaq, alarıq:

$$S = x\left[6 - \frac{x}{2}\right] = -\frac{x^2}{2} + 6x$$

Qolları aşağı yönəlmiş parabolanın tənliyini aldıq. Elə x tapmaq lazımdır ki, S sahəsi ən böyük qiymət alsın.

Əvvəlcə parabolanın absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrini tapaq. Bunun üçün $6x - \frac{x^2}{2} = 0$ tənliyini həll edək. Onun kökləri $x_1 = 0$ və $x_2 = 12$ sonra parabolanın təpə nöqtəsinin absisini $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ düsturu ilə hesablayaq. Buradan $x_0=6$, $y_0=3$ və $S=18$ alınır. Beləliklə, sahənin ölçüləri: uzunluğu 6 m, eni 3 m, sahəsi 18 m².



$$x_1 + x_2 = \left[-\frac{P}{2} + \sqrt{D}\right] + \left[-\frac{P}{2} - \sqrt{D}\right] = -P$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{P}{2} + \sqrt{D}\right]\left[-\frac{P}{2} - \sqrt{D}\right] = \frac{P^2}{4} - D =$$

$$= \frac{P^2}{4} - \left[\frac{P^2}{4} - q\right] = q$$

Daha bir maraqlı əlaqəyə, tənliyin diskriminantının onun köklərinin fərqinin kvadratına bərabər olmasına baxaq $D=(x_1-x_2)^2$. Viyet teoremindən alınır ki, kökləri x_1 və x_2 olan çevrilmiş kvadrat üçhədlini $(x-x_1)(x-x_2)$ şəklində yazmaq olar. Həqiqətən, bu hasildə mötərizələri açsaq, $x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2=x^2+px+q$ ifadəsini alarıq. Əksinə, Viyet teoreminin isbatında hesablama aparmadan vuruqlara ayırmadan istifadə etmək olar.

Tutaq ki, kökləri x_1 və x_2 olan

$$x^2 + px + q$$

kvadrat üçhədlisi verilib. Qeyd edək ki:

$$x_1 + x_2 = \left[-\frac{P}{2} + \sqrt{D}\right] + \left[-\frac{P}{2} - \sqrt{D}\right] = -P$$

$$x_1 \cdot x_2 = \left[-\frac{P}{2} + \sqrt{D}\right]\left[-\frac{P}{2} - \sqrt{D}\right] =$$

$$= \frac{P^2}{4} - D = \frac{P^2}{4} - \left(\frac{P^2}{4} - q\right) = q$$

Daha bir maraqlı əlaqəyə, tənliyin diskriminantının onun köklərinin fərqinin kvadratına bərabər olmasına baxaq $D=(x_1-x_2)^2$. Viyet teoremindən alınır ki, kökləri x_1 və x_2 olan çevrilmiş kvadrat üçhədlini $(x-x_1)(x-x_2)$ şəklində yazmaq olar. Həqiqətən, bu hasildə mötərizələri açsaq,

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = x^2 + px + q$$

ifadəsini alarıq. Əksinə, Viyet teoreminin isbatında hesablama aparmadan, vuruqlara ayırmadan istifadə etmək olar.

Tutaq ki, kökləri x_1 və x_2 olan $x^2 + px + q$ kvadrat üçhədlisi verilib. Qeyd edək ki,

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2$$

çevrilmiş kvadrat üçhədlisinin kökləri də verilmiş kvadrat üçhədlisinin x_1 və x_2 kök-

lərinə bərabərdir. İki üçhədlinin fərqi

$$(p + x_1 + x_2)x + (q - x_1x_2) \qquad (***)$$

bərabərdir.

Bu, x-ə nəzərən xətti funksiyadır.

Bununla belə, x_1 və x_2 nöqtələrində hər iki çoxhədli sıfıra bərabər olduğundan, onların fərqi (***)-da həmin nöqtələrdə sıfıra bərabər olar. Xətti funksiya üçün, bu hal o zaman olur ki, əgər o, eynilikla sıfıra bərabər olsun. Buradan çıxır ki,

$$p = -(x_1 + x_2), q = x_1 \cdot x_2$$

Viyet teoremi alınır.

Bu fikri Viyet teoremi kimi istənilən dərəcədən çoxhədliyə aid etmək olar.

n dərəcəli çoxhədlidə x^{n-1} -in əmsalı əks işarə ilə n sayda köklərin cəminə, sərbəst həddi isə $(-1)^n$ ədədi ilə bütün köklərinin hasilinə bərabərdir.

İMTAHAN MƏSƏLƏSİ

Bu məsələni Moskva Universitetinin fizika fakültəsinə daxil olmaq istəyənlər üçün təklif etmişdilər.

$$ax^2 + bx + 2 = 0, a < 0$$

olduqda, tənliyinin köklərindən biri 3-dür.

$$ax^1 + bx^2 + 2 = 0$$

tənliyini həll edin. Birinci tənliyə Viyet teoremini tətbiq edək:

$$x_1x_2 = \frac{2}{a}, x_1 = 3, \text{ onda } x_2 = \frac{2}{3a}$$

Beləliklə, $x_2 < 0$ alınır. $x^2 = t$ ilə işarə edək, onda ikinci tənlik

$$at^2 + bt + 2 = 0$$

şəklində olar.

Bu tənliyi verilmiş tənliklə müqayisə etsək, alarıq:

$$t_1 = 3, t_2 = \frac{2}{3a} \quad t_2 < 0$$

Nəzərə alsaq ki, $x^2 = t$, t_2-nin qiymətini atırıq, bərabərlikdən isə t_1=3 olduğundan x_2=3 alarıq.

Cavab: $x_{1,2} \pm \sqrt{3}$

ÇEVRİLMƏMİŞ TƏNLİK

Çevrilməmiş kvadrat

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$$

tənliyinin a-ya bölünməsindən alınan:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

tənliyidir. Ona görə onun kökləri

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\frac{b}{a}\right]^2 - \frac{c}{a}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Bu tənliyin diskriminantı $D = b^2 - 4ac$ - dir. Çevrilməmiş kvadrat tənlik üçün Viyet teoremi belədir:

Əgər x_1 və x_2 $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tənliyinin kökləridirsə, onda $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ -dır.

Kvadrat tənlik haqqında danışdıqda biz, ancaq həqiqi köklərə baxırıq. Amma kompleks ədədlər çoxluğunda hər şey daha sadədir: istənilən kvadrat tənliyin iki kökü var. Ola bilər ki, köklər eyni olsun ($D = 0$). Mənfi diskriminant üçün köklər qoşma kompleks ədədlərdir. Düsturun çıxarılışı və isbatı olduğu kimi qalır. Bundan əlavə, istənilən kompleks əmsallı kvadrat tənliklər üçün tənliyin həlli düsturu və Viyet teoremi öz qüvvəsində qalır. Bu halda $\sqrt{D}$ D ədədinin istənilən iki kompleks köklərindən biri kimi başa düşülməlidir.

KVADRAT TƏNLİKLƏRƏ GƏTİRİLƏN TƏNLİKLƏR

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ şəkilli bikvadrat tənliklər kvadrat tənliklərə gətirilir.

Doğrudan da, $x^2 = y$ əvəzləməsi aparsaq,

$$ay^2 + by + c = 0$$

kvadrat tənliyini alarıq.

y_1 və y_2 kökünü, sonra əvvəlki tənliyin $x_{1,2}=\pm\sqrt{y_1}$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{y_2}$ köklərini tapaq.

Aydındır ki, y_1 və y_2-nin qiymətləri içərisində həm mənfi, həm də kompleks ədəd ola bilər. y-in müsbət qiymətlərində x həqiqi qiymətlər ala bilər.

Ola bilsin ki, bu üsuldan daha geniş istifadə olunsun.

Məsələ 1. Tənliyi həll edək:

$$4^x-3\cdot 2^{x+1}-16=0$$

$2^x=y$ əvəzləməsi aparsaq, onda biz yenidən $y^2-6y-16=0$ kvadrat tənliyinə gələrik. Onun kökləri y_1 = 8 və y_2 = -2. birinci kök 2^x = 8, x = 3 ikinci kök: 2^x = -2 həqiqi ədədlər çoxluğunda kökü yoxdur.

Məsələ 2. Tənliyi həll edək:

$$\cos 2x+3\sin x=2$$

cos2x-i *sinx* ilə ifadə edib, tənlikdə nəzərə alsaq,

$$1-2\sin^2 x+3\sin x=2$$

və ya

$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0$$

alarıq.

İndi sinx-i y ilə əvəz edək

$$2y^2-3y+1=0$$

alarıq.

Bu tənliyin kökləri

$$y_1=\frac{1}{2},\ y_2=1$$

Qalır sadə triqonometrik tənlikləri həll etmək

$$\sin x=\frac{1}{2}\ \text{ və sinx=1}$$

Onlardan biri $x_n=(-1)\frac{n\pi}{0}+\pi n$-nin həlləri çoxluğudur. Bu arada n istənilən tam ədəddir. İkinci tənlik $x_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n$-nin həllər çoxluğunu verir.

KUB TƏNLİKLƏR

Əgər kvadrat tənlikləri Babilistan və qədim Hindistanın riyaziyyatçıları həll etməyi bacarırdılarsa,

$ax^3+bx^2+cx+d=0$, burada $a\neq 0$, şəkilli tənliklər onlar üçün "bərk qoz" imiş.

XV əsrin sonunda Roma və Milan universitetlərinin professoru Luka Paçoli özünün məşhur "Hesab, həndəsə, nisbət və mütənasiblik haqqında biliklər məcmusu" dərsliyində kub tənliklərin ümumi üsulla həllinin tapılmasını dairənin kvadraturası haqqında məsələ ilə bir sırada qoyurdu. Nəhayət İtalyan riyaziyyatçılarının səyi ilə belə bir üsul tapılmışdır.

SADƏLƏŞDİRMƏDƏN BAŞLAYAQ

Əgər $ax^3+bx^2+cx+d=0$ harda ki, $a\neq 0$, kub tənliyini a-ya bölsək, x^3 -nun əmsalı 1-ə bərabər olar, ona görə gələcəkdə

$$x^3+px^2+Qx+R=0 \qquad (*)$$

tənliyinə əsaslanacağıq.

Eləcə də kvadrat tənliklərin həllində cəmin kvadratı əsas olduğu kimi, kub tənliklərin həllində də cəmin kubu üstünlük təşkil edir

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Əmsalları qarışıq salmamaq üçün a-nı x -la əvəz edib, toplananları qruplaşdıraq

$$(x+b)^3=x^3+3bx^2+3b^2x+b^3 \qquad (**)$$

Biz görürük ki, b-ni düz seçsək, yəni $b=\frac{p}{3}$ götürsək onda əmin olmaq olar ki, biz bu düsturun sağ hissəsinin (*) tənliyinin sol hissəsindən yalnız, x-ın əmsalı və sərbəst həddi ilə fərqləndiyinə nail ola bilərik.

* və (**) tənliklərini toplayaraq və oxşarları çevirsək;

$$(x+b)^3+(Q-3b^2)x+R-b^3=0$$

Burada, $y=x+b$ əvəzləməsi aparsaq,

y-dən asılı y^2 həddi olmayan kub tənliyini alarıq

$$y^3+py+q=0$$

Beləliklə, biz göstərdik ki, (*) kub tənliyində əvəzetmə yolu ilə məchulun kvadratı olan həddən azad olmaq olar. Ona görə indi biz,

$$x^3+px+q=0 \qquad (***)$$

şəklində tənliyi həll edəcəyik

KARDANO DÜSTURU

Bir daha cəmin kubu düsturunun başqa şəklini yazaq

$$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$$

və onu (***) tənliyi ilə müqayisə edib, onlar arasında əlaqə yaradaq. Hətta köməklə də bunu etmək asan deyil. İntibah dövrünün riyaziyyatçılarına haqq qazandırmaq olar, çünki onlar hərfi işarələrdən istifadə etmədən kub tənlikləri həll edə bilirdilər.

Düsturlarda;

$x=a+b$ yazsaq

$x^3=a^3+b^3+3abx$ və ya

$x^3-3abx-(a^3+b^3)=0$ alarıq.

Artıq aydındır ki, (***) tənliyini həll etmək üçün sistem tənliyi həll etmək lazımdır.

$$\begin{cases}a^3+b^3=-q\\3ab=-p\end{cases}\ \text{ və ya }\ \begin{cases}a^3+b^3=-q\\a^3b^3=\left(-\frac{p}{3}\right)^3\end{cases}$$

Və x yerinə a və b-nin cəmini götürək, $u=a^3$, $v=b^3$ əvəzləməsi ilə sistem tənlik tamamilə sadələşər.

$$\begin{cases}u+v=-q\\uv=-\left(\frac{p}{3}\right)^3\end{cases}$$

Sonra isə müxtəlif yollarla hərəkət etmək olar, amma bütün yollar "kvadrat tənliyə gətiriləcək". Məsələn Viyet teoreminə görə çevrilmiş kvadrat tənliyin köklərinin cəmi əks işarə ilə x-in əmsalına, hasili isə sərbəst həddə bərabərdir. (" Kvadrat tənliklər " məqaləsinə bax) Burada u və v

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$$

tənliyinin kökləridir.

Bu kökləri yazsaq:

$$t_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

a və b dəyişənləri kub tənliyin t_1 və t_2 köklərinə bərabərdir. (***) kub tənliyinin həlli bu kökün cəminə bərabərdir.

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Bu düstür Kardanoo düsturu kimi tanınır (bax. "İntibah dövrü: məşhur kəşflər" məqaləsinə)

TƏNLİKLƏRİ HƏLL EDİRİK

Kardano düsturuna baxmadan kub tənliyin (***) bir kökü məlum olduqda digər kökünü (əgər varsa) necə tapmaq lazım olduğunu aydınlaşdıraq.

Tutaq ki, bizim tənliyimizin h kökü məlumdur. Onda onun sol tərəfini xətti və kvadratik vuruqlara ayırmaq olar.

Bu, çox asanlıqla yerinə yetirilir. Tənlikdə sərbəst həddin köklə $q=-h^2-ph$ ifadəsini yazıb, kublar fərqi düsturundan istifadə etsək, alarıq:

$$0=x^3-h^3+px-ph=(x-h)(x^2+hx+h^2)+$$
$$+p(x-h)=(x-h)(x^2+hx+h^2+p)$$

İndi $x^2+hx+h^2+p=0$ kvadrat tənliyini həll edib kub tənliyin qalan köklərini tapmaq olar.

Beləliklə, biz tamamilə silahlanmış halda istənilən kub tənliklərin öhdəsindən gələ bilərik.

Gəlin gücümüzü sınayaq

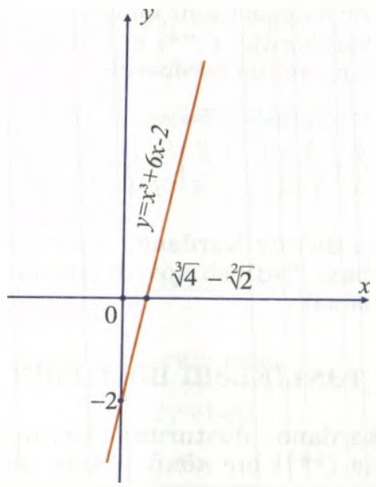
1. Tənlikdən başlayaq: $x^3+6x-2=0$

Kardano düsturunda p=–6 və q=–2 qoyub çətin olmayan ixtisardan sonra alarıq: $x=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ Nə demək olar, düstur təmamilə cazibəlidir. Yalnız sol tərəfdə

$$x-\left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}\right)$$

vuruğunu çıxarıb, qalan kvadrat tənliyi "qorxunc" əmsallarla hesablamaq qaydası heç də sevindirici deyil.

Amma tənliyə diqqətlə nəzər salsaq, biz sakitləşərik: Sol tərəfdəki funksiya ciddi şəkildə artır, tək bir dəfə sıfıra bərabər olur.



$y=x^3+6x-2$ funksiyasının qrafiki absis oxunu bir $\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}$ nöqtəsində kəsir.

Şəkil 1

Deməli alınan ədəd, tənliyin yeganə həqiqi köküdür.

2. Sonrakı misal

$$x^3+3x-4=0$$

tənliyidir.

Kardano düsturundan

$$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+3\sqrt{2-\sqrt{5}}$$

alınır.

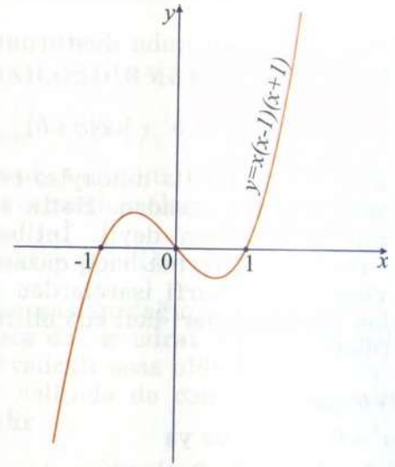
Əvvəlki tənlikdə olduğu kimi görürük ki, bu kök yeganədir.

Amma, tənliyə baxdıqda onun kökünün $x=1$ olduğunu görmək çətin deyil. Biz qəbul etməliyik ki, o, yeganə həlli qəribə bir şəkildə verir.

Sadələşdirmək, cəbri çevrilmələrdən istifadə etmək üçüncü dərəcəli irrasionallıqdan azad etmək, mümkün deyil.

3. İndi isə üç həqiqi kökü olan tənlik götürək

Onu qurmaq asandır: Üç $(x-h)$ şəkilli mötərizələri bir-birinə vuraq. Amma nəzərə almaq lazımdır ki, köklərinin cəmi sıfıra bərabər olsun, axı Viyetin ümumi düsturuna görə o , x^2 –nın əmsalından təkcə işarəsi ilə fərqlənir. Belə köklər 0 , 1 və – 1 - dir.



$x(x-1)(x+1)=0$ tənliyinin üç həqiqi kökü, –1, 0 və 1, var. Uyğun olaraq $y=x(x-1)(x+1)$ funksiyasının absis oxunu üç nöqtədə kəsir.

Şəkil 2

Kardano düsturunu

$$x(x-1)(x+1)=0 \text{ və ya } x^3-x=0$$

düsturuna tətbiq etsək, $P=-1$ və $q=0$ olarsa,

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{-\sqrt{-1}}\,.$$

Kvadrat kökün altında mənfi ədəd alınır. Kvadrat tənliklərin həllində də belə olur. Amma bu halda kvadrat tənliyin həqiqi kökü olmur. Lakin kub tənliklər hətta üç kökə malikdir!

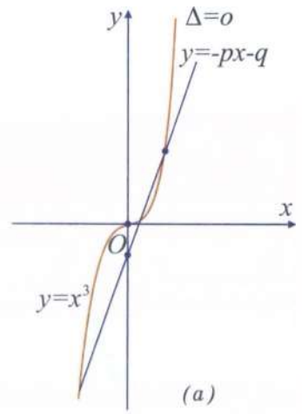
Daha dəqiq təhlil göstərir ki, biz bu tələyə təsadüfü düşmədik.

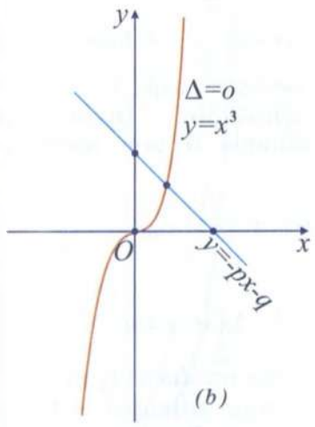
$$x^3+px+q=0$$

kub tənliyinin o zaman üç həqiqi kökü olar ki, Kardano düsturunda kvadrat kök altında

$$\Delta=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

ifadəsi mənfi olsun (şəkil 3a).





Şəkil 3

$x^3+px+q=0$ kub tənliyini $x^3=-px-q$ şəklində vermək olar. Tənliyin kökləri $y=x^3$ və $y=-px-q$ qrafikinin kəsişmələrinin absislərinə uyğundur.

Əgər $\Delta>0$ olarsa, onda bir həqiqi kökü var (şəkil 3b), əgər $\Delta=0$, o zaman iki kökü var (onlardan biri ikiqatdır), $p=q=0$ istisna olmaqla bu halda köklərin üçü də üst-üstə düşür.

KUB TƏNLİKLƏR VƏ KOMPLEKS ƏDƏDLƏR

Çevrilməyən adlanan, $\Delta<0$ halı kub tənliklərin həllini birinci açanlar üçün çətinliklər yaratdı. Həmçinin onlar mənfi ədədlərin mövcudluğunu çətinliklə ehtimal edirdilər. (Ceralamo Kardano onları "təmiz yalançı", kompleks ədədləri isə "həqiqətən sofistikalı" adlandırırdı)

Amma, biz mənfi ədədlərdən kökalmanı və onlarla rəftar qaydalarını, hər hansı kvadrat tənliyin iki kökünün olacağını və Kardano düsturunun çevrilməyən halda da həqiqi köklərin düzgün qiymətlərini verdiyini (bu kəşfi Kardanonun davamçısı Rafaelle Bambelli etmişdir) qəbul etməliyik.

Məsələn 3-cü nümunədə $\sqrt[3]{-a}=-\sqrt[3]{a}$ bərabərliyinə $a=\sqrt{-1}$ ədədini nəzərə alsaq doğru olan $x=0$ kökünü alarıq.

Kompleks ədədlər çoxluğuna daxil olanda biz, nəzərə almalıyıq ki, burada istənilən sıfıra bərabər olmayan ədəd üçün iki kvadrat və üç kub kök var. Əgər bütün bu qiymətləri iki kvadrat kökdən $\left(\sqrt{\Delta}\right)$ və iki kub yerinə yazsaq tam 36 hal alınar!

Köklərin düzgün qiymətlərinin hesablanması qaydası çevrilməyən halda çətin deyil: birinci kub kökün üç mümkün qiymətini vermək və ikinci qiyməti uyğun olaraq qoşma – kompleks ədəd götürməliyik.

Başqa sözlə, tənliyin üç həqiqi kökü birinci toplanan $\sqrt[3]{-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\Delta}}$ -dən ibarət olan Kardano düsturunda yerinə yazsaq, tam 36 hal alınar!

Köklərin düzgün qiymətlərinin hesablanması qaydası çevrilməyən halda çətin deyil: birinci kub kökün üç mümkün qiymətini vermək və ikinci qiyməti uyğun olaraq qoşma-kompleks ədəd götürməliyik.

Başqa sözlə tənliyin üç həqiqi kökü.

Birinci toplanan $\sqrt[3]{-\frac{p}{2}+\sqrt{\Delta}}$ ifadəsinin üç mümkün qiymətinin həqiqi hissəsinin iki mislinə bərabərdir.

Maraqlıdır ki, bu həqiqi hissələri kompleks ədədlərdən kök almadan p və q əmsalları ilə ifadə etmək olarmı? Məlum oldu ki, belə ifadəni çıxartmaq cəhdi... çevrilə bilməyən kub tənliyin halına gətirilir.

Beləliklə, tənliyin üç kökü həqiqi ədəddirsə, (özlüyündə elə bil ki, yaxşı haldır), bu kökləri dörd hesab əməlinin və yalnız həqiqi ədədlərdən kök almadan istifadə etməklə onun əmsalları ilə ifadə etmək mümkün deyil. Məsələnin özü riyaziyyatçıları öz fikir və istəklərinə qarşı gedib, yeni – "qəribə", amma yararlı kompleks ədədlərin tətbiq edilməsinə məcbur etdi. Qeyd edək ki, XVI əsrin sonunda Fransua Viyet $\cos 3\varphi = 4\cos 3\varphi - 3\cos\varphi$ düsturundan istifadə edərək, triqonometrik funksiyaların çevrilməyən halı üçün həllini tapdı.

Əslində bu həll, kompleks ədədlərdən kub kök almaq ilə eynigüclüdür.

Kompleks ədədləri tanıyaraq, biz artıq Kardano düsturu ilə kub tənliyin üç həllini, həm yeganə həqiqi kökü (başqa ikisi qoşma kompleks ədəd olacaq) olan halı, həm də tənliyin əmsalının kompleks olan halı üçün tapa bilərik.

DÖRDÜNCÜ DƏRƏCƏLİ TƏNLİKLƏR

Dördüncü dərəcəli tənliklərin həlli üsulunu XVI əsrdə Ceralamo Kardanonun şagirdi Ludoviko Ferrari tapmışdır. Bu metod Ferrari üsulu adlanır. Kub tənliklərin və kvadrat tənliklərin həllində olduğu kimi burada da

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

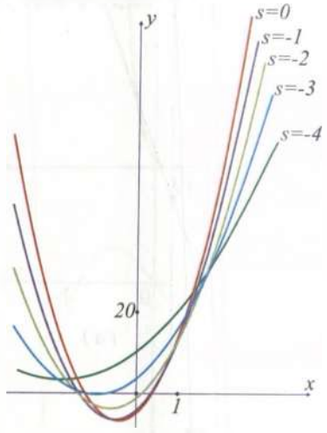
dördüncü dərəcəli tənlikdə px^3 həddindən azad olmaq üçün $x = y - \frac{p}{4}$ əvəzləməsi aparmaq lazımdır. Ona görə elə hesab edək ki, məchulun kubunun əmsalı sıfıra bərabərdir.

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0$$

Ferrari ideyasına görə tənliyi $A^2=B^2$ şəklinə gətirmək üçün onun sol tərəfi $A=x^2+s$ ifadəsinin kvadratına, sağ tərəfi isə əmsalı s-dən asılı olan x-ə nəzərən xətti B ifadəsinin kvadratına bərabər olsun. Bundan sonra iki $A=B$ və $A=-B$ kimi iki kvadrat tənliyi həll etmək qalır. Əlbəttə ki, bu s parametri düzgün seçildikdə mümkündür. S-i $\frac{a}{2}+t$ şəklində götürmək daha rahatdır. Bu zaman

$$\left(x^2+\frac{a}{2}+t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right) \quad (*)$$

alarıq.



$y = (10 = 2s)x + 8x + s^2 - 5$ funksiyasının qrafiki

Bu tənliyin sağ tərəfi x-dən asılı kvadrat üçhədlidir. Diskriminant sıfıra bərabər olduqda 0 tam kvadrat şəklində olur.

$$D = b^2 - 4\cdot 2t\left(t^2 + at - c + \frac{a^2}{4}\right) = 0$$

və ya

$$b^2 = 2t(4t^2 + 4at + a^2 - 4c)$$

Bu tənlik *rezolvent* (yəni ki, "icazə verilən") tənliklər adlanır. t-yə nəzərən 0, kub tənlikdir və Kardano (bax: "Kub tənliklər" məqaləsinə) düsturu imkan verir ki, onun hansısa t_0 kökünü tapaq.

$t = t_0$ olduqda (*) tənliyinin sağ tərəfi

$$2t_0\left(x - \frac{b}{4t_0}\right)^2$$

şəklində olar.

Tənliyin özü isə iki kvadrata gətirilir:

$$x^2 + \frac{a}{2} + t_0 = \pm\sqrt{2t_0}\left(x - \frac{b}{4t_o}\right)$$

Onun kökləri verilmiş tənliyin bütün həllini verir.

Misal olaraq

$$x^4 - 10x^2 - 8x + 5 = 0$$

tənliyini həll edək.

Bu tənliyi hazır düsturdan istifadə etmədən öz fikrində həll etmək daha sərfəlidir.

Tənliyi

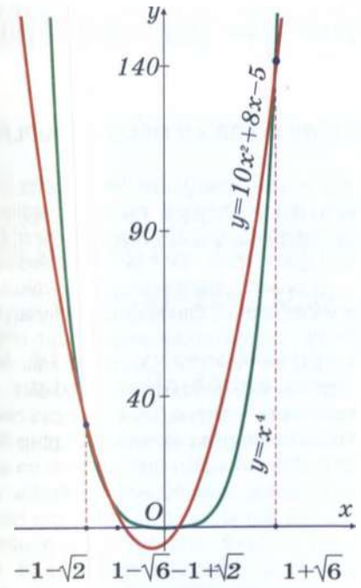
$$x^4 - 10x^2 + 8x - 5$$

şəklində yazsaq

Sol tərəfin tam kvadrat olması üçün tənliyin hər iki tərəfinə $2sx^2 + s^2$ ifadəsini əlavə edək.

$$(x_2 + s)^2 = (10 + 2s)x^2 + 8x + s^2 - 5$$

İndi sağ tərəfin diskriminantını sıfıra bərabər edək



$x^4 = 10x^2 - 8x - 5$ tənliyinin kökləri iki qrafikin kəsişmə nöqtələrinin absisinə uyğundur

$$16 - (10 = 2s)(s^2 - 5) = 0$$

və ya sadələşdirdikdən sonra

$$s^3 + 5s^2 - 5s - 33 = 0$$

alarıq.

Tənliyin köklərindən birinin sərbəst həddinin böləni olan $S_0 = -3$ olduğunu tapmaq olar.

Bu qiyməti yerinə yazsaq alarıq:

$$(x^2 - 3)^3 = 4x^2 + 8x + 4 = 4(x+1)^2$$

Buradan $x^3 - 3 = \pm 2(x+1)$ yeni tənliklərin kökləri $x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{6}$ və $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$. Əlbəttə ki, ümumi halda kompleks köklər də alına bilər.

$$y^2 = 10x^2 + 8x - 5$$

YÜKSƏK DƏRƏCƏLİ TƏNLİKLƏR. RADİKALDA HƏLL ETMƏ

Kvadrat tənliklərin kökü düsturu çox qədim zamanlardan məlumdur. XVI əsrdən başlayaraq, İtaliya riyaziyyatçıları üçüncü və dördüncü dərəcəli kök daxil olan tənlikləri həll edirdilər. Beləliklə, dərəcəsi dördüncü dərəcədən böyük olmayan tənliyin köklərini hesab əməllərinin (toplama, çıxma, vurma və bölmə) və kök almadan istifadə edərək onun əmsalları ilə ifadə etmək olar. (kökün dərəcəsi tənliyin dərəcəsindən böyük olmamalıdır).

Dərəcəsi tənliyin dərəcəsindən böyük olmayan köklərin alınması da tənliyin əmsalları vasitəsi ilə ifadə olunur. Ən əsas dərəcəsi $n(n \le 4)$ olan bütün tənliklərə ümumi düsturla "xidmət etmək" olar.

Tənlikdə əmsalları yerinə qoymaqla, tənliyin bütün həqiqi və kompleks köklərini tapmaq olar. Bundan başqa belə bir sual ortaya çıxır: 5-ci dərəcəli və yüksək dərəcəli tənliklər üçün də belə bir düstur varmı? Bu suala cavabı XIX əsrdə Norveç riyaziyyatçısı Nils Henrix Abel tapmışdır. Bir az əvvəl isə bu nəticə italyalı Paolo Ruffini tərəfindən təqdim olunmuşdur, amma kifayət qədər sübut edilməmişdir. Abel-Ruffini teoremi belədir:

$n \ge 5$ **olduqda n dərəcəli ümumi tənliklər radikallarda həll edilmir.** Belə ol-

duqda dərəcəsi $n \geq 5$ tənliklər üçün ümumi düstur yoxdur. Amma bu o demək deyildir ki, yüksək dərəcəli tənliklərin bu və ya digər xüsusi şəklinin radikallarda həlli mümkün deyil. Abel özü istənilən yüksək dərəcəli Abel tənlikləri adlanan tənliklərin geniş həlli yolunu tapdı.

Abel-Ruffini teoremi hətta onu da istisna etmir ki, hər bir konkret cəbri tənliyin kökünü onun əmsallarından, hesab əməllərindən və radikaldan istifadə etməklə yazmaq olar.

Yəni

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0 \quad a_n \neq 0$$

şəkilli tam əmsallı tənliyin kökünü, köküaltı ifadələrdə rasional ədədlərin vasitəsi ilə ifadə etmək olar. Əslində belə ifadə həmişə mövcud olmur. Bu fransız riyaziyyatçısı Evarist Qaluanın "Radikallarda tənliyin həll edilmə şərtləri haqqında memuar" (1832- ci il, 1846 –cı ildə dərc olunub) kitabında irəli sürdüyü cəbri tənliklərin həll edilmə nəzəriyyəsinin nəticəsidir.

Qeyd edək ki, tətbiqi məsələlərdə bizi təkcə tənliyin köklərinin təxmini qiymətləri maraqlandırır.

Ona görə onun radikallarda həll edilməsi adətən rol oynamır. İstənilən tənliklərin kökünü əvvəlcədən verilmiş istənilən dəqiqliklə xüsusi hesablama üsulları var ki, alınan nəticə hazır düsturlarla hesablamadan az fərqlənir.

HƏLL EDİLƏN TƏNLİKLƏR

Baxmayaraq ki, yüksək dərəcəli tənliklər ümumiyyətlə radikallarda həll edilmirlər, üçüncü və dördüncü dərəcəli tənliklər üçün Kardano və Ferrari düsturları məktəblərdə keçirilmir, cəbr dərsliklərində, universitetlərə qəbul imtahanlarında bəzən ikinci dərəcədən yuxarı olan tənliklərin həllinə gətirilən məsələlərə rast gəlmək olur. Adətən onları elə tərtib edirlər ki, tənliklərin köklərini asan yollarla tapmaq olur.

Bu yollardan biri çoxhədlinin rasional kökləri haqqında teoremdir. **Əgər ixtisar olunmayan $\frac{p}{q}$ kəsri tam əmsallı $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0 c$ çoxhədlisinin köküdürsə, onda onun p surəti sərbəst həddi olan a_0-ın böləni, məxrəc q isə, ən böyük əmsalı olan a_n-in bölənidir.**

İsbat etmək üçün tənlikdə

$$p(x) = 0, x = \frac{p}{q}$$

yazıb, q^n – ə vurmaq lazımdır.

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n = 0$$

alarıq.

Sol hissədə bütün toplananlar p-yə bölünür və ona görə də $a_0 p^n$ p -yə bölünür, ona görə ki, p və q qarşılıqlı sadə ədədlərdir. P a_0 -ın bölünənidir q üçün isbat analojidir.

Bu teoremin köməyi ilə tam əmsallı tənliklərin bütün rasional köklərini sonlu sayda "namizədlərin" sınağı ilə tapmaq olar.

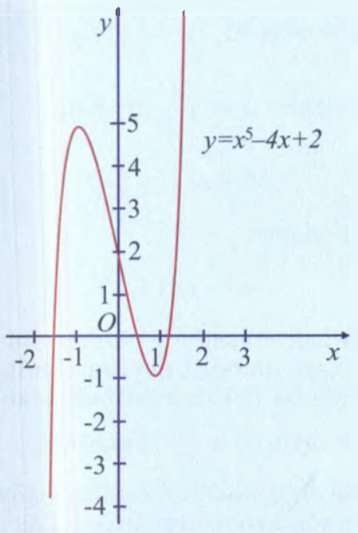
Məsələn $x^3 + 3x^2 + x - 2 = 0$ tənliyinin həlli üçün böyük əmsal 1, "namizəd" –2-nin bölənləri olacaq. Onların sayı dörddür. 1; – 1; 2 və – 2

Yoxlama göstərir ki, bunlardan x=–2 tənliyin köküdür.

CƏBRİ TƏNLİKLƏR VƏ QALUA QRUPLARI

Qalua nəzəriyyəsi hər hansı tənlik üçün köklərdə həll edilməyin mümkünlüyünü müəyyənləşdirir. Buna görə verilmiş tənliyə köklərinin yerdəyişməsinin bir neçə qrupunu qarşılaşdırır. (bax, "Qruplar" məqaləsinə. Qrup məhfumunu tənliklərin araşdırılması üçün Qalua fikirləşmişdir). Çox vacib odur ki, Qalua qrupu adlanan bu qrup tənliyin köklərini hesablamadan əmsallardan istifadə etməklə müəyyənləşdirmək olar. Qalua radikallarında həll edilə bilən cəbri tənliklərlə bu qrupun xassələri arasında əlaqə yaratmışdır. Hansı ki, onun da adını həll edilən qoyublar. Xüsusilə istənilən kommutativ qrup həll olunandır. Əgər tənliyin əmsalları rasionaldırsa və sol tərəfi vuruqlarına ayrılmırsa, onda bu tənlik radikalda yalnız o zaman həll edilən olar ki, onun Qalua qrupu həll edilən olsun. Məsələn x^5–4x+2 =0 tənliyinin beş müxtəlif kökü var. Baxmayaraq ki, onlar bizə məlum deyil, verilmiş tənliyin Qalua qrupunun onun beş kökünün yerdəyişməsi ilə üst-üstə düşür.

Bu beşinci dərəcədən tənlik üçün mümkün olanlardan "ən böyük" qrupdur. Deməli, tənliyin kökləri radikallarda ifadə olunmur və ona görə beşinci dərəcədən tənliklər üçün radikallarda ümumi düstur yoxdur.



Göründüyü kimi $x^5 - 4x + 2 = 0$ həqiqi kökü var. Onu istənilən dəqiqliklə hesablamaq olar. Lakin onlar radikallarda ifadə olunmayıb.

Əgər köklərdən biri tapılıbsa, tənliyin dərəcəsini azaltmaq olar. Bezu teoremi: **$P(x)$ çoxhədlisinin $x-c$ ikihədlisinə bölünməsindən alınan qalıq $P(c)$ bərabərdirsə, onda**

$$P(x) = (x - c)Q(x) + P(c)$$

Teoremdən belə çıxır ki,

Əgər c, $P(x)$ çoxhədlisinin köküdürsə, onda çoxhədli $(x-c)$ -yə bölünür.

$$P(x) = (x - c)\, Q(x)$$

harada ki, $Q(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi $P(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsindən 1 vahid azdır.

Misallarımızı davam edərək

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2$$

çoxhədlisindən

$$x - x_0 = x + 2$$

vuruğunu çıxaraq. $Q(x)$ qismətini tapmaq üçün şəkil1-də göstərildiyi kimi bölməni "bucaqlı" yerinə yetirmək olar (şəkil 1).

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 + x - 2 & x + 2 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} & \\ x^2 + x & x^2 + x - 1 \\ \underline{x^2 + 2x} & \\ -x - 2 & \\ \underline{-x - 2} & \\ 0 & \end{array}$$

Çoxhədlinin «bucaqlı» bölünməsi

Şəkil 1

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + x - 2 = x - 2 = (x^3 + 2x^2) + (x^2 + 2x) - (x + 2) = (x + 2)(x^2 + x - 1)$$

İndi $x^2 + x - 1 = 0$ tənliyini həll etmək qalır.

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Əgər tam əmsallı çoxhədlinin rasional kökləri yoxdursa, onda onu dərəcəsi az olan tam əmsallı vuruqlarına ayırmaq lazımdır.

Məsələn, $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = 0$ tənliyinə baxaq.

Sol tərəfi əmsalları qeyri-müəyyən olan iki kvadrat üçhədlisinin hasili şəklində göstərək:

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = (x^2 + ax + b)(x^2 + px + q)$$

Sağ tərəfdə mötərizələri açıb oxşarları çevirək:

$$x^4 - 2x^2 - 8x - 3 = x^4 + (a + p)x^3 + (b + ap + q)x^2 + (aq + bp)x + bq$$

Hər iki tərəfdən dərəcəsi eyni olan x-lərin əmsallarını bərabərləşdirsək, sistem tənlik alarıq:

$$\begin{cases} a+p=0 \\ b+ap+q=-2 \\ aq+bp=-8 \\ bq=-3 \end{cases}$$

Bu sistem tənliyi həll etmək cəhdi, bizi ümumilikdə verilmiş tənliyin həllinə qaytarardı. Əgər onun tam kökü varsa, onu seçmə yolu ilə tapmaq çətin olmazdı. Ümumilikdə məhdudlaşdırmadan hesab etmək olar ki, $b \geq q$, onda sonuncu tənlik göstərir ki, təkcə iki varianta baxmaq lazımdır: $b=3$, $q=-1$ və $b=1$, $q=-3$ Bu cütlərin qiymətlərini qalan tənliklərdə yerinə yazsaq, onlardan birincisi

$$x^4-2x^2-8x-3=\left(x^2+2x+3\right)\left(x^2-2x-1\right)$$

vuruqlarına ayrılacaq. Tənliyin bu həll üsulu qeyri-müəyyən əmsallar üsulu adlanır.

Əgər tənlik $P(Q(x))=0$, harada ki, P və Q çoxhədli şəklindədirsə, $y=Q(x)$ əvəzləməsi ilə dərəcəsi az olan iki tənliyə gətirilir: $P(y)=0$ və $Q(x)=y$. Bu əvəzləmə xüsusilə bikvadrat tənliklərin həllində istifadə olunur.

Daha maraqlı hal qayıtma tənliklərin cüt dərəcədən olan

$$a_{2n}x^{2n}+a_{2n-1}x^{2n-1}+\ldots a_1x+a_0=0$$

tənliyin uclardan eyni uzaqlıqda duran əmsalları bərabərdir: $a_{2n}=a_0$, $a_{2n-1}=a_1$ və s.

Belə tənliklər x^n -ə bölməklə və

$$y=x\pm\frac{1}{x}$$

əvəzləməsi aparmaqla dərəcəsi iki dəfə az olan tənliyə gətirilir. Məsələn,

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$$

tənliyinə baxaq. Onu x^2 -na bölüb. (qanunla $x=0$ kök deyil)

$$x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

alırıq.

Qeyd edək ki, $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$

Ona görə $y=x+\frac{1}{x}$ qiyməti

$$y^2+ay+b-2=0$$

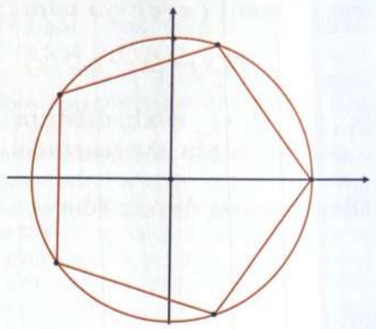
tənliyini ödəyir.

$$x^2-yx+1=0$$

tənliyini həll etməklə x-i tapmaq olar.
Daha yüksək dərəcəli qayıtma tənliklərinin həllində də bu faktdan istifadə olunur. İstənilən κ üçün $x^k+\frac{1}{x^k}$ ifadəsini $y=x+\frac{1}{x}$ -in κ dərəcəli çoxhədlisi şəklində göstərmək olar. Burada təsvir olunmuş yollar dairənin beş hissəyə bölünməsində lazım olan tənliyin araşdırılmasında (kompleks ədədlərdə) istifadə olunurdu.

$$x^5-1=0$$

Bu tənlik ona görə elə adlandırılır ki, əgər onun köklərini kompleks müstəvisində qeyd etsək, onlar vahid dairə daxilində çəkilmiş düzgün beş bucaqlının təpələrinə düşəcək və bu təpələrdən birinin koordinantı (1; 0 (şəkil 2) olar. Kompleks ədədlərin triqonometrik təsvirindən istifadə edərək (bax "Kompleks ədədlərin həndəsəsi" məqaləsinə) bu kökləri aşağıdakı kimi yaza bilərik:



Şəkil 2

$$zk=\cos\frac{2(k-1)\pi}{5}+i\sin\frac{2(k-1)\pi}{5}$$

$$k=1,2,3,4,5$$

Onlar arasında yeganə həqiqi kök $z_1=\cos 0+i\sin 0=1$- dir. Soruşmaq olar ki, qalan kökləri radikallar vasitəsilə ifadə etmək olarmı? Bunu etməyə çalışaq. Tənliyin bir $x=1$ kökü bizə məlum olduğuna görə tənliyin dərəcəsini azaldıb sol tərəfdən $x-1$ ikihədlisini mötərizə xaricinə çıxarıb

$$x-5=(x-1)\left(x^4+x^3+x^2+x+1\right)$$

alarıq.

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0$$

tənliyinin həlli qalır. 0 qayıdandır hansı ki, biz onu həll edə bilirik. Onu x^2 – na bölək;

$$x^2+x+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$$z=x+\frac{1}{x}$$

əvəzlənməsi aparsaq, $z^2+z-1=0$ alarıq. Bu kvadrat tənliyin $z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ köklərini taparıq. x üçün $x^2-z_{1,2}+1=0$ və ya

$$2x^2-\left(-1\pm\sqrt{5}\right)x+2=0$$

tənliklərini alırıq.

Buradan

$$x_{2,3,4,5}=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{6\pm2\sqrt{5}-16}}{4}=$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{5}\pm i\sqrt{10\pm2\sqrt{5}}}{4}$$

Beləliklə, bizim tənlik köklərdə, hətta kvadrat köklərdə həllin tapılmasına yol verir. Axırıncı göstərir ki, pərgar və xətkeşin köməyi ilə düzgün beşbucaqlı qurmaq olar. ("Həndəsi qurmalar" məqaləsinə bax) Alınmış düstur dəqiq üsulu göstərir. Ən əvvəl x kompleks ədədinin həqiqi və xəyalı hissələrinə bərabər olan parçalar qurulur, sonra isə uyğun koordinantlar ilə nöqtələr – onlar elə beşbucaqlının təpələri olacaq. Düzgün çoxbucaqlının qurulması haqqında məsələnin tam həllini, yəni dairənin n dərəcədən hissələrə bölünməsində kvadrat kök daxil olan tənlikdən istifadə edilməsini Karl Fridrix Qauss vermişdir.

CƏBRİN ƏSAS TEOREMİ

Beləliklə, biz cəbri tənliyin kökünün köklə ifadə olunması sualına baxdıq. "Nəyi ifadə etmək" həmişə varmı? İstənilən cəbri tənlik ən azı bir kökə malikdirmi? Əgər söhbət həqiqi əmsallı, yalnız həqiqi kökə malik tənlikdən gedirsə, ola bilər ki, olmasın, necə ki, diskriminantı mənfi olan kvadrat tənlikdə olduğu kimi. Əgər kompleks köklər olarsa, həqiqi, həm də kompleks əmsallı istənilən ikiqat hesabla olacaq. Bunu, kök üçün olan ifadəni tənlikdə (Viyet düsturu) yerinə qoymaqla yoxlamaq olar. Eləcə də bu düstur üçüncü və dördüncü dərəcəli tənliklərin həllində göstərir ki, bu tənliklər həmişə uyğun olaraq üç və dörd kompleks kökə malikdir. Daha yüksək dərəcəli tənliklər üçün gördüyümüz ümumi düsturlar mövcud deyil. Buna baxmayaraq aşağıdakı teorem düzgündür.

*** $P(x)$ çoxhədli olduqda kompleks əmsallı istənilən cəbri $P(x)=0$ tənliyinin heç olmazsa, bir kompleks kökü var.** Bu mövcudluğun aydın teoremidir. O kökün tapılmasını izah etmir, yalnız kökün olduğunu bildirir. Bu ***cəbrin əsas teoremi*** adlanır. Teorem belə ad aldıqdan sonra cəbri üsul çox inkişaf etmiş və yalnız cəbri tənliklərin araşdırılması ilə məhdudlanmır. Ona görə indi bu ad tarixi ənənədir.

Əgər $P(x)$, n dərəcəli çoxhədli, x, isə cəbrin əsas teoremini təmin edən kökü olduqda Bezu teoreminə görə

$$p_n(x)=(x-x_1)p_{n-1}(x)$$

harada ki, $P_{n-1}(x)$-dərəcəsi $n-1$ olan çoxhədlidir. Öz növbəsində

$$p_{n-1}(x)=(x-x_2)P_{n-2}(x)$$

harada ki, $x_2-P_{n-1}(x)$ çoxhədlisinin köküdür, $P_{n-2}(x)$ çoxhədlisinin dərəcəsi $n-2$ dir.

Bu qayda ilə davam etsək, n addımdan sonra $P_n(x)$ çoxhədlisinin xətti vuruqlara ayrılışını alarıq,

$$P_n(x)=a(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n).$$

Bunlardan bəziləri təkrarlana bilər. Bu halda x_1 ədədi $P_n(x)$ çoxhədlisinin kök-

lərinin bölünəni, təkrarlananların sayı isə bu kökün bölünəni adlandırılır. Alınmış vuruqlara ayırmadan görünür ki,

* Əgər axırıncı bölünəni nəzərə alıb hesablasaq n dərəcəli istənilən cəbri tənliyin kompleks köklərinin sayı n-ə bəraəbrdir.

Birinci dəfə XVII əsrdə deyilən cəbrin əsas teoremi indikindən az fərqlənir. Rene Dekart deyirdi ki, cəbri tənliyin köklərinin sayı onun "ölçülərinin sayı" ilə üst-üstə düşür. (1637-ci il) Birinci dəfə bu teorem, isbatı ciddi olmayan şəkildə, fransız mexaniki və riyaziyyatçısı Jan Leron Dalamber (1746) tərəfindən verilmişdir. Sonralar isə Eyler (elə o teoremin şəklini dəqiqləşdirirdi) və başqa riyaziyyatçıların isbatı yarandı, amma bu teoremin tam ciddi isbatını ilk dəfə Qauss verdi.

HƏQİQİ ƏMSALLI ÇOXHƏDLİNİN KÖKLƏRİ

Əgər $P(x)$ çoxhədlisinin bütün əmsalları həqiqidirsə, onda onun istənilən $\alpha=a+bi$ kompleks kökü ilə birlikdə $\overline{\alpha}=a-bi$ qoşma kompleks kökü də var. Çoxhədlinin vuruqlara ayrılışında üyğun mötərizələri qruplaşdırsaq, həqiqi əmsallı diskriminantı mənfi olan kvadrat üçhədli alarıq (onun kökü xəyalidir).

$$(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})=x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}=$$
$$=x^2-2ax+(a^2+b^2)$$

Deməli,

*** istənilən həqiqi əmsallı n dərəcəli çoxhədli həqiqi əmsallı, dərəcəsi 2-dən böyük olmayan çoxhədlilərin hasilinə ayrılır.**

Məsələn, $p(x)=x^4+1$ çoxhədlisini kompleks vuruqlara ayrılmadan istifadə edərək, həqiqi vuruqlara ayıraq.

Əgər verilmiş tənliyi $x^2=\pm i$ şəklində yazsaq, $x^4+1=0$ tənliyinin köklərini asan tapmaq olar. Beləliklə,

$$x_{1,2,3,4}=\frac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$$

İki cüt qoşma- kompleks köklər üçün

$$(x-x^2)(x-x^2)=x^2-\sqrt{2}x+1$$

alarıq.

Analoji olaraq ikinci cütlər üçün

$$x_3=\frac{-1+i}{\sqrt{2}} \text{ və } x_4=\frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

$$(x-x_3)(x-x_4)=x^2+\sqrt{2}x+1$$

alarıq. Nəticədə

$$x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)$$

vuruqlarını alarıq.

FUNKSİONAL TƏNLİKLƏR

Funksional tənliklərdə müəyyən xassələrə malik olan və ya müəyyən münasibəti ödəyən bütün funksiyalar axtarılır. Belə tənlikləri həll etmək üçün əldə olan xassələrdən və ya münasibətlərdən funksiya haqqında mümkün qədər çox informasiya - monotonluq, məhdudluq, cüt və ya tək olma, kəsilməzlik, tərpənməz nöqtələr və s. kimi - əldə etmək lazımdır.

İLKİN ANLAYIŞLAR

Fərz edək ki, X,Y verimiş çoxluqlardır. f isə müəyyən qaydada təyin edilmiş X çoxluğunu Y çoxluğuna çevirən uyğunluqdur. Əgər f uyğunluğu X çoxluğunun istənilən elementinə Y çoxluğundan yalnız bir element qarşı qoyursa, f uyğunluğuna X çoxluğunda təyin edilmiş və Y çoxluğunda qiymətlər alan funksiya deyilir. X çoxluğuna f funksiyasının təyin oblastı, Y çoxluğuna isə funksiyanın qiymətlər çoxluğu deyilir və bu adətən aşağıdakı kimi yazılır

$$D(f)=X;R(f)=Y.$$

Funksiyanın ümumi tərifində X və Y çoxluqları əvvəldən verilmiş olur. Həqiqi dəyişənli funksiyalar çox vaxt müəyyən bir $y=f(x)$ şəklində düstur vasitəsilə verilir. Yəni, təyin oblastından götürülmüş x dəyişəninin seçilmiş qiymətinə y dəyişəninin

$y=f(x)$ düsturu vasitəsilə hesablanaraq tapılan qiyməti qarşı qoyulur. Burada x dəyişəni daha ilkin rol oynayır. Buna görə də x asılı olmayan dəyişən və ya arqument adlandırılır. y isə asılı dəyişən adlandırılır.

Xüsusi istisnalar olmazsa, $y=f(x)$ düsturu ilə verilmiş funksiyanin təyin oblastı x dəyişəninin bu düsturu mənalı edən qiymətlər çoxluğu, funksiyanın qiymətlər oblastı isə onun bu təyin oblastında aldığı qiymətlərin əmələ gətirdiyi çoxluq hesab edilir. Beləliklə, müəyyən bir düstur ilə verilən funksiyanın təyin oblastı və qiymətlər çoxluyğu da məhz bu düstur vasitəsilə təyin edilir. Qeyd edək ki, ümumi tərifdə Y qiymətlər oblastının bütünlükle verilən funksiya vasitəsilə «örtülməsi» şərti qoyulmur. Beləliklə, $y=f(x)$ düsturu vasitəsilə təyin edilən funksiyanı aşağıdakı kimi qəbul edirik: *təyin oblastı*:

$X=\{x\in R: f(x)$ məna kəsb edir $\}$, *qiymətlər çoxluğu*: $Y=\{y\in R:\exists x\in X\Rightarrow f(x)=y\}$ *uyğunluq*: f düsturu vasitəsilə müəyyənləşir.

Deməli, həqiqi dəyişənli müəyyən bir f düsturu ilə təyin edilən funksiyanın qiymətlər çoxluğu tam şəkildə «örtülür». Bu halda $R(f)$ əvəzinə $E(f)$ yazılışından istifadə edilir. Verilmiş funksiyaya təyin oblastının istənilən altçoxluğunda təyin edilmiş funksiya kimi baxmaq olar.

$f:X\to Y$ verilmiş funksiya, $A\subset X$ müəyyən bir altçoxluqdur. Təyin oblastı A çoxluğu olan qiymətləri f funksiyasının qiyməti ilə üst-üstə düşən funksiyaya f funksiyasının A çoxluğuna sıxılması deyilir və $f|_A$ kimi işarə edilir.

$X\subset X'$ müəyyən çoxluqlardır. $f:X\to Y$ isə verilmiş funksiyadır. X' çoxluğunda təyin edilmiş və X çoxluğuna sıxılması f funksiyası ilə üst-üstə düşən F funksiyasına f funksiyasının X' çoxluğuna davamı deyilir.

$f:X\to Y$ və $g:Y\to X$ verilmiş funksiyaları üçün

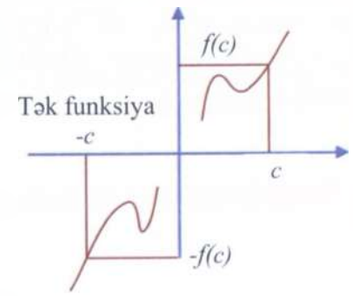
$$\forall x\in X\Rightarrow g(f(x))\equiv x,$$
$$\forall y\in Y\Rightarrow f(g(y))\equiv y.$$

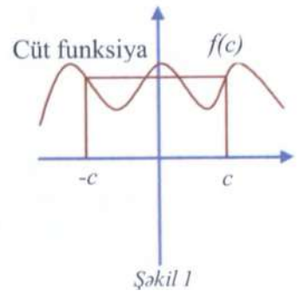
münasibətləri eynilikle ödənilirsə, $f(x)$ və $g(y)$ funksiyaları qarşılıqlı tərs funksiyalar adlanırlar.

Tək və cüt funksiyalar. Həqiqi ədədlər çoxluğunun sıfıra nəzərən simmetrik, müəyyən X altçoxluğunda təyin edilmiş $f(x)$ funksiyası verilmişdir.

Arqumentin istənilən $x\in X$ qiyməti üçün $f(-x)=f(x)$ bərabərliyi ödənirsə, $f(x)$ funksiyasına cüt funksiya, $f(-x)=-f(x)$ bərabərliyi ödənirsə $f(x)$ funksiyasına tək funksiya deyilir.

Tək funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcına nəzərən, cüt funksiyanın qrafiki isə ordinat oxuna nəzərən simmetrikdir.





Şəkil 1

$f(x)=x;x^3;x^5;\ldots$ funksiyalarının hər biri R həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmişdir və istənilən $x\in R$ həqiqi ədədi üçün

$$f(-x)=-f(x)$$

bərabərliyi ödənilir. Buna görə də onların hər biri tək funksiyadır.

$f(x)=c;x^2;x^4;...$ funksiyalarından hər biri həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilib və arqumentin istənilən qiymətində $f(-x)=f(x)$ bərabərliyi ödənilir. Buna görə də bu funksiyalardan hər biri cüt funksiyadır.

Məhdud funksiyalar. $f:X\to Y$ verilmiş funksiyadır. Müəyyən bir $m;M$ ədədləri və arqumentin istənilən qiyməti üçün $f(x)\le M;(f(x)\ge m)$ bərabərsizlikləri ödənilirsə, $f(x)$ funksiyası yuxarıdan (aşağıdan) məhdud funksiya adlanır. $m;M$ ədədlərinə isə uyğun olaraq $f(x)$ funksiyasının aşağı və yuxarı sərhədləri deyilir. Eyni zamanda aşağıdan və yuxarıdan məhdud olan funksiyaya məhdud funksiya deyilir. Yuxarı sərhədlər arasında ən kiçiyinə funksiyanın supremumu, aşağı sərhədlər arasında ən böyüyünə isə funksiyanın infimumu deyilir və uyğun olaraq

$$\sup_{x\in D(f)} f(x);\ \inf_{x\in D(f)} f(x)$$

anlaşılmazlıq olmazsa sadəcə

$$\sup f(x);\inf f(x)$$

kimi işarə edilirlər.

$$1)\sup f(x)=M \Leftrightarrow \forall x\in D(f)\Rightarrow f(x)\le M$$
$$\forall\varepsilon>0\exists x\in D(f)\Rightarrow M-\varepsilon<f(x)$$
$$2)\inf f(x)=m \Leftrightarrow \forall x\in D(f)\Rightarrow f(x)\ge m$$
$$\forall\varepsilon>0\exists x\in D(f)\Rightarrow m+\varepsilon>f(x)$$

$X\subset R$, $f:X\to R$ funksiyası həqiqi ədədlər çoxluğunun müəyyən bir altçoxluğunda təyin edilmiş funksiyadır. Müəyyən $T\neq 0$ ədədi üçün aşağıdakı şərtlər ödənilir:

$$\forall x\in X\Rightarrow x+T\in X;$$
$$f(x+T)=f(x)$$

Onda $f(x)$ funksiyasına periodik və ya dövri funksiya, T ədədinə isə funksiyanın periodu və ya dövri deyilir.

$y=f(x)$ verilmiş funksiya, c isə təyin oblastının limit nöqtəsidir. a ədədi üçün

$$\forall\varepsilon>0\exists\delta>0\forall x\in(c-\delta;c+\delta)\Rightarrow|f(x)-a|<\varepsilon$$

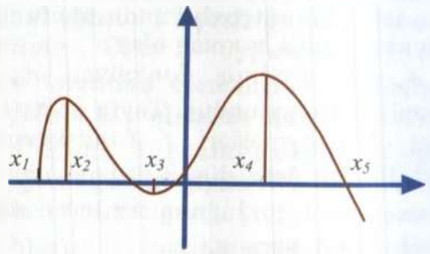
təklifi doğrudur. Onda deyirlər ki, $f(x)$ funksiyasının c nöqtəsində limiti var və a ədədinə bərabərdir və bunu $\lim\limits_{x\to c} f(x)=a$ kimi yazırlar.

Əgər $c\in X$ nöqtəsində $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ olarsa, $f(x)$ funksiyası c nöqtəsində kəsilməz funksiya adlanır.

Tərif. Təyin oblastının bütün nöqtələrində kəsilməz olan funksiyaya kəsilməz funksiya deyilir.

İndi isə sonlu və ya sonsuz intervalda təyin edilmiş $f:(a;b)\to R$ funksiyasına baxaq.

Arqumentin istənilən iki qiymətində $\forall x,y\in(a;b),\ x<y\Rightarrow f(x)<f(y)$ şərti ödənilirsə, $f(x)$ funksiyası $(a;b)$ aralığında ciddi artan funksiya, $\forall x,y\in(a;b),\ x<y\Rightarrow f(x)>f(y)$ bərabərsizliyi ödənilirsə, $f(x)$ funksiyası $(a;b)$ aralığında ciddi azalan funksiya adlanır. Bərabərsizliklər ciddi olmazsa, uyğun olaraq monoton artan, monoton azalan funksiyalar adlandırılırlar. Ümumi halda azalan, artan funksiyalar monoton funksiyalar adlandırılırlar.



Şəkil 2

Qrafikdə funksiyanın monotonluğunu təyin etmək üçün absis oxu ilə soldan sağa hərəkət etmək lazımdır: qrafik yuxarı qalxdığı aralıqda funksiya artır, qrafik aşağı endiyi aralıqda isə funksiya azalır. Şəkildə verilən funksiya

$(x_1;x_2),(x_3;x_4)$ aralıqlarında artır;
$(x_2;x_3),(x_4;x_5)$ aralıqlarında isə azalır.

Tərifdən aydındır ki, verilmiş aralıqda funksiyanın monotonluğunu araşdırmaq üçün $f(x)-f(y),\ (x<y)$ fərqinin işarəsini təyin etmək lazımdır.

SADƏ FUNKSİONAL TƏNLİKLƏR

Bu tip funksional tənlikləri aşağıdakı kimi xarakterizə etmək olar: $g(x)$ tərsi olan funksiyadır, $h(x)$ isə verilmiş funksiyadır. $f(g(x))=h(x)$ bərabərliyi eynilikə doğru olan $f(x)$ funksiyalarının tapılması tələb edilir. Bu növ funksional tənliklərin həlli $f(x)=h(g^{-1}(x))$ şəklində təyin edilirlər.

Həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və arqumentin istənilən qiymətində $f(x^3)=x^2$ münasibətini ödəyən bütün $f(x)$ funksiyalarını tapmaq lazımdır.

$g(x)=x^3$ funksiyasının tərsi $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ funksiyasıdır. Buna görə də axtarılan funksiya

$$f(x)=\left(\sqrt[3]{x}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}$$

şəklində təyin edilmiş funksiyadır.

$a\neq 0$ müəyyən bir həqiqi ədəddir. $f:R\to R$ funksiyası R həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və arqumentin istənilən qiymətində $f(x+a)=x$ şərtini ödəyir. Axtarılan funksiyanı tapın.

$y=x+a$ əvəzləməsini aparsaq, $x=y-a$ və $f(y)=y-a$ xətti funksiyasını alarıq.

Bəzən funksional tənlikdə dəyişənlərin vurma və ya toplamaya nəzərən simmetrik kombinasiyaları iştirak edir.

Sıfırdan fərqli bütün nöqtələrdə təyin edilmiş və arqumentin istənilən qiymətində $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=x$ münasibəti ödənilən funksiyanın olmadığını isbat edin.

Doğrudan da arqumentin istənilən qiymətində

$$x=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=f\left(\frac{1}{x}\right)f(x)=\frac{1}{x}$$

münasibəti ödənilməlidir. Bu da yalnız $x=1$ olduqda mümkündür. Axtarılan funksiya isə $R\setminus\{0\}$ çoxluğunda təyin edilməlidir.

Həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və arqumentin istənilən qiymətində $f(2x)=2f(x)$ münasibəti ödənilən, eynilikla sıfıra bərabər olmayan məhdud funksiyanın olmadığını isbat edin.

İsbatı. Doğrudan da, verilən şərti ödəyən funksiya x dəyişəninin istənilən qeyd olunmuş qiymətində və ixtiyari n natural ədədi üçün

$$f(2^n x)=2^n f(x)$$

xassəsinə malik olmalıdır (induktiv olaraq). Əgər arqumentin müəyyən bir x qiyməti üçün $f(x)\neq 0$ olarsa $\lim\left|f(2^n x)\right|=\infty$ olmalıdır. Bu da funksiyanın məhdud olmasına ziddir.

$R\setminus\{0\}$ çoxluğunda təyin edilmiş və arqumentin istənilən qiymətində

$$2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=5$$

münasibəti ödənilən bütün funksiyaları tapın.

Verilən münasibətdən $\forall x\in R\setminus\{0\}$ ədədi üçün

$$\begin{cases}2f(x)+3f\left(\frac{1}{x}\right)=5\\ 2f\left(\frac{1}{x}\right)+3f(x)=5\end{cases}$$

münasibətlərinin eyni zamanda ödənildiyi aşkardır. İlk bərabərliyi (-2)-yə, ikinci bərabərliyi 3-ə vurub, alınan bərabərlikləri tərəf-tərəfə toplasaq

$$5f(x)=5\Leftrightarrow f(x)\equiv 1$$

bərabərliyini alarıq. Beləliklə, axtarılan funksiya $f(x)\equiv 1$ sabit funksiyasıdır.

KƏSİLMƏZLİK VƏ FUNKSİONAL TƏNLİKLƏR

Sıx çoxluqlar. İrəlidə istifadə edəcəyimiz bir anlayış haqqında qısa məlumat vermək istərdik.

X verilmiş çoxluqdur və $A \subset X$. X çoxluğunun istənilən x elementi üçün hədləri A çoxluğundan olan müəyyən bir $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ var ki, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x$ münasibəti ödənilir. Onda söyləyirlər ki, A çoxluğu X çoxluğunun sıx altçoxluğudur. Digər üsulla kvantorlar dilində bunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A \Rightarrow |x-a| < \varepsilon$$

Hədləri A çoxluğunun elementləri olan yığılan ardıcıllıqların limitlərindən təşkil edilmiş çoxluq A çoxluğunun qapanması adlanır və $\overline{A}$ kimi işarə edilir. Asanlıqla isbat etmək olar ki, A çoxluğu X çoxluğunun sıx altçoxluğu olması üçün $X \subset \overline{A}$ olması zəruri və kafidir.

Q rasional ədədlər çoxluğu R həqiqi ədədlər çoxluğunun sıx altçoxluğudur. Bu həqiqi ədədlərin tərifindən aydındır.

İrrasional ədədlər çoxluğu həqiqi ədədlər çoxluğunun sıx altçoxluğudur. Doğrudan da istənilən iki müxtəlif rasional ədəd arasında heç olmasa bir irrasional ədəd yerləşir. Buna görə də

$$\forall q \in Q\ \ \forall n \in N\ \exists r \notin Q \Rightarrow q < r < q + \frac{1}{n} \Rightarrow |q-r| < \frac{1}{n}$$

$A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in N,\ m < 2^n \right\}$ şəklində təyin edilmiş çoxluq $X = [0;1]$ çoxluğunun sıx altçoxluğudur. Doğrudan da tutaq ki, $x \in X$ istənilən həqiqi ədəddir. Əgər $x \in A$ olarsa, tələb edilən ardıcıllıq olaraq $a_n = x = const$ kimi təyin edilmiş sabit ardıcıllıq götürmək kifayətdir. Fərz edək ki, $x \notin A$. Onda istənilən natural n ədədi üçün yeganə elə bir m_n ədədi var ki,

$$\frac{m_n}{2^n} < x < \frac{m_n+1}{2^n}$$

bərabərsizliyi ödənilir. Onda hədləri $a_n = \frac{m_n}{2^n}$ şəklində təyin edilmiş ardıcıllıq tələb edilən xassələrə malik olan ardıcıllıqdır. Yəni,

$$\forall n \Rightarrow a_n \in A;\ \lim_{n\to\infty} a_n = x.$$

$A = \{c^r; r \in Q\}$ çoxluğu $R_+ = \{x : x > 0\} = (0;\infty)$ çoxluğunun sıx altçoxluğudur.

A çoxluğu B çoxluğunda, B isə C çoxluğunda sıx çoxluqlardırsa, A çoxluğu C çoxluğunda sıx çoxluqdur.

A çoxluğu B çoxluğunda sıx olduğundan $\overline{B} \subset \overline{A}$, B çoxluğu C çoxluğunda sıx olduğundan $\overline{C} \subset \overline{B}$ münasibətləri ödənir. Buradan $\overline{C} \subset B \subset \overline{A}$ olduğu alınır. Başqa sözlə, A çoxluğu C çoxluğunda sıx çoxluqdur.

$f : X \to R$ kəsilməz funksiyadır. $A \subset X$ təyin oblastının sıx altçoxluğudur. Onda $f(A)$ çoxluğu $f(X)$ çoxluğunun sıx altçoxluğudur.

Tutaq ki, $y \in f(X)$. Başqa sözlə $\exists x \in X \Rightarrow y = f(x)$. A çoxluğu X çoxluğunun sıx altçoxluğu olduğu üçün

$$\exists x_n : x_n \in A \Rightarrow \lim x_n = x.$$

Digər tərəfdən $f(x)$ kəsilməz olduğu üçün

$$\lim x_n = x \Rightarrow \lim f(x_n) = f(x).$$

$0 < \alpha < 1, \alpha \in R \setminus Q$ irrasional ədəddir. $A = \{\{n\alpha\} : n \in N\}$ ədədlər çoxluğu $[0;1]$ parçasının sıx altçoxluğudur (Burada $\{a\}$ ilə a ədədinin kəsr hissəsi işarə edilmişdir).

İsbatı iki mərhələdə aparacağıq.

1-ci mərhələ. İsbat edək ki, $\inf A = 0$; $\sup A = 1$ münasibətlərindən heç olmasa biri ödənilir. Əksini fərz edək. Başqa sözlə, $\inf A = m > 0, \sup A = M < 1$.

Onda

$$\exists p \Rightarrow m \le a = \{p\alpha\} < m + 1 - M = c$$

şərtini ödəyən p ədədi olmalıdır. Tutaq ki,

$$ka < 1 < (k+1)a\ .$$

Aydındır ki, $ka \le M$ olmalıdır. Beləliklə,

$$(k+1)a < ka + m + 1 - M \le M + m + 1 - M = m + 1 \Rightarrow (k+1)a - 1 < m$$

Onda

$$(k+1)p\alpha = (k+1)[p\alpha] + (k+1)\{p\alpha\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \{(k+1)p\alpha\} = (k+1)a - 1 < m$$

olmalıdır. Bu isə $m = \inf\{n\alpha\}$ olmasına ziddir. Bu, fərziyyəmizin doğru olmaması deməkdir. Buna görə də ya $\inf\{n\alpha\} = 0$ və ya $\sup\{n\alpha\} = M = 1$ olmalıdır.

2-ci mərhələ. Tutaq ki, $\sup\{n\alpha\} = M = 1$. Onda istənilən verilmiş $p \in N$ ədədi üçün elə k nömrəsi tapmaq olar ki, $1 - \frac{1}{p} < \beta = \{k\alpha\} < 1$ bərabərsizliyi ödənilir. Tutaq ki $\varepsilon = 1 - \beta$. Aydındır ki, $\varepsilon < \frac{1}{p}$ Aşağıdakı ardıcıllığa baxaq

$$\{\beta_q = q\beta : q \in N, q\varepsilon < 1\}$$

Aydındır ki,

$$q > q\beta = q(1-\varepsilon) = q - q\varepsilon > q - 1 \Rightarrow \{q\beta\} = 1 - q\varepsilon\ .$$

Beləliklə, β_q ədədlərinin kəsr hissələri $\varepsilon < \frac{1}{p}$ addımı ilə azalır. Onda aydındır ki, $\left[0;\frac{1}{p}\right];\left[\frac{1}{p};\frac{2}{p}\right];\ldots\left[\frac{p-1}{p};1\right]$ parçalarının hır birinə $\{\beta_q\}$ ədədlərindın heç olmasa biri daxil olmalıdır. Buna görə də $A = \{\{n\alpha\} : n \in N\}$ ədədlər çoxluğu $[0;1]$ parçasının sıx altçoxluğudur.

Digər hal, yəni, $\inf\{n\alpha\} = 0$ olduqda da tələb edilən hökm analoji qaydada isbat edilir. Bunu oxucuya həvalə edirik.

$a;b$ verilmiş ədədlərdir və $\frac{a}{b}$ irrasional ədəddir. Onda

$$X = \{na - mb : n,m \in N;\ 0 < na - mb < b\}$$

çoxluğu $[0;b]$ çoxluğunun sıx altçoxluğudur.

$\alpha = \frac{a}{b}$ qəbul edək. Yuxarıdakı hökmə əsasən $A = \{\{n\alpha\} : n \in N\}$ çoxluğu $[0;1]$ parçasının sıx altçoxluğudur. Başqa sözlə,

$$\forall c \in [0;1]\ \exists x_n = \{m_n\alpha\} \in A\ n = 1,2,3,\ldots \Rightarrow \lim x_n = c$$

İndi isə fərz edək ki, $p \in [0;b]$. Onda aydındır ki, $c = \frac{p}{b} \in [0;1]$ və

$$\exists x_n = \{m_n\alpha\} = \left\{\frac{m_n a}{b}\right\}\ n = 1,2,3,\ldots \Rightarrow \lim x_n = c = \frac{p}{b}$$

Digər tərəfdən aydındır ki,

$$\exists k_n \Rightarrow \left\{\frac{m_n a}{b}\right\} = \frac{m_n a - k_n b}{b}\ .$$

Odur ki, $\lim(m_n a - k_n b) = p$. Bu da bizim istədiyimizdir.

Vahid çevrənin radian ölçüləri natural ədədlərlə ifadə edilən altçoxluğu onun sıx altçoxluğudur.

Nəticə 3.4-də $a = 1;\ b = 2\pi$ götürmək kifayətdir.

Kəsilməz funksiyalar. Funksional tənlikdə funksiyanın kəsilməzliyi şərti qoyulmuşsa funksiyanı əvvəlcə müəyyən bir sıx altçoxluqda təyin edib, kəsilməz olaraq bütün təyin oblastına davam etdirmək olar. Xüsusi halda sıx altçoxluq kimi rasional ədədlər çoxluğunu götürmək olar. Məktəb kursundan tanış olduğumuz əsas funksiyaların bu üsulla təyin edilməsi mümkündür.

$$D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$$

şəklində təyin edilmiş funksiya Dirixle funksiyası adlanır. Bu funksiyanın rasional ədədlər çoxluğuna sıxılması $D\big|_Q\equiv 1$, irrasional ədədlər çoxluğuna sıxılması isə $D\big|_{R\setminus Q}\equiv 0$ sabit funksiyalarıdır. Eyni zamanda R həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş $D(x)$ Dirixle funksiyası Q rasional ədədlər çoxluğunda $f(x)\equiv 1$ münasibəti ilə təyin edilmiş funksiyanın davamıdır.

$X\subset X'$ və $f:X\to Y$ isə verilmiş funksiyadır. Özlüyündə aydındır ki, f funksiyasının X' çoxluğuna sonsuz sayda üsulla davam etdirmək olar. Ancaq X çoxluğu X' çoxluğunun sıx altçoxluğu, $f:X\to Y$ funksiyası X çoxluğunda kəsilməz funksiya olduqda aşağıdakı teorem doğrudur.

X çoxluğu X' çoxluğunun sıx altçoxluğu, $f:X\to Y$ funksiyası X çoxluğunda təyin edilmiş kəsilməz funksiyadır. Onda $f(x)$ funksiyasının X' çoxluğuna kəsilməz davamı varsa, o yeganədir.

Tutaq ki, $F:X'\to Y$ funksiyası $f:X\to Y$ funksiyasının kəsilməz davamıdır və $x\in X'\setminus X$. Tərifə əsasən

$$\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty}:a_n\in X,\ \lim_{n\to\infty}a_n=x$$

Onda $\lim_{n\to\infty}F(a_n)=F(x)\Rightarrow\lim f(a_n)=F(x)$.

Ümumi halda sıx altçoxluqda təyin edilmiş kəsilməz, monoton, məhdud funksiyanın bütün çoxluğa kəsilməz davam etdirilməsi ola bilər mümkün olmasın.

$(0;1]$ çoxluğunda təyin edilmiş orada kəsilməz, məhdud olan $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ şəklində təyin edilmiş funksiyanı $[0;1]$ qapalı aralığa kəsilməz davam etdirmək olmaz.

$X=(-\infty;0)\cup(0;\infty)$ çoxluğunda

$$f(x)=\begin{cases}x & x\in(-\infty;0)\\ 1+x & x\in(0;\infty)\end{cases}$$

şəklində təyin edilmiş təyin oblastında kəsilməz monoton artan olan funksiyanı R həqiqi ədədlər çoxluğuna kəsilməz davam etdirmək mümkün deyil.

Xüsusi halda aşağıdakı doğrudur:

X çoxluğu X' çoxluğunun sıx altçoxluğu, $f:X\to Y$ funksiyası X çoxluğunda təyin edilmiş monoton məhdud kəsilməz funksiyadır. Onda $f(x)$ funksiyasının X' çoxluğuna monoton funksiya kimi davam etdirmək olar.

Tutaq ki, $x\in X'\setminus X$. Tərifə əsasən $\exists\{a_n\}_{n=1}^{\infty}:a_n\in X,\ \lim_{n\to\infty}a_n=x$. Tutaq ki, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monoton artan ardıcıllıqdır. Onda $\{f(a_n)\}_{n=1}^{\infty}$ monoton məhdud ardıcıllıq olduğu üçün o yığılan ardıcıllıqdır. Tutaq ki,

$$\exists\{b_n\}_{n=1}^{\infty}:b_n\in X,\ \lim_{n\to\infty}b_n=x$$

digər bir ardıcıllıqdır. Yuxarıdakı mülahizələrə əsasən $\{f(b_n)\}_{n=1}^{\infty}$ monoton məhdud ardıcllıq olduğu üçün o yığılan ardıcıllıqdır. Aydındır ki, $\lim f(a_n)=\lim f(b_n)$. Fərz edək ki, $\lim_{n\to\infty}f(a_n)=a$. $F(x)=a$ qəbul edək. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $F(x)$ funksiyası monoton funksiyadır.

Düz mütənasiblik funksiyası. Həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və dəyişənin istənilən iki x,y qiymətləri üçün

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

bərabərliyi ödənilən bütün kəsilməz funksiyaları tapın (Bu xassəyə malik olan funksiyalara additiv funksiyalar deyilir).

İlk olaraq funksiyanı rasional ədədlər üzərində təyin edib, sonra bütün həqiqi ədədlər çoxluğuna davam etdirəcəyik.

a) $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)\Rightarrow f(0)=0$

bərabərliyindən $f(0)=0$ olduğu alınır. Digər tərəfdən

$f(0)=f(x-x)=f(x)+f(-x)\Rightarrow f(-x)=-f(x)$

münasibətinin doğruluğu və axtarılan $f(x)$ funksiyasının tək olduğu alınır.

b) $f(1)=c$ işarələməsini aparsaq, induktiv olaraq $f(n)=nf(1)=nc$ münasibəti alınır.

c) $c=f(1)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}\right)=nf\left(\frac{1}{n}\right)\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}c$

bərabərliyindən $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{c}{n}$ münasibəti alınır.

d) $\forall r=\frac{m}{n}\in Q\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right)=mf\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{m}{n}c=rc$

Beləliklə, həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və rasional ədədlər çoxluğuna sıxılması $f(r)=cr$ şəklində olan bütün kəsilməz funksiyalar axtarılır. İndi isə tutaq ki, x irrasional ədəd, $r_1,r_2,r_3,\ldots$ isə x-ə yığılan rasional ədədlər ardıcıllığıdır. Axtarılan $f(x)$ funksiyası kəsilməz olduğundan

$$f(x)=\lim f(r_n)=\lim(cr_n)=cx$$

bərabərliyi ödənilməlidir. Asanlıqla görmək olar ki, yuxarıdakı limit x ədədinə yığılan rasional ədədlər ardıcıllığının seçimindən asılı deyil.

Üstlü funksiya. Həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş, dəyişənin istənilən iki qiyməti üçün

$$f(x+y)=f(x)f(y)$$

bərabərliyi ödənilən bütün kəsilməz funksiyaları tapın.

a) $f(x)=f(0+x)=f(0)f(x)$ münasibətindən $f(0)=0$ və ya $f(0)=1$ olduğu alınır. Əgər $f(0)=0$ olarsa,

$$\forall x\in R\Rightarrow f(x)=f(0)f(x)=0$$

bərabərliyindən $f(x)\equiv 0$ bərabərliyinin eynilikə doğru olduğu alınır. Başqa sözlə, $f(0)=0$ olarsa, $f(x)\equiv 0$.

İkinci qeyri trivial $f(0)=1$ halını araşdıraq. Fərz edək ki, $f(1)=a$

b) $f(nx)=(f(x))^n\Rightarrow f(n)=(f(1))^n=a^n$ və

$$a=f(1)=f\left(\frac{1}{n}n\right)=\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right)=a^{\frac{1}{n}}$$

bərabərliyinin doğruluğu aşkardır.

c) $1=f(0)=f(x-x)=f(x)f(-x)=$
$=f(x)f(-x)\Rightarrow f(-x)=\frac{1}{f(x)}$

Xüsusi halda $f(-n)=\frac{1}{f(n)}=\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

d) $\forall r=\frac{m}{n}\in Q\Rightarrow f(r)=f\left(\frac{m}{n}\right)=$
$=\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right)^m=a^{\frac{m}{n}}=a^r$

e) Axtarılan funksiyanın rasional ədədlər çoxluğuna sıxılması $f(r)=a^r$ monoton funksiyadır.

Tutaq ki, x irrasional ədəd, $r_1,r_2,r_3,\ldots$ isə x-ə yığılan rasional ədədlər ardıcıllığıdır. Axtarılan $f(x)$ funksiyası kəsilməz olduğundan

$$f(x)=\lim f(r_n)=\lim a^{r_n}=a^x.$$

Beləliklə, tələb edilən xassələrə malik olan eynilikə sıfıra bərabər olmayan funksiya $f(x)=a^x;\ a>0$ şəklində üstlü funksiyadır.

Qeyd 1. *a)* bəndindən aydın olur ki, axtarılan funksiya müəyyən bir nöqtədə sıfıra bərabər qiymət alırsa, o eynilikə sıfıra bərabər olmalıdır. Doğrudan da tutaq ki,

$$f(c)=0\Rightarrow f(x)=f(c+(x-c))=$$
$$=f(c)f(x-c)=0$$

Qeyd 2. Bilavasitə isbat etmək olar ki, axtarılan funksiya eynilikle sıfıra bərabər deyilsə, o yalnız müsbət qiymətlər alır. Doğrudan da

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2>0.$$

Onda $g(x)=\ln f(x)$ funksiyası üçün

$$g(x+y)=\ln f(x+y)=\ln(f(x)f(y))=$$
$$=\ln f(x)+\ln f(y)=g(x)+g(y)$$

münasibəti eynilikle ödənilir. Buna görə də

$$\exists c\ \forall x \Rightarrow g(x)=cx=\ln f(x)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x)=e^{cx}=a^x;\ \ (a=e^c)$$

Ancaq bunun üçün əvvəlcə loqarifmik funksiya təyin edilməlidir.

Qüvvət funksiyası. Müsbət ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və $f(xy)=f(x)f(y)$ bərabərliyi eynilikle doğru olan funksiyaları tapın.

a) $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1)=(f(1))^2$ münasibətindən ya $f(1)=0$ ya da $f(1)=1$ olması alınır. Əgər $f(1)=0$ olarsa,

$$\forall x\in R\Rightarrow f(x)=f(1)f(x)=0$$

eyniliyini alarıq. Başqa sözlə, bu halda axtarılan funksiya eynilikle sıfıra bərabər olmalıdır.

b) İndi isə fərz edək ki, $f(1)=1$ və c qeyd edilmiş müəyyən bir müsbət ədəddir. $f(c)=a$ işarələməsini daxil edək. a və c müsbət ədədlər olduqları üçün $p=\log_c a$ ədədindən danışmaq olar. Onda

$$a=c^p;\ f(1)=f\left(c\frac{1}{c}\right)=f(c)f\left(\frac{1}{c}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{c}\right)=\frac{1}{f(c)}=\frac{1}{a};\ f(c^n)=(f(c))^n=a^n\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f\left(c^{\frac{m}{n}}\right)=a^{\frac{m}{n}}=\left(c^p\right)^{\frac{m}{n}}=\left(c^{\frac{m}{n}}\right)^p$$

münasibəti alınır. Beləliklə,

$$x=c^r;\ r\in Q\Rightarrow f(x)=x^p$$

şəklində təyin edilir. Digər tərəfdən aydındır ki, $X=\{c^r:r\in Q\}$ çoxluğu R_+ müsbət həqiqi ədədlərin sıx altçoxluğudur. Buna görə də tələb edilən xassələrə malik olan funksiya $f(x)=x^p;\ \ (p\in R)$ şəklində təyin edilmiş qüvvət funksiyasıdır.

Loqarifmik funksiya. Müsbət ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş $f(xy)=f(x)+f(y)$ münasibətini ödəyən bütün funksiyaları tapın.

a) Asanlıqla görmək olar ki, $f(1)=0$. Doğrudan da

$$\forall x>0\Rightarrow f(x)=f(1\cdot x)=f(1)+f(x)\Rightarrow f(1)=0.$$

b) Tutaq ki, $c>0$ müəyyən bir ədəddir və $f(c)=a$ və $a=\log_b c$ qəbul edək.

$$f(c^n)=nf(c)=na;$$
$$f(1)=f(cc^{-1})=f(c)+f(c^{-1})=0\Rightarrow f(c^{-1})=-a$$
$$f(c^{-n})=-f(c^n)=-na;$$
$$a=f(c)=f\left(\left(c^{\frac{1}{n}}\right)^n\right)=nf\left(c^{\frac{1}{n}}\right)\Rightarrow f\left(c^{\frac{1}{n}}\right)=a\cdot\frac{1}{n}$$
$$r=\frac{m}{n}\in Q\Rightarrow f\left(c^{\frac{m}{n}}\right)=mf\left(c^{\frac{1}{n}}\right)=ma\cdot\frac{1}{n}=a\cdot\frac{m}{n}$$

Beləliklə, istənilən rasional r ədədi üçün aşağıdakı doğrudur

$$f(c^r)=ra=r\log_b c=\log_b c^r.$$

Beləliklə, tələb edilən funksiya müsbət ədədlərin $A=\{c^r:r\in Q\}$ sıx altçoxluğunda aşağıdakı şəkildə təyin edilir

$$\forall x\in A\Rightarrow f(x)=\log_b x.$$

Buna görə də tələb edilən funksiya loqarifmik funksiyadır.

TƏRPƏNMƏZ NÖQTƏLƏR. İNVERSİYALAR VƏ FUNKSİONAL TƏNLİKLƏR

X çoxluğunda təyin edilmiş, orada qiymətlər alan və arqumentin bütün qiymətləri üçün $f(f(x))=x$ bərabərliyi eynilikle ödənən $f(x)$ funksiyasına X çoxluğunun özünə involyusiyası deyilir.

$[0;1]$ parçasında təyin edilmiş $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ funksiyasına baxaq. Təyin oblastının bütün nöqtələrində

$$f(f(x))=\sqrt{1-f^2(x)}=\sqrt{1-(1-x^2)}=\sqrt{x^2}=x$$

bərabərliyi eynilikle ödənildiyindən, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ funksiyası $[0;1]$ parçasının özünə involyusiyasıdır.

X çoxluğunun özünə istənilən involyusiyasının tərsi vardır.

İsbat edək ki, involyusiya verilən çoxluğun özünə qarşılıqlı birqiymətli və öz üzərinə inikasıdır.

Doğrudan da, $f(x)=f(y)$ olmasından

$$x=f(f(x))=f(f(y))=y$$

olması alınır. Başqa sözlə, $f(x)$ qarşılıqlı birqiymətlidir.

Öz üzərinə inikas olması isə $f(f(x))=x$ eyniliyindən aşkar şəkildə görünür.

X çoxluğunun özünə $f:X\to X$ inikasının involyusiya olması üçün zəruri və kafi şərt verilən inikasın öz özünün tərsi olmasıdır.

$f(f(x))=x$ eyniliyindən $f(x)$ funksiyasının özünün tərsi olması aşkardır.

Qeyd 1. Hər hansı funksiya üçün dəyişənin bütün qiymətlərində

$$f(f(x))=x+p,(p=const)$$

bərabərliyinin eynilikle ödənilməsindən, eyni qayda ilə funksiyanın qarşılıqlı birqiymətli olması alınır. Əgər funksiyanın təyin oblastı bütün həqiqi ədədlər çoxluğu olarsa, həmçinin öz üzərinə inikas olması alınır.

İnvolyusiyanın tərpənməz nöqtələri.

Lemma. $(a;b)$ aralığında təyin edilmiş monoton artan, kəsilməz involyusiya eynilik cevrilməsidir.

İsbatı. Əksini fərz edək. Turaq ki, arqumentin hansısa bir x qiyməti üçün $y=f(x)<x$ bərabərsizliyi ödənilir. Onda $f(y)=f(f(x))<f(x)<x$ bərabərsizliyi ödənilməlidir. Bu isə $f(y)=f(f(x))=x$ bərabərliyinə ziddir.

İndi isə tutaq ki, dəyişənin müəyyən bir qiymətində $y=f(x)>x$ ciddi bərabərsizliyi ödənilir. Onda $f(y)=f(f(x))>f(x)>x$. Bu isə $f(y)=f(f(x))=x$ bərabərliyinə ziddir. Buna görə də dəyişənin bütün qiymətləri üçün $f(x)=x$ bərabərliyi eynilikle ödənilir. İsbat olundu.

Qeyd edək ki, involyusiyanın tərsi olduğu üçün, o yalnız ciddi monoton ola bilər.

Qeyd 2. Funksiyanın təyin oblastının aralıq olmasından isbatda heç bir yerdə istifadə etmədik. Buna görə də bu fakt hər hansı bir nizamlanmış X çoxluğu üçün doğrudur. Xüsusi halda, tam ədədlər coxluğunda və ya rasional ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş hər hansı bir monoton artan involyusiya eynilik cevrilməsidir.

Lemma. $[a,b]$ parçasında təyin edilmiş və qiymətləri həmin parçadan olan monoton azalan, kəsilməz involyusiyanın yeganə tərpənməz nöqtəsi var.

İsbatı. Turaq ki, $f:[a,b]\to[a;b]$ verilən monoton azalan, kəsilməz involyusiyadır. Yeni $F(x)=f(x)-x$ funksiyasına baxaq. Aydındır ki, $F(a)=f(a)-a>0$ və $F(b)=f(b)-b<0$.

Başqa sözlə, $F(x)$ kəsilməz funksiyası parçanın uclarında əks işarəli qiymətlər alır. Onda, Koşi teoreminə əsasən $[a,b]$ parçasının müəyyən bir daxili z nöqtəsində $F(z)=f(z)-z=0$. Başqa sözlə, z nöqtəsi f funksiyasının tərpənməz nöqtəsidir.

Digər tərəfdən $F(x)$ funksiyası ciddi monoton azalandır. Doğrudan da,

$$x>y\Rightarrow F(x)-F(y)=(f(x)-f(y))+(y-x)<0$$

bərabərsizliyi alınır. Buna görə də z nöqtəsi $F(x)$ funksiyasının yeganə sıfırı və ya $f(x)$ funksiyasının yeganə tərpənməz nöqtəsidir.

Qeyd 3. Tərpənməz nöqtənin varlığında təyin oblastının əlaqəli olmasından isbatda ciddi istifadə edildi. Bu şərti ortadan götürmək olmaz. Bu fakt artıq Z tam ədədlər çoxluğu üçün doğru deyildir. Doğrudan da, $f:Z\to Z, f(n)=1-n$ münasibəti ilə təyin edilmiş funksiya, asanlıqla göstərmək olar ki, monoton azalan involyusiyadır, ancaq onun tam ədədlər çoxluğunda tərpənməz nöqtəsi yoxdur.

Qeyd 4. Əgər monoton azalan f involyusiyasının $D(f)$ təyin oblastı müəyyən bir qapalı parçada sıx çoxluq olarsa, onda bu funksiyanı bütün parçaya monoton azalan davam etdirmək olar. Ancaq alınan funksiyanın tərpənməz nöqtəsinin $D(f)$ çoxluğundan olmasını söyləmək olmaz.

Əgər $f(x)$ funksiyası parçanın özünə kəsilməz involyusiyasıdırsa, onda $f(x)$ ya eynilik çevrilməsidir, ya da onun yeganə tərpənməz nöqtəsi vardır.

$f(x)$ involyusiya olduğu üçün onun tərsi vardır. Buna görə də $f(x)$ funksiyası ya monoton artan, ya da monoton azalan olmalıdır.

Hər hansı bir aralığın (istər qapalı, istər açıq, istər yarımqapalı) özünə monoton azalan involyusiyasının tərpənməz nöqtəsi vardırsa, o yeganədir.

Lemma 4-də yeganəliyin isbatı üçün istifadə edilmiş mühakimələr bu halda da doğrudur.

Lemma. *a)* Tutaq ki, $f:[0;b]\to[0;b]$ verilmiş involyusiyadır və $\forall y\in[0;b]$ üçün $f(b-y)=b-f(y)$ bərabərliyi ödənilir. Onda $g(y)=f(b-y)$ bərabərliyi ilə təyin edilmiş funksiya da $[0;b]$ parçasının özünə involyusiyasıdır.

b) Tutaq ki, $f:R_+\to R_+$ müsbət həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş involyusiyadır və $\forall x\in R$ üçün $f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{f(x)}$ münasibəti ödənilir. Onda $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ kimi təyin edilmiş $g(x)$ funksiyası da involyusiyadır.

İsbatı. *a)* $\forall y\in[0;b]$ üçün

$$g(g(y))=g(f(b-y))=b-f(f(b-y))=$$
$$=b-(b-y)=y$$

almış olarıq, bu da $g(x)$ funksiyasının involyusiya olması deməkdir.

b) $\forall x\in R_+$ üçün

$$g(g(x))=g\left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)=f\left(\frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}\right)=f(f(x))=x$$

Qeyd 5. Asanlıqla görmək olar ki, parçanın özünə hər hansı bir monoton involyusiyası kəsilməz funksiyadır. Doğrudan da involyusiyanın obrazı bütün parçadır. Bu isə monoton funksiyanın sıçrayışlarının olmamasını göstərir.

Diskret analoq. *a)* Tutaq ki, $f:\{1;2;...;n\}\to\{1;2;...;n\}$ involyusiyasıdır. Əgər n tək ədəd olarsa, f funksiyasının tərpənməz nöqtəsi var.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, n tək ədəddir və verilən f involyusiyasının tərpənməz nöqtəsi yoxdur.

$$\{1;f(1)\};\{2;f(2)\};...;\{n;f(n)\}$$

cütlərinə baxaq. Aydındır ki, n sayda belə cüt vardır.

f involyusiya olduğundan $\{k;f(k)\}$ və $\{f(k);k\}$ cütlər çoxluğu eynidirlər. Əgər $k\neq f(k)$ olarsa, başqa sözlə, k tərpənməz nöqtə olmazsa, $(k;f(k))$ cütü bu sırada digər bir yerdə $(f(k);k)$ şəklinə gəlmiş olacaqdır. Beləliklə, f funksiyasının tərpənməz nöqtəsi yoxdursa, bu sırada hər bir cüt iki dəfə iştirak etməlidir. Başqa sözlə, n cüt olmalıdır. Bu isə n ədədinin tək olmasına ziddir. Buna görə də n tək olduqda f involyusiyasının tərpənməz nöqtəsi vardır.

$\{1;2;...;n\}$ çoxluğunun özünə involyusiyasının tərpənməz nöqtəsi yoxdursa, n cüt ədəddir.

Teoremlərin tətbiqləri.

Misal 1. (Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadası 1983)

R_+ müsbət ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və R_+ çoxluğunda qiymətlər alan $f(x)$ funksiyası aşağıdakı şərtləri ödəyir:

a) istənilən x,y üçün $f(xf(y))=yf(x)$ (1)

b) $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ (2)

Bütün belə funksiyaları tapın.

Həlli. $x=1$ olduqda (1) bərabərliyi aşağıdakı şəklə düşür

$$f(f(y))=f(1f(y))=yf(1) \quad (3)$$

Xüsusi halda, $y=1$ olduqda

$$f(1)=1f(1)=f(f(1)) \quad (4)$$

bərabərliyini alarıq. Bu isə $f(1)$ nöqtəsinin tərpənməz nöqtə olması deməkdir. Onda, həmçinin

$$f(f(f(1)))=f(1) \quad (5)$$

bərabərliyi də ödənilməlidir. Digər tərəfdən, (1) bərabərliyi dəyişənlərin $x=1;y=f(1)$ qiymətlərində

$$f(1f(f(1)))=f(1)f(1)=(f(1))^2$$

bərabərliyinə çevrilir. (4) və (5) bərabərliklərini müqayisə etsək $f(1)=(f(1))^2$ münasibətini almış olarıq. $f(x)$ funksiyası yalnız müsbət qiymətlər aldığı üçün, buradan $f(1)=1$ olduğunu alarıq. Bu isə $x=1$ nöqtəsinin tərpənməz nöqtə olduğunu və $f(f(y))=y$ bərabərliyinin eynilikə doğru olduğunu göstərir. Başqa sözlə, $f(x)$ funksiyası R_+ çoxluğunun özünə involyusiyasıdır.

$a>1$ olduqda $f(a)<1$ bərabərsizliyinin doğru olduğunu isbat edək.

$\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$ olduğundan, *b)* şərtinə əsasən

$$f(a^n)=f(a^{n-1}f(f(a)))=f(a)f(a^{n-1})=f(a)^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Bu isə yalnız $f(a)<1$ olduqda mümkündür.

İndi isə isbat edək ki, $f(x)$ funksiyası monoton azalandır. Tutaq ki, $x>y$. Onda $\frac{x}{y}>1$ olduğundan,

$$f(x)=f\left(y\frac{x}{y}\right)=f\left(yf\left(f\left(\frac{x}{y}\right)\right)\right)=f(y)f\left(\frac{x}{y}\right)<f(y)$$

Beləliklə $f(x)$ monoton azalan involyusiyadır. Nəticə 3-ə əsasən $x=1$ nöqtəsi bu funksiyanın yeganə tərpənməz nöqtəsidir.

Digər tərəfdən, $x=y$ olduqda (1) münasibəti

$$f(xf(x))=xf(x)$$

eyniliyinə çevrilir. Beləliklə, x dəyişəninin bütün qiymətləri üçün $xf(x)$ nöqtəsi tərpənməz nöqtədir. Tərpənməz nöqtənin yeganəliyindən çıxır ki, axtarılan funksiya $xf(x)=1$ tənliyinin həlli olmalıdır. Yəni $f(x)=\frac{1}{x}$ olmalıdır. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, bu funksiya a) və b) şərtlərini ödəyir.

Misal 2. (Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadası 1992). R - Həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və $\forall x,y\in R$ həqiqi cütləri üçün

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2 \quad (5)$$

münasibətini ödəyən bütün funksiyaları tapın.

Həlli. $x=0$ olduqda (5) bərabərliyindən

$$f(f(y))=y+f(0)^2 \quad (6)$$

bərabərliyini alarıq. Onda qeyd 1-ə əsasən $f(x)$ funksiyasının tərsi vardır. Buna görə

də elə bir x_0 nöqtəsi vardır ki, $f(x_0)=0$ olmalıdır. Onda

$$f(x_0^2)=f(x_0^2+f(x_0))=x_0+(f(x_0))^2=x_0\Rightarrow f(x_0)=$$
$$f(f(x_0^2))=x_0^2+(f(0))^2=0\Leftrightarrow x_0=f(0)=0$$

Bunu (6)-da nəzərə alsaq

$$f(f(x))=x \qquad (7)$$

eyniliyini alarıq. Beləliklə isbat etdik ki, $f(x)$ funksiyası involyusiyadır. İsbat edək ki, $f(x)$ monoton artan funksiyadır. Tutaq ki, $x_1>x_2$. Onda

$$f(x_1)=f(x_2+(x_1-x_2))=f\left(\left(\sqrt{x_1-x_2}\right)^2+f(f(x_2))\right)=$$
$$=f(x_2)+\left(f\left(\sqrt{x_1-x_2}\right)\right)^2\geq f(x_2)$$

Buna görə də $f(x)$ funksiyası bütün R-də artır. $f(x)$ involyusiya olduğundan o eynilik inikası olmalıdır. Yəni, $f(x)=x$.

Misal 3. (Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadası 1994). $S=(-1;\infty)$ çoxluğunda təyin edilmiş və onu özünə çevirən aşağıdakı şərtləri ödəyən bütün funksiyaları tapın.

1) $\forall x,y\in S$ həqiqi cütləri üçün

$$f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x) \qquad (8)$$

münasibəti eynilikllə ödənilir.

2) $\frac{f(x)}{x}$ funksiyası $(-1;0)$ və $(0;\infty)$ aralıqlarında ciddi artır.

Həlli. Dəyişənlərin $x=y=0$ qiymətlərində (8) münasibətindən

$$f(f(0))=f(0+f(0)+0f(0))=f(0) \qquad (9)$$

bərabərliyini almış olarıq. Bu isə $f(0)$ nöqtəsinin tərpənməz nöqtə olduğu deməkdir. Göstərək ki,

$$f(0)=0.$$

Öncə isbat edək ki, axtarılan funksiyanın sıfırı vardır. Tutaq ki,

$$f(t)\neq 0, z=-\frac{f(t)}{1+f(t)}, y=t+f(z)+tf(z)$$

(8) münasibətini nəzərə alsaq

$$f(y)=f(t+f(z)+tf(z))=z+f(t)+zf(t)=0$$

münasibətini alarıq. Başqa sözlə,

$$y=t+f(z)+tf(z)$$

axtarılan funksiyanın sıfırıdır.

Onda hər hansı x nöqtəsi üçün

$$f(x)=f(x+f(y)+xf(y))=y+f(x)+yf(x) \qquad (10)$$

və ya

$$y+yf(x)=0 \qquad (11)$$

münasibətinin eynilikllə ödənildiyini almış olarıq ki, bu da yalnız və yalnız $y=0$ olduqda mümkündür. Onda

$$f(f(x))=f(0+f(x)+0f(x))=x$$

eyniliyini almış olarıq. Deməli $f(x)$ involyusiyadır və $y=0$ nöqtəsi onun tərpənməz nöqtəsidir.

İsbat edək ki, axtarılan funksiya $(-1;0)$ və $(0;\infty)$ aralıqlarında öz işarəsini saxlayır. Əgər hansısa bir $z>0$ üçün $f(z)>0$ olarsa, 2-ci şərtə əsasən $\forall x>z$ üçün

$$\frac{f(x)}{x}>\frac{f(z)}{z}>0$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Beləliklə, $\forall x>z$ üçün $f(x)>0$ bərabərsizliyi doğru olmalıdır və axtarılan funksiya $[z;\infty)$ aralığında ciddi monoton (əks halda 2-ci şərt bu aralıqda ödənilməz) olmalıdır.

Əgər hansısa bir $z>0$ üçün $f(z)<0$ olarsa, $0<x<z$ olduqda, 2-ci şərtə əsasən

$$\frac{f(x)}{x}<\frac{f(z)}{z}<0$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Bu isə yalnız $f(x)<0$ olduqda mümkündür. Beləliklə, əgər

axtarılan funksiya $(0;\infty)$ aralığında öz işarəsini dəyişirsə, elə bir z nöqtəsi vardır ki,

$$0<x<z\Rightarrow f(x)<0$$
$$x>z\Rightarrow f(x)>f(z), f(x)>0$$

münasibətləri ödənilməlidir. İsbat edək ki, z axtarılan funksiyanın tərpənməz nöqtəsidir.

Əksini fərz edək. Tutaq ki, $f(z)<z$. Onda $z=f(f(z))<0$ almış olarıq ki, bu da z ədədinin müsbət olmasına ziddir.

Əgər $f(z)>z$ olarsa, $z=f(f(z))>f(z)$ ziddiyətini almış olarıq. Deməli z axtarılan funksiyanın tərpənməz nöqtəsidir.

Onda axtarılan funksiya $[z;\infty)$ aralığında ciddi monoton artan involyusiyadır. Lemma 1-ə əsasən $x>z\Rightarrow f(x)=x$ eyniliyini alarıq. Bu da 2-ci şərtdəki ciddi monotonluğa ziddir. Buna görə də, axtarılan funksiya $(0;\infty)$ aralığında öz işarəsini dəyişməz saxlamalıdır. Əgər işarə müsbət olarsa, axtarılan funksiya bu aralıqda monoton artan involyusiya olmalıdır. Bu isə axtarılan funksiyanın eynilik inikas olması deməkdir. Ancaq yuxarıda söylədiyimiz kimi bu 2-ci şərtə ziddir.

Beləliklə, isbat etdik ki, axtarılan funksiya $(0;\infty)$ aralığında yalnız mənfi qiymətlər ala bilər.

$(-1;0)$ aralığı üçün aparılan anoloji mühakimələrdən isə belə aydın olur ki, axtarılan funksiya bu aralıqda yalnız müsbət qiymətlər ala bilər.

Onda $x=0$ nöqtəsi axtarılan funksiyanın yeganə tərpənməz nöqtəsidir.

Digər tərəfdən $x=y$ olduqda (8) münasibətdən

$$f(x+f(x)+xf(x))=x+f(x)+xf(x)$$

bərabərliyini almış olarıq. Başqa sözlə,

$$x+f(x)+xf(x)$$

şəklində bütün nöqtələr axtarılan funksiyanın tərpənməz nöqtələridir. Tərpənməz nöqtənin yeganəliyindən verilən funksiya aşağıdakı tənliyin həlli olmalıdır $x+f(x)+xf(x)=0$. Onda $f(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı ifadəni almış olarıq

$$f(x)=-\frac{x}{1+x}.$$

Misal 4. (Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadası 1987). İsbat edin ki, mənfi olmayan tam ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və bütün n-lər üçün

$$f(f(n))=n+1987 \qquad (12)$$

münasibətini ödəyən $f(x)$ funksiyası yoxdur.

İsbatı. Daha ümumi hala baxaq. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası və bütün n-lər üçün

$$f(f(n))=n+p$$

münasibəti ödənilir. Burada p hansısa bir sabitdir. Onda

$$f(f(f(n)))=f(n)+p=f(n+p)$$

olduğundan, induksiyaya əsasən hər hansı k natural ədədi üçün

$$f(n+kp)=f(n)+kp$$

münasibətini alarıq.

İsbat edək ki,

$$f(n)-n\neq kp.$$

Əksini fərz edək, tutaq ki, müəyyən bir n üçün

$$f(n)=n+kp\Leftrightarrow pk=f(n)-n$$

münasibəti ödənilir. Onda

$$n+p=f(f(n))=f(n+pk)=f(n)+pk\Rightarrow pk=$$
$$=f(n)-n=p(1-k)\Rightarrow kp=(1-k)p\Rightarrow k=\frac{1}{2}\notin Z$$

ziddiyyətini alarıq. $\{0;1;2;\ldots;p-1\}$. Sonlu çoxluğunda $g(n)\equiv f(n)(\mathrm{mod}\,p)$ qaydası ilə

təyin edilmiş yeni $g(n)$ funksiyasına baxaq. İsbat edək ki, $g(n)$ involyusiyadır.

$$g(g(n)) = g(f(n) - kp) = f(f(n) - kp) + qp =$$
$$= f(f(n)) - kp + qp = n + (1 - k + q)p \Rightarrow g(g(n)) = n$$

Başqa sözlə, $g(n)$ involyusiyadır. Bundan əlavə $g(n)$- nin tərpənməz nöqtəsi yoxdur. Əgər belə olmasaydı, müəyyən bir natural n və k ədədləri üçün

$$n = g(n) = f(n) + kp \Rightarrow f(n) - n = kp; k \in Z$$

münasibəti doğru olmalıydı. Yuxarıda isbat etdiymiz kimi bu ola bilməz. Beləliklə, $g(n)$ sonlu çoxluğun özünə involyusiyasıdır və onun tərpənməz nöqtəsi yoxdur. Onda, 4-cü nəticəyə əsasən p ədədi cüt olmalıdır.

Xüsusi halda $p = 1987$ olduqda verilən xassələrə malik olan funksiya yoxdur.

Misal 5. $f(x)$ funksiyası $[0;1]$ parçasının öz üzərinə inikasıdır və $\forall x, y \in [0;1]$ üçün aşağıdakı münasibət ödənilir

$$f(yf(x)) = f(y) + xf(1 - y) \qquad (13)$$

İsbat edin, $f(x)$ monoton azalan involyusiyadır və bütün belə funksiyaları tapın.

Həlli. $y = 0$ olduqda (13) bərabərliyindən

$$f(0) = f(0f(x)) = f(0) + xf(1 - 0) = f(0) + xf(1)$$

almış olarıq. x dəyişəni ixtiyari olduğu üçün, bu yalnız $f(1) = 0$ olduqda mümkündür. Digər tərəfdən

$$f(f(x)) = f(1f(x)) = f(1) + xf(1 - 1) = xf(0) \qquad (14)$$

və $f(x)$ funksiyasının parçanın «öz üzərinə» inikas olmasından $f(0) = 1$ almış olarıq. Onda (14) münasibəti $f(f(x)) = x$ eyniliyinə çevrilmiş olar. Deməli, $f(x)$ involyusiyadır.

İsbat edək $f(x)$ monoton azalır. Tutaq ki, $y < z$. $f(x)$ funksiyasının tərsi olduğundan $\exists t \Rightarrow f(t) = \frac{y}{z}$. Onda

$$f(y) = f\left(z\frac{y}{z}\right) = f(zf(t)) = f(z) + tf(1 - t) > f(z)$$

Başqa sözlə, $f(x)$ monoton azalandır.

$$x = 1 \Rightarrow f(y) + f(1 - y) = f(yf(1)) = f(0) = 1$$

münasibəti ödənildiyindən, axtarılan funksiya üçün $f(1 - y) = 1 - f(y)$ bərabərliyi eynilikə ödənilməlidir. Onda lemma 3-ə əsasən $g(y) = f(1 - y)$ kimi təyin edilmiş funksiya da involyusiyadır və monoton artandır. Lemmaya əsasən $g(y)$ eynilik çevrilməsidir:

$$g(y) = y \Rightarrow f(1 - y) = y \Rightarrow f(y) = 1 - y$$

Beləliklə, $f(x) = 1 - x$ axtarılan funksiyadır.

CƏBRİN ƏSAS TEOREMİNİN TƏTBİQLƏRİ

Həlləri çoxhədlilər olan funksioanl tənliklərin həll edilməsi üçün cəbrin əsas teoreminin tətbiqlərinə baxdıq. Xatırladaq ki, cəbrin əsas teoremi aşağıdakından ibarətdir:

İstənilən n dərəcəli çoxhədlinin n kompleks kökü var.

Dəyişənin istənilən x, y qiymətləri üçün

$$p(xy) = p(x)p(y) \qquad (1)$$

bərabərliyi ödənirsə, belə çoxhədliyə **multiplikativ çoxhədli** deyilir.

Yalnız $p(x) = x^n$ şəklində birdəyişənli çoxhədlilər multiplikativ çoxhədlilərdir.

Göstərək ki, $p(x)$ çoxhədlisinin sıfırdan fərqli kökü ola bilməz. Tutaq ki, ξ verilmiş çoxhədlinin müəyyən bir köküdür. Onda istənilən y ədədi üçün

$p(\xi y) = p(\xi)p(y) = 0$ münasibətini almış olarıq. Beləliklə, istənilən y ədədi üçün ξy ədədi verilmiş çoxhədlinin kökü olmalıdır. $\xi \neq 0$ olarsa, istənilən kompleks ədədi ξy şəklində yazmaq olduğundan $p(x) = 0$ münasibətinin eynilikə ödənildiyini almış olarıq. Buna görə də eynilikə sıfıra bərabər olmayan mulktiplikativ çoxhədlinin kökü yalnız sıfır ola bilər. Bu isə müəyyən bir c ədədi üçün $p(x) = cx^n$ olması deməkdir. Digər tərəfdən

$$c = p(1) = p(1)p(1)$$

olduğundan $c = 1$ olmalıdır. Başqa sözlə, $p(x) = x^n$.

Dəyişənin istənilən x, y qiymətləri üçün

$$p(x + y) = p(x) + p(y) \qquad (2)$$

bərabərliyi ödənirsə, verilən çoxhədliyə **additiv çoxhədli** deyilir.

Yalnız $p(x) = cx$ şəklində birdəyişənli çoxhədlilər additiv çoxhədlilərdir.

Göstərək ki, $p(x)$ çoxhədlisinin sıfırdan fərqli kökü ola bilməz. Tutaq ki, ξ verilmiş çoxhədlinin müəyyən bir köküdür. Onda $x = y = \xi$ halında

$$p(2\xi) = p(\xi + \xi) = 2p(\xi) = 0$$

münasibətini almış olarıq. Bu isə induktiv olaraq istənilən natural n ədədi üçün $p(n\xi) = np(\xi) = 0$ münasibətinin doğru olmasına gətirib çıxarır. Beləliklə, istənilən n natural ədədi üçün $n\xi$ ədədi verilmiş çoxhədlinin kökü olmalıdır. Əgər $\xi \neq 0$ olarsa, verilmiş çoxhədlinin $n\xi$ şəklində sonsuz sayda kökünün olduğunu alarıq. Bu isə $p(x) \equiv 0$ münasibətinin eynilikə ödənildiyini göstərir. Buna görə də eynilikə sıfıra bərabər olmayan additiv çoxhədlinin kökü yalnız sıfır ola bilər. Deməli, müəyyən bir c ədədi üçün $p(x) = cx^m$ olmalıdır. Digər tərəfdən $x = y = 1$ olduqda $c2^m = c(1+1)^m = 2c$ münasibəti ödənildiyindən $m = 1$ olmalıdır. Beləliklə, $p(x) = cx$.

DİOFANT TƏNLİKLƏRİ

Tutaq ki, $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ çoxdəyişənli tam əmsallı verilmiş çoxhədlidir. Tam ədədlər çoxluğunda kökləri axtarılan

$$p(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

şəklində tənlikləri qədim yunan alimi Diofantın şərəfinə **Diofant tənlikləri** adlandırırlar.

Diofant eramızdan əvvəl III əsrdə yaşamış və bu tip tənliklər haqqında ilk traktat yazmışdır. Zahiri sadəliyinə baxmayaraq bu tip tənliklərin həllinin ümumi nəzəriyyəsi hələ də tam işlənib hazırlanmamışdır. İndiyə kimi məlum deyil ki, $x^3 + y^3 + z^3 = 30$ tənliyinin tam kökləri var, yoxsa yox? Ferma problemi adı ilə məşhur olan $x^n + y^n = z^n, n > 2$ tənliyinin tam köklərinin olub-olmaması məsələsinin həlli üçün istər peşəkar, istərsə də riyaziyyat sahəsində tam diletant insanların cəhdləri bir neçə əsr uğursuz olmuş, ən nəhayət, keçən əsrin 90-cı illərində problem öz həllini tapmışdır: verilən tənliklərin tam ədədlər çoxluğunda həlli yoxdur.

ƏN BÖYÜK ORTAQ BÖLƏN HAQQINDA TEOREM

a və b tam ədədlərdir. $\text{ƏBOB}(a,b) = d$ olarsa, elə m və n tam ədədləri var ki, $am + bn = d$ bərabərliyi ödənilir.

Ümumiliyi azaltmadan qəbul etmək olar ki, a və b natural ədədlərdir. (Doğrudan da, a və b ədədlərindən biri və ya hər ikisi mənfi olarsa, uyğun m və n ədədlərinin işarəsini dəyişməklə buna nail olmaq olar). Riyazi induksiya metodunu tətbiq edək. $M(k)$ təklifi kimi aşağıdakı hökmü qəbul edəcəyik:

k ədədini aşmayan istənilən iki natural a və b ədədləri üçün elə m və n tam ədədləri tapmaq olar ki, $am + bn = d = \text{ƏBOB}(a,b))$ bərabərliyi doğru olsun.

İlk bir neçə nömrə üçün verilən təklif birbaşa yoxlanılır. Məsələn, $k = 5$ olduqda

$a = 5, b = 1$ ədədləri üçün $m = 1, n = -4$

$a = 2, b = 5$ cütü üçün $m = -2, n = 1$,

$a=2,b=4$ cütü üçün $m=-1,n=1$ və s. götürmək olar. (qalan halların yoxlanması oxucuya tapşırılır).

Beləliklə, induksiyanın bazası əldə edilmişdir. Fərz edək ki, verilən təklif $k=p$ halı üçün doğrudur. Onu $k=p+1$ halı üçün isbat edək.

Aydındır ki, a və b ədədlərinin hər ikisi $p+1$-dən kiçik olarsa, $p=k$ halı üçün verilən təklif doğru olduğundan, belə m və n ədədləri tapmaq olar.

Əgər $a=b=p+1$ olarsa $m=0,n=1$ götürmək kifayətdir.

Ən maraqlı hal bu ədədlərdən biri $p+1$-ə bərabər, digəri isə $p+1$-dən kiçik olan haldır. Tutaq ki,

$$a=p+1,\ b<p+1$$

Onda elə q natural ədədi var ki, $a=qb+r, r<b$ bərabərliyi doğrudur. Bu bərabərlikdən aydındır ki, $r=a-qb$ ədədi $d=\text{ƏBOB}(a,b)$-yə bölünür. Buna görə də $\text{ƏBOB}(b,r)\geq d$ olmalıdır. Digər tərəfdən b və r-in hər bir ortaq böləni həm də a və b-nin ortaq bölənidir. Odur ki, $\text{ƏBOB}(b,r)=d$. Artıq b və r ədədlərinə qəbul etdiyimiz təklifi tətbiq edə bilərik: elə k,n tam ədədləri var ki,

$$kb+nr=d$$

bərabərliyi ödənilir. Buradan asanlıqla aşağıdakı alınır

$$kb+n(a-qb)=na+(k-nq)b=d$$

Beləliklə, n və $m=(k-nq)$ cütü tələb edilən tam ədədlərdir. Təklif isbat edildi.

Bir nəticəni qeyd edək:

$\text{ƏBOB}(a,b)=d$ olarsa, $ax+by=c$ tənliyinin tam köklərinin olması üçün zəruri və kafi şərt c ədədinin d-yə tam bölünməsidir.

Doğrudan da, ixtiyari x,y tam ədədləri üçün a və b ədədlərinin $ax+by$ xətti kombinasiyası $d=\text{ƏBOB}(a,b)$ ədədinə tam bölünür. Buna görə də verilən tənliyin tam kökləri varsa, $c=ax+by$ ədədi d-yə tam bölünməlidir.

Digər tərəfdən teoremə əsasən $az+bt=d$ tənliyinin tam ədədlər çoxluğunda (z,t) həlli var. Onda aydındır ki, c ədədi d-yə tam bölünürsə, $x=\frac{zc}{d}$ və $y=\frac{tc}{d}$ tam ədədləri $ax+by=c$ tənliyinin tam köklərdir.

Aşağıda istifadə edəcəyimiz xüsusi bir halı da qeyd edək:

$\text{ƏBOB}(a,b)=1$ (başqa sözlə a və b qarşılıqlı sadədirlərsə) olarsa, $ax+by=c$ tənliyinin c ədədinin bütün tam qiymətlərində tam kökləri var.

a və m qarşılıqlı sadə ədədlərdirsə, elə b tam ədədi var ki, $ba\equiv 1(\text{mod}\,m)$ münasibəti ödənilir.

a və m qarşılıqlı sadə olduqlarından, elə b,c tam ədədləri var ki, $ab+cm=1$ və ya $ab=-cm+1$ bərabərlikləri doğrudur.

NATURAL KÖKLƏR. SİLVESTER TEOREMİ

Yuxarıda $\text{ƏBOB}(p,q)=1$ olduqda (p və q natural ədədlərdir)

$$pm+qn=d$$

şəklində tənliklərin d-nin istənilən tam qiymətinə həlli olduğunu göstərdik. Təbii olaraq belə bir sual vermək olar: $\text{ƏBOB}(p,q)=1$ olduqda $pm+qn=d$ şəklində tənliyin d ədədinin hansı qiymətlərində mənfi olmayan tam həlləri var və ya hansı natural d ədədlərini

$$pm+qn=d$$

şəklində (m,n mənfi olmayan tam ədədlərdir) göstərmək olar?

Silvester teoremi. $\text{ƏBOB}(p,q)=1$ olarsa, $pm+qn=d$ şəklində göstərilə bilməyən ən böyük natural ədəd $pq-p-q$ ədədinə bərabərdir (m,n mənfi olmayan tam ədədlərdir).

Qeyd. Teoremdən heç də çıxmır ki, $pq-p-q$ ədədindən kiçik heç bir natural ədəd verilən şəkildə göstərilə bilməz. Məsələn $p=4,q=5$ olarsa, $pq-p-q=11$ olmasına baxmayaraq 9 ədədi

$$9=5+4$$

şəklində göstərilə bilir. Teoremin mahiyyəti ondan ibarətdir ki, $\text{ƏBOB}(a,b)=1$ olarsa, $am+bn=d$ şəklində göstərilə bilməyən ən böyük natural ədəd var və ondan böyük istənilən ədəd isə verilən şəkildə göstərilə bilər.

Qeyd. Ümumi halda $k\geq 3$ sayda qarşılıqlı sadə $p_1,p_2,\ldots,p_k$ ədədləri üçün

$$p_1n_1+\ldots+p_kn_k$$

şəkildə göstərilə bilməyən ən böyük natural ədədin tapılması **Frobenius problemi** kimi məşhurdur.

İlk olaraq istənilən $d\geq pq-p-q+1$ şərtini ödəyən ədədin verilən şəkildə göstərilə bildiyini isbat edək. Ümumiliyi pozmadan $p>q$ və $\alpha p-\beta q=1$ tənliyində $\alpha>0$, $\beta>0$ qəbul edəcəyik.

Tutaq ki, $d=kp+r, p>r>0$. $d\geq pq-p-q+1$ olduğunu nəzərə alsaq

$$kp+r\geq pq-p-q+1=p(q-1)-q+1=$$
$$p(q-2)+(p-q+1)\Rightarrow k\geq q-1$$

Əgər, $r>q$ olarsa, $d=kp+mq+r_1$, $p>r_1$, $q>r_1$ göstərilişi mümkündür. $t=q-r_1$ əvəzləməsini aparaq. Onda elə u,v natural ədədləri var ki,

$$up-vq=t\Leftrightarrow up=vq+t.$$

Beləliklə, d ədədini

$$d=kp+mq+r_1=(k-u+u)p+mq+r_1=(k-u)p++$$
$$(up)++mq+r_1=(k-u)p+(v+m)q+t+r_1=$$
$$=(k-u)p+(v+m+1)q$$

şəklində göstərmək olar. Əgər $m=k-u, n=v+m+1$ qəbul etsək $d=mp+nq$ bərabərliyini alarıq. Ancaq $k-u$ natural ədəddirmi və ya onu natural seçmək olarmı? Aşağıdakı lemma buna müsbət cavab verir.

Lemma. $\text{ƏBOB}(p,q)=1$, $\alpha p-\beta q=1$ tənliyinin natural həlli var. r isə $r<q$ bərabərsizliyini ödəyən natural ədəddir. Onda $up-vq=r$ tənliyinin $u<q$ şərtini ödəyən həlli var.

Doğrudan da, $u=u_1q+u_2$, $q>u_2>0$ olarsa, $r=up-vq=u_2p-(v-u_1p)q$

şəklində göstərmək olar və artıq $q>u_2$ bərabərsizliyi ödənilir. Lemma isbat edildi.

Teoremin ikinci hissəsi ondan ibarətdir ki, $pq-p-q$ ədədi verilən şəkildə göstərilə bilməz. Bu faktın isbatı ilk hissədəki mühakimələrə analoji olduğu üçün onu oxucuya həvalə edirik (tapşırıq 1.20).

BİRDƏRƏCƏLİ DİOFANT TƏNLİKLƏRİ

$a_1,a_2,\ldots,a_n$ verilmiş tam ədədlərdir. Həlləri tam ədədlər çoxluğunda axtarılan aşağıdakı tənliyə

$$a_1x_1,a_2x_2,\ldots,a_nx_n=a \qquad (1)$$

birdərəcəli xətti Diofant tənlikləri deyilir. $X=(x_1.x_2,\ldots,x_n)$ nizamlanmış ədədləri (1) tənliyini ödəyirsə, həmin **tənliyin həlli** adlanırlar. $a\neq 0$ olarsa, (1) tənliyinin məlum istənilən $X=(x_1.x_2,\ldots,x_n)$ həlli **məxsusi həll** adlanır.

Əgər $\text{ƏBOB}(a,a_1,a_2,\ldots,a_n)=$d olarsa, bərabərliyin hər iki tərəfini d ədədinə bölsək (1) tənliyinə ekvivalent

$$b_1x_1+b_2x_2+\ldots b_nx_n=b, b_i=\frac{a_i}{d}, b=\frac{a}{d} \qquad (2)$$

tənliyini alarıq. Artıq $\text{ƏBOB}(b,b_1,b_2,\ldots,b_n)=1$. Buna görə də (1) tənliyini araşdırdıqda ümumiliyi pozmadan

$$\text{ƏBOB}(a,a_1,a_2,\ldots,a_n)=1$$

qəbul etmək olar.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots a_nx_n = 0 \qquad (3)$$

şəklində tənliyə (1) tənliyinə uyğun **bircins tənlik** deyilir.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ və $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nizamlanmış ədədləri (1) tənliyinin həlləridirsə,

$$z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \ldots, z_n = x_n - y_n$$

ədədləri (3) bircins tənliyinin həllidir. Başqa sözlə, (1) tənliyinin istənilən iki məxsusi həllinin fərqi (3) bircins tənliyinin həllidir.

Doğrudan da

$$a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_nz_n = a_1(x_1 - y_1) + a_2(x_2 - y_2) + \ldots +$$
$$+ a_n(x_n - y_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n) - (a_1y_1 + a_2y_2 +$$
$$+ \ldots + a_ny_n) = a - a = 0$$

Teorem isbat edildi.

Qeyd. Teoremdə həqiqi həllərdən söhbət gedir.

$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ və $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ nizamlanmış ədədləri (1) tənliyinin tam həlləridirsə,

$$z_1 = x_1 - y_1, z_2 = x_2 - y_2, \ldots, z_n = x_n - y_n$$

ədədləri (3) bircins tənliyinin tam həllidir.

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ədədləri (1) tənliyinin hansı bir məxsusi həllidir. (1) tənliyinin istənilən həlli X həlli ilə uyğun bircins tənliyin hansısa bir həllinin cəminə bərabərdir.

Başqa sözlə, (3) bircins tənliyinin həlləri məlumdursa, (1) tənliyinin ümumi həllərini tapmaq üçün hansısa bir məxsusi həlli tapmaq kifayətdir.

(3) bircins tənliyinin həllərini tapaq. Ümumiliyi azaltmadan qəbul edək ki, $a_n \neq 0$. Onda $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ədədlərinin istənilən verilmiş qiymətləri üçün

$$x_n = -\frac{(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1})}{a_n}$$

taparıq. Bu qayda ilə tapılmış koordinatları tam ədədlər olan $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ vektoru (3) bircins tənliyinin həllidir və aydındır ki, bütün həllər bu qayda ilə tapıla bilər.

İndi isə (1) tənliyinin hansısa bir məxsusi həllini tapmaqla məşğul olaq.

ƏBOB$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$ olarsa, (1) tənliyinin tam ədədlər çoxluğunda həllinin olması üçün zəruri və kafi şərt $d \mid a$ şərtidir. Tutaq ki, bu şərt ödənilir və $c = \frac{a}{d}$. Ən böyük bölən haqqında teoremə əsasən $\exists b_1, b_2, \ldots, b_n$ tam ədədləri var ki,

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = d \qquad (4)$$

bərabərliyi ödənilir. Onda aydındır ki, $x_1 = cb_1$, qaydası ilə təyin edilmiş ədədlər (1) tənliyinin məxsusi həlli olacaq.

Tutaq ki, $a_n \neq 0$, ƏBOB$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = d$, $c = \frac{a}{d}$ $x_2 = cb_2, \ldots, x_n = cb_n$ tam ədəddir və $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ədədləri (4) münasibətini ödəyirlər. Onda (1) tənliyinin ümumi həlləri aşağıdakı kimi verilə bilər:

$$y_1 = cb_1 + x_1, y_2 = cb_2 + x_2, \ldots, y_{n-1} = cb_{n-1} +$$
$$+ x_{n-1}, y_n = cb_n + x_n$$

Burada $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ verilmiş istənilən ədədlərdir, x_n isə

$$x_n = -(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{n-1}x_{n-1}) : a_n$$

qaydası ilə tapılır.

Qeyd. ƏBOB$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ olarsa, a ədədinin istənilən tam qiymətində (1) tənliyinin tam həlləri var.

Misal. $5x + 3y = 2$ tənliyinin tam köklərini tapaq.

ƏBOB(5,3)=1 olduğundan verilmiş tənliyin tam ədədlər çoxluğunda həlli var. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $x = 1, y = -1$ verilmiş tənliyin məxsusi həllidir. Verilmiş tənliyə uyğun $5x' + 3y' = 0$ bircins tənliyinin həlləri

$$y' = -\frac{5x'}{3}, \ (x' \text{ istənilən tam ədəddir})$$

şəklində tapılır. Beləliklə, verilmiş tənliyin ümumi həlləri aşağıdakı kimi tapıla bilərlər

$$x = 1 + x'; \ y = -1 - \frac{5x'}{3}.$$

Tam həlləri tapmaq üzün $x = 3k, \ k \in Z$, götürmək lazımdır. Bu halda $x = 1 + 3k$ $y = -1 - 5k$ alınar.

Bəzən Diofant tənliklərini həll etmək üçün müəyyən bir sadə ədədə görə çıxıqlara-qalıqlara baxmaq çox faydalı olur.

Misal 1. $x^3 + 117y^3 = 5$ tənliyinin həllinin olub-olmadığını araşdırmaq üçün 9-a nəzərən çıxıqlara baxaq. 9-a görə qalıqlar cədvəlini tərtib edək

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3	0	1	8	0	1	8	0	1	8

Hər hansı bir ədədin kubu ya 9-a bölünür, ya da 9-a bölmədə qalıqda 1, ya da 8 alınır. Verilən tənlikdə ikinci hədd 9-a böləndüyü üçün ilk həddin 9-a qalığı 5-ə bərabər olmalıdır ki, bu da mümkün deyil. Buna görə də bu tənliyin tam kökləri yoxdur.

Müəyyən göstərilişə malik olan ədədlərin tapılması da Diofant tənliklərinə gətirilir.

Misal 2. $\frac{x^2 + y^2}{xy}$ şəklində göstərilə bilən bütün natural ədədləri tapın. Burada x və y natural ədədlərdir.

Həlli. $\frac{x^2 + y^2}{xy} = k; \frac{x}{y} = t$ işarələmələrindən sonra $t^2 - kt + 1 = 0$ kvadrat tənliyini almış olarıq. x, y natural ədədlər olduğundan t müsbət rasional ədəd olmalıdır. Məsələ aşağıdakına ekvivalent olar: k-nın hansı natural qiymətlərində $t^2 - kt + 1 = 0$ tənliyinin heç olmasa bir rasional müsbət kökü var? Bunun üçün zəruri və kafi şərt $D = k^2 - 4$ diskriminantının hansısa natural m ədədinin kvadratı olmasından ibarətdir.

$$D = k^2 - 4 = m^2$$

Onda

$$k^2 - m^2 = (k - m)(k + m) = 4$$

olmalıdır. Bu isə yalnız aşağıdakı iki halda mümkündür:

a) ya $k - m = 2$ və $k + m = 2$.

b) ya da $k - m = 1$ və $k + m = 4$.

İlk variantda $m = 0$ olmalıdır. Bu halda $D = 0$ və $t = 1$ alınır.

İkinci variant isə mümkün deyil. Beləliklə, yalnız $k = 2$ ədədini tələb edilən şəkildə göstərmək olar.

Misal 3. $xy - 9 = 2x + 3y$ tənliyinin tam köklərini tapın.

Həlli. Asanlıqla yoxlamq olar ki, verilən tənlik

$$(x - 3)(y - 2) = 15$$

tənliyinə ekvivalentdir. Buna görə də verilən tənliyin həlli aşağıdakı sistemlərin tam həllərinin tapılmasına ekvivalentdir:

a) $x - 3 = \pm 1, \ y - 2 = \pm 15$; *b)* $x - 3 = \pm 3, \ y - 2 = \pm 5$

c) $x - 3 = \pm 5, \ y - 2 = \pm 3$; *d)* $x - 3 = \pm 15, \ y - 2 = \pm 1$

Misal 3. $x^2 + y^2 = z^2$ tənliyinin tam həllərini tapaq.

Həlli. Tənliyin köklərinin bəzi xassələrini qeyd edək

a) x, y, z ədədlərindən hər hansı ikisi müəyyən bir d ədədinə bölünürsə, üçüncü ədəd də d-yə bılünür.

b) (x, y, z) ədədləri verilən tənliyin köklərididirsə, istənilən d ədədi üçün (dx, dy, dz) ədədləri də verilən tənliyin köklərididir.

Buna görə də tənliyin yalnız istənilən ikisi qarşılıqlı sadə olan həllərini araşdırmaq kifayətdir. Fərz edəcəyik ki,

$$\text{ƏBOB}(x, y) = \text{ƏBOB}(x, z) = \text{ƏBOB}(y, z) = 1.$$

Onda ədədlərdən heç olmasa biri tək olmalıdır. İsbat edək ki, x, y, z ədədlərindən biri cüt, digər ikisi isə tək ədədlər olmalıdır. Doğrudan da, ikisi cüt olarsa, üçüncü ədəd də cüt olmalıdır və ikisinin tək olmasından üçüncünün cüt olması alınır. Digər tərəfdən, x, y ədədlərindən yalnız biri tək ola bilər. Əks halda tənliyin sağ tərəfi 4-ə bölünməlidir; sol tərəf isə 4-ə bölünə bilməzdi.

Beləliklə, fərz edəcəyik ki, x cüt, y və z isə tək ədədlərdir. Onda

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{(z-y)(z+y)}{4} \qquad (*)$$

Aydındır ki,

$$\text{ƏBOB}\left(\frac{z-y}{2};\frac{z+y}{2}\right)=1$$

olmalıdır. Əks halda z və y ədədləri qarşılıqlı sadə olmazlar. (*) bərabərliyinin doğru olması üçün

$$\frac{z-y}{2};\frac{z+y}{2}$$

ədədlərindən hər biri tam ədədlərin kvadratına bərabər olmalıdırlar. Başqa sözlə, müəyyən k,m tam ədədləri üçün

$$\frac{z-y}{2}=k^2;\frac{z+y}{2}=m^2$$

münasibətləri ödənilməlidir. Onda

$$x=2km;$$
$$y=m^2-k^2;$$
$$z=m^2+k^2$$

münasibətlərini almış olarıq.

$x^2+y^2=z^2$ tənliyinin cüt-cüt qarşılıqlı sadə bütün həlləri aşağıdakı kimi təyin edilirlər:

$$x=2km, y=m^2-k^2,$$
$$z=m^2+k^2$$

Burada κ və m istənilən tam ədədlərdir.

Xüsusi halda $k=5,m=7$ olduqda

$$x=km=35,$$
$$y=m^2-k^2=49-25=24,$$
$$z=m^2+k^2=49+25=74$$

kökləri alınır. Bilavasitə, hesablama ilə alınmış ədədlərin verilmiş tənliyin kökləri olduğunu yoxlamaq olar.

$x^2+y^2=z^2$ tənliyini ödəyən $x,y,z\in Z$ ədədlərinə **Pifaqor ədədləri** deyilir.

TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

Bir çox məsələlərin həllində verilmiş bir neçə kəmiyyətlərə əsasən (dəyişənlərdən asılı funksiya) bir neçə məchul kəmiyyətin tapılması lazım gəlir. Sadə bir məsələyə baxaq.

Sahəsi 2400 m^2 olan düzbucaqlı şəklində torpaq sahəsində uzunluğu 200 m olan hasar çəkmək lazımdır. Sahənin enini və uzunluğunu tapın.

Sahənin uzunluğunu x, enini y ilə işarə edək . Məsələnin şəklindən alınır ki, x və y eyni zamanda iki tənliyi ödəyir.

$$\begin{cases}2x+2y=200\\xy=2400\end{cases}$$

Birinci tənliyin hər iki tərəfini 2-yə bölüb, məchullardan birini digəri ilə ifadə edib, məsələn y-i x-lə $y=100-x$ ifadə edib 2-ci tənlikdə nəzərə alsaq, x-dən asılı kvadrat tənlik alarıq (bu həll üsulu əvəzetmə üsulu adlanır).

$$x(100-x)=2400,$$

və ya

$$x^2-100x+2400=0$$

Həll edib, $x_1=60$, $x_2=40$, uyğun olaraq, y_2=60 alarıq.

Belə olduqda sistemin iki "simmetrik" həlli, $x=60, y=40$ və

$x=40, y=60$ var.

Bu təəccüblü deyil, sistem simmetrik olduğundan x-i y ilə və əksinə ifadə etməklə heç nə dəyişilmir. Uzunluğunu x, enini y ilə işarə etməklə yaxşı bir $x\geq y$ şərtini qoymuş olduq (uzunluğu enindən kiçik deyil). Ona görə sistemin iki həllindən biri uzunluğu $x=60m$, enini $y=40$ m götürürük.

Faktiki olaraq, bizim məsələmizin "cəbri modeli" iki sistem tənlikdən və bir bərabərsizlikdən ibarətdir.

Tənliklər sistemi qurmaqla həll edilən məsələlər zamanı həmişə bərabərsizliklərlə məhdudlaşdırmanı nəzərə almaq lazımdır. Ən əsası sistem tənliyi həll etməkdir. Biz indi həll zamanı istifadə olunan üsullardan danışacağıq.

Tərifdən başlayaq.

Bir neçə tənliyin (birdən artıq) fiqurlu mötərizədə verilməsinə sistem tənlik deyilir. Fiqurlu mötərizə onu göstərir ki, sistemə daxil olan tənliklər eyni zamanda yerinə yetirilsin.

Beləliklə, sistem tənliyin həllər çoxluğu, sistemə daxil olan tənliklərin həllər çoxluğunun kəsişməsindən ibarətdir. Deməli, bu kəsişməni tapmaq, ya da bu kəsişmənin boş olduğunu, yəni həlli olmadığını göstərmək lazımdır. Axırıncı halda bu sistem kəsişməyən adlanır.

Demək lazımdır ki, elə məsələlər var ki, onların həlli bir neçə tənliyin həllinin birləşməsini tələb edir, yəni dəyişmənin bütün qiymətləri bərabərlikdən heç olmasa birini ödəsin. Bu sistem tənliyin birləşməsi adlanır. Sistem tənliklərin birləşməsi kvadrat mötərizə ilə işarə olunur.

$$\left[\begin{matrix}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{matrix}\right.$$

Amma, qayıdaq sistemlərə. Sistemə daxil olan məchulların sayı, tənliklərin sayından həm çox, həm də az ola bilər. Lakin riyaziyyat dərslərində məchulların və tənliklərin sayı eyni olan sistem tənliklərin həlli keçirilir.

Bəzi məsələlərin həllində yalnız sistem tənliyin həllinin olub-olmamasını, həlli varsa, sonlu və ya sonsuz olduğunu araşdırmaq lazım gəlir.

Ən sadə tənlik xətti tənlikdir. Ən asan sadə sistem, xətti tənliklər sistemidir. Onlar adi cəbri çevrilmələrin köməyi ilə araşdırılır və həll edilir. İki və ya üç məchul üçün onları artıq İkiçayarası və qədim Çin riyaziyyatçıları həll edə bilirdilər. Birinci növbədə bu sistem tənliklərin həlli ilə tanış olaq.

XƏTTİ TƏNLİKLƏR SİSTEMİ

Dəyişənləri birinci dərəcə olan tənliklər sistemi xətti tənliklər sistemi adlanır.

Bizim baxacağımız xətti tənliklər sisteminin həlli Qauss üsulu ilə tanınır.

Tutaq ki, sistem tənlik üç dəyişənlə verilmişdir

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+3z=2\\x-y=1\end{cases}$$

Birinci tənlikdən ikincini çıxaq (yəni sol tərəflərinin fərqini sağ tərəflərinin fərqi ilə bərabərləşdirək) sonra isə üçüncüdən

$$\begin{cases}x+y+z=0\\y+2z=2\\-2y-z=1\end{cases}$$

alırıq.

Aydındır ki, verilmiş sistemin hər bir həlli alınmış sistemi ödəyəcəkdir. Əksinə, birinci tənliyi digər ikisi ilə toplasaq, verilmiş sistem tənliyə qayıtmaq mümkün olduğundan, yeni sistem tənliyin hər bir həlli verilmiş sistem tənliyi ödəyəcəkdir. Nəticədə biz ikinci və üçüncü tənlikdən x-ı yox etdik. İndi ikinci və üçüncü tənliklərə bir dərəcəli iki məchullu tənliklər sistemi kimi baxa bilərik.

Sonra, ikinci tənliyi 2 – yə vurub, üçüncü tənlikdən çıxsaq, y-i yox edərək, yeni sistem alarıq.

$$\begin{cases}x+y+z=0\\y+27=2\\3z=5\end{cases}$$

Axırıncı tənlikdən $z=\frac{5}{3}$ alarıq. Bu qiyməti ikinci tənlikdə yerinə yazsaq, $y=-\frac{4}{3}$ alarıq. Birinci tənlikdə y və z-in qiymətlərini yerinə yazsaq, $x=-\frac{1}{3}$ alarıq. Qauss üsulu ilə istənilən sayda məchulu və tənliyi olan xətti tənliklər sistemini həll etmək olar. Əvvəlcə onları elə yazmaq olar ki, məchullar bir sütunda və birinci məchul birinci tənlikdə öz yerini tutsun. Bunun üçün məchulların və ya tənliklərin yerini (hamısı eyni zamanda) dəyişmək lazımdır.

Bu tənliklər bir halda, yəni, bütün tənliklər $0=b$ şəklində olduqda, alınmaya bilər. Onda demək olar ki, sistem tənliyin ya həlli yoxdur (heç olmazsa, sağ tərəflər-

dən biri sıfır olmasın) və yaxud məchulların bütün qiymətləri onun həllidir (əgər sağ tərəfləri də sıfır olduqda). Bu hal həddən artıq dərinliyə getməkdən yaranmır, eyni zamanda "normal" halda da rastlaşmaq olar. Sonrakı addımda bütün tənliklərdən uyğun vuruqlara vurmaqla birinci tənliyi çıxıb, birinci məchulu yox etmək olar. Sonra fikrən birinci tənliyi atıb, qalan bir məchulu və bir tənliyi az olan sistem tənliyi həll edirik. Məchulu yox etmək lazım gələnə kimi davam etdirmək lazımdır. Əgər sistem "yaxşıdır" sa (riyaziyyatçılar "nəsli pozulmayan" adlandırırlar), onda, nəticədə üçbucaqlı sistemə gələcəyik, hansı ki, axırıncı tənlik $az = b$, harada ki, $a \neq 0$, z-axırıncı məchuldur. Buradan z-i tapıb, ardıcıl olaraq tənliklərdə yerinə yazıb, qalan məchulları tapmaq olar. Bu halda sistemin yeganə həlli var.

Lakin təsvir olunmuş həll alqoritmi əvvəlki misalda olduğu kimi o qədər də səlis qurtarmır.

Əvvəlki sistemi $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=2 \\ 5x+7y+9z=4 \end{cases}$ sistem

tənliyi ilə əvəz edək.

x-ı yox edərək $\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=2 \\ 2y+4z=4 \end{cases}$ alarıq

y-dan azad olsaq

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$ alarıq

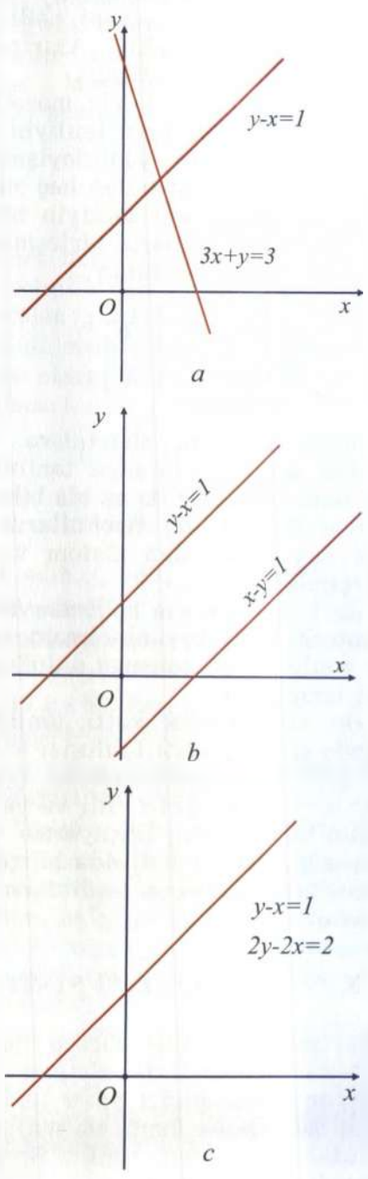
Faktiki olaraq nəticədə axırıncı tənlik yox oldu, çünki o, məchulun bütün qiymətlərində doğrudur. Bu sistemin sonsuz sayda həlli var: z-ə istənilən qiyməti vermək olar; $y=2-2z$ və $x = z - 2$ isə birqiymətli təyin olunur. Sistem tənliyin həlli x-in istənilən qiymətində ($z - 2$; $2 - 2z$; z şəkilli üçlüklərə bərabərdir. Başqa hal da ola bilər.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=2 \\ 5x+7y+9z=4 \end{cases}$$

Qauss üsulu aşağıdakı şəkildə göstərilir.

İki məchullu iki tənliyin həllinin üç halı ola bilər: bir kökü var, (düz xətlər kəsişir), həlli yoxdur (düz xətlər paraleldir), Sonsuz sayda həlli var (düz xətlər üst-üstə düşür)

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ y+2z=2 \\ 0=1 \end{cases}$$



Şəkil 1.

Aydındır ki, sistemin həlli yoxdur.

Sistem tənliklərə həndəsi nöqteyi-nəzərincə baxmaq olar. Koordinat müstəvisində iki məchullu xətti tənliyin qrafiki düz xətdir. Deməli, iki məchullu xətti tənliklər sistemini həll etmək, bir neçə düz xəttin kəsişmə nöqtəsini tapmaq deməkdir. (şəkil 1). İki tənlik üçün üç hal ola bilər: kəsişirlər (yeganə həll) paralel olurlar (həlli yoxdur) üst-üstə düşərlər (sonsuz sayda həlli var).

Üç məchullu xətti tənliklər üç ölçülü fəza müstəvisində verilir. Müstəvilər birinci sistemə daxil olan tənliklərlə bir nöqtədə kəsişirlər. Onlar eyni zamanda ikinci sistemin bir düz xətti ilə kəsişir və ya üçüncüdə olduğu kimi heç bir ortaq nöqtəsi olmur. Nəhayət üç müstəvi bir-birilə kəsişə bilər. Bu halda sistemin tənlikləri bir-birindən sabit vuruqları ilə fərqlənirlər.

Qauss üsulundan başqa xətti tənliklər sisteminin həllinin başqa üsulları da var. Bizim dövrümüzdə xətti tənliklər sisteminin həlli üsulları riyazi iqtisadiyyat məsələləri ilə bağlı xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Adətən belə məsələlər çoxlu sayda məchulu olan sistem tənliklərlə göstərilir.

SİSTEM TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNİN ÜMUMİ PRİNSİPLƏRİ

Ümumi şəkildə verilmiş sistemlərə qayıdaq. Eyni dəyişənli iki sistemin həllər çoxluğu eyni olarsa, belə sistemlər eynigüclü və ya ekvivalent sistem adlanır, yəni birinci sistemin istənilən hər bir həlli ikinci sistemin həlli olsun və əksinə. Verilmiş sistem tənliyin əvəzinə onunla eynigüclü olan sistem həll etmək olar.

Sistemə daxil olan tənlikləri çevirmələr vasitəsilə onunla eynigüclü olan sistemə gətirmək olar.

Bu çevirmələr sistemə daxil olan məchulların sayını azaltmaq məqsədi ilə aparılır. Əlbəttə ki, yeni sistemdə tənliklərin sayı həll edilmək üçün kifayət qədər olmalıdır.

Bundan sonrakı gedişat ondan kiçik sistemlərdə təkrarlanır. Nəticədə bir məchullu tənliyin həllinə gəlirik. Onu həll edib digər tənliklərdə yerinə qoyub həll edirik. Bu qayda ilə biz xətti tənliklər sistemini həll etmiş oluruq.

Amma gördüyümüz kimi, bəzən bir məchullu tənliyə gəlmək olmur, onda həlli istənilən bir neçə parametr vasitəsilə ifadə edirik. Amma məktəb məsələlərində belə hallarla rastlaşmadığımıza görə, bu hala bir daha qayıtmayacağıq.

Çevirmələr zamanı sistem "budaqlana" bilər, yəni bir neçə sistemin birləşməsinə çevrilə bilər. Bununla birlikdə təyin oblastı məhdudlaşdırılan bərabərsizliklər əlavə oluna bilər.

Çevrilmələr zamanı kənar kökləri alınmaması üçün həllər çoxluğunun necə olacağını diqqətlə izləmək lazımdır.

Çox zaman məchulların sayını azaltmaq üçün iki üsul var: əvəzetmə, hansı ki, sahəyə aid məsələ istifadə etmişik və məchulun yoxedilməsi, toplanması üsulu (Qauss üsulu belə işləyir) Amma bu üsulları sistemin uyğun olaraq hazırlanmasından sonra tətbiq etmək olar.

Bəs biz hansı çevirmələri aparmalıyıq ki, nə kökləri itsin, nə də kənar köklər alınsın.

1. Sistemin istənilən tənliyini tənliyin hər tərəfinə eyni ədəd əlavə etməklə və ya sıfırdan fərqli ədədə vurmaqla onunla eynigüclü tənliyə çevirmək olar. Ədəd əvəzinə sıfırdan fərqli olub, tənliyin təyin oblastını dəyişməyən (vurma halında) funksiya da götürmək olar.

2. Sistemə onun istənilən nəticəsini yazmaq olar, əksinə sistemin tənliyi digərlərinin nəticəsidirsə, onu pozmaq olar.

Məsələn, $\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g((x,y)=0 \end{cases}$ sisteminə onun nəticəsini əlavə etsək $f(x,y) + kg(x;y) = 0$ Alınmış sistem tənliik

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x;y)=0 \\ f(x;y)+kg(x,y)=0 \end{cases}$$

Birinci tənliyi və ya $k \neq 0$ olduqda ikinci tənliyi yox etmək olar, ona görə ki, hər ikisi, yəqin ki, başqa iki tənliyin nəticələridir. Buradan üçüncü qayda alınır.

3. Sistemin istənilən tənliyini onunla sistemin başqa tənliyinin istənilən ədədə

hasilinin cəmi ilə əvəz etmək olar. Bu çevirmələr Qauss üsulunun əsasıdır.

Üç qayda ilə məhdudlaşaq, baxmayaraq ki, digərləri də var (məsələn uyğun qeydlər ilə sistemin tənliklərini bir-birinə vurmaq olar)

Baxaq görək bu qayda sistem tənliklərin həllində özünü necə göstərir (təklif edilən üsul ola bilər ki, əlverişsizdir, amma o digər mənada lazımdır). Tutaq ki, iki tənlikdən ibarət olan

$$\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases}$$

sistemi həll etmək lazımdır.

Birinci tənliyi kvadrata yüksəldək

$$x^2+2xy+y^2=a^2 \ (*)$$

Bu çevirmələr eynigüclü deyil, çünki başqa bir $x+y=-a$ tənliyinin həlli də həmin tənliyə gətirilə bilər. Amma (*) tənliyini bizim sistemimizə nəticə kimi birləşdirmək olar. İkinci tənliyin 4 mislini (*) tənliyindən çıxaq:

$$x^2-2xy+y^2=(x-y)^2=a^2-4b \text{ və ya}$$

$$x-y=\pm\sqrt{a^2-4b}$$

Bu tənliyi ikinci tənliklə dəyişib birinci tənliyin nəticəsi kimi (*) tənliyini ataq:

$$\begin{cases} x+y=a \\ x-y=\pm\sqrt{a^2-4b} \end{cases}$$

Qeyd edək ki, axırıncı tənlik plyus və minus işarələri ilə fərqlənən iki tənliyin birləşməsidir. İndi sistem tənliyi cəmin yarısı və fərqin yarısı kimi götürmək olar. Nəticədə tənliyin kökü $x^2-ax+b=0$ tənliyinin həllinə gətirilir. $x_{1,2}=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$.

Sistem yerdəyişmə ilə fərqlənən iki $(x,y)=x_1;x_2)$ və ya $(x_2;x_1)$ həllə malikdir.

Tənliklərin sadələşdirilməsində iki vacib yol vuruqlara ayırma, dəyişənin əvəz olunması ("Yeni sehrbazlığa başlayanlara tövsiyə və ya tənlikləri necə həll etməli" məqaləsinə bax) sistem tənliklərin həllində də istifadə olunur.

Məsələn, əgər $\begin{cases} x^2+y=2 \\ x+y^2=2 \end{cases}$ sistemində ikinci tənliyi birinci tənlikdən çıxsaq alarıq:

$$\begin{cases} x2+y=2 \\ x-y-x^2+y^2=0 \end{cases}$$

və ya ikinci tənliyi vuruqlara ayırıb,

$$\begin{cases} x^2+y=2 \\ (x-y)(1-x-y)=0 \end{cases}$$

alarıq.

Bu sistem iki sistemin birləşməsidir.

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+y=2 \\ x-y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y=2 \\ 1-x-y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Bu sistemi çətinlik çəkmədən həll etmək olar.

$$\begin{cases} x^3+y^3=a \\ xy=b \end{cases}$$

şəkilli sistem. Kardana üsulu kub tənliklərin həlli zamanı alınır. ("Kub tənliklər" məqaləsinə bax) İkinci tənliyin hər iki tərəfini kuba yüksəldib $u=x^3$, $v=y^3$ əvəzləməsi aparsaq, bizə tanış olan

$$\begin{cases} u+v \\ uv=b^3 \end{cases}$$

sistemini alırıq.

Dəyişənlərin əvəz edilməsi çox zaman transsendent funksiyalar (logarifma, üstlü və triqonometrik funksiya ("Elementar funksiyalar və onların xassələri" məqaləsinə bax) daxil olan sistem tənliklərdə istifadə olunur.

Amma ümumi halda praktikada yaranan məsələlərdə belə sistemləri həll etmək çox çətin olur.

Bu məsələlər üçün çox zaman təqribi hesablama üsulundan istifadə olunur.

BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN HƏLLİ

İstənilən iki müxtəlif a və b ədədləri üçün iki şərtdən biri ödənməlidir: ya a böyükdür b $(a>b)$, ya da a kiçikdir b $(a<b)$ Əgər, a və b ədədlərini x-dan asılı $A(x)$ və $B(x)$ ifadələri ilə əvəz etsək, onların ədədi qiymətləri arasındakı münasibət x-ın yerinə hansı ədədin qoyulmasından asılıdır. Belə bir məsələ ortaya çıxır: x-ın bütün elə qiymətlərini tapın $A(x)>B(x)$ – də yerinə yazsaq, doğru ədədi bərabərsizliyə çevrilsin. Bu yazı dəyişəni x olan bərabərsizlik adlanır. x-ın qiymətləri onun həlli adlanır. Bərabərsizliyin işarəsini dəyişsək, daha ciddi $A(x)<B(x)$ və $A(x)\le b(x)$ alarıq

Birinci bərabərsizlik kimi, sadə xətti bərabərsizliyi həll edək

$$5x+2>3x+7$$

Əvvəlcə bərabərsizliyin hər iki tərəfindən $3x-3$-ü çıxaq

$$2x>4$$

Qeyd edək ki, bu keçid eynigüclülük adlanır, çünki bərabərsizliyin həllər çoxluğunu dəyişdirmir:

O, ədədi bərabərsizliyin əsas xassələrindən birinə əsaslanır:

İstənilən a, b və c həqiqi ədədləri üçün əgər $a>b$ olarsa,

$$a+c>b+c \text{ olar}$$

Əgər x_0 verilmiş bərabərsizliyin həllidirsə, hər iki hissəyə $c=-3x_0+3$ əlavə etsək, alırıq ki, x_0 həm də $2x_0>4$ bərabərsizliyini ödəyir. Əlbəttə ki, əksi də doğrudur. Bərabərsizliyin başqa xassələrindən istifadə edək.

Əgər $a>b$ və $c>0$ isə onda $ac>bc$ hər tərəfi 2-yə bölək (necə deyərlər, $c=\dfrac{1}{2}$– ə vuraq). Alırıq: $x>2$

Beləliklə verilmiş bərabərsizlik hər hansı $x=x_0$ üçün o zaman doğru olar ki, $x_0>2$ olsun

Bərabərsizliyin bütün həllər çoxluğu ədəd oxunda $(2;\infty)$ şüası ilə göstərilir.

İndi kvadrat bərabərsizliyi həll edək.

$ax^2+bx+c>0$ harda ki, $a\neq 0$, $q(x)=ax^2+bx+c$ kvadrat üçhədlisinin diskriminantına baxaq: $D=b^2-4ac$ əvvəlcə, tutaq ki, $D>0$, yəni , $q(x)$ –ın iki x_1 və x_2 kökü var. $x_1<x_2$ olsun. Onda ("Kvadrat tənliklər " məqaləsinə bax) bərabərsizliyi $a(x-x_1)(x-x_2)>0$ şəklində yazmaq olar. Burada $x<x_1$ olduqda birinci mötərizə müsbət, ikinci mötərizə mənfidir. $x<x_2$ olarsa, hər ikisi müsbər olar. Ona görə verilmiş bərabərsizliyin həlli $a>0$ olduqda $(-\infty;x_1)\cup(x_2\infty)$ (şəkli 1a) iki şüanın birləşməsi $a<0$ olduqda $(x_1:x_2)$ intervalı olar.

$D=0$ halında $x_1=x_2$ və $g(x)=a(x-x_1)^2$ - na anoloji olaraq baxılır. Əgər $D<0$ olarsa, $g(x)$ –in işarəsi bütün həqiqi düz xətdə eynidir (şəkil 1 *b*, *c*.).

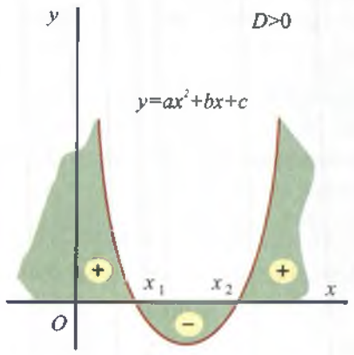
Kvadrat tənlikdə olduğu kimi $g(x)$ – i tam kvadrata ayırsaq, buna tamamilə əmin ola bilərik:

$$g(x)=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{|D|}{4a^2}\right)$$

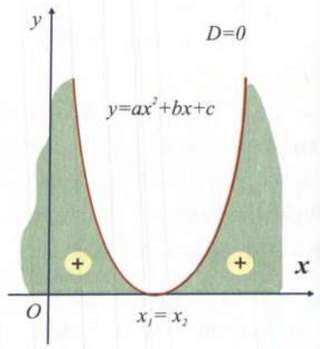
Aydındır ki, burada sağ tərəfin işarəsi a-nın işarəsi ilə üst-üstə düşür, yəni müsbət, $a<0$ olduqda mənfidir.

Bu kiçik araşdırmanın nəticəsini aşağıdakı cədvəldə göstərək:

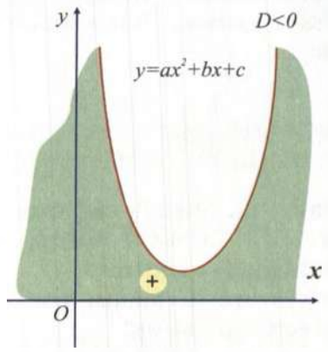
Diskriminant	$ax^2+bx+c>0$ bərabərsizliyinin həlli	
	$a>0$	$a<0$
$D>0$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$	(x_1,x_2)
$D=0$	$(-\infty;x_1)\cup(x_2;\infty)$	Həlli yoxdur
$D<0$	$(-\infty;\infty)$	Həlli yoxdur



a



b

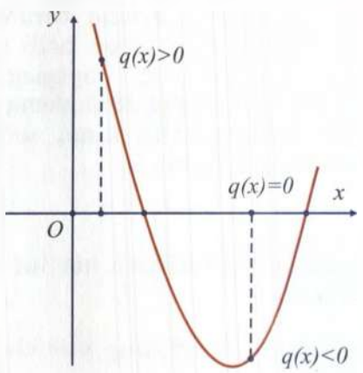


Şəkil 1.

Şəkil 1. $ax^2+bx+c>0$ kvadrat bərabərsizliyi $D>0$ olduqda həlli iki şüanın birləşməsi $(-\infty;x_1)\cup x_2;+\infty$. $D=0$ olduqda $x=x_1=x_2$-dən başqa bütün ədəd oxu. $D<0$ olduqda – bütün ədəd oxu $a<0$ halında anoloji olaraq parabolanın qollarının aşağı yönəlməsi halında baxılır.

Eyni qayda ilə $q(x)<0$ və ciddi olmayan $q(x)\geq 0$, $q(x)\leq 0$ bərabərsizlikləri həll edilir.

Kvadrat bərabərsizliyi başqa yolla da həll etmək olar. $q(x)$ kvadratik funksiyası bütün ədəd oxunda kəsilməzdir. Bu onu göstərir ki, onun qrafiki olan parabolanı qələmi kağızdan ayırmadan çəkmək olar. (dəqiq qaydası "Kəsilməz və kəsilən funksiyalar" məqaləsinə bax) Ona görə, əgər, qrafikdə Ox oxundan aşağıda və Ox oxundan yuxarıda nöqtələr varsa, onda o, Ox oxu ilə bu nöqtələr arasında kəsişəcək (şəkil 2). Daha ciddi deyək. Hər hansı bir aralıqda kəsilməyən və bu aralığın iki nöqtəsində müxtəlif işarəli olan funksiya bu nöqtələr arasında sıfıra bərabərdir.



Şəkil 2.

Əgər funksiya kəsilməzdirsə və $q(x)$ –ın Ox oxundan yuxarı və Ox oxundan aşağı nöqtələri varsa, o zaman onun qrafiki Ox oxu ilə kəsişəcək.

Deməli, $D<0$ olduqda $q(x)$ –ın sıfırları yoxdur. Bu halda onun qrafiki absis oxunun bir hərəkətində yerləşir., yəni $q(x)$ bütün nöqtələrdə eyni işarəlidir. Məsələn, $q(0)=c$ bu halda $q(x)$-ın işarəsi bütün düz xətdə c-sərbəst həddin işarəsi ilə üst-üstə düşür. Qeyd etmək olar ki, kifayət qədər böyük x-lar üçün ax^2 ifadəsinin mütləq qiyməti $bx+c$ ifadəsinin mütləq qiymətindən böyükdür. Ona görə $q(x)$ –ın işarəsi ax^2 –nın işarəsi ilə üst-üstə düşür. $D>0$ olduqda $q(x)$ çoxhədlisinin kökü absis oxunu üç aralığa ayırır: $(-\infty;x_1),(x_1;x_2)$ və $(x_2;\infty)$ $q(x)$ bunların hər birində işarəsini saxlayır. Sonuncu iki aralıqda $q(x)$-ın işarəsi a-nın işarəsi ilə üst-üstə düşür, orta aralıqda isə əksinə (həqiqətən orta intervalın orta nöqtəsi $\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a};q(x)$ - ın qiyməti $-\frac{D}{4a}$-a bərabərdir) Burada yenidən yuxarıda göstərilmiş cədvəli alırıq.

Bu qaydalar istənilən $f(x)>0$ və ya $f(x)<0$ şəkilli kəsilməyən $f(x)$ funksiyalarına aiddir. Nəzərə alaq ki, $f(x)$ funksiyası ola bilər ki, bütün ədəd oxunda təyin olunmasın. Biz $f(x)$ funksiyasının təyin oblastının, $f(x)=0$ tənliyinin köklərinin, kökləri ilə bölünmüş aralıqlarda $f(x)$ –ın işarəsinin (aralıq qiymətlər haqqında teoremə görə bu işarələr sabitdir) tapılmasına gəlib çıxdıq.

$f(x)\geq 0$ və ya $f(x)\leq 0$ bərabərsizliklərinin həllində aralığa funksiyanın sıfırlarını daxil etmək lazımdır. İntervallarda funksiyanın işarəsini təyin etmək üçün aralıqlarda funksiyanın işarəsini təyin etmək üçün aralıqların hər birində bir nöqtə götürək və bu nöqtələrdə $f(x)$ funksiyasının qiymətlərini hesablamaq lazımdır. Başqa yol, hansısa bir intervalda funksiyanın işarəsini tapmaq və aralığın sonuna keçid zamanı necə dəyişildiyini izləmək lazımdır.

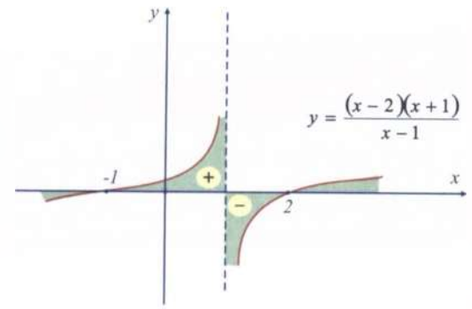
Bu üsulla $f(x)=\frac{(x-2)(x+1)}{x-1}>0$ bərabərsizliyini həll edək.

Onun təyin oblastı $x\neq 1$ bütün ədədlər çoxluğudur, yəni $(-\infty;-1)$ və $(1;\infty)$şüalarının birləşməsidir.

Funksiyanın sıfırları bu çoxluğu dörd aralığa bölür: $(-\infty;-1),(-1;1),(1;2)$ və $(2;+\infty)$; Bir aralıqdan digərinə keçid nöqtələri – 1; 1 və 2 keçdikdə funksiya işarəsini dəyişir. Deməli, bu nöqtələrin hər birində sol tərəfdə işarə funksiyasının işarəsini tapaq

Məsələn, $x=3$ olduqda $(2;+\infty)$ aralığında $f(x)>0$ olar. İndi aydındır ki, x ∈ (–1;1) olduqda $f(x)>0$, qalan iki aralıqda $f(x)<0$ olar. Buradan cavabı $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$ (şəkil 3) alırıq. Əgər biz ciddi olmayan $f(x)\geq 0$ bərabərsizliyini həll etsə idik, cavab: $x\in(-1;1)\cup(2;+\infty)$ alardıq. $x=1$ həllər çoxluğuna daxil deyil, çünki, o funksiyanın təyin oblastına daxil deyil.

Bərabərsizliyin bu üsulla həlli intervallar üsulu adlanır. Əslində $f(x)>0$ bərabərsizliyinin həlli $f(x)=0$ tənliyinin həllinə gətirilir. Bu ən çox $f(x)$ iki çoxhədlinin hasili şəklində göstərilə bildikdə istifadə olunur. Bunlar əgər fərqli vuruqlardırsa, onda aralıqda işarələr növbələnir. Bu həmişə mümkün deyil. Məsələn



Şəkil 3.

$(x-1)^2(x+1)>0$ bərabərsizliyinin sol tərəfi $x=1$ olduqda sıfıra bərabərdir. Bu işarəni dəyişmir (şəkil 4) . Bərabərsizlik ciddi olduğundan $x=1$ həllər çoxluğundan çıxarılır Cavab $(-1;1)\cup(1;\infty)$. Bərabərsizliyin həllinin başqa üsulu – eynigüclü çevirmələr üsulu adlanır. Hansı ki, həllər çoxluğunu dəyişməyən çevirmələr vasitəsilə sadə bərabərsizliklərin həllinə gətirilir: $x>a$ və $x\leq b$ və s.

Əvvəllər xətti bərabərsizliklərin həlli haqqında verilmişdir. Tənliklərin həllinə gətirilən bu üsul haqqında "Yeni sehrbazlığa başlayanlar üçün bir neçə tövsiyə və ya tənlikləri necə həll etməli" məqaləsində ardıcıl danışılmışdır.

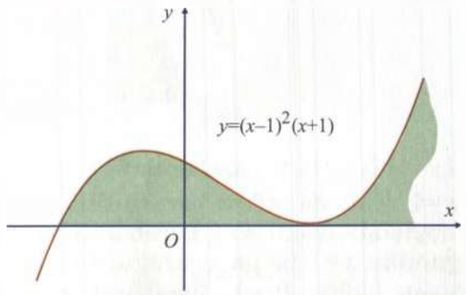
Ona görə də indi biz tənliklərin fərqlənən bərabərsizliklərin həllinə baxaq.

İlk əvvəl qeyd edək ki, bərabərsizliklərin həllində dəyişmənin eynigüclülüyü dəyişdirilməz bir tələbdir. Çünki tənliklərin həllindən fərqli olaraq bərabərsizliyin həllər çoxluğu adətən sonsuzdur və əvəzetmə üsulu ilə kənar kökləri verilmiş bərabərsiz-

lıkdə yoxlamaq mümkün deyil. Bərabərsizliyin hər iki tərəfinə hər hansı funksiyanı əlavə etmək yaxud çıxmaq, eləcə də onunla eynigüclü ifadə ilə əvəz etmək (deyək $\sqrt{A}\sqrt{B}$-ni $\sqrt{AB}$ ilə) əlbəttə ki, bərabərsizliyin işarəsini dəyişmir, ola bilər ki, təyin oblastını dəyişsin.

Bərabərsizliyin hər iki tərəfini $f(x)$ funksiyasına vurduqda bərabərsizlik işarəsinin və funksiyanın təyin oblastının dəyişilməsinə diqqət yetirmək lazımdır. $f(x) < 0$ olduqda vurma zamanı bərabərsizlik işarəsini saxlayır, $f(x) > 0$ olduqda isə işarə əksinə dəyişilir. Sıfırlarını isə ayrı yoxlamaq lazımdır.

Bərabərsizliyin hər iki tərəfindən $f(x)$ funksiyasını götürdükdə daha diqqətli olmalı. $A(x) > B(x)$ bərabərsizliyindən $f(x)$ funksiyası verilmiş barabərsizliyin bütün həllər çoxluğu artan olarsa, $f(A(x)) > f(B(x))$ alınar.



Şəkil 4.

$(x-1)^2(x+1>0)$ *bərabərsizliyin həlli iki oblastın birləşməsidir:* $(-1;1)\cup(1\infty)$

Əgər $f(x)$ azalırsa, onda bərabərsizlik işarəsini dəyişir. $f(A(x)) < f(B(x))$. Əgər $f(x)$ monoton funksiya deyilsə, (məsələn $f(x)=x^2$) onda onun təyin oblastını artma və azalma aralıqlarına bölüb və hər bir aralıqda bərabərsizliyə ayrıca baxmaq lazımdır.

$\sqrt{x+1} > x-1$(*) bərabərsizliyini həll edək.

Kökdən azad olmaq üçün hər tərəfi kvadrata yüksəldək. Amma $y = x^2$ funksiyası monoton deyil: $x \ge 0$ olduqda artır, $x \le 0$ olduqda azalır. Sol tərəfi təyin oblastında (yəni $x+1 \ge 0$) mənfi deyil, sağ tərəfi isə istənilən qiyməti alır. Ona görə $x-1 \ge 0$ və $x-1 < 0$ hallarına baxmaq lazım gəlir. Birinci halda $y = x^2$ artandır və (*) bərabərsizliyi $(x+1) > (x-1)^2$ ilə eynigüclüdür.

($\left(\sqrt{x+1}\right)^2$-nı $x+1$ ilə əvəz etdikdə təyin oblast genişlənir, amma bu eynigüclülüyə mane olmur, ona görə bütün həll $(x+1) > (x-1)^2 \ge 0$-ın həllinə gətirilir.) İkinci halda (*) bərabərsizliyin bütün təyin oblastında həll öz-özlülündə həll edilir. (sol tərəf mənfi deyil, sağ tərəf mənfidir) Qısa şəkildə yazsaq:

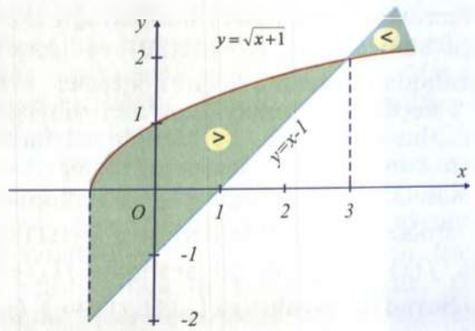
$$\sqrt{x+1} > x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > (x-1)^2 \\ x-1 \ge 0 \\ x+1 \ge 0 \\ x-1 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x2-3x < 0 \\ x \le 1 \\ -1 \le x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x < 3 \\ -1 \le x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x < 3$$

Xatırladaq ki, kvadrat mötərizə sistemin (verilmiş halda bərabərsizliyin) birləşməsini göstərir. Birinci və ən əsas addım bir az sadələşdirib

$$\sqrt{f} > g \Leftrightarrow \begin{cases} f > g^2 \\ f \ge 0 \\ g < 0 \end{cases}$$ şəklində yazmaq olar.

Anoloji olaraq başqa tip bərabərsizliklər üçün də bu sxemi vermək olar.



Şəkil 5.

$\sqrt{x+1} > x-1$ bərabərsizliyin həlli yarıminterval $[-1;3)$

İndi (*) bərabərsizliyinin başqa həllini verək. Burada dəyişənin əvəz olunmasında istifadə olunur. $y = \sqrt{x+1}$ olsun, onda $x = y^2 - 1$ və bərabərsizlik kvadrat şəklində oldu.

$$y^2 - y - 2 < 0$$

Onun həllər çoxluğu $-1 < y < 2$ intervalıdır. x-ı daxil etsək:

$-1 < \sqrt{x+1} < 2$ alarıq.

Təyin oblastını nəzərə alaraq, $0 \le x+1 < 4$ və ya

$-1 \le x < 3$ alarıq

Bu bərabərsizliyi intervallar üsulu ilə də həll etmək olar. (şəkil5). $\sqrt{x+1} = x-1$ tənliyinin yeganə kökü 3-ə bərabərdir.("Yeni sehrbazlığa başlayanlar üçün bir neçə tövsiyə və tənlikləri necə həll etməli"məqaləsinə bax). Bu kök təyin oblastı $x \ge -1$-i iki aralığa bölür. $[-;3)$ və $(3;\infty)$. Misal üçün x=0 və x=8 götürsək, alarıq ki, birinci intervalda bərabərsizlik ödənilir, ikincidə ödənilmir.

BİRCİNS SİMMETRİK ÇOXHƏDLİLƏR VƏ BƏRABƏRSİZLİK

İlkin məlumatlar: aşağıdakı faktları məlum sayıb onlara tez-tez istinad edəcəyik:

$$a_1, a_2, ..., a_n$$

müsbət ədədlərinin p-ci ortası

$$\sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p}{n}}$$

ədədinə deyilir və onlar arasında aşağıdakı münasibət ödənilir:

$$p > q \ge 1 \Rightarrow \sqrt[p]{\frac{a_1^p + a_2^p + ... + a_n^p}{n}} \ge$$

$$\ge \sqrt[q]{\frac{a_1^q + a_2^q + ... + a_n^q}{n}}.$$

Bərabərlik halı yalnız və yalnız

$$a_1 = a_2 = ... = a_n$$

olduqda doğrudur.

İkidəyişənli və üçdəyişənli hallar. Əvvəlcə bir neçə misala baxaq.

Misal 1. $a > 0; b > 0$. İsbat edək ki,

$$ab(a+b)\left(a^2+b^2\right) \le 2\left(a^5+b^5\right).$$

Dəyişənlərin dəyişmə oblastı olan $D = \{(a;b): a > 0; b > 0\}$ çoxluğu koordinat müstəvisinin **1**-ci rübüdür. Baxılan oblast koordinat başlanğıcından çıxan və bu rübdə yerləşən şüalar vasitəsilə tam şəkildə örtülür. Daha dəqiq desək aşağıdakı doğrudur

$$D = \bigcup_{k>0} \{(x;y): y = kx,\ x > 0\}.$$

İstənilən belə şüa müstəvi üzərində koordinat başlanğıcından fərqli seçilmiş hər hansı ikinci nöqtə ilə – məsələn, $a^2 + b^2 = 2$ qövsünün üzərində götürülmüş nöqtə ilə – qarşılıqlı birqiymətli şəkildə təyin edilir. Söylənilən qövs üzərində $(a;b)$ nöqtəsi seçilmişsə, uyğun şüanın tənliyi aşağıdakından ibarət olacaq

$$x = at;\ y = bt;\ t > 0.$$

İstənilən belə bir şüa üzərində verilən bərabərsizlik aşağıdakı formaya düşür

$$xy(x+y)\left(x^2+y^2\right) = t^5 ab(a+b)\left(a^2+b^2\right),$$

$$2\left(x^5+y^5\right) = t^5\left(2\left(a^5+b^5\right)\right),$$

$$xy(x+y)\left(x^2+y^2\right) \le 2\left(x^5+y^5\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ab(a+b) \le \left(a^5+b^5\right);\ a^2+b^2 = 2.$$

Beləliklə, tələb edilən bərabərsizliyin əvəzində $a^2 + b^2 = 2$ çevrəsinin uyğun qövsü üzərində

$$ab(a+b) \le a^5 + b^5$$

bərabərsizliyinin isbat edilməsi kifayətdir.

$a^2+b^2=2$ olduqda həndəsi, ədədi, kvadratik, p-ci orta arasındakı münasibətə əsasən $a=b=1$ halında soldakı hər iki ifadə özünün maksimal, sağdakı ifadə isə özünün minimal qiymətini alır:

$$\max_{a^2+b^2=2} ab=1;\quad \max_{a^2+b^2=2}(a+b)=2;$$

$$\min_{a^2+b^2=2}\left(a^5+b^5\right)=2.$$

Beləliklə,

$$\max_{a^2+b^2=2}\left(ab(a+b)\right)=\min_{a^2+b^2=2}\left(a^5+b^5\right)$$

Baxılan qövsün istənilən digər nöqtəsində isə ciddi

$$ab(a+b)<a^5+b^5$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir. Bərabərsizlik isbat edildi.

Misal 2. $a>0;b>0;c>0$. İsbat edək ki,

$$3abc(a+b+c)\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^2.$$

Bərabərsizliyin araşdırılma oblastı üçölçülü fəzanın birinci oktantıdır

$$D=\{(x;y;z): x>0,y>0,z>0\}.$$

Bu oblast koordinat başlanğıcından çıxan və bu oktantda yerləşən şüaların birləşməsi şəklində göstərilə bilər

$$D=\bigcup_{a>0,b>0,c>0}\{(x;y;z): x=at,y=bt,z=ct;\ t>0\}.$$

İstənilən belə şüa koordinat başlanğıcı və baxılan oktantda seçilmiş hər hansı ikinci nöqtə ilə – məsələn $a+b+c=3$ müstəvisinin 1-ci oktantla kəsişməsindən alınan üçbucağın nöqtəsi ilə – qarşılıqlı birqiymətli şəkildə təyin edilir. Araşdırılan oblastın istənilən nöqtəsi aşağıdakı şəkildə göstərilə bilər

$$\forall x>0,\forall y>0,\forall z>0,\exists t>0,\exists a,b,c>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a+b+c=3; x=at,y=bt,z=ct.$$

Qeyd edilmiş istənilən şüa üzərində verilən bərabərsizlik üçün aşağıdakı alınır

$$xyz=t^3abc;\ (x+y+z)=t(a+b+c)$$
$$x^2+y^2+z^2=t^2\left(a^2+b^2+c^2\right)$$
$$3xyz(x+y+z)\le\left(x^2+y^2+z^2\right)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9abc\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^2;\ a+b+c=3$$

Beləliklə, tələb edilən bərabərsizliyin əvəzində $a+b+c=3;\ a,b,c>0$ üçbucağında

$$9abc\le\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

bərabərsizliyini isbat etmək kifayətdir.

Ədədlərin cəmi sabit olduğundan $a=b=c=1$ olduqda sol tərəfdəki ifadə maksimal, sağ tərəfdəki ifadə isə minimal qiymət alır və

$$\max_{a+b+c=3}(9abc)=9;$$

$$\min_{a+b+c=3}\left(a^2+b^2+c^2\right)^2=9.$$

Baxılan üçbucağın istənilən digər nöqtəsində isə

$$9abc<\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

bərabərsizliyi ödənilir. Bərabərsizlik isbat edildi.

İsbat prosesində və baxılan bərabərsizliklərdə bir neçə ümumi cəhəti qeyd etmək lazımdır:

-bərabərsizliklərin araşdırılma oblastı müəyyən bir nöqtəni özündə saxlayırsa, koordinat başlanğıcından çıxan və həmin nöqtədən keçən şüanı bütövlükdə özündə saxlayır.

-bərabərsizliyin hansısa bir şüada araşdırılması, həmin şüanın istənilən bir nöqtəsində araşdırılmasına gətirilir, yəni bərabərsizliyin hər hansı bir şüada doğru olub-olmaması onun həmin şüanın istənilən bir nöqtəsində doğru olub-olmaması ilə eynigüclüdür. Başqa sözlə, koordinat başlanğıcından çıxan və oblasta daxil olan şüa üzərində bərabərsizlik özünün invariantlığını saxlayır.

Ümumi hal. n-ölçülü fəzanın $K\subset R^n$ alt çoxluğu aşağıdakı spesifik xassəyə malikdir

$$\forall(x_1,x_2,...,x_n)\in K,$$
$$\forall t>0\Rightarrow(tx_1,tx_2,...,tx_n)\in K$$

Bu halda K çoxluğu **konus** adlandırılır. Başqa sözlə, konus hansısa bir nöqtəni özündə saxlayırsa, onda həmin nöqtəni özündə saxlayan və koordinat başlanğıcından çıxan şüanı da bütövlükdə özündə saxlayır.

Koordinat müstəvisinin rüblərindən hər hansı biri, təpəsi koordinat başlanğıcında olan hər hansı bir bucaq və s. konusa misaldır.

İki konusun birləşməsi və kəsişməsi də konusdur.

Tutaq ki, K və C konuslardır. Tərifə görə

$$(x_1,x_2,...,x_n)\in K\cap C$$

olarsa,

$$(tx_1,tx_2,...,tx_n)\in K\cap C$$

olmalıdır. Eyni qayda ilə verilən nöqtə konuslardan heç olmasa birinə aid olarsa, həmin nöqtəni özündə saxlayan bütün şüa da həmin konusa aid olmalıdır. Buna görə də şüa bütövlükdə birləşməyə aid olmalıdır.

K müəyyən bir konus, S isə aşağıdakı şərti ödəyən altçoxluqdur.

$$K=\bigcup_{\lambda>0}\lambda S=\{\lambda x: x\in S\}.$$

S çoxluğuna K konusunun **törədici çoxluğu** deyilir. Bu məktəb həndəsəsindən bizə yaxşı məlum olan konusun en kəsiyini xatırladır.

Məsələn, ikiölçülü müstəvidə absis və ordinat oxlarının müsbət istiqamətlərini birləşdirən hər hansı bir əyri birinci rübdən ötrü, absis oxunun müsbət və mənfi istiqamətlərini birləşdirən hər hansı bir əyri yuxarı yarım müstəvidən ötrü, koordinat başlanğıcını özündə saxlayan hər hansı çevrə və ya kvadrat koordinat başlanğıcından başqa bütün müstəvidən ötrü, fəzada yarımkürə yerləşdiyi yarımfəzadan ötrü və s. törədici çoxluqlardır. $xy=1\ \ (x>0,\ y>0)$ hiperbolası da 1-ci rüb üçün törədici çoxluqdur. Doğrudan da, koordinat başlanğıcından çıxan və 1-ci rübdə yerləşən hər bir şüa bu hiperbola ilə kəsişir.

Müəyyən bir K konusunda təyin edilmiş $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyası aşağıdakı xassəyə malikdirsə

$$(x_1,x_2,...,x_n)\in K,\ \forall t>0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,...,x_n)$$

$f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyasına k **tərtibdən bircins** funksiya deyilir. (Bəzən k **tərtibdən müsbət bircins** funksiya da deyilir).

Qeyd. $x=(x_1,x_2,...,x_n);\ f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ işarələmələrindən istifadə edəcəyik.

Misal 3. $f(x,y,z)=x+y+z$ funksiyası 1-ci tərtibdən bircins funksiyadır. Doğrudan da

$$f(tx,ty,tz)=tx+ty+tz=t(x+y+z)=tf(x,y,z).$$

2. $f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ funksiyası 0-cı tərtibdən bircins funksiyadır.

$$f(tx,ty,tz)=\frac{tx}{ty}+\frac{ty}{tz}+\frac{tz}{tx}=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=f(x,y,z).$$

3. $f(x,y,z)=\frac{x^2}{y^5+z^5}$ funksiyası (-3)-cü tərtibdən bircins funksiyadır.

$$f(x,y,z)=\frac{(tx)^2}{(ty)^5+(tz)^5}=t^{-3}\frac{x^2}{y^5+z^5}=t^{-3}f(x,y,z)$$

4. İstənilən tərtibli bircins funksiya var. Məsələn,

$$f(x,y,z)=x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha$$

funksiyası α tərtibdən bircins funksiyadır.

$$f(x,y,z)=(tx)^\alpha+(ty)^\alpha+(tz)^\alpha=$$

$$=t^\alpha\left(x^\alpha+y^\alpha+z^\alpha\right)=t^\alpha f(x,y,z)$$

Tutaq ki, K konus, C isə onu törədən müəyyən bir çoxluqdur. $f(x)$ isə həmin konusda təyin edilmiş k- tərtibdən bircins funksiyadır. Onda

$$1.\ (\forall x\in K,\ f(x)\geq 0)\Leftrightarrow(\forall x\in C,\ f(x)\geq 0)$$

$$2.\ (\forall x\in K,\ f(x)\leq 0)\Leftrightarrow(\forall x\in C,\ f(x)\leq 0)$$

Başqa sözlə $f(x)$ funksiyasının K konusunda işarəsini müəyyən etmək üçün, onun K konusunun hansısa bir C törədici çoxluğunda işarəsini müəyyən etmək kifayətdir.

Bircins funksiyanın tərifinə görə

$$f(tx_1,tx_2,...,tx_n)=t^k f(x_1,x_2,...,x_n).$$

Aydındır ki, $t^k>0$. Buna görə də $f(tx_1,tx_2,...,tx_n)$ və $f(x_1,x_2,...,x_n)$ eyni işarəlidirlər. Digər tərəfdən $(x_1,x_2,...x_n)$ nöqtələri bütün C çoxluğunda dəyişdikdə

$$\{(tx_1,tx_2,...tx_n),\ t>0\}$$

nöqtələri K çoxluğunu örtürlər.

Buna görə də bircins ifadələrdən təşkil edilmiş ikidəyişənli bərabərsizlikləri dəyişənlərin müsbət qiymətlərində araşdırmaq üçün onu absis və ordinat oxlarının müsbət istiqamətlərini birləşdirən hansısa bir xətt üzərində, parçada, hiperbolada və ya digər əyridə araşdırmaq kifayətdir. Biz artıq bununla rastlaşmışıq. İndi isə daha bir neçə misala baxaq.

Misal 4. İsbat edək ki, $\forall x,y>0$ üçün

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\leq\frac{x^n+y^n}{2}$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Araşdırılan oblast konus olduğu üçün verilən bərabərsizliyi müəyyən bir törədici alt çoxluq üzərində isbat etmək kifayətdir. Belə alt çoxluq kimi $(2;0)$ və $(0;2)$ nöqtələrini birləşdirən parça götürmək olar. Başqa sözlə,

$$C=[x+y=2;x>0,y>0]$$

parçasına baxaq. Aydındır ki, bu halda

$$x=1+\alpha;y=1-\alpha;\ 0\leq\alpha<1$$

göstərilişləri mümkündür. Doğrudan da x və y ədədlərinin hər ikisi 1-dən kiçik ola bilməz, əks halda $x+y<\alpha$ olardı. Onda onlardan biri müəyyənlik üçün x, 1-dən böyük bərabərdir. Deməli, $x=1+\alpha$, $0\leq\alpha<1$ götürmək olar, bu zaman $y=1-\alpha$ olar. Onda verilən bərabərsizlik aşağıdakı şəklə düşür:

$$1\leq\frac{x^n+y^n}{2}=\frac{(1+\alpha)^n+(1-\alpha)^n}{2}=\frac{2+p}{2}$$

burada $p\geq 0$. Çünki $(1+\alpha)^n$ və $(1-\alpha)^n$ qüvvətlərinə Nyuton binomunu tətbiq edib, topladıqda cəmdəki mənfi hədlər əksləri ilə qarşılıqlı islah olurlar, yalnız mənfi olmayan hədlər qalırlar. Odur ki, sonuncu bərabərsizlik doğrudur.

Digər tərəfdən funksiyanın bircinsliyi imkan verir ki, bərəbərsizlik və bərabərliklərin araşdırılmasında dəyişənlərin sayı bir vahid azaldılsın. Doğrudan da,

$$C=\{(x_1,x_2,...x_{i-1},1,x_{i+1},...,x_n\in K\}$$

çoxluğu K konusundan ötrü törədici çoxluqdur. Belə ki, $\forall(x_1,x_2,...,x_n)\in K$ nöqtəsi üçün

$$(x_1,x_2,...,x_n)=x_i(\frac{x_1}{x_i},...,\frac{x_{i-1}}{x_i},1,\frac{x_{i+1}}{x_i},...,\frac{x_n}{x_i})$$

göstərilişi mümkündür. Buna görə də k tərtibdən bircins $f(x)$ funksiyası üçün aşağıdakı bərabərliyi yazmaq olar

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=x_i^k f(\frac{x_1}{x_i},...,\frac{x_{i-1}}{x_i},1,\frac{x_{i+1}}{x_i},...,\frac{x_n}{x_i}).$$

Sonuncuya isə $(n-1)$ dəyişənli funksiya kimi baxmaq olar.

Misal 5. Müstəvi üzərində birinci rübdə yerləşən, koordinatları

$a)\ x>0;\ 0<y<1$

$b)\ 0<x<1;\ 0<y$

şərtlərindən birini ödəyən (x,y) nöqtələri üçün aşağıdakı bərabərsizliyi isbat edək

$$\alpha>0,\beta>0,\alpha+\beta=1\Rightarrow x^\alpha y^\beta\leq\alpha x+\beta y$$

Yuxarıdakı mülahizələrə əsasən dəyişənlərdən birini vahidə bərabər hesab edə bilərik. Tutaq ki, $x=1$. Onda aşağıdakı ekvivalent bərabərsizliyi alarıq

$$y^\beta\leq\alpha+\beta y\Leftrightarrow y^\beta\leq(1-\beta)+\beta y=1+\beta(y-1)$$

$y-1=z$ əvəzləməsindən sonra

$$(1+z)^\beta\leq 1+\beta z$$

məşhur Bernulli bərabərsizliyini almış oluruq.

Ədədi və həndəsi orta haqqında Koşi bərabərsizliyinin isbatı. İndi isə bizə yaxşı məlum olan ədədi və həndəsi orta haqqında Koşi bərabərsizliyini isbat edək. Həm induksiyanın bazasını əldə etmək, həm də tətbiq ediləcək metodu yaxşı başa düşmək üçün bir neçə xüsusi hala baxaq.

$n=2$ halında $xy\leq\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$ bərabərsizliyindən söhbət gedir. Hər iki tərəfdə iştirak edən funksiyalar 2-ci tərtibdən bircinsdirlər. Buna görə də bərabərsizliyi hansısa törədici çoxluqda isbat etmək kifayətdir. Belə çoxluq olaraq Misal 1-də olduğu kimi $x+y=2$ düz xəttinin 1-ci rübdə qalan parçasını götürmək əlverişlidir. Onda elə bir $a\in[0;1]$ ədədi var ki, $x=1+a;y=1-a$. Bu halda bərabərsizlik belə bir şəklə düşür: $xy\leq 1$. Digər tərəfdən

$$xy=(1+a)(1-a)=1-a^2\leq 1.$$

Buradan aydındır ki, verilən bərabərsizlikdə bərabərlik halı yalnız və yalnız $a=0$ olduqda, yəni $x=y$ olduqda mümkündür.

n=3 halı. x,y,z müsbət ədədlərdir. İsbat etmək lazımdır ki,

$$xyz\leq\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3.$$

Bərabərsizliyin hər iki tərəfində iştirak edən funksiyalar 3-cü tərtibdən bircinsdirlər. Törədici çoxluq olaraq

$$x+y+z=3$$

müstəvisinin birinci rübdə qalan hissəsini götürək. Onda verilən bərabərsizlik aşağıdakı şəklə düşər

$$\begin{cases}x+y+z=3\\ xyz\leq 1.\end{cases}$$

Bu halda müəyyən bir $\alpha,\beta,\gamma>-1$ ədədləri üçün

$$x=1+\alpha,\ y=1+\beta,\ z=1+\gamma;\ \alpha+\beta+\gamma=0$$

göstərilişləri mümkündür. Bu ədədlərdən ikisi hökmən eyni işarəlidir. Müəyyənlik üçün fərz edək ki, α və β eyniişarəlidir, yəni $\alpha\beta\geq 0$. Onda

$$1=xyz=(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)=$$
$$=1+\alpha+\beta+\gamma+(\alpha+\beta)\gamma+\alpha\beta+\alpha\beta\gamma=$$
$$=1-(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta(\alpha+\beta)+\alpha\beta=$$
$$=1-\left(\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\beta+\alpha\beta^2+\alpha\beta\right)$$

Əgər α və β mənfi deyildirlərsə, ikinci həddmənfi olmayacaq. Onda aydındır ki, $1\leq 1$. Bundan əlavə bərabərlik halı yalnız və yalnız

$$\alpha=\beta=0\quad\text{və ya}\quad x=y=z$$

olduqda mümkündür.

Əgər α və β ədədləri müsbət deyildirlərsə,

$$|\alpha|<1,\ |\beta|<1\Rightarrow\alpha^2\geq-\alpha^2\beta,\ \beta^2\geq-\alpha\beta^2$$

olduğundan, sonuncu mötərizədə iştirak edən ilk dörd ədədin cəmi mənfi ola bilməz. α β hasili də mənfi deyil. Buna görə də ikinci həddd (mötərizə) mənfi deyil. Bu isə $1\leq 1$ olması deməkdir. Yenə də burada bərabərlik halı yalnız və yalnız son ifadənin ikinci həddi 0-a bərabər olduqda, yəni

$$\alpha=\beta=0\quad\text{və ya}\quad x=y=z$$

olduqda mümkündür.

Tutaq ki, $(n-1)$-sayda istənilən müsbət ədəd üçün

$$x_1x_2...x_{n-1} \le \left(\frac{x_1+x_2+...+x_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1}$$

bərabərsizliyi doğrudur. İxtiyari n sayda müsbət ədəd üçün

$$x_1x_2...x_n \le \left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^n$$

bərabərsizliyinin doğru olduğunu isbat edək. Bərabərsizliyin hər iki tərəfində iştirak edən funksiyalar n-ci tərtibdən bircinsdirlər. Burada iki hal ola bilər:

1-ci hal. n cüt ədəddir. Tutaq ki, $n=2p$. Tərədici çoxluq kimi

$$x_1+x_2+...+x_{2p}=2p$$

hipermüstəvisini götürəcəyik. Onda aydındır ki, müəyyən bir $0 \le a < p$ ədədi üçün

$$x_1+x_2+...+x_p=p+a$$
$$x_{p+1}+x_{p+2}+...+x_{2p}=p-a$$

göstərilişləri mümkündür. Doğrudan da bu cəmlərdən biri p-dən böyük bərabərdir. Onu $p+a$ ilə işarə etsək, digər cəm $(p-a)$-ya bərabər olar. Dəyişənləri yenidən nömrələməklə birinci cəmin p-dən böyük bərabər olmasına həmişə nail olmaq olar.

Dəyişənləri yuxarıdakı kimi p sayda iki qrupa ayıraq və onların hər birinə induksiyada qəbul etdiyimiz təklifi tətbiq edək.

$$x_1x_2...x_px_{p+1}...x_{2p}=$$

$$=(x_1x_2...x_p)(x_{p+1}x_{p+2}...x_{2p}) \le$$

$$\le \left(\frac{x_1+x_2+...+x_p}{p}\right)^p \times$$

$$\times \left(\frac{x_{p+1}+x_{p+2}+...+x_{2p}}{p}\right)^p =$$

$$=\left(\frac{p+a}{p}\right)^p\left(\frac{p-a}{p}\right)^p=\left(1-\left(\frac{a}{p}\right)^2\right)^p \le 1$$

bərabərsizliyini almış olarıq ki, bu da məhz isbatı tələb olunan bərabərsizlikdir. Sonuncu bərabərsizlikdə bərabərlik halı yalnız və yalnız $a=0$ olduqda mümkündür ki, əvvəlkində isə induksiyanın bazasında qəbul etdiyimiz təklifə əsasən yalnız və yalnız həm birinci, həm də ikinci qrupda iştirak edən dəyişənlər öz aralarında bir-birinə bərabər olduqda mümkündür. Digər tərəfdən hər iki qrupda dəyişənlərin sayı və cəmi bir-birinə bərabərdirlər. Onda bütün dəyişənlər bir-birinə bərabər olmalıdır.

2-ci hal. n tək ədəddir. Tutaq ki, $n=2p+1$. Tərədici çoxluq kimi

$$x_1+x_2+...x_{2p}+x_{2p+1}=2p+1$$

hipermüstəvisinə baxacağıq. Onda elə bir $0 \le a < 1$ ədədi var ki,

$$x_1+x_2+...+x_{2p}=2p+a$$
$$x_{2p+1}=1-a$$

göstərilişi mümkündür (ədədlərdən heç olmasa biri vahiddən fərqli götürülür, əks halda trivial bərabərlik alarıq). Onda

$$x_1x_2...x_{2p}x_{2p+1}=(x_1x_2...x_{2p})x_{2p+1} \le$$

$$\le \left(\frac{x_1+x_2+...+x_{2p}}{2p}\right)^{2p}\cdot x_{2p+1}=\left(1+\frac{a}{2p}\right)^{2p}(1-a)=$$

$$=\left(1+\frac{a}{2p}\right)^{2p}\left(1-\frac{a}{2p}\right)^{2p}\frac{1-a}{\left(1-\frac{a}{2p}\right)^{2p}} \le$$

$$\le \left(1-\left(\frac{a}{2p}\right)^2\right)^{2p}\frac{1-a}{1-a}=\left(1-\left(\frac{a}{2p}\right)^2\right)^{2p} \le 1.$$

Sonda artıq bizə yaxşı məlum olan

$$\left(1-\frac{a}{2p}\right)^{2p} \ge 1-2p\frac{a}{2p}=1-a.$$

Bernulli bərabərsizliyini tətbiq etdik. Bərabərlik halı alınması üçün bütün bərabərsizliklər bərabərliyə çevrilməlidir. Aşkardır ki, sonuncu bərabərsizlikdə bərabərlik halı yalnız və yalnız $a=0$ olduqda mümkündür. Onda $x_{2p+1}=1$, yerdə qalan dəyişənlər isə birinci bərabərsizlikdə bərabərlik alınması üçün induksiyanın bazasına əsasən vahidə bərabər olmalıdırlar.

Kvadratik formaların işarə sabitliyi haqqında.

n dəyişəndən asılı aşağıdakı kimi təyin edilmiş

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j;\ a_{ij}=a_{ji} \in R, i,j=1,2,...,n$$

funksiyaya n dəyişənli **kvadratik forma** deyilir.

İkidəyişənli halda kvadratik formada $x_1=x;\ x_2=y$ işarə etsək, $x;y$ dəyişənlərindən asılı aşağıdakı funksiyanı alırıq

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2.$$

Burada a,b,c məlum ədədlər, x,y isə həqiqi qiymətlər alan dəyişənlərdirlər.

Sual: a,b,c parametrləri hansı şərtləri ödədikdə üçhədlinin işarəsi x,y dəyişənlərindən asılı deyil? Başqa sözlə, a,b,c əmsalları üzərinə hansı şərtlər daxilində

$$i)\forall x,y \in R \Rightarrow f(x,y) \ge 0$$
$$ii)\forall x,y \in R \Rightarrow f(x,y) \le 0$$

bərabərsizliklərindən biri doğrudur.

$x=y=0$ olduqda $f(x,y)=0$ olduğundan bu halda hər iki bərabərsizlik ödənilir.

$x=0$ olduqda $f(0,y)=cy^2$ funksiyasını almış oluruq ki, onun da işarəsi c ədədinin işarəsi ilə eynidir.

$y=0$ olduqda isə $f(x,0)=ax^2$ funksiyasını alırıq ki, onun da işarəsi a ədədinin işarəsi ilə üst-üstə düşür.

Deməli, a və c ədədlərinin işarələri araşdırılan bərabərsizliklərdəki işarələrlə eyni olmalıdır.

İndi isə fərz edək ki, x və y dəyişənlərindən heç biri sıfıra bərabər deyil. $f(x,y)$ funksiyası 2-ci tərtib bircins funksiya olduğu üçün, dəyişənlərdən birini vahidə bərabər hesab etmək olar. Tutaq ki, $y=1$ onda verilən bərabərsizliklərin araşdırılması

$$i)\forall x \Rightarrow ax^2+2bx+c \ge 0$$
$$ii)\forall x \Rightarrow ax^2+2bx+c \le 0$$

bərabərsizliklərinin araşdırılmasına gətirilir. Bu bərabərsizliklər isə – hər iki halda - baxılan kvadrat üçhədlinin diskriminantı müsbət olmadıqda və ya

$$ac-b^2 \ge 0$$

olduqda doğru ola bilərlər. Yuxarıdakıları nəzərə alaraq aşağıdakı əlamətləri söyləyə bilərik:

$$i)(\forall x,y \in R \Rightarrow f(x,y) \ge 0) \Leftrightarrow a \ge 0, ac-b^2 \ge 0$$
$$ii)(\forall x,y \in R \Rightarrow f(x,y) \le 0) \Leftrightarrow a \le 0, ac-b^2 \ge 0$$

Diqqət etsək burada c ədədinin işarəsi qeyd edilməyib. Ancaq $ac-b^2 \ge 0$ şərtindən birbaşa a və c ədədlərinin eyni işarəli olması alınır.

İkinci üsul. Aşağıda istifadə edəcəyimiz bir işarələməni qeyd edək. $signx$ ilə x ədədinin işarəsi işarə edilir və

$$signx=\begin{cases}0 & x=0\\ \dfrac{x}{|x|} & x\ne 0\end{cases}$$

$a \ne 0$ olarsa, $f(x,y)$ funksiyası üzərində aşağıdakı çevrilmələri aparmaq olar

$$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2=$$
$$=a\left(x^2+2\frac{b}{a}xy+\left(\frac{b}{a}y\right)^2\right)+\frac{ac-b^2}{a}y^2=$$
$$=a\left(x+\frac{b}{a}y\right)^2+\frac{ac-b^2}{2}y^2.$$

$$z=\sqrt{|a|}\left(x+\frac{b}{a}y\right);$$

$$t=\sqrt{\left|\frac{ac-b^2}{a}\right|}y$$

əvəzləmələrindən sonra verilən funksiya aşağıdakı kimi yeni z və t dəyişənlərindən asılı $g(z,t)$ funksiyası kimi yazıla bilər

$$f(x,y)=signa\cdot z^2+sign\frac{ac-b^2}{a}\cdot t^2=g(z,t).$$

Burada aşağıdakı hallar ola bilər

1. $signa=1$;

$$sign\frac{ac-b^2}{a}=1\Rightarrow g(z,t)=z^2+t^2.$$

Bu halda, yəni $a>0$; $ac-b^2>0$ olduqda baxılan funksiya dəyişənlərin bütün qiymətlərində yalnız müsbət qiymətlər alır.

2. $signa\cdot sign\frac{ac-b^2}{a}<0$,

yəni a və $\frac{ac-b^2}{a}$ ədədləri əks işarəlidir.

Burada aşağıdakı iki hal ola bilər

$$a)\ g(z,t)=z^2-t^2$$
$$b)\ g(z,t)=-z^2+t^2.$$

Hər iki halda funksiya dəyişənlərin qiymətlərindən asılı olaraq həm mənfi, həm də müsbət qiymətlər alır.

3. $signa=-1$; $sign\frac{ac-b^2}{a}=-1$.

Onda $g(z,t)=-z^2-t^2$. Bu halda dəyişənlərin bütün qiymətlərində funksiya yalnız mənfi qiymətlər alacaq.

4. $sign\frac{ac-b^2}{a}=0$.

Onda $g(z,t)=signa\cdot z^2$.

Bu halda, $a>0$ isə funksiya dəyişənlərin bütün qiymətlərində yalnız mənfi olmayan qiymətlər, $a<0$ isə yalnız müsbət olmayan qiymətlər alacaq. $z=0\Leftrightarrow x+\frac{b}{a}y=0$ yəni $ax+by=0$ düz xətti üzərində funksiya sıfıra bərabər qiymətlər alacaq.

Beləliklə, $|a|+|b|\neq 0$ halında araşdırma tam şəkildə aparılıb. Ola bilər $a=c=0$; $b\neq 0$. Yəni

$$f(x,y)=bxy.$$

Bu halda aşağıdakı üsulla yeni dəyişənlər daxil etməklə əvvəlki hala qayıtmaq olar

$$\begin{cases}z+t=x\\z-t=y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=\dfrac{x+y}{2}\\t=\dfrac{x-y}{2}\end{cases}$$

Artıq $f(x,y)=bz^2-bt^2=g(z,t)$ şəklində kvadratik forma alınacaq.

İkinci üsuldan görünür ki, istənilən ikidəyişənli kvadratik forma müəyyən əvəzləmələr vasitəsilə iki dəyişənin kvadratları cəmi, ya koordinatları fərqi, ya da yalnız bir dəyişənin kvadratı və ya bir dəyişənin kvadratının əksi şəklində göstərilə bilər. Bunu davam etdirərək məhz bu üsulla isbat etmək olur ki, ümumi halda da istənilən çoxdəyişənli kvadratik formanı aşağıdakı şəkildə göstərmək olar

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=$$
$$=c_1z_1^2+c_2z_2^2+...+c_nz_n^2;\ c_i\in\{-1;0;1\}\qquad(1)$$

(1) göstərilişi kvadratik formanın **kanonik şəkildə göstərilişi** adlandırılır.

İstənilən kvadratik formanı kanonik şəkilə gətirmək olar.

Riyazi induksiya metodunu tətbiq edəcəyik. $n=2$ halı yuxarıda araşdırılıb. Bununla da induksiyanın bazasını əldə edilmiş hesab etmək olar. $n=k$ sayda dəyişən olan hal üçün hökmün doğruluğunu qəbul edək. $n=k+1$ sayda dəyişən olan halda da təklifin doğru olduğunu isbat edək. Tutaq ki,

$$f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1})=$$
$$=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+...+$$
$$+a_{1k}x_1x_k+a_{1(k+1)}x_1x_{k+1}+$$
$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+...+$$
$$+a_{2k}x_2x_k+a_{2(k+1)}x_2x_{k+1}+$$
$$.....$$
$$+a_{(k+1)1}x_{k+1}x_1+a_{(k+1)2}x_{x+1}x_2+....$$
$$+a_{(k+1)k}x_{k+1}x_k+a_{(k+1)(k+1)}x_{k+1}^2$$

kvadrat üçhədlisi verilmişdir. Verilən kvadratik formada x_1 dəyişəninin iştirak etdiyi bütün hədləri qruplaşdırmaqla ikihədlinin kvadratını ayırmaq olar. Onda verilən kvadratik forma aşağıdakı şəkilə gətirilmiş olacaq

$$f(x_1,x_2,...,x_k,x_{k+1})=signa_{11}\text{x}$$
$$\text{x}\left(bx_1+\frac{a_{12}}{b}x_2+\frac{a_{13}}{b}x_3+...+\frac{a_{1k}}{b}x_k+\frac{a_{1(k+1)}}{b}x_{k+1}\right)^2+$$
$$+g(x_2,x_3,....,x_k,x_{k+1}).$$

Burada $b=\sqrt{|a_{11}|}$ və $g(x_2,x_3,...,x_{k+1})$ funksiyası k sayda dəyişəndən asılı kvadratik formadır. Buna görə də onun üçün qəbul edilmiş təklif doğrudur:

$$g(x_2,x_3,...,x_k,x_{k+1})=$$
$$=c_2x_2^2+c_3x_3^2+...+c_kx_k^2+c_{k+1}x_{k+1}^2.$$

$c_1=signa_{11}$ və mötərizədəki ifadəni yeni bir x_1 dəyişəni ilə əvəz etdikdən sonra (1) kanonik göstərilişi alınır.

Misal 6.

$$f(x,y,z)=x^2+2xy-4xz+y^2+8yz+13z^2$$

kvadratik formasını kanonik şəklə gətirək.

$$f(x,y,z)=x^2+xy+(-2xz)+yx+y^2+4yz+$$
$$+(-2zx)+4zy+9z^2$$

göründüyü kimi

$$a_{11}=1,\ a_{12}=a_{21}=1,\ a_{13}=a_{31}=-2,$$
$$a_{22}=1,\ a_{23}+a_{32}=4,\ a_{33}=9.$$

Birinci dəyişənin (x) iştirak etdiyi hədləri bir mötərizəyə yığıb

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$$

və

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

eyniliklərinin köməyi ilə tam kvadratlar ayıraq:

$$f(x,y,z)=(x^2+2xy-4xz)+y^2+8yz+13z^2=$$
$$=x^2+2xy+y^2-4xz+4z^2-4yz-y^2-4z^2+$$
$$+4yz+y^2+8yz+13z^2=(x+y-2z)^2+12yz+$$
$$+9z^2=(x+y-2z)^2-4y^2+(4y^2+12yz+9z^2)=$$
$$=(x+y-2z)^2-(2y)^2+(2y+3z)^2=u^2+v^2-t^2.$$

Burada

$$u=x+y-2z;\ v=3z+2y;\ t=2y$$

əvəzləmələri aparılmışdır. Xüsusi halda $t=0$ yəni $y=0$ olduqda baxılan kvadrat üçhədli yalnız mənfi olmayan qiymətlər alır. $u=v=0$ olduqda, yəni

$$\begin{cases}x+y-2z=0\\3z+2y=0\end{cases}$$

sisteminin həllər çoxluğu olan

$$x=-\frac{7}{2}z;\ y=-\frac{3}{2}z$$

düz xətti üzərində baxılan kvadratik forma müsbət olmayan qiymətlər alır.

Koordinat başlanğıcından başqa bütün nöqtələrdə yalnız müsbət qiymətlər alan kvadratik forma **müsbət müəyyən**, yalnız mənfi qiymətlər alan kvadratik forma isə **mənfi müəyyən** kvadratik forma adlanırlar.

Teoremdən belə aydın olur ki, kvadratik formanın müsbət müəyyən olması kanonik şəkildə bütün əmsalların müsbət, mənfi müəyyən olması isə kanonik şəkildə bütün əmsalların mənfi olmasına ekvivalentdir.

SİMMETRİK ÇOXHƏDLİLƏR VƏ ONLARIN BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN ARAŞDIRILMASINA TƏTBİQLƏRİ

Bu paraqrafda tanış olduğumuz simmetrik çoxhədlilərdən təşkil edilmiş ifadələr arasında müqayisə aparılacaq.

Simmetrik çoxhədlilər haqqında qısa məlumat.

n dəyişəndən asılı $P(x_1,...,x_n)$ çoxhədlisinin qiyməti dəyişənlərin istənilən yerdəyişməsində dəyişməz qalırsa, verilən çoxhədli **simmetrik çoxhədli** adlanır.

Simmetrik çoxhədlilərə ən sadə misal dəyişənlərin k sayda bütün mümkün hasilləri cəmindən ibarətdir və onlar üçün xüsusi işarələməlr qəbul edilmişdir:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$\sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n$$
$$\sigma_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (1)$$
$$\sigma_n = x_1x_2 \ldots x_n$$

Bunlara n dəyişəndən asılı **elementar simmetrik çoxhədlilər** deyilir. Aydındır ki,

$$\deg\sigma_1 = 1, \deg\sigma_2 = 2, \ldots, \deg\sigma_n = n.$$

İstənilən digər simmetrik çoxhədlilər bu çoxhədlilər vasitəsilə ifadə oluna bilərlər. Daha dəqiq söyləsək aşağıdakı teorem doğrudur.

İstənilən n dəyişənli simmetrik çoxhədli yeganə qayda ilə elementar simmetrik çoxhədlilərin hasillərinin cəmi şəklində göstərilə bilər.

Simmetrik çoxhədlilərin digər bir məşhur sinifləri dəyişənlərin k-cı qüvvətlərinin cəmindən ibarət olan çoxhədlilərdir:

$$s_1(x_1,...,x_n) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sigma_1,$$
$$s_2(x_1,...,x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^k, \qquad (2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$s_k(x_1,...,x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k.$$

Formal olaraq $s_0 = n$ qəbul etmək olar. Teoremə əsasən s_k çoxhədliləri σ_i, $i = 1,2,...,n$ çoxhədlilərinin kombinasiyalarından ibarət göstərilişə malikdirlər. Bu göstərilişlərin əldə edilməsi üçün **Nyuton düsturları** adı ilə tanınan aşağıdakı rekkurent münasibətləri qeyd edək:

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^{k-1}s_1\sigma_{k-1} + (-1)^k k\sigma_k = 0; \ (k \le n). \qquad (3)$$

$$s_k - s_{k-1}\sigma_1 + s_{k-2}\sigma_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}\sigma_n = 0; (k > n) \qquad (4)$$

Xüsusi halda,

$$k = 2 \le n \Rightarrow s_2 - s_1\sigma_1 + 2\sigma_2 = 0$$
$$\Rightarrow s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2,$$

$$k = 3 \le n \Rightarrow s_3 - s_2\sigma_1 + s_1\sigma_2 - 3\sigma_3 =$$
$$= 0 \Rightarrow s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

İkidəyişənli halda yalnız iki elementar simmetrik çoxhədli var:

$$\sigma_1 = x + y \text{ və } \sigma_2 = xy$$

və bu halda Nyuton düsturları aşağıdakı şəklə düşür

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2}.$$

Üçdəyişənli halda isə elementar simmetrik çoxhədlilər üçdür:

$$\sigma_1 = x + y + z;$$
$$\sigma_2 = xy + xz + yz$$
$$\text{və} \quad \sigma_3 = xyz,$$

$k > 3$ halında isə (4) düsturları aşağıdakı şəklə düşürlər:

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} + \sigma_3 s_{k-3}.$$

İkidəyişənli və üçdəyişənli hallarda bərabərsizliklərin araşdırılmasında çox faydalı olan ilk qüvvət cəmlərinin elementar çoxhədlilər vasitəsi ilə göstərilişlərini ifadə edən düsturları aşağıda veririk.

İkidəyişənli hal

$$s_1 = \sigma_1$$
$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$
$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2$$
$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$$
$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2$$
$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3$$
$$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3$$
$$s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4$$
$$s_9 = \sigma_1^9 - 9\sigma_1^7\sigma_2 + 27\sigma_1^5\sigma_2^2 - 30\sigma_1^3\sigma_2^3 + 9\sigma_1\sigma_2^4$$
$$s_{10} = \sigma_1^{10} - 10\sigma_1^8\sigma_2 + 35\sigma_1^6\sigma_2^2 - 50\sigma_1^4\sigma_2^3 + 25\sigma_1^2\sigma_2^4 - 2\sigma_2^5$$

Üçdəyişənli hal

$$s_1 = \sigma_1$$
$$s_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$
$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$$
$$s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2 + 4\sigma_1\sigma_3$$
$$s_5 = \sigma_1^5 - 5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2 + 5\sigma_1^2\sigma_3 - 5\sigma_2\sigma_3$$
$$s_6 = \sigma_1^6 - 6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3 + 6\sigma_1^3\sigma_3 -$$
$$-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3 + 3\sigma_3^2$$
$$s_7 = \sigma_1^7 - 7\sigma_1^5\sigma_2 + 14\sigma_1^3\sigma_2^2 - 7\sigma_1\sigma_2^3 + 7\sigma_1^4\sigma_3 -$$
$$-21\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 + 7\sigma_1\sigma_3^2 + 7\sigma_2^2\sigma_3$$
$$s_8 = \sigma_1^8 - 8\sigma_1^6\sigma_2 + 20\sigma_1^4\sigma_2^2 - 16\sigma_1^2\sigma_2^3 + 2\sigma_2^4 +$$
$$+8\sigma_1^5\sigma_3 - 32\sigma_1^3\sigma_2\sigma_3 + 12\sigma_1^2\sigma_3^2 + 24\sigma_1\sigma_2^2\sigma_3 - 8\sigma_2\sigma_3^2$$

Tətbiqlər. Elementar simmetrik çoxhədlilər arasında münasibətlərdən bərabərsizliklərin isbatında səmərəli istifadə etmək olar.

İkidəyişənli hal. Bu halda elementar simmetrik çoxhədlilər arasında aşağıdakı münasibət ödənilir

$$(x + y)^2 = \sigma_1^2 \ge 4\sigma_2 = 4xy$$

və ya

$$z = \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \ge 0 \qquad (5)$$

Bu faktı tətbiq etmək üçün verilmiş çoxhədlini $\sigma_1;\sigma_2$ elementar çoxhədliləri vasitəsi ilə göstərdikdən sonra, birinə nəzərən funksiya kimi baxıb, alınmış bərabərsizliyi araşdırırlar.

Misal 1. $a;b > 0$. İsbat edək ki,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^4 \le \frac{a^4 + b^4}{2}.$$

Həlli. Başqa sözlə isbat etmək lazımdır ki,

$$\frac{\sigma_1^4}{8} \le s_4.$$

Yadımıza salaq ki, $s_4 = \sigma_1^4 - 4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2$. Onda verilən bərabərsizlik aşağıdakına ekvivalentdir

$$f(\sigma_1;\sigma_2) = 7\sigma_1^4 - 32\sigma_1^2\sigma_2 + 16\sigma_2^2 \ge 0.$$

Daxil edilmiş funksiyaya σ_2 dəyişəninə nəzərən kvadrat üçhədli kimi baxıla bilər. Baxılan çoxhədlinin ədəd oxunda işarəsinin təyin edilməsi onun köklərinin tapılmasına gətirilir. Köklərdən kənarda kvadrat üçhədli müsbət, köklərin arasında isə kvadrat üçhədli mənfi qiymətlər alır.

$$D = \left(16\sigma_1^2\right)^2 - 7 \cdot 16\sigma_1^4 = \left(12\sigma_1^2\right)^2$$

$$\sigma_2(1) = \frac{\sigma_1^2}{4}; \sigma_2(2) = \frac{7\sigma_1^2}{4}.$$

Beləliklə, baxılan çoxhədli yalnız

$$\frac{\sigma_1^2}{4} \le \sigma_2 \le \frac{7\sigma_1^2}{4}$$

və ya

$$\sigma_1^2 \le 4\sigma_2 \le 7\sigma_1^2$$

bərabərsizlikləri ödənildikdə mənfi qiymətlər alır. Bu isə mümkün deyil. Çünki, dəyişənlərin istənilən qiymətlərində

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 \ge 0$$

bərabərsizliyi ödənilir. Buna görə də kvadrat üçhədli mənfi olmayan qiymətlər alır. Deməli, tələb edilən bərabərsizlik doğrudur. Bərabərlik halı yalnız

$$\sigma_1^2 - 4\sigma_2 = 0$$

olduqda mümkündür. Bu isə dəyişənlərin bərabərlik halına eynigüclüdür, yəni $a = b$ olduqda reallaşır.

Misal 2. Nyuton düsturlarından asanlıqla aşağıdakıları almaq olar:

$$\sigma_2 s_{k-2} \le s_k$$
$$s_k \le \sigma_1 s_{k-1} \le 2s_k \qquad (6)$$

Başqa sözlə

$$xy\left(x^{k-2} + y^{k-2}\right) \le x^k + y^k$$
$$x^k + y^k \le (x+y)\left(x^{k-1} + y^{k-1}\right) \le 2\left(x^k + y^k\right)$$

I bərabərsizlik ilə eynigüclü olan

$$x^k + y^k - x^{k-1}y - xy^{k-1} = (x-y)\left(x^{k-1} - y^{k-1}\right) \ge 0$$

bərabərsizliyi doğrudur. İkinci bərabərsizlik isə bundan və Nyuton düsturundan alınır

$$s_k = \sigma_1 s_{k-1} - \sigma_2 s_{k-2} \Rightarrow \sigma_1 s_{k-1} = s_k + \sigma_2 s_{k-2} \le 2s_k$$

Misal 3. $a, b > 0$. İsbat edək ki,

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \le \frac{a^n + b^n}{2}$$

və ya

$$(a+b)^n \le 2^{n-1}\left(a^n + b^n\right) \Leftrightarrow \sigma_1^n \le 2^{n-1} \cdot s_n.$$

İnduksiyanın köməyi ilə isbat edək. $n = 2$ halında verilən bərabərsizlik

$$(a+b)^2 \le 2\left(a^2 + b^2\right)$$

bərabərsizliyinə ekvivalentdir. Simmetrik çoxhədlilərin köməyilə bunu aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$\sigma_1^2 \le 2s_2 = 2(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) \Leftrightarrow \sigma_1^2 - 4\sigma_2 \ge 0.$$

Bu isə doğru bərabərsizlikdir. İnduksiyanın bazası əldə edilmişdir. Təklifin $(n-1)$-ci qüvvət üçün doğru olduğunu, yəni $\sigma_1^{n-1} = 2^{n-2} \cdot s_{n-1}$ olduğunu qəbul edib, n-ci qüvvət üçün doğru olduğunu isbat edək.

Bunu (6)-dan $\sigma_1 s_{n-1} \le 2s_n$ olduğunu nəzərə almaqla simmetrik çoxhədlilərin vasitəsi ilə aşağıdakı kimi edə bilərik:

$$(a+b)^n = \sigma_1 \sigma_1^{n-1} \le 2^{n-2}\sigma_1 s_{n-1} \le 2^{n-1} s_n =$$
$$= 2^{n-1}\left(a^n + b^n\right)$$

Üçdəyişənli hal.

Misal 4. $x, y, z > 0$ olduqda aşağıdakı bərabərsizlik bizə yaxşı məlumdur

$$x^2 + y^2 + z^2 \ge xy + xz + yz.$$

Bunu simmetrik çoxhədlilərin köməyilə aşağıdakı kimi yazmaq olar

$$s_2 \ge \sigma_2.$$

Buradan asanlıqla aşağıdakı alınır

$$\sigma_1^2 = (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) \ge$$
$$\ge 3(xy + xz + yz) = 3\sigma_2.$$

Başqa sözlə,

$$\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$$

Misal 5. Müsbət ədədlər üçün ədədi və həndəsi orta haqqında Koşi bərabərsizliyini isbat edək. Yəni $a, b, c > 0$ ədədləri üçün

$$\frac{a+b+c}{3} \ge \sqrt[3]{abc}.$$

Bunun əvəzinə tələb edilən bərabərsizliyə ekvivalent olan aşağıdakı bərabərsizliyi isbat edəcəyik: $x, y, z > 0$ ədədləri üçün

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \ge xyz$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Verilən bərabərsizlik aşağıdakına ekvivalentdir

$$s_3 \ge 3\sigma_3.$$

Üçdəyişənli halda yuxarıdakı cədvəldə qüvvət cəmləri ilə elementar simmetrik

çoxhədlilər arasında əlaqəni göstərən düsturlar arasında aşağıdakı münasibət olduğunu görərik:

$$s_3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3.$$

Beləliklə, tələb edilən bərabərsizliyin isbat edilməsi

$$\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\left(\sigma_1^2 - 3\sigma_2\right) \ge 0$$

bərabərsizliyinin isbatına gətirilir. Dəyişənlərin müsbət qiymətli və $\sigma_1^2 - 3\sigma_2 \ge 0$ olduğunu nəzərə alsaq (misal 4) bu doğrudan da belədir. Bərabərlik halı isə yalnız $x = y = z$ olduqda reallaşır.

Buradan ikinci bir münasibət əldə edilir

$$(x+y+z)^3 \ge 27xyz.$$

Başqa sözlə

$$\sigma_1^3 \ge 27\sigma_3.$$

Ədədi və həndəsi orta arasında bu münasibəti $xy; xz; yx$ və $x^2; y^2; z^2$ ədədləri üçün yazsaq

$$(xy + xz + yz)^3 \ge 27(xyz)^2,$$

$$\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^3 \ge 27(xyz)^2,$$

və ya

$$\sigma_2^3 \ge 27\sigma_3^2,$$

$$s_2^3 \ge 27\sigma_3^2$$

münasibətlərini almış olaraq. Beləliklə, üçdəyişənli halda müsbət ədədlər üçün aşağıdakı bərabərsizliklər ödənilir:

$\sigma_1^2 \ge 3\sigma_2$	$s_2 \ge \sigma_2$
$\sigma_1^3 \ge 27\sigma_3$	$s_3 \ge 3\sigma_3$
$\sigma_2^3 \ge 27\sigma_3^2$	$s_2^3 \ge 27\sigma_3^2$ (7)
$\sigma_1^3 \ge 3\sigma_1\sigma_2$	

Yuxarıdakı bərabərsizliklər yalnız iki çoxhədli arasında münasibəti əks etdirir. Ancaq üçdəyişənli halda üç elementar simmetrik çoxhədli var. Digər simmetrik çoxhədlilər də məhz bu üç elementar simmetrik çoxhədlilər vasitəsi ilə göstərilə bilirlər. Buna görə də üç elementar çoxhədli arasında hansısa münasibət əldə etmək praktiki cəhətdən vacibdir. Burada onu isbatsız qeyd edəcəyik: dəyişənlərin müsbət qiymətlərində üçdəyişənli elementar simmetrik çoxhədlilər arasında aşağıdakı münasibət ödənilir

$$\sigma_1^3 - 4\sigma_1\sigma_2 + 9\sigma_3 \ge 0 \qquad (8)$$

Bu münasibəti tətbiq etmək üçün, adətən əvvəlcə verilmiş ifadəni iki toplananın cəmi şəklində göstərirlər. Birinci toplanan (8) bərabərsizliyindəki ifadə və ya onun müəyyən bir mislindən ibarət olur. İkinci toplanan isə yalnız $\sigma_1; \sigma_2$ çoxhədlilərindən asılı çoxhədli olur. Bundan sonra yalnız ikinci toplananın işarəsini təyin etmək qalır.

TÖRƏMƏ ANLAYIŞININ FUNKSİYANIN MONOTONLUĞUNUN ARAŞDIRILMASINA TƏTBİQİ

Bir çox bərabərsizliklərin alınmasında və araşdırılmasında aşağıdakı məşhur teoremdən istifadə etmək çox faydalıdır.

$(a;b)$ aralığında təyin edilmiş differensiallanan $f(x)$ funksiyasının monoton artan (monoton azalan) olması üçün zəruri və kafi şərt onun törəməsinin həmin aralıqda mənfi (müsbət) qiymətlər almamasıdır.

Qeyd. Verilən şərtlər daxilində funksiyanın ciddi monoton olması üçün bundan əlavə törəmə heç bir alt intervalda eynilklə sıfıra çevrilməməlidir.

Beləliklə, $[c;d)$ aralığında $f'(x) \ge 0$ olarsa $\forall x \in [c;d)$ üçün $f(x) \ge f(c)$, əksinə $f'(x) \le 0$ olarsa, $f(d) \le f(c)$ almış olarıq.

Bernulli bərabərsizlikləri. $f(x) = (1+x)^n - (1+ax)$ funksiyasına baxaq. Tutaq ki, $a \ge 1; x \ge -1$

$$f'(x) = a(1+x)^{n-1} - a = a\left((1+x)^{n-1} - 1\right)$$
$$\begin{cases} > 0; x > 0 \text{ olarsa} \\ < 0; -1 < x < 0 \text{ olarsa} \end{cases}$$

Beləliklə, $f(x)$ funksiyası $(-1;0)$ aralığında monoton azalır, $(1;\infty)$ aralığında isə monoton artir. Digər tərəfdən $f(0)=0$. Buna görə də bütün $(-1;\infty)$ aralığında $f(x)$ funksiyası mənfi olmayan qiymətlər alır. Başqa sözlə $a\geq 1$ və $x\geq -1$ üçün

$$(1+x)^a \geq 1+ax$$

$0<a<1$ olduqda analoji olaraq törəməni hesablasaq

$$(1+x)^a \leq 1+ax$$

bərabərsizliyini almış olarıq. Bildiyimiz kimi bu bərabərsizliklərə **Bernulli bərabərsizlikləri** deyilir. Hər iki aralıqda törəmə heç bir yerdə sıfıra çevrilmədiyi üçün monotonluq ciddi xarakter daşıyır. Buna görə də, hər iki halda alınan bərabərsizliklərdə bərabərlik yalnız $x=0$ halında mümkündür.

Əgər $1+x=y$ əvəzləməsini aparsaq bu bərabərsizliklər aşağıdakı şəklə düşərlər: $y\geq 0$ olduqda

$$a\geq 1 \Rightarrow y^a \geq 1-a+ay$$
$$0<a<1 \Rightarrow y^a \leq 1-a+ay$$

Yuxarıdakı qeyddən aydın olur ki, bu bərabərsizliklərdə bərabərlik yalnız $y=1$ olduqda mümkündür.

Bu sadə görünən bərabərsizliklərdən məşhur bərabərsizliklərin alınmasında istifadə edilir.

YUNQ BƏRABƏRSİZLİYİ VƏ NƏTİCƏLƏR

a) Tutaq ki, p; q müsbət ədədlərdir və $p+q=1$.

Nəticədə alınmış bərabərsizlikdə $y=\frac{a}{b}$ və qüvvət olaraq p ədədini götürsək

$$a^p b^q \leq pa+qb$$

bərabərsizliyini almış olaraq. Bu bərabərsizliyə **Yunq bərabərsizliyi** deyilir. Aydındır ki, bu bərabərsizlikdə bərabərlik yalnız və yalnız $a=b$ olduqda mümkündür.

İnduksiya vasitəsi ilə isbat etmək olar ki, bu bərabərsizlik ixtiyari sayda dəyişən üçün də doğrudur. Daha dəqiq aşağıdakı doğrudur.

$a_1,a_2,...,a_n$ və $p_1,p_2,...,p_n$ müsbət və $p_1+p_2+...+p_n=1$ şərtini ödəyən ədədlər üçün

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}...a_n^{p_n} \leq p_1a_1+p_2a_2+...+p_na_n$$

bərabərsizliyi ödənilir. Bərabərlik halı isə yalnız və yalnız $a_1=a_2=...=a_n$ bərabərlikləri ödənildikdə mümkündür.

Doğrudan da verilən təklifin n sayda dəyişən üçün doğru olmasını qəbul etsək

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}...a_n^{p_n}a_{n+1}^{p_{n+1}} = \left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}...a_n^{p_n}\right)a_{n+1}^{p_{n+1}} =$$
$$= \left(a_1^{\frac{p_1}{1-p_{n+1}}}a_2^{\frac{p_2}{1-p_{n+1}}}...a_n^{\frac{p_n}{1-p_{n+1}}}\right)^{1-p_{n+1}}a_{n+1}^{p_{n+1}} \leq (1-p_{n+1})a_1^{\frac{p_1}{1-p_{n+1}}}a_2^{\frac{p_2}{1-p_{n+1}}}...a_n^{\frac{p_n}{1-p_{n+1}}} +$$
$$+ p_{n+1}a_{n+1}^{p_{n+1}} \leq p_1a_1+p_2a_2+...+p_{n+1}a_{n+1}$$

almış olarıq. Yuxarıda $m_k=\frac{p_k}{\sum_{e=1}^{n}p_e}$ işarələməsi qəbul edilmişdir. Aydındır ki, $\sum_{1}^{n}m_k=1$.

İlk bərabərsizlikdə dəyişənlərin sayı 2-yə bərabər olduqda artıq isbat edilmiş bərabərsizlik, ikinci bərabərsizlikdə isə induksiyada doğru qəbul edilmiş hal tətbiq edilmişdir.

Hər iki tərəf eyni tərtibdən bircins funksiyalar olduğu üçün bu bərabərsizliyi müsbət $a_1,a_2,...,a_n$ və $p_1,p_2,...,p_n$ ədədləri üçün aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$\left(a_1^{p_1}a_2^{p_2}..a_n^{p_n}\right)^{\frac{1}{\sum_1^n p_k}} \leq \frac{\sum_1^n p_ka_k}{\sum_1^n p_k}$$

Burada da bərabərlik halı yalnız və yalnız $a_1=a_2=...=a_n$ halında mümkündür.

Xüsusi halda $p_1=p_2=...=p_n=1$ olarsa, artıq bizə məlum olan ədədi və həndəsi orta haqqnda Koşi bərabərsizliyini almış olarıq:

$$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$$

HÖLDER VƏ MİNKOVSKİ BƏRABƏRSİZLİKLƏRİ

$\forall a_i,b_k>0$ və $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$; $p,q>0$ şərtini ödəyən ədədlər üçün

$$\sum_1^n a_ib_i \leq \left\{\sum_1^n a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum_1^n b_i^q\right\}^{\frac{1}{q}}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Bu bərabərsizlik **Hölder bərabərsizliyi** adlanır.

Bərabərsizliyin hər iki tərəfində iştirak edən ifadələr eyni tərtibdən bircins olduqları üçün verilən bərabərsizliyi

$$\sum_1^n a_i^p = \sum_1^n b_i^q = 1$$

şərti daxilində isbat etmək kifayətdir. Bu şərt daxilində istənilən i nömrəsi üçün

$$a_ib_i \leq \frac{1}{p}a_i^p + \frac{1}{q}b_i^q; i=1,2,...,n$$

bərabərsizlikləri ödənilir. Bu bərabərsizlikləri tərəf-tərəfə toplasaq

$$\sum_1^n a_ib_i \leq \frac{1}{p}\sum_1^n a_i^p + \frac{1}{q}\sum_1^n b_i^q = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

almiş olarıq. Bu da məhz qəbul edilmiş şərt daxilində tələb edilən bərabərsizlikdir.

$p=q=2$ halında artıq bizə məlum olan Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi alınır

$$\sum_1^n a_ib_i \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+....+b_n^2}$$

Hölder bərabərsizliyindən isə asanlıqla Minkovski bərabərsizliyini almaq olar:

Minkovski bərabərsizliyi. İstənilən $a_i,b_i>0$; $i=1,2,...,n$ və $p>1$ ədədləri üçün

$$\left\{\sum(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_1^n a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_1^n b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

Doğrudan da tutaq ki, q elə bir ədəddir ki,

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

ödənilir. Onda

$$\sum_1^n (a_i+b_i)^p = \sum a_i(a_i+b_i)^{p-1} +$$
$$+\sum b_i(a_i+b_i)^{p-1} \leq$$
$$\leq \left\{\sum_1^n a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\sum(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}} + \left\{\sum_1^n b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} \times$$
$$\times \left\{\sum(a_i+b_i)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}} = \left(\left\{\sum_1^n a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} +\right.$$
$$\left.+\left\{\sum_1^n b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}\right)\left\{\sum_1^n (a_i+b_i)^{(p-1)q}\right\}^{\frac{1}{q}}$$

Onda $(p-1)q=p$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\left\{\sum(a_i+b_i)^p\right\}^{1-\frac{1}{q}} \leq \left\{\sum_1^n a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_1^n b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

və ya

$$\left\{\sum(a_i+b_i)^p\right\}^{\frac{1}{p}} \leq \left\{\sum_1^n a_i^p\right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{\sum_1^n b_i^p\right\}^{\frac{1}{p}}$$

isbatı tələb edilən bərabərsizlik alınar.

Baxılan şərtlər daxilində istənilən $p>1$ ədədi üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq \sqrt[p]{\frac{a_1^p+a_2^p+...+a_n^p}{n}}$$

Hölder bərabərsizliyində $b_1=b_2=...=b_n=\frac{1}{n}$ ədədlərini seçdikdə tələb edilən bərabərsizlik alınır.

$a_1,a_2,...a_n>0$; $p>q>1$ olarsa, aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir

$$\sqrt[q]{\frac{a_1^q+...+a_n^q}{n}} \leq \sqrt[p]{\frac{a_1^p+...+a_n^p}{n}}$$

Başqa sözlə, müsbət ədədlərin s-ci $(s>1)$ ortaları artan funksiyadır.

Nəticə və

$$x_1 = a_1^q; \ldots; x_n = a_n^q; r = \frac{p}{q} > 1$$

ədədlərinə tətbiq etsək

$$\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} \le \sqrt[r]{\frac{x_1^r + \ldots + x_n^r}{n}}$$

bərabərsizliyini alırıq. Bu da tələb edilən bərabərsizliyə ekvivalentdir.

Qeyd 1. Yuxarıdakı nəticələrdə bərabərlik halı yalnız $a_1 = \ldots = a_n$ şərtləri ödəndikdə reallaşır.

Qeyd 2. 1.3.3-cü nəticənin şərtləri daxilində $a_1^p + \ldots + a_n^p = const$ olarsa, $a_1^q + \ldots + a_n^q$ cəminin maksimal qiyməti $a_1 = \ldots = a_n$ olduqda reallaşır. $a_1^q + \ldots + a_n^q = const$ olduqda isə $a_1^p + \ldots + a_n^p$ cəminin minimallığı $a_1 = \ldots = a_n$ olduqda əldə edilir.

MÜRƏKKƏB FUNKSİYALARIN TÖRƏMƏSİNİN TAPILMASI VƏ ARAŞDIRILMASI

Daha mürəkkəb $f(x) = u(x)^{v(x)}$ şəklində funksiyaya baxaq. Burada dəyişənin bütün mümkün qiymətlərində

$$u(x) > 0, v(x) > 0$$

olduğu qəbul edilir. Yeni

$$g(x) = \ln f(x) = v(x) \cdot \ln u(x)$$

funksiyasına baxaq. Onda $f(x)$ funksiyası üçün

$$f(x) = e^{g(x)}$$

göstərilişini almış olarıq. Alınmış göstərilişdən $f(x)$ funksiyasının törəməsini asanlıqla tapa bilərik

$$f'(x) = \left[e^{g(x)}\right]' = e^{g(x)} g'(x) = f(x) g'(x)$$

Dəyişənin bütün qiymətlərində $f(x) > 0$ olduğu üçün $f'(x)$ törəməsinin işarəsi $g'(x)$ törəməsinin işarəsi ilə eynidir. Buna görə də $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının monoton artıb-azalma intervalları üst-üstə düşürlər.

İsbat edək ki, $x > y > e$ ədədləri üçün $\sqrt[x]{x} < \sqrt[y]{y}$ bərabərsizliyi doğrudur.

$x > e$ aralığında təyin edilmiş $f(x) = \sqrt[x]{x} = x^{\frac{1}{x}}$ funksiyasına baxaq. Onun monotonluğunu araşdırmaq üçün onunla eyni monotonluğa malik olan

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x$$

funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın törəməsini tapaq:

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x} \ln x\right)' = -\frac{1}{x^2} \ln x + \frac{1}{x^2} < 0$$

Başqa sözlə, verilən funksiya bütün təyin oblastında monoton azalır. Yəni

$$x > y \Rightarrow f(x) < f(y) \Leftrightarrow \sqrt[x]{x} < \sqrt[y]{y}$$

Xüsusi halda $x = 3;4;5;\ldots$ ardıcıllığı üçün aşağıdakı bərabərsizlikləri alarıq:

$$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \ldots > \sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}$$

s-Cİ ORTALAR VƏ ONLAR ARASINDA MÜNASİBƏT

$a;b$ ədədlərinin s-ci tərtib ortası dedikdə aşağıdakı başa düşülür:

$$\Delta_s(a;b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}}$$

$a = b$ olduqda $\Delta_s(a;b) = a = b$ olur. Odur ki, biz yalnız $a \neq b$ halına baxacağıq.

Bu funksiyanın s-dən asılı funksiya kimi monotonluğunu araşdıraq. Təbii ki, bu funksiya

$$f(s) = \ln \Delta_s(a;b)$$

funksiyası ilə eyni monotonluğa malikdir. Digər tərəfdən $\Delta_s(a;b)$ funksiyası bircins funksiya olduğundan parametrlərdən birini vahidə bərabər hesab etmək olar. Müəyyənlik üçün $a = 1$ hesab edəcəyik.

$f(s)$ funksiyasının törəməsini tapaq

$$I = f'(s) = \left(\ln \Delta_s(1;t)\right)' = \left[\frac{1}{s} \ln \frac{1+t^s}{2}\right]' = \frac{t^s \ln(t)}{s(1+t^s)} -$$

$$- \frac{\ln(1+t^s)}{s^2} + \frac{\ln 2}{s^2} = \frac{t^s \ln t^s - (1+t^s)\ln(1+t^s) + (1+t^s)\ln 2}{s^2(1+t^s)} =$$

$$= \frac{(1+t^s)\ln\frac{2t^s}{1+t^s} - \ln t^s}{s^2(1+t^s)} = \frac{\ln(1+\frac{t^s-1}{t^s+1})^{1+t^s} - \ln t^s}{s^2(1+t^s)} >$$

$$> \frac{\ln(1+(t^s+1)\frac{t^s-1}{t^s+1}) - \ln t^s}{s^2(1+t^s)} = 0$$

Beləliklə, baxılan funksiya təyin oblastında monoton artandır. s dəyişəninin bəzi qiymətlərində bu funksiyanın limitini tapaq. $p = \frac{a}{b}$ əvəzləməsini aparsaq

$$\Delta_s(a;b) = b\left(\frac{1+p^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} = b\left[\left(1 - \frac{p^s-1}{2}\right)^{\frac{2}{p^s-1}}\right]$$

almış olarıq. Onda

$$\lim_{s\to 0} \Delta_s(a;b) = \lim_{s\to 0} b\left[\left(1 - \frac{p^s-1}{2}\right)^{\frac{2}{p^s-1}}\right]^{\frac{p^s-1}{2s}} =$$

$$= be^{\lim \frac{p^s-1}{2s}} = be^{\frac{\ln p}{2}} = b\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{ab}$$

Burada $\lim_{s\to 0} \frac{p^s-1}{s} = \ln p$ məşhur limitindən istifadə etdik.

b) $s \to -\infty$ halı. Ümumiliyi azaltmadan $a > b$ qəbul etmək olar.

$$b < a; onda \Rightarrow p > 1$$

$$\lim_{s\to -\infty} \Delta_s(a;b) = \lim_{s\to -\infty} b\left(\frac{1+p^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} = b = \min(a;b)$$

c) $s \to \infty$ halı. Bu dəfə tutaq ki, $b > a$. Onda $p < 1$ və

$$\lim_{s\to\infty} \Delta_s(a;b) = b\lim_{s\to\infty}\left(\frac{1+p^s}{2}\right)^{\frac{1}{s}} = b = \max(a;b).$$

Bundan əlavə

$s = -1$ olduqda artıq bizə məlum olan harmonik orta;

$s = 1$ olduqda məlum ədədi orta;

$s = 2$ olduqda isə məlum kvadratik ortanı almış olarıq.

İstənilən iki müsbət ədədin s-ci tərtib ortası monoton artan funksiyadır və $p < q$ ədədləri üçün

$$\min(a;b) \le \left(\frac{a^p + b^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}} < \left(\frac{a^q + b^q}{2}\right)^{\frac{1}{q}} \le \max(a;b)$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$y = e^x$ funksiyası haqqında

İsbat edək ki, $\forall x > 0$ üçün aşağıdakı bərabərsizlik doğrudur

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

İsbatı induksiya vasitəsi ilə aparacağıq. Aşağıdakı funksiyalar ardıcıllığına baxaq

$$f_n(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \ldots - \frac{x^n}{n!}$$

$n = 1$ halında $f_1'(x) = e^x - 1 > 0$ almış olarıq. Deməli, bu funksiya $(0;\infty)$ aralığında ciddi monoton artır. $x = 0$ olduqda $f_1(0) = 0$ olduğundan verilən aralıqda

$$f_1(x) = e^x - 1 - x > 0$$

bərabərsizliyi doğrudur.

Tutaq ki, verilən bərabərsizlik n üçün doğrudur, onu $(n+1)$ üçün isbat edək.

$$f_{n+1}'(x) = e^x - 1 - 2\cdot\frac{x}{2!} - 3\cdot\frac{x^2}{3!} - \ldots - (n+1)\cdot\frac{x^n}{(n+1)!} =$$

$$= f_n(x) > 0$$

sonuncu bərabərsizlik induksiyanın hökmünə əsasən ödənilir. Deməli $f_{n+1}(x)$ funksiyası $(0;\infty)$ aralığında ciddi monoton artır. Digər tərəfdən $f(0)=0$ olduğundan verilən funksiya $\forall x>0$ üçün müsbət qiymətlər almalıdır.

$x>0$ olduqda, isbat edin ki,

$$I_n = e^x\left(1-\frac{x^n}{n!}\right) < 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} = J_n$$

İnduksiya vasitəsi ilə aparacağıq. $n=1$ olduqda verilən bərabərsizlik

$$I_1 = e^x(1-x) < 1+x = J_1$$

şəklinə düşür. Yenidən törəməni tətbiq edək

$$J_1' - I_1' = 1-e^x(1-x)+e^x = 1+xe^x > 0$$

olduğu üçün $J_1 - I_1$ funksiyası verilən aralıqda artır. Digər tərəfdən

$$J_1(0)-I_1(0) = 1+0-e^0(1-0) = 0$$

Buna görə də $\forall x>0$ üçün $J_1(x) > I_1(x)$ bərabərsizliyi ödənilməlidir. Tutaq ki, n üçün bərabərsizlik artıq isbat edilib. Onu $(n+1)$ halı üçün isbat edək. Yenə də törəmə anlayışına müraciət edək:

$$J_{n+1}'(x) - I_{n+1}'(x) = 1+x+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^x\left(1-\frac{x^n}{n!}\right) +$$

$$+\frac{nx^{n-1}}{n!}e^x = J_{n-1}(x) - I_{n-1}(x) + \frac{x^n}{n!}e^x > 0$$

olduğu üçün $J_{n+1}(x) - I_{n+1}(x)$ funksiyası verilən aralıqda ciddi monoton artır. Digər tərəfdən $J_{n+1}(0) - I_{n+1}(0) = 0$ olduğuna görə $\forall x>0$ üçün

$$J_{n+1}(x) - I_{n+1}(x) > 0 \Leftrightarrow I_{n+1}(x) < J_{n+1}(x)$$

bərabərsizliyi ödənilməlidir.

İndi isə $x<0$ halına baxaq.

$x<0$ halında

a) n tək ədəd olduqda

$$e^x < 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} = J_n(x)$$

b) n cüt ədəd olduqda

$$e^x > 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!} = J_n(x)$$

bərabərsizlikləri doğrudur

İnduksiyanı tətbiq edək. $n=1$ halında

$$\left(J_1(x)-e^x\right) = 1-e^x > 0$$

olduğu üçün, dəyişənin mənfi qiymətlərində yuxarıdakılara analoji qaydada aparılan mühakimələr nəticəsində

$$e^x - 1 - x < 0$$

almış olarıq və ya

$$e^x < 1+x.$$

$n=2$ halında

$$(J_2(x)-e^x)' = 1+x-e^x > 0.$$

Onda

$$\forall x<0 \Rightarrow$$

$$J_2(x)-e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}-e^x < 0 \Leftrightarrow e^x > 1+x+\frac{x^2}{2}$$

Təklifin n üçün doğruluğunu qəbul etsək, $n+1$ üçün aşağıdakını alarıq

$$(J_{n+1}(x)-e^x)' = J_n(x)-e^x \begin{cases} <0, n=2k \text{ olduqda} \\ >0, n=2k+1 \text{ olduqda} \end{cases}$$

Beləliklə,

$$\forall x<0, \forall k\in N \Rightarrow J_{2k-1}(x) < e^x < J_{2k}(x)$$

$$\forall x>0, \forall n\in N \Rightarrow J_n(x) < e^x < J_n(x) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cdot e^x.$$

$x<0$ halı üçün

$$\lim_{n\to\infty}\left|J_n(x)-J_{n-1}(x)\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x^n|}{n!} = 0$$

$x>0$ halı üçün

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

olduğundan, $y=e^x$ funksiyası üçün

$$\forall\, x\in R \Rightarrow e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

sonsuz sıraya ayrılma alarıq. Belə sıralara verilən funksiyanın **Teylor sırası** deyilir.

Tutaq ki, $x>1, p>q>1$. Onda aşağıdakı bərabərsizliyin doğru olduğunu isbat edək.

$$\frac{x^p-1}{p} > \frac{x^q-1}{q}$$

1-ci üsul. $[1;\infty)$ aralığında təyin edilmiş aşağıdakı funksiyaya baxaq

$$f(x) = \frac{x^p-1}{p} - \frac{x^q-1}{q}$$

Aydındır ki, $f(1)=0$. Funksiyanın törəməsini tapaq:

$$f'(x) = \frac{px^{p-1}}{p} - \frac{qx^{q-1}}{q} = x^{p-1} - x^{q-1} > 0$$

Çünki $x>1$ olduqda (bunu bilavasitə törəmənin köməyi ilə etmək olar)

$$y = x^\alpha, \alpha > 0$$

üstlü funksiyası monoton artır və $x=1$ nöqtəsində funksiya kəsilməzdir. Buna görə də $x>1$ olduqda $f(x)$ funksiyası artır. Onda

$$\forall x>1 \Rightarrow f(x)>0 \Leftrightarrow \frac{x^p-1}{p} > \frac{x^q-1}{q}$$

2-ci üsul. Yeni $f(\alpha) = \frac{x^\alpha-1}{\alpha}, \alpha\geq 1, x>1$ funksiyasına baxaq. Aydındır ki, $f(1) = x-1>0$. Bu funksiya verilən aralıqda ($x=1$ nöqtəsi də daxil olmaq şərti ilə) hər yerdə kəsilməzdir, bütün daxili nöqtələrdə isə differensiallanandır. Törəməni tapaq

$$f'(\alpha) = \frac{\alpha x^\alpha \ln x - x^\alpha + 1}{\alpha^2} > 0$$

($t = x^\alpha > 1$ əvəzləməsindən sonra surətdə $g(t) = t\ln t - t + 1$ şəklində ifadə alınır. Onun müsbət qiymətlər aldığını yoxlamaq üçün yenə də törəmə anlayışına müraciət etmək olar). Buna görə də verilən aralıqda $f(\alpha)$ funksiyası ciddi monoton artır. Deməli, $x>1, p>q>1$ olarsa,

$$\frac{x^p-1}{p} > \frac{x^q-1}{q}$$

bərabərsizliyi ödənməlidir.

QABARIQ VƏ ÇÖKÜK FUNKSİYALAR NƏZƏRİYYƏSİNİN BƏRABƏRSİZLİKLƏRİN ARAŞDIRILMASINA TƏTBİQİ

Yensen teoreminə əsasən müəyyən bir aralıqda təyin edilmiş $f(x)$ funksiyası aşağıdakı xassəyə malikdirsə

$$\forall x,y\in(a;b) \Rightarrow f(x)+f(y) \leq 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) \quad (1)$$

arqumentin istənilən sayda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymətləri üçün aşağıdakı bərabərsizlik ödənilir

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)}{n} \leq f\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right) (2)$$

Burada əsas çətinlik (1) və ya (2) bərabərsizliyinin ödənilməsinin yoxlanmasından ibarətdir.

QABARIQ VƏ ÇÖKÜK FUNKSİYALAR

Müəyyən bir aralıqda təyin edilmiş və həmin aralığın hər hansı iki x, y nöqtəsi və $0\leq p\leq 1$ ədədi üçün

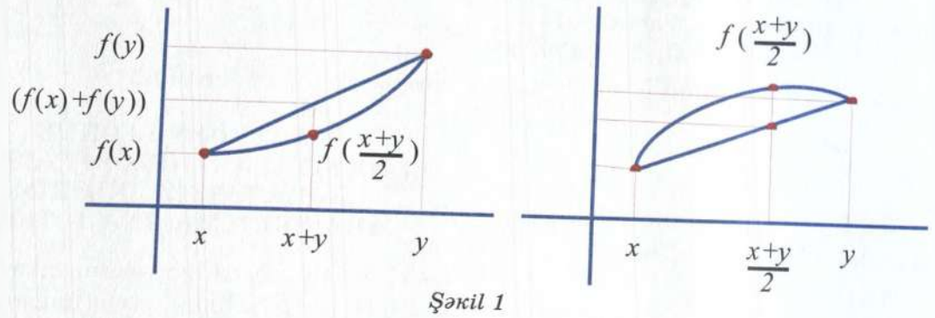
$$f(px+(1-p)y) \leq pf(x)+(1-p)f(y) \quad (3)$$

bərabərsizliyi ödənərsə, belə funksiyaya **qabarıq,**

$$f(px+(1-p)y) \geq pf(x)+(1-p)f(y) \quad (4)$$

bərabərsizliyi ödənərsə, belə funksiyaya **çökük funksiya** deyilir.

Həndəsi olaraq qabarıq (çökük) funksiya üçün (3) (və (4)) onu göstərir ki, $(x;y)$ aralığında funksiyanın qrafikinə uyğun qövs $(x;f(x))$ və $(y;f(y))$ nöqtələrini birləşdirən vətərdən aşağıda (şəkil 1) (yuxarıda şəkil 1) yerləşir. Doğrudan da, $\forall z\in(x,y)$ üçün



Şəkil 1

$$p=\frac{y-z}{y-x}$$

yazsaq $z=p\cdot x+(1-p)\cdot y$ və

$$f(z)\le\frac{z-x}{y-x}f(y)+\frac{y-z}{y-x}f(x).$$

çökük funksiya üçün isə əksinə

$$f(z)\ge\frac{z-x}{y-x}f(y)+\frac{y-z}{y-x}f(x).$$

Aydındır ki, verilən təklif aşağıdakına ekvivalentdir:

$$x_1;x_2\in D(f);p_1;p_2\ge 0;p_1+p_2=1$$

olduqda

$f(p_1x_1+p_2x_2)\le p_1f(x_1)+p_2f(x_2)$ (Qabarıq funksiya halı)

$f(p_1x_1+p_2x_2)\ge p_1f(x_1)+p_2f(x_2)$ (Çökük funksiya halı)

FUNKSİYANIN QABARIQ VƏ YA ÇÖKÜKLÜYÜNÜN ARAŞDIRILMASI ÜÇÜN KRİTERİYALAR

Yensen bərabərsizliyi. $(a;b)$ intervalında təyin edilmiş $f(x)$ funksiyası yalnız və yalnız o vaxt

a) qabarıqdır ki, istənilən $x_i\in(a;b)$; $p_i\ge 0\ \ i=\overline{1,n}\ p_1+p_2+...+p_n=1$ ədədləri üçün

$$f(p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n)\le p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+...p_nf(x_n)$$

bərabərsizliyi ödənilmiş olsun.

b) çökükdür ki,

$$f(p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n)\le p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+...p_nf(x_n)$$

bərabərsizliyi ödənilmiş olsun.

$n=2$ halı qabarıq funksiyanın tərifinə uyğundur. Tutaq ki, $n>2$ və $n-1$ halı üçün təklif doğrudur. Onda

$$f(p_1x_1+p_2x_2+...+p_{n-1}x_{n-1}+p_nx_n)=f\times$$
$$\times\left(\left((p_1+p_2+...+p_{n-1})\cdot\frac{p_1x_1+p_2x_2+...+p_{n-1}x_{n-1}}{p_1+p_2+...+p_{n-1}}++p_nx_n\right)\right)\le$$
$$\le(p_1+p_2+...+p_{n-1})\cdot f\left(\frac{p_1x_1+p_2x_2+...+p_{n-1}x_{n-1}}{p_1+p_2+...+p_{n-1}}\right)+$$
$$+p_nf(x_n)\le p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+...+$$
$$+p_{n-1}f(x_{n-1})+p_nf(x_n)$$

Son iki bərabərsizlikdə $p_1+p_2+...+p_{n-1}=1-p_n$

$$\frac{p_1}{p_1+p_2+...+p_{n-1}}+\frac{p_2}{p_1+p_2+...+p_{n-1}}+...+$$
$$+\frac{p_n}{p_1+p_2+...+p_n}=1$$

və verilən funksiyanın qabarıq olması nəzərə alınmışdır.

Çökük funksiya üçün analoji olaraq

$$f(p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n)\ge p_1f(x_1)+p_2f(x_2)+...p_nf(x_n)$$

bərabərsizliyi doğru olacaqdır.

Teoremin əks hökmü isə aydındır.

Qeyd edək ki, qabarıq və çökük funksiyanın tərifi kimi alınan Yensen bərabərsizliklərini də qəbul etmək olar.

$(a;b)$ aralığında differensiallanan $f(x)$ funksiyasının qabarıq (çökük) olması üçün zəruri və kafi şərt onun törəməsinin həmin intervalda artan (azalan) funksiya olmasından ibarətdir.

İsbatı qabarıqlıq halı üçün aparacağıq. Tutaq ki, $f(x)$ qabarıq funksiyadır. Onda $x<y$ və $0<p<1$ üçün

$$\frac{f(px+(1-p)y)-f(x)}{px+(1-p)y-x}\le$$
$$\le\frac{pf(x)+(1-p)f(y)-f(x)}{(1-p)(y-x)}=$$
$$=\frac{(1-p)(f(y)-f(x))}{(1-p)(y-x)}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

və

$$\frac{f(y)-f(px+(1-p)f(y))}{y-px-(1-p)y}\ge$$
$$\ge\frac{f(y)-pf(x)-(1-p)f(y)}{p(y-x)}=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Beləliklə, $\forall t\in(x,y)$ üçün:

$$\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le\frac{f(y)-f(t)}{y-t}$$

bərabərsizliyini alırıq. Buradan

$$f'(x)\le\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\le f'(y).$$

Beləliklə, $f'(x)$ artan funksiyadır.

İndi isə tutaq ki, $f'(x)$ monoton artır və $x<t<y$. Onda $\exists p\in(0,1)\Rightarrow t=px+(1-p)y$. Laqranjın sonlu artım haqqında teoreminə əsasən

$$\exists\xi\in(x,t)\ \text{və}\ \eta\in(t,y)\Rightarrow$$
$$f(t)-f(x)=f'(\xi)(t-x)=(1-p)f'(\xi)(y-x)$$
$$f(y)-f(t)=f'(\eta)(y-t)=pf'(\eta)(y-x)$$
$$pf(x)+(1-p)f(y)-f(t)=p(f(x)-f(t))+$$
$$+(1-p)(f(y)-f(t))=p(1-p)(y-x)(f'(\eta)-$$
$$-f'(\xi))\ge 0.$$

Deməli, $f(x)$ qabarıq funksiyadır.

Müəyyən bir aralıqda təyin edilmiş özü və törəməsi kəsilməz və bütün nöqtələrdə ikinci tərtib törəməsi olan funksiyanın həmin aralıqda qabarıq olması üçün zəruri və kafi şərt

$$f''(x)\ge 0$$

münasibətinin ödənilməsindən ibarətdir.

Aydındır ki, bu teorem yuxarıda isbat etdiyimiz teoremin nəticəsidir. Ancaq yuxarıda biz Laqranjın sonlu artım haqqında teoremindən istifadə etdik. İkinci tərtib törəmənin varlığı şərtində bu teoremə müraciət etməmək olar.

Tutaq ki, $x<t<y$. Onda

$$\exists p\in(0,1)\Rightarrow t=px+(1-p)y.$$

Asanlıqla yoxlamaq olar ki,

$$t-x=(1-p)(y-x);y-t=p(y-x)$$

$f''(x)\ge 0$ olduğu üçün $f'(x)$ monoton artan funksiyadır. Onda

$$f(t)-f(x)=$$
$$=\int_x^t f'(\xi)d\xi\le f(t)(t-x)=(1-p)f(t)(y-x)$$

$$f(y)-f(t)=\int_t^y f'(\xi)d\xi\ge f(t)(y-t)=pf(t)(y-x)$$

Beləliklə,

$$f(t)\le f(x)+(1-p)f'(t)(y-x)$$
$$f(t)\le f(y)-pf'(t)(y-x)$$

Bu bərabərsizliklərdən birincisini p-yə, ikincisini $(1-p)$-yə vurub tərəf-tərəfə toplasaq

$$f(t)=pf(t)+(1-p)f(t)\le pf(x)+(1-p)f(y)$$

alarıq. Deməli $f(x)$ qabarıq funksiyadır.

Çökük funksiya halı da anoloji olaraq araşdırılır və teoremin əks hökmünü isbat etməkdə artıq bu faktdan istifadə edilir. Belə ki, əgər qabarıq funksiyanın ikinci tərtib törəməsi hansısa bir nöqtədə mənfi olsa, artıq $f(x)$ funksiyası həmin nöqtənin müəyyən bir ətrafında çökük olmalıdır, bu da qabarıqlıq şərtinə ziddir.

KRİTERİYALARIN TƏTBİQLƏRİ

Misal 1. $n \geq 1; y(x) = x^n; x \in [0;\infty)$ kimi təyin edilmiş funksiyanın ikinci tərtib törəməsi olaraq aşağıdakını tapırıq

$$y''(x) = n(n-1)x^{n-2} \geq 0$$

Buna görə də baxılan funksiya təyin oblastında qabarıq funksiyadır.

$$\forall x, y \geq 0; \forall \alpha, \beta : \alpha + \beta = 1 \Rightarrow (\alpha x + \beta y)^n \leq \alpha x^n + \beta y^n$$

Xüsusi halda $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ olduqda

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n}{2} + \frac{y^n}{2}$$

bərabərsizliyini almış olarıq.

Misal 2. $y(x) = \ln x; x \in (0;\infty)$ kimi təyin edilmiş funksiyanın ikinci tərtib törəməsini tapaq

$$y''(x) = -\frac{1}{x^2} \leq 0.$$

Deməli, $y(x) = \ln x$ funksiyası $(0;\infty)$ aralığında çökük funksiyadır. Buna görə də

$$\forall x, y > 0; \alpha + \beta = 1 \Rightarrow \alpha \ln x + \beta \ln y \leq \ln(\alpha x + \beta y)$$

və ya

$$\ln x^\alpha y^\beta \leq \ln(\alpha x + \beta y).$$

Buradan artıq bizə məlum olan

$$x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$$

bərabərsizliyini almış olarıq. Məlum olduğu kimi bu bərabərsizliyin köməyi ilə Höldər və Minkovski bərabərsizliklərini ala bilərik.

Tutaq ki, $x_1, x_2, ..., x_n > 0$; $p_1 + p_2 + ... p_n = 1$. İensen bərabərsizliyini tətbiq etsək:

$$p_1 \ln(x_1) + p_2 \ln(x_2) + ... + p_n \ln(x_n) \leq$$
$$\leq \ln(p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n)$$

Buradan yenə bizə artıq məlum olan

$$x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n} \leq p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$$

bərabərsizliyini alarıq.

Misal 3. $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında təyin edilmiş $y = \sin x$; $y = \cos x$ triqonometrik funksiyalarına baxaq. $y = \sin x$; $y = \cos x$ funksiyalarının hər ikisi baxılan aralıqda çökük funksiyalardır. Çünki

$$y''(x) = -\sin x \leq 0$$
$$y''(x) = -\cos x \leq 0$$

Buna görə də $\forall x, y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ və $\forall \alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ üçün

$$\alpha \sin x + \beta \cos y \leq \sin(\alpha x + \beta y)$$
$$\alpha \cos x + \beta \cos y \leq \cos(\alpha x + \beta y)$$

Funksiyanın qabarıqlığı ilə çöküklüyünün bir-birini əvəz etdiyi nöqtəyə **əyilmə nöqtəsi** deyilir.

Məsələn, $y = x^3$ funksiyası üçün $x = 0$ nöqtəsi əyilmə nöqtəsidir. Doğrudan da

$$y'' = 6x \begin{cases} < 0; x < 0 \\ > 0; x > 0 \end{cases}$$

olduğundan verilən funksiya $x = 0$ nöqtəsində çöküklüyünü qabarıqlığa dəyişir.

Çoxölçülü hal. n-ölçülü həqiqi fəzalarda da qabarıq və çökük funksiya anlayışları daxil etmək olar. Bildiyimiz kimi n-ölçülü R^n həqiqi fəzası $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ kimi həqiqi ədədlərin nizamlanmış toplusundan təşkil edilmiş çoxluqdur. R^n-də iki elementin cəmi, fərqi və skalyar ədədə hasili aşağıdakı kimi təyin edilir

$$x \pm y = (x_1 \pm y_1, x_2 \pm y_2, ..., x_n \pm y_n)$$
$$a \in R \Rightarrow ax = (ax_1, ax_2, ..., ax_n)$$

İki elementin skalyar hasili dedikdə isə

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n$$

cəmi başa düşülür.

Tutaq ki, $C \subset R^n$ alt çoxluqdur və onun hər istənilən iki elementi üçün

$$\forall x, y \in C, 0 < p < 1 \Rightarrow px + (1-p)y \in C$$

olması alınır, onda belə çoxluğa **qabarıq çoxluq** deyilir.

Qeyd edək ki, Yensen bərabərsizliyinin isbatındakı metodla aşağıdakı faktı almaq olar:

$C \subset R^n$ çoxluğu yalnız və yalnız o vaxt qabarıqdır ki,

$$\forall x_1, x_2, ..., x_n \in C \forall p_1, p_2, ..., p_n > 0 : p_1 + ... + p_n = 1$$

ədədləri üçün

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n \in C$$

doğrudur.

Məktəb kursundan bizə yaxşı məlum olan müstəvi fiqurlardan qabarıq çoxbucaqlılar, dairə, ellips, fəzada kürə, qabarıq çoxüzlü və s. kimi həndəsi fiqurlar qabarıq çoxluqlara misaldırlar.

Tutaq ki, $C \subset R^n$ hər hansı qabarıq çoxluqdur. $f : C \to R$ isə həqiqi qiymətli funksiyadır. Əgər

$$\forall x, y \in C, 0 < p < 1 \Rightarrow f(px + (1-p)y) \leq$$
$$\leq pf(x) + (1-p)f(y)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, $f(x)$ funksiyası C çoxluğunda **qabarıq;**

$$\forall x, y \in C, 0 < p < 1 \Rightarrow f(px + (1-p)y) \geq$$
$$\geq pf(x) + (1-p)f(y)$$

bərabərsizliyi ödənilərsə, belə funksiya C çoxluğunda **çökük funksiya** adlanır.

Birdəyişənli funksiyalar üçün olduğu kimi bu tərifin Yensen bərabərsizliyinə ekvivalent olmasını isbat etmək olar.

Qabarıq funksiyaların bəzi xassələrini qeyd edək.

İki qabarıq funksiyanın cəmi qabarıq, iki çökük funksiyanın cəmi isə çökük funksiyadır.

Tutaq ki, $f(x), g(x)$ qabarıq funksiyalardır. Onda

$$\forall x, y \in C \Rightarrow$$
$$(f+g)(px + (1-p)y) = f(px + (1-p)y) +$$
$$+ g(px + (1-p)y) \leq pf(x) + (1-p)f(y) +$$
$$+ pg(x) + (1-p)g(y) = p(f(x) + g(x)) +$$
$$+ (1-p)(f(y) + g(y))$$

Bu isə $f(x) + g(x)$ cəminin qabarıq olması deməkdir.

Çökük funksiya halı da analoji olaraq araşdırılır.

Tutaq ki, $f : R^n \to R, g : R^m \to R$ verilmiş qabarıq (çökük) funksiyalardır. Onda aşağıdakı qayda ilə təyin edilmiş

$$h : R^{n+m} \to R; h(x_1, ..., x_n, x_{n+1}, ..., x_{n+m}) =$$
$$= f(x_1, ..., x_n) + g(x_{n+1}, ..., x_{n+m})$$

funksiyası da qabarıq (çökük) funksiyadır.

Yeni

$$F(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

və $G(x_1, x_2, ..., x_{n+m}) = g(x_{n=1}, ..., x_{n+m})$ funksiyalarına baxaq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, hər iki funksiya artıq R^{n+m} fəzasında qabarıq (çökük) funksiyalardır və bundan əlavə

$$h = F + G$$

münasibəti ödənilir. Onda teoremə əsasən nəticənin hökmü aydın olur.

Məsələn, bütün əmsalları müsbət ədədlər olan və $n, m, q \in N$

$$f(x, y, z) = ax^n + by^m + cz^q$$

çoxhədlisi bu nəticəyə əsasən qabarıq funksiyadır. Bu faktdan asanlıqla aşağıdakı bərabərsizlik alınır

$$\forall a, b, c > 0, \forall n, m, q > 1 \Rightarrow$$

$$a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^n + b\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right)^m + c\left(\frac{z_1 + z_2}{2}\right)^q \leq$$
$$\leq \frac{ax_1^n + by_1^m + cz_1^q}{2} + \frac{ax_2^n + by_2^m + cz_2^q}{2}$$

Tutaq ki, $C \subset R^n$ müəyyən bir qabarıq çoxluqdur.

a) $f : C \to R$ qabarıq, $g(x)$ isə təyin oblastı $f(x)$ funksiyasının qiymətlər çoxluğunu özündə saxlayan qabarıq monoton artan funksiyadır. Onda $g(f(x))$ mürəkkəb funksiyası da qabarıq funksiyadır.

b) Yuxarıdakı şərtlər daxilində $f(x)$ çökük, $g(x)$ isə monoton azalan çökük funksiyalardırsa, $g(f(x))$ mürəkkəb funksiyası çökük funksiyadır.

a) $f(x)$ funksiyasının qabarıq, $g(x)$ funksiyasının qabarıq və monoton artan olmasını nəzərə alsaq

$$\forall x,y\in C, 0<p<1\Rightarrow$$
$$g(f(px+(1-p)y)\le g(pf(x)+(1-p)f(y))\le$$
$$\le pg(f(x))+(1-p)g(f(y))$$

bu isə $g(f(x))$ funksiyasının qabarıq olması deməkdir.

b) bəndinin isbatı tamamilə *a)* bəndinin isbatına analoji qaydada aparılır.

Misal 4. $f(x)=\sin x; g(x)=\cos x$ funksiyaları $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ parçasında çökükdürlər, bundan əlavə $g(x)$ funksiyası bu parçada monoton azalır. Deməli teoremin bütün şərtləri ödənir. Beləliklə, $h(x)=\cos(\sin x)$ funksiyası verilən aralıqda çökük funksiya olmalıdır. Bu faktdan istifadə edərək aşağıdakı bərabərsizliyi ala bilərik

$$\cos\left(\sin\frac{x+y}{2}\right)\ge\frac{\cos(\sin x)+\cos(\sin y)}{2}$$

R^n-də təyin edilmiş 1-ci tərtibdən bircins və kəsilməz $f(x)$ funksiyasının qabarıq (çökük) olması üçün zəruri və kafi şərt $\forall x=(x_1,\dots,x_n)\in R$, $\forall y=(y_1,\dots,y_n)\in R$ üçün

$$f(x+y)\le f(x)+f(y)$$
$$(f(x+y)\ge f(x)+f(y))$$

bərabərsizliyinin ödənilməsindən ibarətdir.

Doğrudan da, $\forall x,y$ üçün verilən bərabərsizlik ödənilərsə, $0\le\lambda\le1$ üçün

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le f(\lambda x)+f((1-\lambda)y)=$$
$$=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Əksinə $f(x)$ qabarıq funksiya olarsa,

$$f(x+y)=f\left(2\cdot\frac{x+y}{2}\right)=2\cdot f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le$$
$$\le 2\cdot\frac{f(x)+f(y)}{2}=f(x)+f(y)$$

alarıq.

Çökük funksiya halında isə əks bərabərsizliklər almış olarıq.

1-ci tərtib bircins $f(x)$ funksiyasının qabarıq (çökük) olması üçün zəruri və kafi şərt

$$\forall n\in N; n>1\Rightarrow f(x_1+x_2+\dots+x_n)\le$$
$$\le f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)$$

$$(f(x_1+x_2+\dots+x_n)\ge f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n))$$

bərabərsizliyinin ödənməsindən ibarətdir.

Misal 5. $f(x,y)=\sqrt{xy}$ funksiyasına baxaq.

$$(f(x_1+x_2,y_1+y_2))^2=\left(\sqrt{(x_1+x_2)(y_1+y_2)}\right)^2=$$
$$=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2=(\sqrt{x_1y_1})^2+$$
$$+(x_1y_2+x_2y_1)+(\sqrt{x_2y_2})^2\ge(\sqrt{x_1y_1})^2+$$
$$+2\sqrt{x_1x_2y_1y_2}+(\sqrt{x_2y_2})^2=(\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2})^2=$$
$$=(f(x_1;y_1)+f(x_2;y_2))^2.$$

Beləliklə,

$$f(x_1+x_2,y_1+y_2)\ge f(x_1,y_1)+f(x_2+y_2).$$

Deməli $f(x)$ çökük funksiyadır. Nəticəni tətbiq etsək,

$$f(x_1+x_2+\dots+x_n,y_1+y_2+\dots+y_n)\ge f(x_1,y_1)+$$
$$+f(x_2,y_2)+\dots+f(x_n,y_n)$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x_1y_1}+\sqrt{x_2y_2}+\dots+\sqrt{x_ny_n}\le$$

$$\le\sqrt{x_1+x_2+\dots+x_n}\sqrt{y_1+y_2+\dots+y_n}$$

almış olarıq.

Xüsusi halda, $x_i=a_i^2$ və $y_i=b_i^2$ olarsa, məlum Koşi-Bunyakovski bərabərsizliyi alınır:

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\le\sqrt{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}\times$$

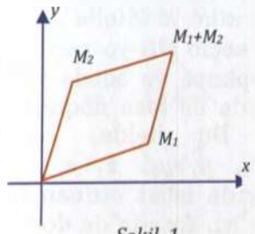
$$\times\sqrt{b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2}$$

XƏTTİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR SİSTEMİ

Xətti tənlik və bərabərsizliklər onların sistemləri ilə təyin olunan çoxluqlar qabarıq çoxluqlardır və belə çoxluqlarda xətti funksiyaların ekstremallığı məsələləri xüsusilə əhəmiyyətlidir; bir çox praktiki məsələlər xüsusilə də iqtisadi məsələlər onlara gətirilir və bunlar xətti proqramlaşdırma məsələləri adlanırlar.

İLKİN MƏLUMATLAR

Nöqtələr üzərində əməllər. Müstəvi üzərində düzbucaqlı koordinat sistemi daxil edək. (Şəkil 1) M nöqtəsinin bu koordinat sistemində koordinatlarının x, y olmasını aşağıdakı kimi yazacağıq; $M=(x,y)$ və ya $M(x,y)$. Koordinat sisteminin olması nöqtələrin toplanması və nöqtələrin ədədə vurulması əməllərini təyin etməyə imkan verir.



Şəkil 1

Nöqtələrin toplanması belə təyin olunur: əgər

$$M_1=(x_1,x_2)\text{ və }M_2=(y_1,y_2)$$

isə, onda

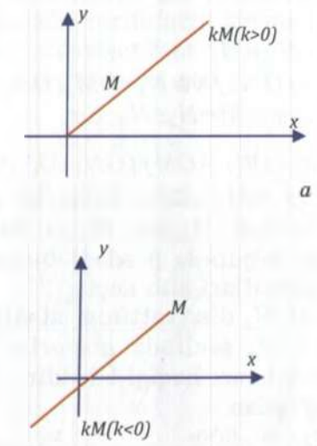
$$M_1+M_2=(x_1+x_2,\ y_1+y_2).$$

Beləliklə, nöqtələrin toplanması onların eyniadlı koordinatlarının toplanması deməkdir. Nöqtələrin toplanmasının həndəsi mənası çox sadədir:

M_1+M_2 nöqtəsi OM_1 və OM_2 parçaları üzərində (O koordinat başlanğıcıdır) qurulmuş paraleloqramın dördüncü təpə nöqtəsidir. Paraleloqramın qalan üç təpəsi isə M_1,O,M_2 nöqtəsidir. Bunu başqa cür də demək olar: M_1+M_2 nöqtəsi M_2 nöqtəsini OM_1 istiqamətində onun uzunluğu qədər paralel köçürməklə alınır. (şəkil 1)

$M(x,y)$ nöqtəsinin istənilən κ ədədinə hasili belə təyin olunur: $\kappa M=(\kappa x;\kappa y)$.

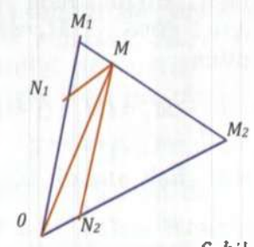
Beləliklə, nöqtənin ədədə vurulması onun hər bir koordinatını həmin ədədə vurulmasına gətirilir. Bu əməlin həndəsi mənası toplamada olduğundan daha sadədir; $\kappa>0$ olduqda $M^*=\kappa M$ nöqtəsi OM şüasına aiddir və $OM^*=\kappa\cdot OM$, $\kappa<0$ olduqda isə M^* nöqtəsi OM şüasının əks (tamamlayıcı) şüası üzərində yerləşir və $OM^*=|\kappa|\ OM$ (şəkil 2). Bu əməlləri vektorlar vasitəsi ilə vermək olar.



Şəkil 2

Daxil olunan əməllər həndəsi faktları cəbri dilə köçürmək üçün əlverişlidir. Belə köçürməyə aid bir neçə misal gətirək;

1. M_1M_2 parçası $\alpha M_1+\beta M_2$ şəklində



Şəkil 3

olan bütün nöqtələrdən ibarətdir, burada α, β cəmi 1-ə bərabər olan mənfi olmayan istənilən iki ədəddir. Bu o deməkdir ki, sırf həndəsi fakt - M nöqtəsinin M_1M_2 parçasına aid olması $(M\in M_1M_2)$ $M=\alpha M_1+\beta M_2$ cəbri münasibəti şəklində yazılır.

M_1M_2 parçasının istənilən M nöqtəsin-

dən OM_1 və OM_2 -yə paralel düz xətlər keçirərək OM_2 parçası üzərində N_2, OM_1 parçası üzərində N_1 nöqtəsini alarıq.

$$\alpha = M_2M / M_2M_1,\ \beta = M_1M / M_1M_2$$

götürək α, β mənfi deyil və onların cəmi 1-ə bərabərdir. ON_1MN_2 paraleloqram, MN_2M_2 və MN_1M_1 üçbucaqları OM_1M_2 üçbucağına oxşardır. (şəkil 3) Odur ki,

$$N_2M / OM_1 = ON_1 / OM_1 = M_2M / M_1M_2 = \alpha,$$
$$N_1M / OM_2 = ON_2 / OM_2 = M_1M_2 / M_1M_2 = \beta$$

buradan $N_1 = \alpha M_1$

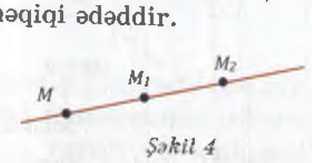
$(ON_1 = \alpha \cdot OM_1)$ və $N_2 = \beta \cdot M_2 (ON_2 = \beta \cdot OM_2)$ alınır. Lakin $M = N_1 + N_2$-dır.

$$(\vec{ON_1} + \vec{ON_2} = \vec{OM})\ (ON_1 + ON_2 = OM)$$

deməli $M = \alpha M_1 + \beta M_2$. Nəhayət qeyd edək ki, M nöqtəsi M_1-dən M_2-yə doğru M_1M_2 parçasını keçdikdə β ədədi 0-dan 1-ə kimi bütün qiymətləri alıb keçir.

2) M_1M_2 düz xəttinin istənilən nöqtəsi $tM_1 + (1-t)M_2$ şəklində göstərilə bilər, burada t hər hansı həqiqi ədəddir.

Doğrudan da, əgər M nöqtəsi M_1M_2 parçasına aiddirsə, onda bu təklif yuxarıdakından çıxır. Tutaq ki, $M \notin M_1M_2$. Onda ya M_1 nöqtəsi MM_2 parçası üzərində (şəkil 4), ya da M_2 nöqtəsi MM_1 parçası üzərində yerləşir. Birinci hala baxaq 1) də isbat olduğuna görə $M_1 = sM + (1-s)M_2$ $(o<s<1)$. Buradan



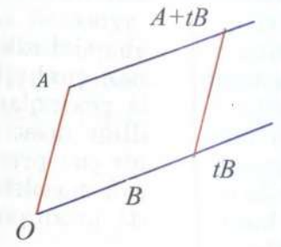
Şəkil 4

$$M = \frac{1}{s}M_1 - \frac{1-s}{s}M_2 = tM_1 + (1-t)M_2M_2,$$

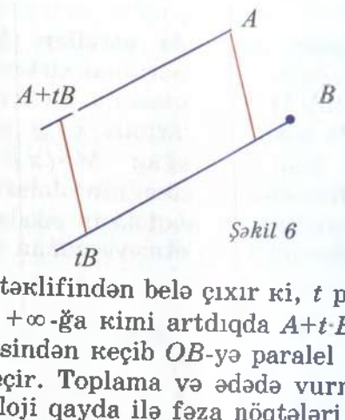
$(t = \frac{1}{s})$ $M_2 \in MM_1$ halı analoji isbat olunur.

3) t parametri 0-dan ∞-a kimi artırdıqda $t \cdot B$ nöqtəsi OB şüasını keşir, $A + tB$ nöqtəsi isə A nöqtəsindən çıxan OB ilə eyniistiqamətli şüanı keçir.

t parametri 0-dan $-\infty$-ğa kimi azaldıqda isə, tB və $A + t \cdot B$ nöqtələri yuxarıda deyilən şüaların əks (tamamlayıcı) şüalarını keçir. İsbat ücün şəkil 5, şəkil 6-ya baxmaq kifayətdir.



Şəkil 5

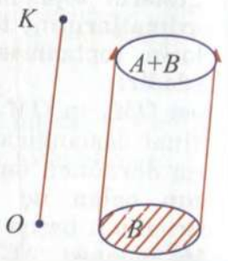


Şəkil 6

3) təklifindən belə çıxır ki, t parametri $-\infty$-dan $+\infty$-ğa kimi artdıqda $A + t \cdot B$ nöqtəsi A nöqtəsindən keçib OB-yə paralel olan düz xətti keçir. Toplama və ədədə vurma əməlləri analoji qayda ilə fəza nöqtələri üçün də təyin edilir. Bu halda, tərifə görə; $M_1 + M_2 = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_1)$. $\kappa \cdot M = (\kappa x.\ \kappa y,\ \kappa z)$. Yuxarıda isbat olunan bütün təkliflər, aydındır ki, fəzada da doğrudur.

A və B müstəvidə və ya fəzada nöqtələrdən ibarət hər hansı iki çoxluqdursa, onların cəmi $A+B$ olaraq $K+L$ şəklində olan bütün nöqtələr çoxluğunu başa düşəcəyik, belə ki, $K \in A,\ L \in B$ istənilən nöqtələrdir:

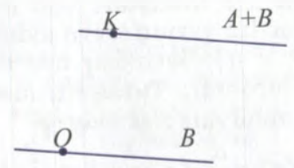
$$A+B = \{K+L : K \in A.\ L \in B\}.$$



Şəkil 7

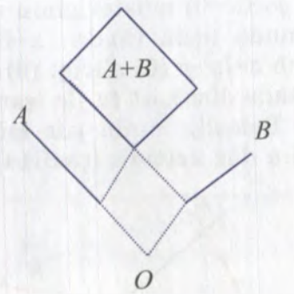
Nöqtələrin toplanmasının həndəsi mənasına əsasən A və B nöqtəvi çoxluqlarının cəmini tapmaq üçün sadə qayda vermək

olar: A çoxluğunun hər bir $K \in A$ nöqtəsi üçün B çoxluğunun OK parçası qədər paralel köçürülməsindən alınan çoxluğu qururuq (Şəkil 7). Sonra alınan bütün çoxluqları bir çoxluqda birləşdiririk. Bu sonuncu çoxluq $A+B$ çoxluğu olacaq. Bir neçə misal göstərək: A çoxluğu bir nöqtədən $-K \in A$ nöqtəsindən ibarətdir, B çoxluğu isə istənilən nöqtələr çoxluğudur, bu halda $A+B$ çoxluğu B çoxluğunun OK parçası qədər paralel köçürülməsi nəticəsidir. Xüsusi



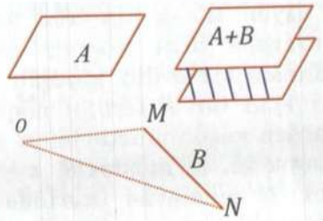
Şəkil 8

halda, əgər B-düz xətdirsə $A+B-B$-yə paralel düz xətdir. Bundan əlavə B-düz xətti koordinat başlanğıcından keçirsə, onda $A+B$ B-yə paralel olan və K nöqtəsindən keçən düz xətdir (şəkil 8).



Şəkil 9

2. A və B paralel olmayan parçalardır (müstəvidə və ya fəzada). Onda $A+B$ tərəfləri A və B parçalarına bərabər və paralel olan paraleloqramdır (şəkil 9). A və B paralel olduqda $A+B$ hansı fiqur olacaq? Müstəqil cavab verin.



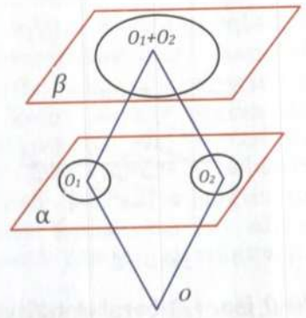
Şəkil 10

3. A-müstəvi, B-ona paralel olmayan parçadır. Bu halda $A+B$ çoxluğu A müstəvisinə paralel olan iki müstəvi (A müstəvisini OM və ON parçası qədər paralel sürüşdürdükdə alınan müstəvilər) arasında qalan fəza hissəsidir (şəkil 10).

4. A və B bir α müstəvisi üzərində yerləşən mərkəzləri O_1 və O_2 radiusları r_1 və r_2 olan dairələrdir. Onda $A+B$ çoxluğu radiusu r_1 və r_2 olan və α-yə paralel müstəvi üzərində yerləşən dairədir (şəkil 11).

1.2. Bir dərəcəli iki və ya üçdəyişənli tənlik və bərabərsizliklərin həndəsi mənası. Birdərəcəli ikidəyişənli (x və y)

$$ax + by + c = 0 \qquad (1)$$



Şəkil 11

tənliyinə baxaq. x və y-ə müstəvinin nöqtələrinin koordinatları kimi baxaraq təbii sual qoymaq olar: koordinatları (1) tənliyini ödəyən nöqtələr çoxluğu müstəvidə hansı çoxluq əmələ gətirir və ya qısaca, (1) tənliyi hansı nöqtələr çoxluğunu təyin edir?

Cavab oxucuya, böyük ehtimalla məlumdur: (1) tənliyi ilə təyin olunan nöqtələr çoxluğu müstəvi üzərində düz xətdir, yəni (1) tənliyi düz xəttin tənliyidir. Doğrudan da, əgər $b \neq o$ isə, onda (1) tənliyi

$$y = \kappa x + p.\ (\kappa = -\frac{a}{b}.\ P = \frac{c}{b})$$

şəklində gətirilir ki, bu da xətti funksiyadır və onun qrafiki düz xətdir.. $b=0$ isə, tənlik $x=h$ şəklində gətirilir ki, bu da ordinat oxuna paralel düz xətt təyin edir.

Həmin sual

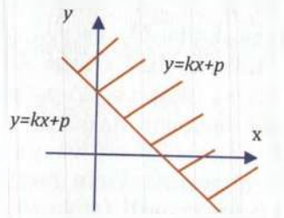
$$ax + by + c \geq 0 \qquad (2)$$

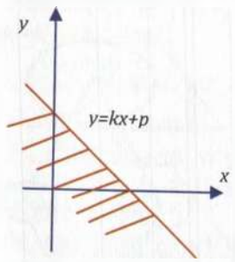
bərabərsizliyi üçün də ortaya çıxır. (2) bərabərsizliyi koordinat müstəvisində hansı çoxluğu təyin edir?

Burada da cavab sadədir. Əgər $b \neq 0$ isə, (2) bərabərsizliyi

$y \geq \kappa x+p$ və ya $y \leq \kappa x+p$

bərabərsizliklərindən birinə gətirilir ki, bu bərabərsizliklərdən birincisini $y=\kappa x+p$ düz xəttindən "yuxarıda" yerləşən bütün nöqtələr, digərini isə bu düz xətdən "aşağıda" yerləşən bütün nöqtələr ödəyir (şəkil 12).

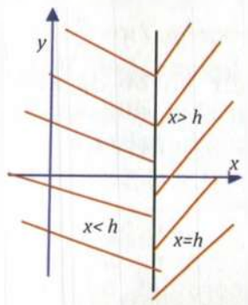




Şəkil 12

Əgər $b=0$ isə, (2) bərabərsizliyi $x \geq h$ və ya $x \leq h$ bərabərsizliklərindən birinə gətirilir. Bunlardan birincisini $x=h$ xəttindən sağda, ikincisini isə solda yerləşən bütün nöqtələr (yəni onların koordinatları) ödəyir (şəkil 13).

Beləliklə, (1) tənliyi koordinat müstəvisində düz xətt təyin edir, (2) bərabərsizliyi isə bu düz xəttin koordinat müstəvisini böldüyü yarımmüstəvilərdən birini təyin edir. (düz xəttin özü hər iki yarımmüstəviyə aid hesab olunur).



Şəkil 13

Üçdəyişənli hala baxaq:

$$ax+by+cz+d=0 \qquad (3)$$

xətti tənliyində və

$$ax+by+cz+d \geq 0 \qquad (4)$$

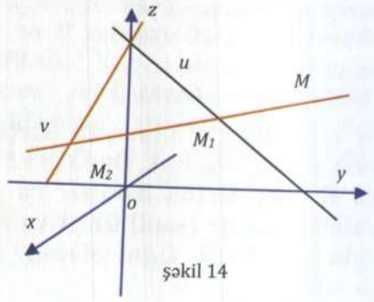
xətti bərabərsizliyində x, y, z-yə koordinat fəzasının nöqtəsinin koordinatları kimi baxılsa (3) tənliyi və (4) bərabərsizliyi fəzada hansı nöqtələr çoxluğunu (fiquru) təyin edir? Cavabı görmək çətin deyil:

(3) tənliyi fəzada müəyyən bir müstəvi təyin edir, (4) bərabərsizliyi isə bu müstəvi ilə fəzanın bölündüyü iki yarımfəzadan birini təyin edir (müstəvi özü onunla təyin olunan hər iki yarımfəzaya aiddir).

a, b, c ədədlərindən heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir; Tutaq ki, məsələn, $c \neq 0$. Onda (3) tənliyini $z=\kappa x+ly+p$

$$(\kappa=-\frac{a}{c};\ l=-\frac{b}{c};\ p=-\frac{d}{c}) \qquad (5)$$

şəklinə gətirmək olar. (5) tənliyini ödəyən $M(x,y,z)$ nöqtələr çoxluğunu π ilə işarə edək: Göstərək ki, π müstəvidir. π çoxluğundan hansı nöqtələrin yoz müstəvisi üzərində yerləşdirdiyini, daha doğrusu π çoxluğu ilə $yoz(x=0)$ müstəvisinin kəsişməsini tapaq. Bunun üçün (5)-də $x=0$ olduğunu nəzərə alıb $z=ly+p$ (6) alırıq. (6) tənliyi yoz müstəvisində düz xətt (u ilə işarə edək) təyin edir. Deməli, π-nin yoz müstəvisi ilə kəsişməsi u düz xəttidir (şəkil14).



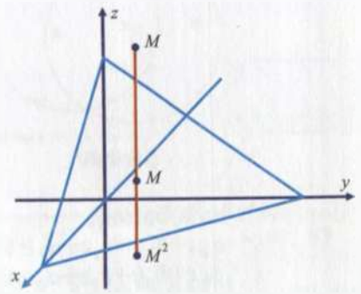
şəkil 14

Eyni qayda ilə π-nin xoz müstəvisi ($y=o$) ilə kəsişmə xətti $z=\kappa x+p$ tənliyi ilə müəyyən olunan bir v düz xətdidir. u və v düz xətləri eyni bir $P\ (0;0;p)$ nöqtəsindən keçir. Onlardan keçən müstəvini α ilə işarə edək. Göstərək ki, α müstəvisi π-yə daxildir ($\alpha \subset \pi$). α müstəvisi üzərində u və v düz xətlərinə aid olmayan istənilən M nöqtəsi götürək. M nöqtəsindən u və v düz xətlərini uyğun olaraq M_1 və M_2 nöqtəsində kəsən düz xətt keçirək (bunu həmişə etmək mümkündür, izah edin). M_1 nöqtəsinin koordinatları $(0;\ y;\ ly+p)$, $M_2 \in v$ nöqtəsinin koordinatları $(x;\ 0;\ \kappa x+p)$ olar. İsbat etdiyimizə görə elə t ədədi var ki, $M=t\cdot M_1+(1-t)M_2$ şəklində göstərmək olar. (1°, təklif 2). Onda M nöqtəsinin koordinatları

$$((1-t)x;\ ty;\ t(ly+p)+(1-t)(\kappa x+p)$$

olacaq. Asanlıqla yoxlamaq olar ki, M nöqtəsinin koordinatları (5) tənliyini ödəyir. Deməli, $M \in \pi$, M α-nın istənilən nöqtəsi olduğundan. $\alpha \subset \pi$.

Göstərək ki, α müstəvisi π ilə üst-üstə düşür, yəni π çoxluğu α müstəvisindən xaric heç bir nöqtə saxlamır. Bunun üçün üç nöqtəyə: α müstəvisində yerləşən $M(x_o;\ y_o;z_o)$ nöqtəsinə, α müstəvisindən "yuxarıda" yerləşən $M^1(x_o;\ y_o;z_o+\varepsilon)$ nöqtəsinə və α müstəvisindən aşağıda yerləşən $M^2\ (x_o;\ y_o;z_o-\varepsilon)$ nöqtəsinə baxaq (şəkil 15). $M \in \alpha$ olduğundan $z_o=kx_o+ly_o+p$ olar.



Şəkil 15

Odur ki,

$z_o+\varepsilon > kx_o+ly_o+p$, $z_o-\varepsilon < kx_o+ly_o+p$.

Buradan görünür ki, M^1 nöqtəsinin koordinatları $z > kx+ly+p$ ciddi bərabərsizliyini, M^2 nöqtəsinin koordinatları isə $z < kx+ly+p$ ciddi bərabərsizliyini ödəyir, yəni M^1 və M^2 nöqtələri π-yə daxil deyil, $M^2 \notin \pi$, $M^2 \notin \pi$. Bu onu göstərir ki, π-çoxluğu α müstəvisi ilə üst-üstə düşür. Həm də bu mühakimələrdən çıxır ki, $ax+by+cz+d \geq 0$ bərabərsizliyini ödəyən nöqtələr çoxluğu π müstəvisinin fəzanı ayırdığı yarımfəzalardan biridir.

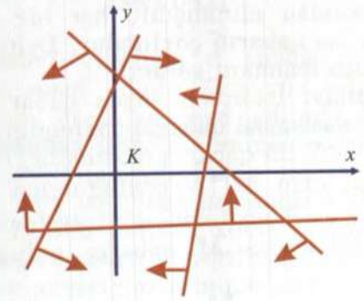
İKİDƏYİŞƏNLİ VƏ ÜÇDƏYİŞƏNLİ XƏTTİ BƏRABƏRSİZLİKLƏR SİSTEMLƏRİNİN MÜSTƏVİDƏ VƏ FƏZADA TƏYİN ETDİKLƏRİ ÇOXLUQLAR

Tutaq ki,

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 \geq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots \\ a_mx+b_my+c_m \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

ikidəyişənli xətti bərabərsizliklər sistemi verilmişdir. Sistemin birinci bərabərsizliyi xoy koordinat sistemində α_1-yarımmüstəvisi, ikincisi α_2-yarımmüstəvisi və s. təyin edir. Əgər hər hansı x, y ədədlər cütü (1) sisteminin bütün bərabərsizliklərini ödəyirsə, onda uyğun $M(x,y)$ nöqtəsi α_1, α_2,..., α_m yarımmüstəvilərin hamısına aiddir, başqa sözlə, bu müstəvilərin kəsişməsinə aiddir. Sonlu sayda yarımmüstəvilərinin kəsişməsi isə hər hansı çoxbucaqlı oblast (K) verir. Şəkil 16-da K oblastına nümunə olaraq dörd düz xəttə uyğun dörd yarımmüstəvinin kəsişməsindən alınan dördbucaqlı oblast (qısaca dördbucaqlı) göstərilmişdir.

(Oxlarla hansı yarımmüstəvilərin seçildiyi göstərilmişdir.)



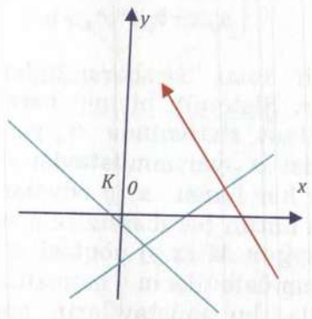
Şəkil 16

K oblastı (1) sisteminin həllər oblastı adlanır.

Dərhal qeyd edək ki, həllər oblastı heç də həmişə məhdud olmur; bir neçə yarımmüstəvinin kəsişməsi nəticəsində qeyriməhdud oblast da yarana bilər, məsələn şəkil 17-dəki kimi.

K oblastının sərhəddi düz xətt hissələrindən (və ya bütöv düz xətdən) ibarət ol-

duğu üçün K oblastı (1) sisteminin həllərinin çoxbucaqlı oblastı (K məhdud olduqda qısaca çoxbucaqlısı) adlandırılar. Elə də ola bilər ki, baxılan yarımmüstəvilərin kəsişməsi, boş ola bilər, yəni $K=\varnothing$ da ola bilər; bu onu bildirir ki, (1) sistemi ziddiyyətlidir. Belə hal şəkil 18-də göstərilmişdir.

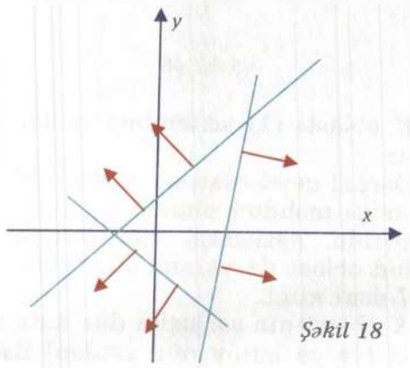


Şəkil 17

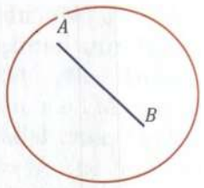
K həllər oblastı həmişə qabarıq olur. Yadımıza salaq ki, nöqtələr çoxluğu o vaxt qabarıq adlanır ki, özünün istənilən iki nöqtəsi ilə yanaşı bu nöqtələri birləşdirən parçanı da özündə saxlayır. Şəkil 19-da qabarıq və qabarıq olmayan (çökük) çoxluq təsvir olunub. K həllər çoxluğu qabarıq çoxluqdur, çünki bir neçə yarımmüstəvinin kəsişməsindən alınmışdır, hər bir yarımmüstəvi isə qabarıq çoxluqdur. Daha aydın olsun deyə lemmanı verək:

Lemma: istənilən sayda qabarıq çoxluqların kəsişməsi qabarıq çoxluqdur.

M və N iki qabarıq çoxluqdur. Onların kəsişməsi olan $M\cap N$ çoxluğundan istənilən iki A və B nöqtələri götürək (şəkil 20). $A\in M$, $B\in M$ və M qabarıq olduğundan



Şəkil 18

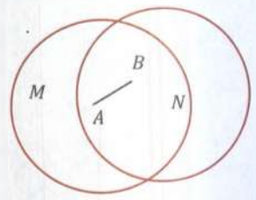


Şəkil 19 a


Şəkil 19 b

AB parçası M-ə daxildir. Eyni qayda ilə $AB\in N$. Odur ki, AB parçası eyni zamanda həm M-ə, həm də N-ə daxildir, deməli onların kəsişməsinə də daxildir, yəni $M\cap N$ qabarıq çoxluqdur, analoji mühakimələr göstərir ki, iki yox, istənilən sayda qabarıq çoxluğun kəsişməsi də qabarıq çoxluqdur.

Beləliklə, (1) sisteminin bütün bərabərsizliklərini ödəyən nöqtələrin həndəsi yeri, başqa sözlə, (1) sisteminin həllər oblastı, qabarıq çoxbucaqlı oblastdır. O sistemin bütün bərabərsizliklərinə uyğun yarımmüstəvilərin kəsişməsindən alınır.



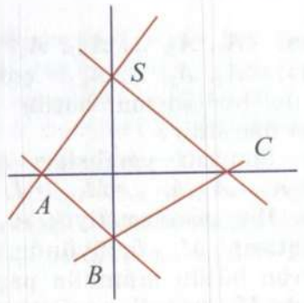
Şəkil 20

Üçdəyişənli hala baxaq;

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1\geq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2\geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_mx+b_my+c_mz+d_m\geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

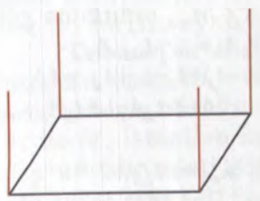
sistemin bərabərsizliklərindən hər biri bildiyimiz kimi hər hansı yarımfəza təyin edir. Ona görə də verilmiş sistemlə təyin olunan oblast m sayda yarımfəzanın kəsişməsi (ortaq hissəsi) (K) olacaq. Lakin sonlu sayda yarımfəzanın kəsişməsi hər hansı qabarıq çoxüzlü oblast olacaq.

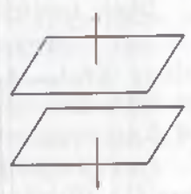
Şəkil 21-də $m=4$ olduqda belə oblasta nümunə göstərilmişdir. Bu nümunədə K oblastı adi tetraedrdir (daha doğrusu K tetraedrin daxilində və səthində yerləşən bütün nöqtələrdən ibarətdir). Ümumiyyətlə, asanlıqla başa düşmək olar ki, istənilən



Şəkil 21

qabarıq çoxüzlünü sonlu sayda yarımfəzanın kəsişməsi kimi almaq olar. Burada çoxüzlü anlayışı orta məktəb həndəsə kursunda olduğundan daha geniş mənada başa düşülür. Orta məktəb həndəsə kursunda çoxüzlü dedikdə sonlu sayda müstəvi çoxbucaqlılardan ibarət qapalı səth başa düşülür, burada isə "çoxüzlü" təkcə səthin nöqtələri olmayıb onunla əhatə olunmuş fəza hissəsinin bütün nöqtələrindən ibarətdir və sonsuz da ola bilər. Şəkil 22-də K oblastının qeyri-məhdud (sonsuz), şəkil 23-də isə boş olduğu hala

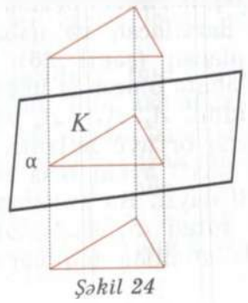

Şəkil 22


Şəkil 23

uyğun nümunə təsvir edilmişdir. (2) sisteminin bərabərsizlikləri arasında aşağıdakı kimi

$$ax+by+cz+d\geq 0$$
$$-ax-by-cz-d\geq 0$$

iki bərabərsizlik olduğu hal üzərində xüsusi dayanaq. Sonuncu iki bərabərsizliyi $az+by+cz+d=0$ tənliyi ilə əvəz etmək olar. Bu tənlik fəzada hər hansı α müstəvisi təyin edir. (2)-nin qalan bərabərsizlikləri α müstəvisindən müəyyən bir qabarıq çoxbucaqlı ayırır, bu sonuncu da (2) sisteminin həllər oblastıdır. Göründüyü kimi fəzada qabarıq çoxüzlü oblastın xüsusi halı müstəvidə qabarıq çoxbucaqlı oblast ola bilər. Şəkil 24-də K oblastına nümunə olaraq üçbucaq təsvir edilmişdir. Bu üçbucaq beş yarımfəzanın kəsişməsindən əmələ gəlib: onlardan ikisi üfüqi α müstəvisi ilə əhatə olunub, qalan üç yarımfəza üçbucaqlı prizmanın yan üzlərinin təyin etdiyi müstəvilərlə əhatə olunub və onların kəsişməsi "şaquli" üçüzlü (sonsuz) prizmadır. İkiəyişənli halda olduğu kimi üçdəyişənli halda da K oblastı bir neçə yarımfəzanın kəsişməsi kimi hökmən qabarıqdır.



Şəkil 24

Beləliklə, (2) sistemi fəzada K qabarıq çoxüzlü oblastını təyin edir. K oblastı sistemin bütün bərabərsizliklərinin təyin etdiyi yarımfəzaların kəsişməsidir.

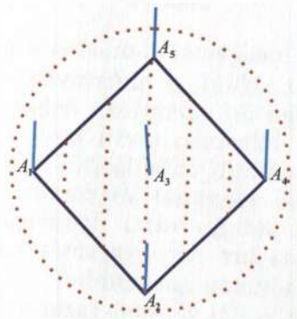
K məhduddursa, onu qısaca (2) sisteminin həllər çoxüzlüsü adlandırırlar.

NÖQTƏLƏR SİSTEMİNİN QABARIQ ÖRTÜYÜ

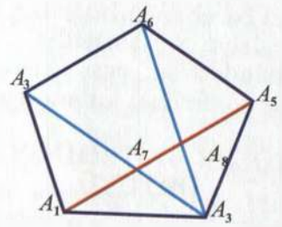
Müstəvi üzərində κ sayda $A_1,A_2...A_\kappa$ nöqtələri qeyd edək. Təsəvvür edək ki, müstəvinin nöqtələr qeyd edilmiş hissəsi taxta vərəqdən ibarətdir və nöqtələrə payacıqlar bərkidilmişdir. Rezin ilgəyi dartıb genişləndirək və bütün payacıqları əhatələyək (şəkil 25-də punktir xətt). Sonra ilgəyi buraxaraq ona dartılıb yığılmağa imkan verək. İlgək payacıqların imkan verdiyi qədər tarım dartıldıqdan sonra onunla əhatə olunmuş nöqtələr çoxluğu müəyyən qabarıq çoxbucaqlı olur (şəkil 25-də ştrixlənmiş hissə). Bu qabarıq çoxbucaqlı A_1, $A_2...A_\kappa$ nöqtələr sisteminin qabarıq örtüyü adlanır.

Əgər A_1, $A_2...A_\kappa$ nöqtələri fəzada yerləşibsə onda eyni ilə müstəvidəki kimi hərəkət etmək bir nəticə vermir. Lakin belə etmək olar: təsəvvür edək ki, nazik rezin təbəqədən hazırlanmış kisəmiz var. Bu kisəni genişləndirərək nöqtələri onun daxilinə alaq, sonra kisəni sərbəst buraxaq. Kisə

$A_1,A_2,...,A_\kappa$ nöqtələrindən bəzilərinə dirənənədək tarım dartılacaq və qabarıq çoxüzlü formasını alacaq (şəkil 26). Fəzanın bu çoxüzlü ilə əhatə olunmuş hissəsi, müstəvidə olduğu kimi, $A_1, A_2, ...A_\kappa$ nöqtələr sisteminin qabarıq örtüyü adlanır. Qabarıq örtüyün belə tərifi əyani olsa da, riyazi cəhətdən ciddi deyil. Bu anlayışın ciddi tərifini verək: tutaq ki, $A_1,A_2,...,A_\kappa$ müstəvidə və ya fəzada istənilən nöqtələr çoxluğudur.



Şəkil 25



Şəkil 26

Aşağıdakı şəkildə olan bütün nöqtələr çoxluğuna baxaq:

$\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+....+\lambda\kappa A\kappa$,

(1) burada $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\kappa$ mənfi olmayan və cəmi 1-ə bərabər olan ədədlərdir, $\lambda_1, \lambda_2..., \lambda_\kappa \geq 0$ və $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_\kappa=1$ (2)

(2) şərtləri daxilində (1) şəkilli bütün nöqtələr çoxluğu $A_1, A_2, ..., A_\kappa$ nöqtələr sisteminin qabarıq örtüyü adlanır və $<A_1, A_2, ..., A_\kappa>$ kimi işarə olunur. Xüsusi halda $\kappa=2$ olduqda, $<A_1, A_2>$ çoxluğu A_1, A_2 nöqtələrini birləşdirən parçadır (təklif 1). $\kappa=3$ olduqda $< A_1, A_2, A_3 >$ qabarıq örtüyü A_1, A_2, A_3 üçbucağın tərəfləri üzərində və daxilində yerləşən nöqtələrdən ibarətdir. (nöqtələr bir düz xətt üzərində yerləşdikdə parça alınır).

Ümumi halda aşağıdakı lemma doğrudur:

Lemma: $<A_1, A_2, ..., A_{\kappa-1}, A_\kappa>$ çoxluğu A_κ nöqtəsini $<A_1, A_2, ..., A_{\kappa-1}>$ çoxluğunun nöqtələri ilə birləşdirən bütün mümkün parçalardan ibarətdir.

İsbatı. Sonrakı yazılışları qısaltmaq üçün $< A_1,A_2,...,A_{i-1},A_i >=M_i$, $i=1, 2, ..., \kappa$ işarə edək. Biz göstərməliyik ki, M_κ örtüyü A_κ nöqtəsini $M_{\kappa-1}$ örtüyünün nöqtələri ilə birləşdirən bütün mümkün parçalardan ibarətdir. $A\in M_\kappa$ istənilən nöqtə olsun. A nöqtəsini

$A=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+....+\lambda_{\kappa-1}A_{\kappa-1}+\lambda\kappa A\kappa$ şəklində göstərmək olar, burada $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_\kappa \geq 0$, $\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_\kappa=1$

Əgər $\lambda_\kappa=0$ isə, onda $A\in M_{\kappa-1}$; Odur ki, $M_{\kappa-1}$ şoxluğu M_κ-nın alt çoxluğudur, $M_{\kappa-1}\in M_\kappa$. Əgər $\lambda_\kappa=1$ isə, onda qalan əmsallar $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{\kappa-1})$ sıfıra bərabərdir və $A=A_\kappa$, odur ki, $A_\kappa \in M_\kappa$. Beləliklə, $M_{\kappa-1}$ və A_κ M_κ-ya daxildir. İndi göstərək ki, istənilən $A'\in M_{\kappa-1}$ üçün A' A_κ parçası M_κ-ya daxildir. Əgər A nöqtəsi belə parçanın istənilən nöqtəsidirsə, onda

$$A=tA'+sA_\kappa \ (t, s\geq 0,\ t+s=1).$$

Digər tərəfdən, $A'\in M_{\kappa-1}$ olduğuna görə

$$A'=t_1A_1+t_2A_2+....+t_{\kappa-1}A_{\kappa-1}$$
$$(t_1,t_2,...,t_{\kappa-1}\geq 0,\ t_1+t_2+...+t_{\kappa-1}=1).$$

Buradan $A=t\cdot t_1A_1+t\cdot t_2A_2+....+t\cdot t_{\kappa-1}A_{\kappa-1}+s\cdot A_\kappa$.

$\lambda_1=t\cdot t_1$, $\lambda_2=t\cdot t_2$, ..., $\lambda_{\kappa-1}=t\cdot t_{\kappa-1}$, $\lambda_\kappa=s$ qəbul etsək (1), (2)-ni alarıq. Bununla isbat olundu ki, $A\in M_\kappa$.

İndi bizə M_κ çoxluğunun belə parçalardan kənar nöqtə saxlamadığını göstərmək qalır, yəni istənilən $A\in M_\kappa$ nöqtəsi baxılan parçalardan birinə daxildir.

$A\in M_\kappa$ olarsa, (1), (2) doğrudur. $\lambda_\kappa=1$ isə, $A=A_\kappa$ və hökmün doğruluğu aydındır. $\lambda_\kappa<1$ isə, onda $\lambda_1+\lambda_2...+\lambda_{\kappa-1}=1-\lambda_\kappa>0$, A nöqtəsini aşağıdakı kimi göstərmək olar:

$$A=(\lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_{\kappa1})\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2...+\lambda_k-1}\cdot A_1+\right.$$
$$+\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2...+\lambda_k-1}\cdot A_2+$$
$$\left.+\frac{\lambda_k-1}{\lambda 1+\lambda 2...+\lambda k-1}\cdot A_{\kappa-1}\right)+\lambda_\kappa A_\kappa$$

Mötərizədəki ifadə hər hansı $A'\in M_{\kappa-1}$ nöqtəsini verir, çünki $A_1, A_2, ..., A_{\kappa-1}$ nöqtələrinin əmsalları mənfi deyil və onların cəmi 1-ə bərabərdir, beləliklə $A=(\lambda_1+\lambda_2+ +\lambda_{\kappa-1})A'+\lambda_\kappa\cdot A_\kappa=(1-\lambda_\kappa)\cdot A'+\lambda_\kappa\cdot A_\kappa$.

A' və A_κ –nın əmsalları mənfi deyil və onların cəmi 1-ə bərabərdir, deməli, A nöqtəsi $A'A_\kappa$ parçasına aiddir. Lemma isbat olundu.

İndi qabarıq örtüyün paraqrafın əvvəlində verilən əyani tərifi ilə sonrakı ciddi tərifinin eynigüclü olduğunu başa düşmək çətin deyil. Doğrudan da bu, bu iki tərifin hansının əsas götürülməsindən asılı olmayaraq, hər iki halda $A_1, A_2, ..., A_{i-1}$ sisteminin qabarıq örtüyündən (M_{i-1} çoxluğundan) $A_1, A_2, ..., A_{i-1}, A_i$ sisteminin qabarıq örtüyünə (M_i çoxluğuna) keçid eyni qayda ilə baş verir: A_i nöqtəsini $A_1, A_2, ..., A_{i-1}$ nöqtələrinin qabarıq örtüyünün (M_{i-1}-in) bütün nöqtələri ilə birləşdirmək lazımdır (əyani tərifdə bu birbaşa tərifin özündən aydındır, ciddi tərifdə isə lemmadan çıxır). Əgər nəzərə alsaq ki, $\kappa=2$ olduqda hər iki tərifə görə eyni çoxluq A_1A_2 parçası alınır, onda hər iki tərifin eynigüclü olduğu aydın olur.

"Qabarıq örtük" termininin bəraət qazanması üçün $M_\kappa=<A_1A_2, ..., A_\kappa>$ çoxluğunun qabarıq olduğunu göstərmək lazımdır; $A, B\in M_\kappa$ istənilən iki nöqtə olsun. A və B-ni aşağıdakı kimi göstərmək olar;

$$A=\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+....+\lambda_\kappa A_\kappa,$$
$$B=\mu_1A_1+\mu_2A_2+...+\mu_\kappa A_\kappa,$$

burada

$$\lambda_1\lambda_2, ..., \lambda_\kappa, \mu_1, \mu_2, ..., \mu_\kappa \geq 0,\ \lambda_1+$$
$$+\lambda_2+...+\lambda_\kappa=1,\ \mu_1+\mu_2+.....+\mu_\kappa=1$$

AB parçasının istənilən N nöqtəsini $C=\lambda A+\mu B$ şəklində göstərmək olar, belə ki, $\lambda+\mu=1$, $\lambda\geq 0$, $\mu\geq 0$, onda $C=\lambda(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2+...+ +\lambda_\kappa A_\kappa)+\mu(\mu_1A_1+\mu_2A_2+...+\mu_\kappa A_\kappa)=(\lambda\cdot\lambda_1+\mu\cdot\mu_1)A_1+ (\lambda\cdot\lambda_2+\mu\cdot\mu_2)A_2+...+ +(\lambda\cdot\lambda_\kappa+\mu\cdot\mu_\kappa)A_\kappa$.

Asanlıqla yoxlamaq olar ki, $A_1,A_2,...,A_\kappa$-nın əmsalları mənfi deyil və cəmləri 1-ə bərabərdir. Bu isə o deməkdir ki, $C\in M_\kappa=<A_1, A_2, ..., A_\kappa>$, yəni M_κ qabarıq çoxluqdur.

Bundan əlavə $<A_1, A_2, ..., A_\kappa>$ qabarıq örtüyü verilmiş $A_1,A_2,...,A_\kappa$ nöqtələrini özündə saxlayan qabarıq çoxluqların ən kiçiyidir, yəni istənilən belə çoxluğa daxildir. Bu fakt lemmadan, qabarıq örtük və çoxluğun tərifindən çıxır. İsbatı oxuculara həvalə olunur.

Bu yuxarıdakı fakt "qabarıq örtük" adını doğruldur. Eyni zamanda o $<A_1,A_2,...,A_\kappa>$ çoxluğunun paraqrafın başlanğıcındakı üsulla alınmasına daha bir izah verir: rezin ilgək (təbəqə) $A_1, A_2, ..., A_\kappa$ nöqtələri ətrafında tarım dartıldıqdan sonra alınan çoxluq məhz göstərilən nöqtələri özündə saxlayan ən kiçik qabarıq çoxluqdur.

QABARIQ ÇOXÜZLÜ KONUS

Sərhəd müstəviləri ortaq bir nöqtədən keçən sonlu sayda yarımfəzaların kəsişməsinə qabarıq çoxüzlü konus deyilir. Ortaq nöqtəyə konusun təpəsi deyilir.

Qabarıq çoxüzlü konusun xətti bərabərsizliklər sistemi ilə əlaqəsini aydınlaşdıraq. Xüsusi hala–konusun təpə nöqtəsinin koordinat başlanğıcı olduğu hala baxaq. Bu halda bütün sərhəd müstəviləri koordinat başlanğıcından keçdiyindən onların tənliyi

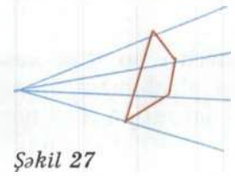
$$ax+by+cz=0$$

şəklində olacaq ((0,0,0) nöqtəsi həll olduğundan sərbəst həddi 0-a bərabərdir). Beləliklə, təpəsi koordinat başlanğıcında olan qabarıq çoxüzlü konus hər hansı

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z\geq 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z\geq 0 \\ ..... \\ a_mx+b_my+c_mz\geq 0 \end{cases}$$

bircins bərabərsizliklər sisteminin həllidir. Tərsi də doğrudur: bircins bərabərsizliklər sisteminin həlli həmişə təpəsi koordinat başlanğıcında olan hər hansı qabarıq çoxüzlü konusdur.

Fəzada qabarıq çoxüzlü konusa misal olaraq sərhədi S təpəli çoxüzlü bucaq olan qabarıq oblastı göstərmək olar. Bu fiqur oturacağı olmayan və təpədən sonsuz uzanan qabarıq sonsuz piramidanı xatırladır. Şəkil 27-də dördüzlü olan belə piramidalardan biri təsvir edilmişdir. Başqa misallara baxaq:

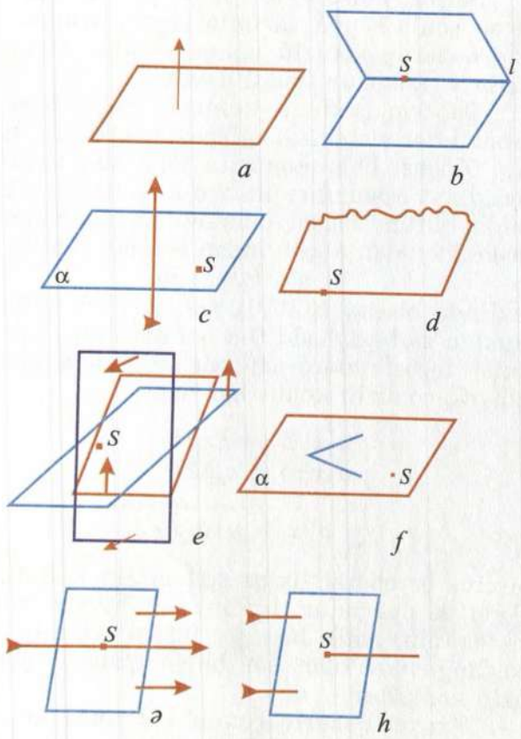


Şəkil 27

1. Yarımfəza (şəkil 28 *a*). Belə konusun təpə nöqtəsi istənilən $S \in \alpha$ nöqtəsi olur, burada α yarımfəzanın sərhəd müstəvisidir.

2. İkiüzlü bucaq (iki yarımfəzanın kəsişməsi). Burada *l* ikiüzlü bucağın tilidir. İstənilən $S \in l$ nöqtəsi təpə rolunu oynayır.(Şəkil 28 *b*)

3. Müstəvi (şəkil 28 *c*). Fəzada istənilən α müstəvisinə ondan müxtəlif tərəflərdə yerləşən yarımfəzaların kəsişməsi kimi baxmaq olar. Təpə nöqtəsi rolunu istənilən



Şəkil 28

$S \in \alpha$ oynaya bilər.

4. Yarımmüstəvi (şəkil 28 *d*). Üç yarımfəzanın kəsişməsi kimi alına bilər. Təpə nöqtəsi sərhəd düz xətti üzərindəki istənilən nöqtə olur.

5. Düz xətt (Şəkil 28 *e*). Fəzada hər bir l düz xəttini bu düz xətdən keçən üç yarımfəzanın kəsişməsi kimi almaq olar. Təpə nöqtəsi istənilən $S \in l$ nöqtəsidir.

6. Bucaq (180°-dən kiçik). (Şəkil 28 *f*). Müstəvi ilə iki yarımfəzanın kəsişməsi kimi almaq olar.

7. Şüa. (Şəkil 28 *g*). Düz xəttin və yarımfəzanın kəsişməsindən alınır. Təpə nöqtəsi şüanın başlanğıcıdır.

8. Nöqtə. (Şəkil 28 *h*). Şüa ilə yarımfəzanın kəsişməsindən alınır.

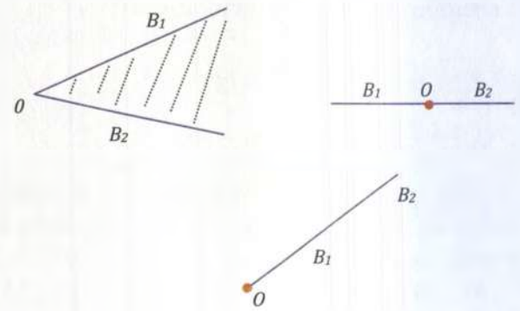
Yuxarıda sadalanan çoxluqlarla fəzada bütün qabarıq çoxüzlü konuslar tükənir, yəni fəzada istənilən qabarıq çoxüzlü konus bu çoxluqlardan biri olur. Bu faktı yarımfəzaların sayına görə riyazi induksiya üsulunu tətbiq etməklə isbat etmək olar. İsbatı oxuculara həvalə olunur.

$B_1, B_2, ..., B_\kappa$ fəzada istənilən sonlu sayda nöqtələr çoxluğu $t_1, t_2, ..., t_\kappa$ isə istənilən mənfi olmayan ədədlərdir. $t_1B_1+t_2B_2+...+t_\kappa B_2$

şəklində olan nöqtələr çoxluğunu $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ ilə işarə edək.

$(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğunun həndəsi şəkli nədir? Tərifdən aydındır ki, o (B_1), (B_2), ..., (B_κ) çoxluqlarının cəmidir.

Ona görə də (B) çoxluğunun, yəni B qeyd olunmuş bir nöqtə, t mənfi olmayan istənilən ədəd olduqda tB şəkilli nöqtələr çoxluğunun nə olduğunu aydınlaşdırmalıyıq. Bu sonuncu isə aydındır: B koordinat başlanğıcıdırsa, (B) çoxluğu koordinat



Şəkil 29

başlanğıcı ilə üst-üstə düşür; əks halda (B) koordinat başlanğıcından çıxan və B nöqtəsindən keçən şüadır. İstənilən çoxluğun koordinat başlanğıcı ilə cəmi həmin çoxluğun özü olduğundan $B_1, B_2, ..., B_\kappa$ nöqtələrini koordinat başlanğıcından fərqli hesab etmək olar. Onda $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğu

$(B_1), (B_2), ..., (B_\kappa)$ şüalarının cəmidir.

Lemma: $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğu $(B_1, B_2, ..., B_{\kappa 1})$ çoxluğunun hər bir nöqtəsini (B_κ) şüasının istənilən nöqtəsi ilə birləşdirən parçaların birləşməsidir.

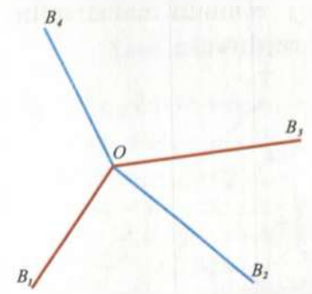
Lemmanın ciddi isbatı uyğun lemmanın isbatına oxşardır, oxuculara müstəqil yerinə yetirmək məsləhət görülür.

Lemmadan çıxır ki, (B_1, B_2) bucaq, düz xətt və ya şüadır. (şəkil 29 a, b, c)

(B_1, B_2, B_3) isə sonsuz üçüzlü piramida, müstəvi, yarımmüstəvi, bucaq, düz xətt, şüa ola bilər. (hər bir halda B_1, B_2, B_3 nöqtələrinin fəzada necə yerləşdiyini aydınlaşdırın). İndi aydın olur ki, $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluqları ilə qabarıq çoxüzlü konuslar arasında sıx əlaqə var.

$(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğu ya bütün fəza ilə üst-üstə düşür, ya da təpəsi koordinat başlanğıcında olan qabarıq çoxüzlü konusdur.

$(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğunun bütün fəza ilə üst-üstə düşə biləcəyini aşağıdakı misaldan görmək olar (şəkil 30): B_1, B_2, B_3, B_4 nöqtələri fəzada elə yerləşsin ki, (B_1), (B_2), (B_3), (B_4) şüaları cüt-cüt kor bucaq əmələ gətirsin. Bu halda $(B_1; B_2; B_3)$, $(B_1; B_2; B_4)$, $(B_1; B_3; B_4)$, $(B_2; B_3; B_4)$ çoxluqlarının hər biri təpəsi koordinat başlanğıcında olan üçüzlü bucaqlardır (daxili hissələri ilə birlikdə). (B_1, B_2, B_3, B_4) çoxluğu bunların hər birini özündə saxlayır. Lakin bunların birləşməsi bütün fəzanı verir.

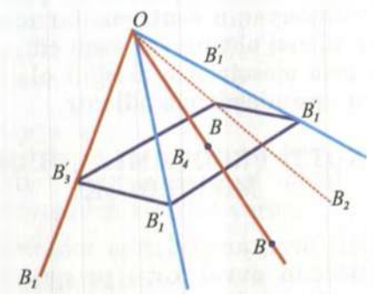


Şəkil 30

Teoremi isbat etmək üçün riyazi induksiya metodunu tətbiq edək. $\kappa=1$ olduqda teoremin hökmü aydındır. Tutaq ki, teorem $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğu üçün doğrudur. Onun $(B_1, B_2, ..., B_\kappa, B_{\kappa+1})$ üçün doğruluğunu isbat edək. Əgər $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ bütün fəzadırsa, onda $(B_1, B_2, ..., B_\kappa, B_{\kappa+1})$-də bütün fəza olacaq. Tutaq ki, $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ qabarıq çoxüzlü K konusudur. Lemmaya görə $(B_1, B_2, ..., B_\kappa, B_{\kappa+1})$ çoxluğu K çoxluğunun hər bir nöqtəsini $(B_{\kappa+1})$ şüasının hər bir nöqtəsi ilə birləşdirən parçaların birləşməsidir. Lakin yuxarıda göstərdik ki, istənilən K qabarıq konusu ya sonsuz qabarıq piramida, ya da 1-8 çoxluqlarından biridir. Bu halların hər birində yuxarıda deyilən parçaların birləşməsinə baxaraq əmin olmaq olar ki, o ya bütün fəza ilə üst-üstə düşür, ya da yenidən qabarıq çoxüzlü konus olur.

Təpəsi koordinat başlanğıcı olan istənilən qabarıq çoxüzlü konus $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ şəklimdə olan çoxluqdur.

K təpəsi koordinat başlanğıcında olan qabarıq çoxüzlü konus olsun. Bildiyimiz kimi K ya qabarıq çoxüzlü bucaq (sonsuz piramida), ya da 1-8 çoxluqlarından biridir.



Şəkil 31

Tutaq ki, K-çoxüzlü bucaqdır. Onun hər bir tili üzərində bir nöqtə götürək: $B_1, B_2, ..., B_\kappa$ nöqtələr sistemini alarıq. Göstərək ki, $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğu məhz K konusudur. Konusun bütün tillərini $(B`_1, B`_2, ..., B`_\kappa)$ nöqtələrində kəsən α müstəvisinə baxaq (şəkil 31).

B_1' və B_1, B_2' və B_2 və s. eyni şüa üzərində yerləşdiklərindən

$$B_1'=t\cdot B_1,\quad B_2'=t\cdot B_2,\quad ...,\quad B_\kappa'=t\cdot B_\kappa, \qquad (1)$$

olar, burada $t_1, t_2, ..., t_\kappa$ mənfi olmayan ədədlərdir.

B-piramidanın o təpəsindən fərqli hər hansı nöqtəsi olsun. OB şüası α müstəvisini hər hansı B′ nöqtəsində kəsir. Aydındır ki,

B′ nöqtəsi $<B_1', B_2', ..., B_\kappa'>$ qabarıq örtüyünə daxildir, odur ki,

$$B' = \lambda_1 B_1' + \lambda_2 B_2' + ... + \lambda_\kappa B_\kappa',$$

Burada $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_\kappa \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_\kappa = 1$. İndi (1)-i nəzərə alsaq

$$B' = \lambda 1 t 1 B 1 + \lambda 2 t 2 B 2 + ... + \lambda\kappa t\kappa B\kappa$$

alarıq. $B' = t \cdot B$ olduğunu ($t > 0$) nəzərə alsaq

$$t \cdot B = \lambda 1 t 1 B 1 + \lambda 2 t 2 B 2 + ... + \lambda\kappa t\kappa B\kappa,$$

buradan $B = s_1 B_1 + s_2 B_2 + ... + s_\kappa B_\kappa$, $s_i = \lambda_i \cdot t_i / t$ $i = 1,2,...,\kappa$ alarıq. Beləliklə, biz göstərdik ki, K-nın istənilən nöqtəsi $(B_1, B_2, ..., B_\kappa)$ çoxluğuna daxildir. Tərsi, yəni $B_1, B_2, ..., B_\kappa$-nın istənilən nöqtəsinin K-ya daxil olması aşkardır. Teorem isbat olundu.

K-nın 1-8 çoxluqlarından biri olduğu halların araşdırılması xüsusi çətinlik tələb etmir və oxuculara həvalə edilir.

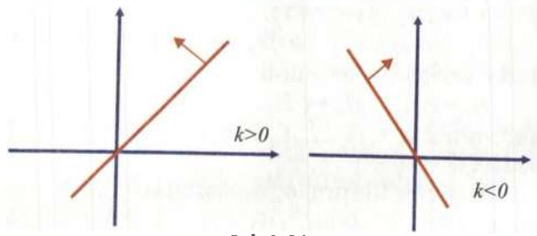
Praktikadan gələn və riyaziyyatın tətbiqilə həll olunan bir çox məsələlər funksiyaların bəzi çoxluqlarda ekstremumlarının (maksimum və minimumlarının) tapılmasına gətirilir. O cümlədən qabarıq çoxluqlarda xətti funksiyanın esktremallarının araşdırılması xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. Riyaziyyatın belə məsələlərlə məşğul olan sahəsi xətti proqramlaşdırma adlanır.

XƏTTİ PROQRAMLAŞDIRMA MƏSƏLƏLƏRİ

Xətti proqramlaşdırma məsələləri ilə tanış olmazdan əvvəl xətti proqramlaşdırma və həmçinin digər məsələlərin qrafik həllində istifadə edəcəyimiz səviyyə xətləri anlayışını daxil edəcəyik.

Səviyyə xətləri və onların bərabərsizliklərin araşdırılmasına tətbiqi.

$y = f(x)$ müəyyən bir $X \subset R^n$ çoxluğunda təyin edilmiş funksiyadır, c isə müəyyən bir sabitdir.



Şəkil 32

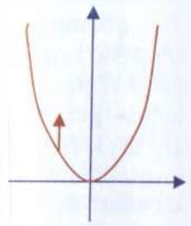
$f(x) = c$ tənliyi ilə təyin edilən nöqtələr çoxluğu $f(x)$ funksiyasının c sabitinə uyğun səviyyə xətti adlandırılır. Aydındır ki, c sabitinin müxtəlif qiymətlərinə uyğun səviyyə xətləri kəsişə bilməzlər.

Misal 1. $f(x;y) = y - kx$ funksiyasına baxaq.

c parametrinin qeyd edilmiş qiymətində $y = kx + c$ tənliyi ilə təyin edilən nöqtələr çoxluğu düz xətdir. Bütün bu düz xətlər bir-birinə paralel düz xətlər dəstəsi əmələ gətirirlər. c parametrinin artması ilə bu düz xətlər müəyyən bir istiqamətdə hərəkət edirlər. Şəkildə hərəkətə uyğun istiqaməti oxla göstərəcəyik.

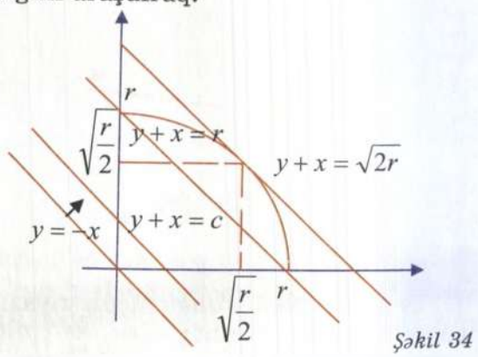
$k > 0$ halında c parametrinin artması ilə düz xətlər sanki sola, $k < 0$ halında isə düz xətlər sanki sağa hərəkət edirlər.

Misal 2. $f(x;y) = y - x^2$ funksiyası ilə təyin edilən səviyyə xətləri parabolalardır. c parametrinin artması ilə $y = x^2 + c$ parabolaları yuxarı hərəkət edirlər. Bəzən səviyyə xətlərinin bərabərsizliklərin araşdırılmasında istifadəsi çox faydalı olur. Misal olaraq kvadratlar cəmi dəyişməz olan iki müsbət ədədin cəminin minimallıq və maksimallıq məsələsini araşdıraq.



Şəkil 33

Misal 3. $x \geq 0, y \geq 0; x^2 + y^2 = r^2 = const$ olarsa, $x + y$ cəminin maksimallıq və minimallığını araşdıraq.



Şəkil 34

Həlli. $x^2 + y^2 = r^2$ nöqtələr çoxluğu mərkəzi koordinat başlanğıcında olan, radiusu r-ə bərabər olan çevrənin birinci rübəsinə aid olan qövsüdür. $x+y+=c$ düz xətləri 2-ci və 4-cü rüblərin tənböləninə $(y=-x)$ paralel olan düz xətlər dəstəsidir. c parametrinin artması ilə düz xətlər yuxarı paralel köçürülürlər. Şəkildəki ox işarəsi məhz bunu göstərir. Buna görə də bu düz xətlərin baxılan qövslə ilk kəsişmə nöqtəsi $x + y$ cəminin ən kiçik, son kəsişmə nöqtəsi isə baxılan cəmin ən böyük qiymətinə uyğun gəlir. İlk kəsişən düz xətt $y + x = r$, son kəsişən düz xətt isə çevrəyə toxunan və $y = -x$ düz xəttinə paralel düz xətdir.

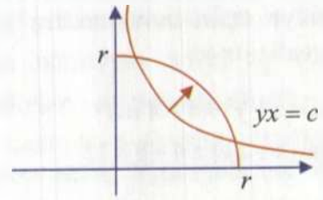
Bu da $\left(\frac{r}{\sqrt{2}}; \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ nöqtəsində çevrəyə toxunan $y + x = \sqrt{2}r$ düz xəttidir. Beləliklə,

$$\min(x + y) = r \Leftrightarrow x = r; y = 0 \vee x = 0; y = r$$

$$\max(x + y) = \sqrt{2}r \Leftrightarrow x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Nəticədə bizə yaxşı məlum olan aşağıdakı faktı alırıq:

Kvadratlar cəmi sabit olan iki ədədin cəminin maksimal olması üçün həmin ədədlər bir-birinə bərabər olmalıdırlar.



Şəkil 35

Misal 4. $x^2 + y^2 = r^2 = const; x, y > 0$ olduqda, $f(x,y) = xy$ funksiyasının minimallıq və maksimallığını araşdıraq.

Həlli. Məsələnin cavabı bizə artıq yaxşı məlumdur. Burada nəticəni səviyyə xətləri vasitəsilə əldə edəcəyik.

$x^2 + y^2 = r^2; x > 0, y > 0$ nöqtələr çoxluğu mərkəzi koordinat başlanğıcında, radiusu r-ə bərabər olan çevrənin birinci rübə aid olan qövsüdür. $xy = c$ səviyyə xətləri isə $y = \frac{c}{x}$ hiperbolalarının birinci rübə aid olan qollarıdır. c parametrinin müxtəlif qiymətlərinə uyğun hiperbolalar bir-birilə kəsişmirlər və c parametrinin artması ilə bu səviyyə xətləri yuxarı hərəkət edirlər.

$f(x,y)$ funksiyasının maksimal qiymət alması bu dəstədən olan və verilən qövslə toxunan hiperbolaya, minimallığı isə iki hala - $(0;r)(r;0)$ nöqtələrinin birindən keçən hiperbolaya uyğun gəlir.

Minimallığın araşdırılması. $yx = c$ səviyyə xətlərinin heç biri $(0;r);(r;0)$ nöqtələrindən keçmir. Buna görə də minimallıq məsələsinin həlli yoxdur.

Maksimallığın araşdırılması. $xy = c$ hiperbolası qövslə bir ortaq nöqtəyə malik olmalıdır. Başqa sözlə

$$x^4 - r^2 x^2 + c^2 = 0$$

tənliyinin yeganə müsbət həlli olmalıdır. Yəni

$$D = r^4 - 4c^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

olmalıdır. Deməli, $c = \frac{r^2}{2} \Rightarrow y = \frac{r^2}{2x} = x$ və

$$\max f(x,y) = \frac{r^2}{2}.$$

Xətti funksiyalar. n ölçülü fəzada bəzi anlayışların tərifini verək.

$X_1 = (x_1^1; x_2^1; ...; x_n^1), X_2 = (x_1^2; x_2^2; ...; x_n^2)$ verilmiş nöqtələrdir.

$$x = x_1^1 + (x_2^1 - x_1^1)t; x_2 = x_2^1 + (x_2^2 - x_2^1)t; ...; x_n = x_n^1 + (x_n^2 - x_n^1)t; t \in R \quad (1)$$

tənlikləri ilə təyin edilən çoxluq bu nöqtələrdən keçən düz xəttin parametrik tənliyi adlanır. $X_1; X_2$ nöqtələrini xüsusi qeyd etmək istəmirikсə, düz xəttin tənliyi dedikdə aşağıdakı parametrik tənlik başa düşüləcək

$$x_1 = a_1 + b_1 t; x_2 = a_2 + b_2 t; ...; x_n = a_n + b_n t; t \in R \quad (2)$$

Burada $a_i; b_i; i = 1;2;...;n$ verilmiş ədədlərdir. t parametri yalnız mənfi olmayan qiymətlər alırsa, başlanğıcı X_1 nöqtəsi olan şüa, $t \in [0;1]$ olduqda isə $X_1 X_2$ parçası alınır.

n dəyişənli $f(x_1; x_2; ...; x_n)$ funksiyasına

baxacağıq. Adətən $X=(x_1;x_2;...;x_n)$ işarələməsini aparıb sadəcə $f(X)$ yazacağıq.

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+c \qquad (3)$$

şəklində funksiya n dəyişənli xətti funksiya adlanır. Aşağıda belə funksiyaların müəyyən qabarıq çoxluqlarda minimallıq və ya maksimallıq məsələsi ilə məşğul olacağıq.

İkidəyişənli $f(x,y)=ax+by$ xətti funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın $y=kx+b$ düz xətti üzərində necə dəyişdiyini araşdıraq. Uyğun əvəzləməni nəzərə alsaq

$f(x,y)=ax+by=ax+kbx+bd=(a+kb)x+bd$

birdəyişənli xətti funksiyasını almış olarıq. $a+kb>0$ olarsa, alınmış funksiya verilən düz xətt üzərində artan, $a+kb<0$ olarsa, azalan funksiyadır. Buna görə də istənilən düz xətt parçası üzərində verilən funksiya özünün ekstremal qiymətlərini baxılan parçanın uc nöqtələrində almalıdır. Daxili nöqtədə maksimum və ya minimum alına bilməz. Ən ümumi halda da bu belədir. n dəyişənli xətti funksiya istənilən parçada özünün minimal və maksimal qiymətlərini parçanın uclarında alır.

İstənilən xətti funksiya t parametri ilə verilmiş istənilən düz xətt üzərində t dəyişənindən asılı birdəyişənli xətti funksiyadır.

Bunun üçün (3) funksiyasında dəyişənlərin əvəzinə (2) bərabərliklərini nəzərə alıb, qruplaşdırmaq kifayətdir.

İstənilən parça üzərində xətti funksiya özünün maksimum və minimum qiymətlərini verilən parçanın uclarında alır.

Verilən parçanı özündə saxlayan düz xətt üzərində verilən funksiyaya birdəyişənli xətti funksiya kimi baxıla bilər. Birdəyişənli xətti funksiya isə minoton funksiyadır. Buna görə də baxılan funksiya verilən parçanın bir ucunda minimum, digər ucunda isə maksimum qiymət almalıdır.

$G\subset R^n$ qabarıq çoxluqdur. $f(X)$ xətti funksiyası baxılan çoxluqda özünün maksimal və minimal qiymətlərini yalnız G çoxluğunun sərhədində ala bilər.

Parametrik şəkildə verilmiş düz xətt G çoxluğu ilə kəsişmə parçası üzərində verilən funksiya monotonleh. Bu parçada verilən funksiyanın ekstemalları onun uclarında – yəni G çoxluğunun sərhədi ilə kəsişməsində - reallaşa bilər.

Praktikada G çoxluğu çox vaxt müəyyən bir xətti bərabərsizliklər sisteminin həllər çoxluğu olur. İkiölçülü halda adətən bu müəyyən bir çoxbucaqlı və ya sınıq xətlə sərhədlənmiş müstəvi fiqur, üçölçülü halda isə qabarıq çoxüzlü və s. olur. Ekstremallığı axtarılan $f(X)$ funksiyasının səviyyə xətləri ikiölçülü halda paralel düz xətlər, üçölçülü halda isə paralel müstəvilər olurlar. Parametrin dəyişməsinə uyğun olaraq səviyyə xətlərinin hərəkət istiqamətini təyin edib, ekstremal nöqtələri sərhəddə axtarmaq lazım gəlir.

Misal. $a)f(x;y)=x+2y;\ \ b)f(x;y)=y+x$ funksiyalarının

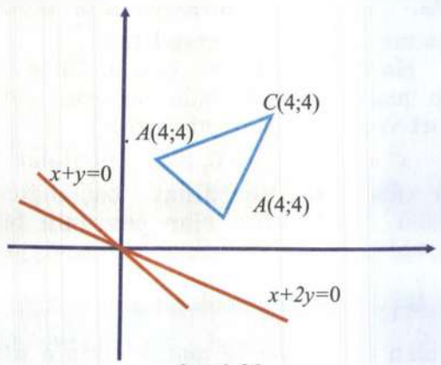
$$\begin{cases} y+x\geq 3 \\ 3y-2x\leq 4 \\ 2y-3x\geq -2 \end{cases}$$

sisteminin təyin etdiyi çoxluqda minimallıq və maksimallıq məsələlərini araşdırın.

Həlli. Sistemin təyin etdiyi çoxluq şəkil 36-dakı ABC üçbucağıdır. Hər iki halda $f(x;y)=c$ səviyyə xətləri c parametrinin artması ilə yuxarı hərəkər edirlər. Hər iki funksiya üçün maksimallıq $C(4;4)$ nöqtəsində reallaşır və

$$\max(x+y)=4+4=8$$
$$\max(x+2y)=4+8=12$$

olur. Minimallıq məsələsində isə fərq ondan ibarətdir ki, $f(x;y)=x+2y$ funksiyası minimumunu yalnız bir nöqtədə - $A(2;1)$-



Şəkil 36

nöqtəsində, $f(x;y)=x+y$ funksiyası isə - AB - parçasının hər bir nöqtəsində alır və

$$\min(x+y)=2+1=3$$
$$\min(x+2y)=1+4=5$$

Bir çox iqtisadi məsələlərin həlli müəyyən bir qabarıq çoxluq üzərində müəyyən bir xətti funksiyanın maksimallığının və ya minimallığının araşdırılmasına gətirilir. Bu tip məsələlər xətti proqramlaşdırma məsələləri adlandırılırlar. Bir neçə klassik məsələyə baxaq.

Nəqliyyat məsələsi. Bir neçə emal müəssisəsində emal edilən məhsul bir neçə istehlakçıya göndərilir. İstehlakçıların hər birinin tələbatı, müəssisələrdən hər bir istehlakçıya göndərilən məmulatın bir vahidinin xərci məlumdur. Daşınmaların ümumi xərcinin minimallığını təmin edən cədvəlin tərtib edilməsi tələb edilir.

Misal. Tutaq ki, A_1,A_2,A_3 emal müəssisələri, B_1,B_2,B_3 isə istehlakçılardır. Müəssisələrin istehsal gücləri a_1,a_2,a_3, istehlakçıların ehtiyacları isə b_1,b_2,b_3 ədədləri ilə ifadə edilirlər. A_i müəssisəsindən B_j müəssisəsinə göndərilən məhsulun hər vahidinin nəqliyyat xərci c_{ij} ədədləri ilə ifadə edilirlər. A_i müəssisəsindən B_j müəssisəsinə daşınan məhsulun ümumi həcmini x_{ij} ilə işarə edək. Məlumataları cədvəl şəklində aşağıdakı kimi vermək olar.

	B_1	B_2	B_3	*göndərilib*
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	a_2
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	a_3
Gətirilib	b_1	b_2	b_3	

Aşağıdakı şərtlərin qəbul edilməsi təbiidir:

a) İstehsal olunan məhsulların ümumi həcmi istehlakçıların ümumi istifadəsinə bərabər olmalıdır. Başqa sözlə,

$$a\ +a_2+a_3=b_1+b_2+b_3$$

qəbul edilməlidir.

b) i-ci müəssisədən daşınan məhsullar - x_{i1},x_{i2},x_{i3} - birlikdə müəssisənin ümumi istehsalına bərabər olmalıdır.

Yəni

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=a_3 \end{cases}$$

münasibətləri ödənilməldir.

c) j-ci müəssisəyə gətirilən məhsullar x_{1j},x_{2j},x_{3j} birlikdə istehsalçının tam tələbini ödəməlidir. Yəni

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3 \end{cases}$$

münasibətləri ödənilməlidir.

Onda ümumi nəqliyyat xərci aşağıdakı funksiya ilə təyin ediləcək

$$f(X)=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+ \\ +c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}+c_{31}x_{31}+c_{32}x_{32}+c_{33}x_{33} \qquad (4)$$

Burada

$X=(x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23},x_{31},x_{32},x_{33})$ işarələməsi aparılmışdır. Beləliklə, söylənilən məsələ riyazi olaraq aşağıdakı kimi ifadə edilə bilər.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=a_2 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=a_3 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=b_2 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=b_3 \\ a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3 \end{cases} \qquad (5)$$

sistemi verilmişdir. Bu sistemin (4) funksiyasını minimal edən həllərini tapmalı.

Qeyd edək ki, müəssisə və istehlakçıların sayı ikiyə bərabər olduqda məsələ müəyyən bir birdəyişənli xətti funksiyanın müəy-

yən bir intervalda minimumunun tapılmasına gətirilir. Doğrudan da, bu halda (5) məhdudiyyətləri aşağıdakı şəkildə yazılır:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}=a_1 \\ x_{21}+x_{22}=a_2 \\ x_{11}+x_{21}=b_1 \\ x_{12}+x_{22}=b_2 \\ a_1+a_2=b_1+b_2 \end{cases}$$

$t=x_{11}$ əvəzləməsini aparsaq digər dəyişənlər üçün aşağıdakıları alarıq

$$x_{12}=a_1-t; x_{21}=b_1-t; x_{22}=(a_2-b_1)+t$$

Mümkün qiymətlər çoxluğu dəyişənlərin mənfi qiymətlər almamasından əldə edilir

$$t\in[m;b_1], m=\max\{0;b_1-a_2\}$$

Bunları (4) funksiyasında nəzərə alsaq

$$f(X)=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}=$$
$$=(c_{12}a_1+c_{21}b_1+c_{22}a_2-c_{22}b_1)+$$
$$+(c_{11}+c_{22}-c_{12}-c_{21})t=g(t)$$

xərcləri ifadə edən birdəyişənli funksiya alarıq. Alınmış xətti funksiyanın bucaq əmsalı müsbət olarsa,

$$\min f(X)=g(m)$$

bucaq əmsalı mənfi olarsa,

$$\min f(X)=g(b_1).$$

Müəssisə və istehlakçıların sayi üçə bərabər olduqda, əksər hallarda (5) məhdudiyyətlərindən dəyişənlərin altısını yerdə qalan üçdəyişənlə (xətti formalarla) əvəz etmək olur. Onda (4) forması üçdəyişəndən asılı xətti formaya gətirilir. Dəyişənlərin mümkün qiymətlər oblastı əvəz edilmiş altı dəyişənin mənfi qiymətlər almamasından əldə edilir. Beləliklə, aşağıdakı məsələ alınır

$$\begin{cases} k_i x+m_i y+n_i z\ge 0; i=1,2,...,6 \\ x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0 \end{cases} \quad (6)$$

məhdudiyyətləri daxilində

$$f(x;y;z)=c_1x+c_2y+c_3z+c \quad (7)$$

funksiyasının minimum və ya maksimum qiymətini tapmalı.

(6) şərtlərində hər bir bərabərsizliyin həlli yarımfəzadır. Bütövlükdə isə (6) sisteminin həlli bir neçə yarımfəzanın kəsişməsidir. (7) xətti formasının səviyyə xətləri isə bir-birinə paralel müstəvilər dəstəsidir. Bu müstəvilərin parametrin artmasına uyğun hərəkət istiqamətini təyin edib, mümkün qiymətlər oblastı ilə ilk və son kəsişmə hallarını araşdırmaqla verilən məsələ həll edilə bilər. Hər bir halda məsələnin həlli mümkün qiymətlər oblastının sərhədində axtarılmalıdır.

Pəhriz məsələsi. Müəyyən qrup məhsulların hər birində orqanizmə lazım olan qida tərkibi, hər bir məhsulun bir vahidinin qiyməti və hər bir maddənin orqanizmə lazım olan minimal miqdarı məlumdur. Gündəlik rasionun elə tərtib edilməsi lazımdır ki, xərc minimal olsun.

Məsələ. İki növ A_1, A_2 qidaları, orqanizmə lazım olan qida maddələri isə üç B_1, B_2, B_3 olsun. Orqanizmin bu maddələrə olan minimal tələbini uyğun olaraq t_1, t_2, t_3 ədədləri ilə işarə edəcəyik. Birinci qidanın qiyməti c_1, ikinci qidanın qiyməti c_2 ədədləri ilə ifadə edilir. A_i məhsulunda olan B_j qida məddəsinin miqdarı m_{ij} ədədi ilə ifadə edilir. Alınan birinci qidanın miqdarını x_1, ikinci maddənin miqdarını x_2 qəbul edək. Onda gündəlik xərcin miqdarı

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2$$

funksiyası vasitəsi ilə təyin ediləcək.

Söylənilən məsələ riyazi olaraq aşağıdıkı kimi ifadə edilə bilər.

$$\begin{cases} m_{11}x_1+m_{21}x_2\ge t_1 \\ m_{12}x_1+m_{22}x_2\ge t_2 \\ m_{13}x_1+m_{23}x_2\ge t_3 \end{cases}$$

sisteminin həlləri olan mənfi olmayan elə $X=(x_1;x_2)$ cütü axtarılır ki,

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2$$

funksiyası minimal qiymət almış olsun.

Ehtiyatlardan səmərəli istifadə məsələsi.

Müəssisədə A_1, A_2 xammallarının hər birindən b_1, b_2 miqdarda olması məlumdur. B_1, B_2 məhsulları hazırlanır. A_i xammalının B_j məhsulunun hazırlanmasındakı istifadə miqdarı m_{ij}, B_1, B_2 məhsullarının satış qiymətləri isə c_1, c_2 ədədləri ilə ifadə edilir. $x_1; x_2$ ilə uyğun olaraq müəssisədə istehsal olunan $B_1; B_2$ məhsullarının miqdarı qəbul edilərsə, müəssisənin gəliri

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2$$

funksiyası ilə verilir. Gəlirin maksimal olması istənilir.

Riyazi olaraq bu aşağıdakı kimi ifadə edilə bilər.

$$\begin{cases} x_1\ge 0; x_2\ge 0 \\ m_{11}x_1+m_{12}x_2\le b_1 \\ m_{21}x_1+m_{22}x_2\le b_2 \end{cases}$$

sisteminin həlləri arasında

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2$$

funksiyasını maksimal edən həlli tapmaq lazımdır.

Baxılan üç məsələ arasında ümumi tərəfləri qeyd edək. Hər üç məsələdə müəyyən xətti tənliklər və ya xətti bərabərsizliklər sistemi və həmin dəyişənlərdən asılı olan müəyyən bir xətti funksiya iştirak edir. Tənliklər və ya bərabərsizliklər sisteminin həlləri arasında verilmiş xətti funksiyanın maksimum və ya minimum qiymət aldığı həllər axtarılır.

Hər bir xətti tənliklər sistemi xətti bərabərsizliklər sistemi ilə və əksinə, hər bir xətti bərabərsizliklər sistemi müəyyən bir xətti tənliklər sistemi ilə əvəz edilə bilər. Bunun üçün lazım gələrsə, müəyyən sayda yeni dəyişənlər daxil edilir. Məsələn,

$$\begin{cases} m_{11}x_1+m_{12}x_2\le b_1 \\ m_{21}x_1+m_{22}x_2\le b_2 \end{cases}$$

bərabərsizliklər sistemini yeni

$$x_3=b_1-m_{11}x_1-m_{12}x_2;$$
$$x_4=b_2-m_{21}x_1-m_{22}x_2$$

dəyişənləri daxil etməklə aşağıdakı tənliklər sistemi şəklində yazmaq olar

$$\begin{cases} x_3\ge 0, x_4\ge 0 \\ m_{11}x_1+m_{12}x_2+x_3=b_1 \\ m_{21}x_1+m_{22}x_2+x_4=b_2 \end{cases}$$

Əksinə, müəyyən tənliklər sistemi verilmişsə, onu ekvivalent bərabərsizliklər sistemi ilə əvəz etmək olar. Bunun üçün verilən tənliklər sistemini üçbucaq şəklinə gətirmək lazımdır. Məsələn, nəqliyyat məsələsində toplama üsulu vasitəsi ilə tənliklər sistemində iştirak edən doqquz dəyişəndən altısını yerdə qalan üçü vasitəsilə əvəz etmək olar. Dəyişənlərin mənfi olmaması tələbi

$$x_{k+1}=a_1x_1+a_2x_2+...+a_kx_k+b$$

bərabərliyini

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_2x_2+b\ge 0$$

bərabərsizliyi ilə əvəz etməyə əsas verir.

Xətti proqramlaşdırma məsələsinin ümumi qoyuluşu.

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ..... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (6)$$

xətti tənliklər sistemi və xətti

$$f(X)=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n+c \quad (7)$$

funksiyası verilmişdir. Burada

$$X=(x_1,x_2,...,x_n)$$

işarələməsi aparılmışdır. Sistemin həlləri arasında $f(X)$ funksiyasının minimal qiymət aldığı mənfi olmayan həllər axtarılır.

Yuxarıda söylədiyimiz kimi tənliklər sistemi müəyyən bir bərabərsizliklər sis-

temi ilə əvəz edilə bildiyindən məsələni aşağıdakı kimi də ifadə etmək olar.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases} \quad (6')$$

xətti bərabərsizliklər sistemi və

$$f(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n + c$$

xətti funksiyası verilmişdir. Sistemin mənfi olmayan həlləri arasında verilən funksiyanı minimallaşdıran həllər axtarılır. (6) tənlikləri və ya (6′) bərabərsizlikləri verilən məsələnin məhdudiyyətləri adlanırlar.

$f(X)$ funksiyasını minimallaşdıran həllər məsələnin optimal (əlverişli) həlli adlandırılır. $f(X)$ funksiyasının özünü isə adətən xətti forma adlandırırlar. Qeyd edək ki, məsələ funksiyanın maksimum qiymətinin tapılması kimi də ifadə edilə bilər. Ancaq bu, mahiyyət etibarı ilə yuxarıdakı məsələyə ekvivalentdir. Çünki $g(x) = -f(x)$ funksiyasını daxil etməklə istənilən maksimizasiya məsələsini minimizasiya məsələsinə və əksinə, istənilən minimizasiya məsələsini maksimizasiya məszləsinə gətirmək olar.

Əvvəlki paraqraflardan məlumdur ki, (6′) sisteminin həllər çoxluğu qabarıq çoxluqdur. Nəticəyə əsasən xətti funksiya bu çoxluqda özünün ekstremal qiymətlərini yalnız onun sərhədində ala bilər.

VARİANTLARIN SEÇİLMƏSİ

KOMBİNATOR MƏSƏLƏLƏRİN "XÜSUSİ ƏLAMƏTİ"

Krılovun məşhur "Kvartet" təmsilində "nadinc Meymun, Eşşək, Keçi və əyripəncə Ayı" maraqlı bir eksperiment keçirtdilər: musiqiçilərin qarşılıqlı yerləşməsinin ifanın keyfiyyətinə təsirini araşdırırdılar. Və əgər Bülbül qarışmasaydı, onlar, yəqin ki, bütün mümkün variantları sınaqdan keçirəcəkdilər. Sual olunur: dörd musiqiçi neçə üsulla sıraya düzülə bilər?

Daha bir misal, Mayakovskinin tərənnüm etdiyi sovet pasportu üç hissədən ibarət olan seriya və nömrəyə malik idi:

1) Roma rəqəmləri ilə yazılmış müəyyən ədəd;

2) İki rus hərfi;

3) Altı ərəb rəqəmi.

Məsələn *IX-BC* №062983. Əlbəttə, bütün pasportların müxtəlif nömrələri olmalıdır. Neçə müxtəlif pasport ola bilər?

Bir başqa misal da göstərək. Bizi lotto-million oynamağa çağırırlar. Oyunun məğzi 49 nömrədən tiraj vaxtı düşən 6-sını tapmaqdan ibarətdir. Oyunda iştirak üçün xüsusi kart əldə etmək və 1-dən 49-a kimi nömrələnmə olan kartda 6 hər hansı kvadratı qaralamaq lazımdır. Şübhəsiz qələbədən ötrü 6 nömrəni bütün mümkün üsullar ilə qaralamaq üçün lazım olan sayda kart almaq lazım idi. Amma bu üsulların sayı nə qədərdir?

Bu üç hadisənin ümumi cəhəti odur ki, onların həlli ilə riyaziyyatın kombinatorika adlı ayrı hissəsi məşğul olur. Kombinator məsələlərin "xüsusi əlaməti" – "Necə üsul ilə..." sözlərindən başlanan sualdır.

YERDƏYİŞMƏLƏR (PERMUTASİYALAR)

Tutaq ki, bizdə n sayda obyekt var, fərqi yoxdur nədir, əsası odur ki, müxtəlif olsunlar: kitablar, kubik və ya "Kvartet" təmsilindəki musiqiçilər. Fikrən onları bir sıraya yerləşdirək və obyektlərin belə sıralanmasını yerdəyişmə adlandıraq. n sayda əşyalardan nə qədər yerdəyişmə mümkündür sualına cavab tapmağa çalışaq. Yerdəyişmələrin sayını P_n hərfi ilə işarə etməklə, bu sayın n-dən asılı olduğunu vurğulayaq.

Çox da böyük olmayan n-lər üçün P_n-i tapaq. n=1 olduqda, yəni təkcə bir əşya varsa, onda yerdəyişdirmənin təkcə bir üsulu var. Ona görə də P_1=1. n=2 götürək. Dərhal aydın olur ki, P_2=2, çünki iki əşyanı (onları **A** və **B** adlandıraq) təkcə iki müxtəlif üsul ilə yerləşdirmək olar: **AB** və **BA**. Başqa yol fikirləşməyə çalışaq: birinci əşya (**A**) hərəkətsizdir, ikincisini isə (**B**) onun yanına "quraşdıracağıq". Sözsüz, **B** obyektini ya **A**-dan əvvəl, ya da sonra qoymaq olar, deməli P_2 yerdəyişmələrin sayı P_1-dən iki dəfə çoxdur, yəni $P_2 = P_1 \cdot 2 = 1 \cdot 2$. İndi isə üçüncü **C** əşyasını əlavə edək. **A** və **B**-nin yerdəyişmələrinin hərəsinə **C**-ni üç müxtəlif üsul ilə yerləşdirmək olar: əvvəlinə, ortaya və ya axıra. Beləliklə, **AB** yerdəyişdirməsindən: **CAB, ACB** və **ABC, BA** yer dəyişdirməsindən isə **CBA, BCA** və **BAC** alınır. Alınan 6 yerdəyişmə müxtəlifdir. Buradan $P_3 = P_2 \times 3 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Ümumiyyətlə, n-1 yerdəyişmələrin hərəsindən n-ci əşyanı ya əvvələ, ya araya, ya da axıra əlavə edərək, n əlavə yerdəyişmə almaq olar ($n-1$ əşyalar arasında $n-2$ ara var; $1+1+n-2$ – belə üsul ilə düz n alınır). Deməli, $n-1$-dən n əşyaya keçəndə, yerdəyişmələrin sayı düz n dəfə artır. Ona görə ümumi düstur belədir:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n = n!$$

Nida işarəsi (riyaziyyatda onu faktorial adlandırırlar) ilə 1-dən n-ə qədər bütün natural ədədlərin hasilini işarələndirirlər (burada P – fransızca permutation – yerdəyişmə sözünün baş hərfidir).

Biz sadəcə düstur çıxartmamışıq, biz eyni zamanda mümkün olan yerdəyişmələri tapmaq üsullarını da göstərdik. Qeyd etməliyik ki, o yeganə üsul deyil. Məsələn, bütün yerdəyişmələrini başlanğıcdan başlayaraq qonşu obyektləri növbə ilə yerlərini dəyişdirməklə almaq olar:

ABC → ACB → CAB → CBA →
→ BCA → BAC

KVARTET HAQQINDA MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

Krılovun təmsilində dörd başabəla musiqiçi uzun-uzadı bir yerdən o birinə keçirdilər. Bu "yaradacılıq axtarışı" zamanı Eşşək təklif etdi: "Biz, əlbəttə, yan-yana otursaq, yola gedərik". Sınadılar, amma bu da kömək etmədi. Amma sıraya müxtəlif üsullar ilə oturmaq olar! Gəlin, mümkün yerdəyişdirmələrin sayını təyin edək. Burada n=4, ona görə "ədəbləsıraya oturmaq" üsullarının sayı: $P_4 = 4! = 1\cdot2\cdot3\cdot4 = 24$.

Əlavə edək ki, bəzi məsələlərin həlli üçün yerdəyişmələrin ideyasını "təmiz" şəkildə yox, düzəlişlər ilə tətbiq etmək lazım gəlir. Fərz edək ki, ifa etmənin keyfiyyətinə təsir edən əsas faktor – bu hər musiqiçinin qonşularıdır və onlardan hansının sağda, hansının solda olması vacib deyil. Belə şərtlərə görə, onda "Meymun, Eşşək, Keçi, Ayı" yerdəyişməsi "Ayı, Keçi, Eşşək, Meymun" yerdəyişməsinə tamamilə simmetrikdir. Aydındır ki, belə bir halda P_4-ün bütün variantları eyniqiymətli yerdəyişmə cütlərinə bölünürlər. Və əgər hər cütdən bir yerdəyişmə saxlasaq, onda müxtəlif variantların sayı $P_4/2=24/2=12$ olacaq.

İndi isə fərz edək ki, musiqiçilər sıra ilə yox, dövrələmə oturublar. Bu halda belə fikirləşmək lazımdır: hər variantda olan iştirakçıları, məsəl üçün, Eşşəkdən başlayaraq nömrələyək. Müxtəlif yerdəyişmələrdə hər musiqiçinin, əlbəttə ki, öz nömrəsi olmalıdır. Təkcə Eşşəkdə bir dənə daimi nömrə olacaq. Deməli, müxtəlif üsullar ilə nömrələməyə təkcə üç musiqiçi qalıb. Ona görə burada mümkün olan yerdəyişmələrin sayı P_3=3!=6-ya bərabərdir.

TƏKRARLI YERDƏYİŞMƏLƏR

Yerdəyişmələrin xüsusi (və çox vacib!) bir növü var – təkrarlı yerdəyişmə. Onların tərkibinə bir-birindən fərqlənməyən əşyalar – "əkiz"lər daxildir. Bir "əkizi" başqası ilə əvəz etsək, bu, yeni yerdəyişmənin əmələ gəlməsinə gətirməyəcək. Fərz edək ki, bizim musiqiçilər kvartet yerinə simfonik orkestr yaratmaq istədilər. Bunun üçün meymun özü ilə daha 15 meymun gətirdi, Eşşək – daha 20 eşşək, Keçi – daha 10 keçi və təkcə Ayı özünü tənbəlliyə vuraraq tənhalıqda qaldı. Onları neçə üsulla sıraya oturtmaq mümkün olduğunu müəyyən edək.

16+21+11+1=49 musiqiçinin istənilən düzülüşünü götürək. Əgər, onların arasında "əkizlər" olmasaydı, yerdəyişmələrin sayı 49!-a bərabər olacaqdır. Amma budur, onların arasında 16 eyni Meymun peyda oldu. Başqa heyvanlara toxunmayaraq, təkcə Meymunları mümkün üsullar ilə (onların sayı isə 16! olacaq) yerlərini dəyişdirərək, biz artıq fərqlənməyən yeni yerdəyişmələr alacağıq. Yəni 16! köhnə yerdəyişmələr bir dənə yeni yerdəyişməyə çevrilir və nəticədə yerdəyişmələrin ümumi sayı 16! dəfə azalır. Aydındır ki, Eşşəklər və Keçilər ilə də eyni məsələdir (təkcə Ayı əvvəlki kimi tənhadır). Nəticədə yerdəyişmələrin sayı:

$$\frac{49!}{16!\cdot21!\cdot11!}$$

Ayını burada nəzərə almırdıq, amma ümumiliyi pozmamaq üçün, onu da əlavə edək, yəni göstərilmiş ifadəni heç nəyi dəyişdirməyən 1!=1-ə bölək. Bunu isə adətən belə yazırlar:

$$\overline{P}_{16,21,11,1} = \frac{49!}{16!\cdot21!\cdot11!\cdot1!} \approx 1{,}4\cdot10^{22}$$

P-nın üstündəki üfiqi xəttə diqqət yetirin, onun köməyi ilə təkrarlı yerdəyişmələri adi yerdəyişmələrdən fərqləndirmək olar.

$\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_n$ fərqlənməyən əşyalardan ibarət olan "əkizlərin" n qrupu üçün ümumi düsturu almaq elə də çətin deyil:

$$\overline{P}_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n} = \frac{(\kappa_1+\kappa_2+\ldots+\kappa_n)!}{\kappa_1!\,\kappa_2!\ldots\kappa_n!}.$$

Bu düsturda faktorialların çoxluğu kimisə caşbaş qoya bilər. Amma kombinatorikada faktorial nəinki qonaqdır, hətta ev yiyəsidir. Təəssüf ki, kalkulyatorlarda faktorial funksiyası olmur və ona görə praktiki hesablamalar zamanı natural ədədləri növbə ilə vurmaq lazım olur. Belə bir iş çox zəhmətlidir – məsələn, 49!-ı tapmağa çalışın. Amma mütləq dəqiqlik tələb olunmayan zaman, böyük n-lər üçün *XVIII* əsrdə şotland riyaziyyatçısı Ceyms Stirlinq tərəfindən icad olunmuş düsturdan istifadə etmək olar:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot\sqrt{2\pi n}.$$

Bu düstur təkcə yüksək dəqiqliyi (artıq n=10 üçün xəta 1%-dən azdır) ilə yox, iki gözəl ədədlərin: Eylerin e=2,71828... və π=3,14159... (bax "e ədədi" və "π ədədi" məqalələrinə) iştirakı ilə də maraqlıdır. Stirlinq düsturu ilə yaxşı kalkulyatorda hesablamalar aparmaq elə də çətin deyil.

YERLƏŞDİRMƏ (ARANJEMAN)

Bəzən n sayda müxtəlif obyektlərdən sərbəst surətdə m ($m \le n$) sayda obyektləri seçib müəyyən nizamla yerləşdirmək lazım olur. Belə bir nizamlı yerləşməni yerləşdirmə (aranjeman) adlandırırlar. Verilmiş n və m-də yerləşdirmələrin sayı nə qədərdir? Cavabı yerdəyişdirmələri bilmək ilə vermək olar.

Axtarılan ədədi A_n^m-ilə (A – fransızca arrangement – düzmə, nizamlama sözünün ilk hərfidir) işarə edək. Əvvəlcə n obyektin ixtiyari yerdəyişməsini götürək və onlardan birinci m-ləri araşdıraq. Onlar n obyektdən m obyektin yerləşməsini təşkil edirlər, eyni zamanda axırıncı n-m obyektin bu yerləşməyə heç bir təsiri yoxdur. Amma bu "quyruqdakı" n-m obyektlər P_{n-m} üsulu ilə yer dəyişə bilərlər. Deməli, hər yerləşməyə elə o sayda bütün n obyektlərin yerdəyişməsini doğuran P_{n-m} sayda müxtəlif "quyruqları" "tikmək" olar. Obyektlərin yerdəyişmələrin ümumi sayı P_n belə halda axtarılan A_n^m ilə P_{n-m} ədədinin hasilinə bərabərdir:

$$P_n = A_n^m \cdot P_{n-m}$$

Buradan

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}} = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Deməliyik ki, bu düsturdan bir neçə gözlənilməz nəticə alınır ...

SIFIR FAKTORİAL

Siz necə fikirləşirsiz, 0 obyekti verilən n obyektdən neçə üsul ilə seçmək olar və ya, başqa sözlə, neçə üsul ilə heç bir obyekti seçməmək olar? Sual bir az qəribə gəlir, amma formal olaraq belə çıxır:

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Deyəsən, bu, məntiqəuyğundur: heç bir obyekti verilən n obyektdən seçməmək üçün təkcə bir üsul var – heç nə eləməmək!

İkinci sual: Verilən n obyektdən bütün n elementin nizamlı seçimini neçə üsulla etmək olar? Belə edirik: hər hansı obyekti seçirik, onunla yanaşı ikincisini, sonra üçüncüsünü və s. yerləşdiririk. n obyektin yerdəyişməsi alınır və belə yerdəyişmələrin sayı P_n=n!-a bərabərdir. Digər tərəfdən, düstura görə:

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!}.$$

Yeni ifadə 0! əmələ gəldi (faktorialı biz təkcə natural ədədlər üçün təyin edirdik). Fərz edək ki, 0! – hansısa bilinməyən bir ədəddir və onu $A_n^n = P_n$ bərabərliyindən tapaq. Onda $n!/0!=n!$, buradan 0!=1, yəni, sıfırın faktorialı birə bərabərdir (baxmayaraq ki, bizə elə gəlirdi ki, bu hökmən sıfır olmalıdır). Sıfırın faktorialı cürbəcür məsələlərdə peyda olur, amma onu həmişə birə bərabər qəbul edirlər.

TƏKRARLI YERLƏŞMƏ

Adi yerləşmələrdən başqa təkrarlı yerləşmələr də olur (yerdəyişmələr kimi). Tutaq ki, n müxtəlif obyekt var. Onlardan aşağıda göstərilən prinsipə görə m sayda obyekt seçək. Hər hansı birini götürürük, amma onu hər hansı bir sıraya yazmırıq, onun adını 1 rəqəminin altında yazırıq və bundan sonra başqalarının yanına qaytarırıq. Sonra isə yenə də bütün n obyektdən birini seçək (indi götürdüyümüzü də götürə bilərik), onun adını 2 rəqəminin altında yazaq və yenə də geriyə qaytaraq. Və biz bu üsul ilə m sayda adları yığanacan davam edək. Təkrarlı yerləşmələr $\overline{A}_n^m$ işarəsi ilə işarə edilir.

Bu ədədi təyin etmək çətin deyil. Bu siyahıda birinci yerdə n obyektdən hər hansısı yerləşə bilər, ikinci yerdə də hər hansı obyekt, ümumiyyətlə hər yerdə istənilən obyekt yerləşə bilər. Ona görə təkrarlı yerləşmələrin sayı $\overline{A}_n^m = n^m$ düsturu ilə ifadə olunur:

Qeyd edək ki, biz burada $m>n$ halına yol veririk, yəni seçilmiş obyektlərin sayı obyektlərin ümumi sayından çox ola bilər. Bu təəcüblü deyil, çünki "istifadədən" sonra hər bir obyekt geri qaytarılır və yenidən istifadə oluna bilər.

PASPORT HAQQINDA MƏSƏLƏNİN HƏLLİ

Gəlin seriyanın Roma rəqəmlərini fiksə edərək müxtəlif seriya və nömrələri olan sovet pasportlarının sayını müəyyənləşdirək. Təkcə iki rus hərfi və altı ərəb rəqəmi qalır. Hərf və rəqəmləri ayrılıqda araşdıraq.

Hərflər. Rus əlifbasında 33 hərf var. Biz istənilən iki hərf seçməliyik, onların ikisi də eyni ola bilər. Deməli, təkrarlı yerləşmə alınır. Burada n=33 və m=2: $\overline{A}_{33}^{2} = 33^2 = 1089$.

Rəqəmlər. Burada (və yenə də təkrar edilmələr ilə) n=10 mümkün rəqəmdən m=6 rəqəm seçilir. Bunun üçün $\overline{A}_{10}^{6} = 10^6$ sayda üsul var.

Nəticə: bir halda ki hərflərin hər bir cütünü rəqəmlərin hər bir altılığı ilə birləşdirmək olar, onda eyni Roma rəqəmlərinə malik olan $\overline{A}_{33}^{2} \cdot \overline{A}_{10}^{6} = 33^2 \cdot 10^6 =$ $= 1089000000$ sayda pasportların mövcudluğu mümkündür. Amma əgər tələb etsək ki, hər bir nömrədə, hərflər və rəqəmlər müxtəlif olsunlar – onda pasportların sayı nəyə bərabər olacaq? Burada təkrarlı yerləşmələrin yerinə adi yerləşmədən istifadə etmək lazımdır. Ona görə cavab budur:

$$A_{33}^{2} \cdot A_{10}^{6} = \frac{33!}{(33-2)!}\frac{10!}{(10-6)!} = \frac{33!\cdot 10!}{31!\cdot 4!}$$

Hesablamanı özünüz edin və cavabı əvvəlki cavab ilə müqayisə edin. Sayı əhəmiyyətli dərəcədə azalıb, düz deyilmi?

BİRLƏŞMƏLƏR (KOMBİNEZONLAR)

Kombinatorikada bəzi məsələlərdə obyektlərin bu və ya digər sıra ilə yerləşməsi elə də böyük əhəmiyyət daşımır. Təkcə onu təşkil edən elementlər vacibdir. Məsələn, idman zalına gələn sinifi təsvir edək. Məktəblilər sıraya düzələ bilərlər, harada istəyirlər qaça bilərlər, hoppana bilərlər və s. – amma onlar həmişə sinif şagirdləri çoxluğu kimi qalacaqlar. İndi isə onların bir hissəsini qonşu otağa keçirək, orada onlara qaçmaq, hoppanmaq və s. icazə verilir. Ardıcıllığı vacib olmayan elementlərin seçməsini birləşmə adlandırırlar. n elementlərdən müxtəlif birləşmələrin sayı C_n^m ilə (C – fransızca combinasion – birləşmə sözünün baş hərfidir) işarə edilir. Bu miqdarı tapmağa çalışaq.

Bizə məlum olan: yerdəyişmə və yerləşməyə əsaslanacağıq. Əvvəlcə n elementdən ardıcıllığı nəzərə almaq ilə hansısa m element seçək. Bu, yerləşmədir və bu yerləşmələrin sayı A_n^m-ə bərabərdir. Aydındır ki, başqa ardıcıllıq ilə eyni obyektlərin daxil olduğu müxtəlif yerləşmələr bir birləşməyə müvafiq olacaqlar (çünki birləşmədə düzülüş sırası rol oynamır). Başqa sözlə, seçilmiş m elementin hər hansı yerdəyişməsi eyni birləşməyə səbəb olur. Amma belə yerdəyişmələrin sayı P_m-dir. Buna görə də, n elementdən m elementli birləşmələrin sayı yerləşmələrin sayından P_m dəfə azdır, yəni

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{(n-m)!\,m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Bu düsturun özünəməxsus simmetriyasına diqqət verin: əgər m-i $n-m$ ilə əvəz etsəz, eyni düstur alınacaq, ancaq məxrəcdə olan faktoriallar yerlərini dəyişdirəcəklər. Buradan kombinezonların gözəl xassəsi alınır:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Bu, asanlıqla izah edilir: m seçilmiş elementdən hər hansı birləşməyə həmişə n-m qalanlardan birləşmə müvafiqdir. Ona görə elə əvvəldən artıq n-dən m obyektlərin ayırmasından yox, verilmiş n elementlərin (məsələn, elə həmin məktəblilərin) çoxluğunun iki hissəyə – hərəsində m və $n-m$ (m insan bir zala, $n-m$ isə başqa zala) – ayrılmasından danışmaq olar.

İndi isə aşağıdakı suala cavab verək: n məktəblini t zallar üzrə, birinci zalda m_1 məktəbli, ikinci zalda m_2 məktəbli və s. olmaqla (burada $m_1+m_2+\ldots+m_t=n$-dir) neçə üsul ilə paylaşdırmaq olar? Axtarılanı $C_n^{m_1 m_2 \ldots m_t}$ ilə göstərək. Onu necə almaq olar? Əvvəlcə n məktəblinin ümumi sayından m_1-i ayıraq, sonra isə n-m-dən qalan m_2-ni və s., beləliklə:

$$C_n^{m_1 m_2 \ldots m_t} = C_n^{m_1} \cdot C_{n-m_1}^{m_2} \ldots C_{n-m_1-m_2-\ldots-m_{t-1}}^{m_t} =$$

$$= \frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_t!}.$$

Təəccüblüdür: baxmayaraq ki, biz heç bir yerdəyişdirilməni qiymətləndirmirdik və məktəblilərin hamısı müxtəlifdir, amma buna baxmayaraq bizim düstur təkrarlı yerdəyişmə üçün düsturun tam surətidir. İş orasındadır ki, bu məsələyə iki cür baxmaq olar. Bir tərəfdən, biz bir-birindən fərqli olan məktəbliləri zallar üzrə bölüşdürürük. Onda birləşmələr əmələ gəlir. Amma vəziyyəti başqa yol ilə təsvir edək: biz elə bil məktəblilər arasında müxtəlif zallara biletləri paylayırıq. Nəzərə almaq lazımdır ki, bir zala biletlər başqa zala biletlərdən fərqlənmir. Bu artıq (sıraya düzülmiş məktəblilər arasında biletlərin paylanması) təkrarlı yerdəyişmədir.

LOTTO-MİLYON HAQQINDA MƏSƏLƏ

49 nömrədən 6-nın bütün mümkün kombinasiyalarını qaralamaq üçün neçə dənə Lotto-million kartoçkası almaq lazımdır? Aydındır ki, kartoçkaların sayı 49 elementdən 6 elementli birləşmələrin sayına bərabərdir:

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!\cdot 43!}$$

bu isə təxminən 14 milyondur. Belə bir nəticəyə gəlmək olar: bu ideyanın reallaşması üçün artıq milyonçu olmaq lazımdır! Amma belə halda da varlanmaq çətindir, çünki uduş qeyd edilməyib və hər tirajda biletlərin satışından məbləğin bir hissəsi mükafat fondu üçün ayrılır.

Daha bir neçə suala cavab verməyə çalışaq. Fərz edək ki, biz C_{49}^{6} sayda kartoçka aldıq və hər birini müxtəlif cür doldurduq. Tirajdan sonra 6 xoşbəxt rəqəm onlardan təkcə birində yerləşə bilər. Amma lotto-milyonda 5 və hətta 4 rəqəmin üst-üstə düşməsi ilə də kartoçkalar udur. Bəs onların sayı neçədir?

Əgər kartoçkada 5 rəqəm tapılıbsa, onda bu o deməkdir ki, 6 düşən nömrədən burada hər hansı 5 nömrə pozula bilər, digər 43-dən isə yalnız biri. Ona görə 5 nömrəni tapmaq üçün üsulların sayı $C_6^5 \cdot C_{43}^1$-ə bərabərdir. Elə belə üsul ilə 4 nömrəni tapmaq üçün üsulların sayı $C_6^4 \cdot C_{43}^2$ bərabər olacaq. Nəhayət, C_{43}^6 kartoçkalarında heç birində düşən nömrə olmayacaq. Yeri gəlmişkən, bu, alınan kartoçkaların sayının yarısından çoxdur və ya azdır? Əvvəlcədən bunu tapmağa çalışın, sonra isə özünüzü yoxlayın.

TƏKRARLI KOMBİNEZONLAR

Yerdəyişmələr, yerləşmələr təkrarlı ola bilər. Və ona görə təkrarlı kombinezonlar haqqında da danışmaq lazımdır. n əşyaların çoxluğundan istənilən birini götürək və onu siyahıya yazıb, geri qaytaraq. Sonra isə elə bu yol ilə siyahıda m qədər ad olana

KOMPOZİSİYALAR

Müxtəlif hissələrə təkcə çoxluqları yox, hətta ədədləri də bölmək olar. Natural, yəni tam və müsbət olan ədədi gözdən keçirək: onu natural ədədlərin cəmi kimi müxtəlif üsullar ilə göstərmək olar:

4=1+1+1+1=1+1+2=1+2+1=2+1+1=2+2=1+3=3+1=4

Sərbəst surətdə götürülmüş natural ədədi başqa natural ədədlərin cəmi kimi neçə üsul ilə göstərmək olar? Qədim yunan riyaziyyatçısı Diofant Aleksandriyalı bizə kömək edir: onun kitablarından biri bu sözlər ilə başlayır: "Sən əlbəttə ki, bilirsən: hər bir bütöv sadəcə bir neçə vahidin məcmusudur". Gəlin n ədədini birlərin məcmusu kimi təsvir edək:

$$\underbrace{111\ldots1}_{n\text{ dənə}}$$

İndi κ-1 şaquli çubuqlarını n-1 aralıqlara elə yerləşdirək ki, bir aralığa iki çubuq düşməsin:

$$1\,1\ldots\underbrace{|\,1\,|\ldots|\,1\,|}_{\kappa-1}\ldots|\,1.$$

Bizdə düz κ sayda qrup əmələ gəldi, onların hərəsində m (i=1, ..., κ) natural rəqəm sayında birlərdir, yəni, n ədədi κ sayda toplananların cəmi şəklində $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_\kappa$ təqdim edilib. Belə yerləşməni neçə üsul ilə həyata keçirməyi biz artıq bilirik: n–1 elementdən (aralıqdan) κ–1 elementli (çubuqlu) birləşmələrin sayı, yəni $C_{n-1}^{\kappa-1}$.

Ədədin toplananların nizamlı cəmi şəklində göstərilməsini kompozisiyalar adlandırırlar. Kompozisiyadan fərqli olaraq ədədin sıralanmamış şəkildə toplananların cəmi kimi təqdim edilməsinə baxaq, məsələn:

4=1+1+1+1=1+1+2=1+3=2+2=4

Bu halda variantların sayı kompozisiyaların sayından, gördüyümüz kimi, azdır. Amma onların dəqiq R_n sayı üçün rahat bir düstur məlum deyil. Hind riyaziyyatçısı Srinavara Ramanucan və onun ingilis həmkarı Qotfri Harold Hardi birlikdə R_n üçün təxmini düsturlar aldılar. Bu düsturlardan ən sadəsi belədir:

$$R_n = \frac{1}{4\sqrt{3n}}\, e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

qədər (onların arasında eynilər də ola bilər) daha bir obyekt seçək və s. Təkrarlı yerləşmədən prinsipial fərq ondadır ki, siyahının elementləri nömrələnmir. Məsələn, **"A,B,A,Ç"** və **"B,Ç,A,A"** siyahıları eyni sayılır. n elementdən m elementli təkrarlı birləşmələrin $\overline{C}_n^m$ sayını tapmağa çalışaq. Bunun üçün ixtiraçılıq qabiliyyəti göstərmək lazımdır. Diqqətlə baxın.

Əsas çoxluğun elementlərini sərbəst surətdə 1-dən n-ə qədər nömrələyək. Tutaq ki, birləşmələrin birinə 1 nömrəsi altında κ_1 elementləri daxil olub, 2 nömrəsi altında κ_2 elementləri ,..., n nömrəsi altında isə κ_n elementləri. Bu κ_i ədədləri haqqında nə demək olar? Aydındır ki, $\kappa_1+\kappa_2+...+\kappa_n=m$ cəmidir (çünki siyahıda m sayda obyekt var!).

İndi isə bu birləşməni sıfır və birlərdən zəncir kimi təsvir edək. Bir burada birləşmənin ayrı elementini göstərəcək, sıfır isə – qonşu κ_i-lərə uyğun olan elementlər qrupları arasında sərhədi işarələndirəcək. Əgər κ_i=0-olarsa, yəni i nömrəsi ilə element siyahıda yoxdursa, onda zəncirin müvafiq yerində iki "sərhədçi" sıfır dalbadal yerləşəcək.

Beləliklə yazırıq: əvvəlcə κ_1 birləri, sonra bir sıfır, bundan sonra κ_2 birləri və yenə də sıfır... κ_{n-1} birləri və yenə də sıfır, nəhayət κ_n birləri – və bununla bitir.

Bütün κ_i-lərin cəmi m-ə bərabər olduğundan, zəncirdə m qədər bir var. Sıfırların sayı isə n-1-ə bərabərdir. Beləliklə, bütöv zəncir $n+m$-1 sayda rəqəmdən ibarətdir.

Yekunlaşdıraq. Hər mümkün siyahıya ona müvafiq olan sıfırlardan və birlərdən ibarət uzunluğu $n+m$-1-ə bərabər olan zəncir qarşı qoyulub. Bununla belə, əgər iki siyahı eynidirsə, onda zəncirlər də eyni olmalıdır. Tərsi də düzdü, hər bir zəncirə müvafiq siyahı var. Məsələn, 1111001010 zənciri bizə deyir ki, siyahıda – 1 nömrəli dörd element var, 2 nömrəsi altında bir element də yoxdur, nömrə 3 və 4 elementlərin sayı bir dənədir və nömrə 5 elementi yoxdur. Beləliklə, axırda məsələ ona gəldi ki: m sayda birlərdən və $n-1$ sıfırlardan $n+m-1$ uzunluğunda neçə müxtəlif zəncir düzəltmək olar? Bu isə təkrarlı yerdəyişmədir. Ona görə:

$$\overline{C}_n^m = \overline{P}_{m,n-1} = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

* * *

Beləliklə, yerdəyişmə, yerləşmə və birləşmə (təkrar edilmə ilə və onsuz) üçün düsturlar əsas anlayışlar arasında sıx əlaqəni üzə çıxarır. Bu düsturlar kombinatorikanın özünəməxsus əlifbasını təşkil edirlər, çünki məktəb kursunda kombinator məsələlərin çoxu onlara əsaslanaraq həll edilir.

NYUTON BİNOMU

Cəbrdə tez-tez $a+b$ ikihədlisini qüvvətə yüksəltmək lazım gəlir. Səbəbsiz deyil ki, hər məktəbli iki ifadənin cəminin kvadratı və kubu düsturlarını əzbər bilməlidir. Oxşar düstur, amma artıq istənilən $n>0$ üçün, Nyuton binomu (baxmayaraq ki, bu düstur ondan xeyli əvvəl məlum idi) adlandırılır, ("binom" sözü latın dilindən tərcümədə "ikihədli" deməkdir). Bu düsturun kombinatorika ilə birbaşa əlaqəsi var.

$(a+b)^n$ ifadəsinin rahatlığı üçün, biz b^n-i mötərizədən çıxardırıq və a/b-ni x ilə əvəz edirik: $b^n(x+1)^n$ alınır. Hələlik b^n vuruğunu yaddan çıxardaq və $(x+1)^n$ üçün düstur axtaraq. Başa düşmək çətin deyil ki, mötərizələri açdıqdan sonra n dərəcəli çoxhədli alınacaq. Təkcə x-in müxtəlif dərəcələrində əmsalları təyin etmək qalır.

Aşağıdakı üsuldan istifadə edək. n sayda $(x+1)$ mötərizənin hasilini yazıb köçürək:

$$(x+1)(x+1)(x+1)...(x+1)$$

İndi isə mötərizələri açaq, amma oxşar həddləri islah etməyək. Məsələn:

$$(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1;$$

$$(x+1)^3 = (x+1)(x+1)(x+1) =$$

$$= x^3 + x^2 + x^2 + x + x^2 + x + x + 1 \text{ və s.}$$

Təbii ki, nəticə hansısa qüvvətlərin cəmini (o cümlədən sıfır üstlü qüvvətin, yəni 1) ifadə edir.

Nəhayət, oxşar həddləri islah edək və artıq adət edilmiş şəkildə n dərəcəli çoxhədlini alaq. Aydındır ki, x^m-in əmsalı birinci gətirilməyən şəkildə olan x^m toplananların miqdarına bərabər olacaq. Onların sayı nə qədərdir? Baxmayaraq ki, biz bu suala necə cavab verəcəyimizi hələ bilmirik, amma artıq hiss edirik ki, qarşımızdakı kombinator məsələdir.

BİNOMİNAL ƏMSALLAR VƏ KOMBİNEZONLAR

$(x+1)$ mötərizələrinin n dəfə bir-birinə vurulmasından sonra yaranan hər hansı x qüvvəti n sayda vuruğun hasili kimi yaranıb – hər mötərizədən bir dənədir. Amma vuruqların hamısı ya 1, ya da x-ə bərabərdir. x^m-in yaranması üçün bir-birinə vurulma zamanı m mötərizələrindən x vuruqları, qalan n-m mötərizələrdən isə 1-i götürmək lazımdır. Neçə üsul ilə n mümkün ola bilən obyektlərdən (verilmiş halda mötərizələrin sayı) m obyekt seçmək olar? Və ya başqa sözlə, n elementdən m elementli kombinezonların sayı neçədir? Cavabı bilirik: C_n^m. Deməli, oxşar həddlərin islahından sonra x^m-in əmsalı C_n^m-ya bərabərdir. Ona görə:

$$(x+1)^n = C_n^n x^n + C_n^{n-1} x^{n-1} + C_n^{n-2} x^{n-2} +$$

$$+...+C_n^1 x + C_n^0.$$

C_n^m-lər Nyuton binomunun ayrılışında əmsallardır, ona görə onlar binominal əmsallar adlandırılır. $(x+1)^n$ binom düsturlarını x-in bəzi konkret qiymətləri üçün yazın.

$(a+b)^n$ üçün oxşar düsturu çıxartmaq elə də çətin deyil. Təkcə $a/b=x$ və $(a+b)^n=b^n(x+1)^n$ olduğunu xatırlamaq lazımdır. Nəticədə:

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + C_n^{n-2} a^{n-2} b^2 +$$

$$+...+C_n^1 a b^{n-1} + C_n^0 b^n.$$

$n=3$ üçün bu düsturu yoxlayaq:

$$(a+b)^3 = C_3^3 a^3 + C_3^2 a^2 b + C_3^1 a b^2 + C_3^0 b^3$$

$$C_3^3 = C_3^0 = \frac{3!}{3!\cdot 0!} = 1 \text{ və}$$

$$C_3^2 = C_3^1 = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3.$$

Deməli:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

– bizim üçün tanış ikihədlinin kubu düsturudur.

Nyuton binomunun düsturu binominal əmsallar arasında asılılığı tapmağa imkan verir. $(x+1)^{n+1}$ üçün düstura baxaq. x^{m+1}-in əmsalı nəyə bərabərdir? Aydındır ki, C_{n+1}^{m+1}-ə bərabərdir. Başqa tərəfdən, $(x+1)^{n+1}$-i biz $(x+1)^n$ üçün düsturu $(x+1)$-a vuraraq ala bilərik. Onda x^{m+1}-i ya $C_n^m x^m$ toplananının x-ə vurulması ilə, ya da $C_n^{m+1} x^{m+1}$-in 1-ə vurulması ilə ala bilərik. Ona görə düsturda $(x+1)^{n+1}$ üçün əmsal C_n^m və C_n^{m+1}-nin cəminə bərabər olmalıdır, yəni:

$$C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1} \qquad (*)$$

PASKAL ÜÇBUCAĞI

(*) düsturu $\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ düsturunun köməyilə ayrı-ayrılıqda hesablamadan binominal əmsalların cədvəlini düzəltmək üçün bizə imkan verir. Bir sətirə sonsuz sayda sıfırları və onların arasında yeganə biri köçürməkdən başlayaq:

... 0 0 0 0 1 0 0 0 0 ...

Ondan aşağıda birinci sətrinin rəqəmlərinin arasında onların cəmlərini yazaraq, rəqəmlərin ikinci sətrini yaradaq. Elə bu qayda ilə üçüncü, dördüncü və s. sətirləri yazaq.

```
... 0  0  0  0  1  0  0  0  0 ...
...  0  0  0  1  1  0  0  0  0 ...
... 0  0  0  1  2  1  0  0  0 ...
...  0  0  1  3  3  1  0  0  0 ...
... 0  0  1  4  6  4  1  0  0 ...
...  0  1  5  10  10  5  1  0  0 ...
... 0  1  6  15  20  15  6  1  0 ...
...  1  7  21  35  35  21  7  1  0 ...
```

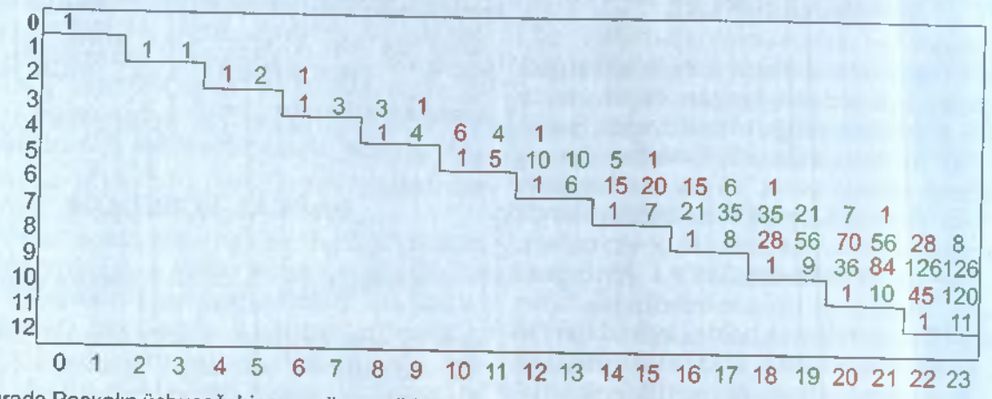
Sağa və sola səpələnərək sıfıra bərabər olmayan ədədlərin çoxalmasına diqqət yetirin. Əyani surətdə göstərmək üçün, bütün sıfırları pozaq, sətirləri isə sıfırdan başlayaraq nömrələyək.

İlk dəfə bu üçbucaq fransız riyaziyyatçısı Blez Paskal tərəfindən "Hesabi üçbucaq haqqında traktatda" (1665-ci ildə çap olunub) təsvir edilib.

O vaxtdan o Paskal üçbucağı adlandırılır. Bu cədvəlin bir az başqa şəkilləri italyan Nikkolo Tartalyaya, şair və alim Ömər Xəyyama, Çin və hind riyaziyyatçılarına məlum idi.

Paskal üçbucağında n-ci sətir $C_n^0, C_n^1, C_n^2, ..., C_n^n$ binominal əmsallara malikdir. Bu (*) düsturundan nəticə kimidir və düzəldilmiş cədvələ tətbiq ediləndə, bu o deməkdir ki, hər ədəd yuxarıda dayanan (sağ və sol

ÜÇBUCAQLI XƏLBİR



Burada Paskalın üçbucağı bir az qəribə şəkildə təsvir edilib. İlk növbədə, sətirlər elə çəkilibləri ki, birinci elementlər iki addım boyunda pillələr ilə "piləkən" təşkil edirlər. İkincisi öz sətrinin κ nömrəsinə bölünən elementlər yaşıl rəng ilə, κ-ya bölünməyənlər isə qırmızı rəng ilə nişanlanıblar.

Nəhayət, sütunlar da rəqəmlər ilə nömrələnib. Burada rənglər aşağıdakı prinsipə uyğun istifadə olunurdu: əgər bu "sürüşdürülmüş" Paskal üçbucağının κ nömrəli sütununda dayanan elementləri yaşıldırlarsa, onda κ da yaşıldır, əgər sütun ən azı bir element qırmızıdırsa, onda sütunun nömrəsi də qırmızıdır (xüsusi hal kimi ilk 2 sütun qaldı).

Siz sütunların yaşıl nömrələrini tanıyırsızmı? Bəli, bunlar sadə ədədlərdir və təkcə onlardır!

Ən maraqlısı odur ki, Paskal üçbucağının üç yüz ildən çox yaşı olmasına baxmayaraq, onun sadə ədədlər ilə əlaqəsi təkcə *XX* əsrdə təsadüfən tapılmışdır. Onu 1972-ci ildə kompyuterdə proqramı düzəldəndə Q.V. Mann və D. Şenks aşkar ediblər.

"çiyinlər"indəki) iki ədədin cəminə bərabərdir.

Paskal üçbucağı çoxlu sayda gözəl xüsusiyyətlərə malikdir. Məsələn, n-ci sətrində ədədlərin cəmi 2^n-ə bərabərdir. Bunu sübut etmək üçün, bizə $a=b=1$ olduqda binomu gözdən keçirtmək kifayətdir. Bir tərəfdən, o 2^n bərabərdir, başqa tərəfdən isə – bu sətrin bütün binominal əmsallarının cəminə bərabərdir.

Başqa xüsusiyyəti: n-ci sətirdə tək ədədlərin sayı həmişə 2^κ-ya bərabərdir, burada κ – n-nin ikilik yazılışında birlərin sayıdır. Məsələn, 5-ci sətirdə 1,5,10,10,5,1 rəqəmləri var, onlardan 4-ü tək ədəddir. Bununla belə ikilik sistemdə 5 rəqəmi 101 kimi yazılır. 101 rəqəminin tərkibində 2 bir var və $2^2=4$. Bunu sübut etmək, birinci xüsusiyyəti sübut etməkdən çətindir. Əgər oxucu sübut etmək istəsə, onun üçün kömək budur: 2^m-1 (burada m – natural ədəddir), nömrəli sətirlər təkcə tək ədədlərdən ibarətdirlər.

Paskal üçbucağının daha bir xüsusiyyəti: tək yerlərdə dayanan ədədlərin cəmi cüt yerlərdə dayanan ədədlərin cəminə bərabərdir. Buna əmin olmaq üçün, sizə təkcə $a=1$, $b=-1$ olduqda binomu gözdən keçirtmək lazımdır. Bundan başqa, əgər sətrin nömrəsi – sadə ədəddirsə, onda sətirdə iki qıraqdakı rəqəmlərdən başqa bütün ədədlər sətrin nömrəsinə bölünürlər. Bunu sübut etmək çətin deyil.

KOMBİNATORİKA MƏSƏLƏLƏRİ

Kombinator məsələlərin həlli zamanı məlum düsturlardan bacarıqlı istifadə çox vacibdir, amma ondan da vacibi kombinator fikirləşmək, yəni ucsuz-bucaqsız variantların çoxluğunda daxili qayda və sadəliyi tapmaq bacarığıdır. Deyilənlərə yaxşı təsvir kimi müstəvinin düz xəttlər ilə bölünməsi haqqında klassik məsələ ola bilər.

MÜSTƏVİNİN DÜZ XƏTTLƏR İLƏ BÖLÜNMƏSİ HAQQINDA MƏSƏLƏ

Heç bir ikisi paralel olmayan və heç bir üçü bir nöqtədən keçməyən n sayda düz xətt müstəvini neçə hissəyə bölür?

Əvvəlcə çox da böyük olmayan n-lər üçün cavab tapaq. $n=1$ olanda, müstəvi iki hissəyə ($x_1=2$) bölünür, $n=2$ olanda isə, dörd hissəyə ($x_2=4$). Növbəti qiyməti isə – $x_3=7$-dir (şəkil 1). Daha bir düz xətt keçirək. Dərhal şübhə meydana gəlir: hissələrin sayı dördüncü düz xəttin birinci üç düz xəttə nisbətən yerləşməsindən asılı olmayacaqmı? Həqiqətən, dördüncü düz xətt bu üç düz xətt ilə yaradılmış üçbucaq ilə kəsişə bilər (şəkil 2), amma ondan yan keçə də bilər (şəkil 3). Xoşbəxtlikdən, iki halda da hissələrin sayı birdir: $x^4=11$. Beşinci düz xətti qurarkən, aşkar edərik ki, nəticə yenə də düz xəttlərin qarşılıqlı yerləşməsindən asılı deyil və $x_5=16$. Amma şəkil artıq düz xətlər ilə dolacaq və ona görə biz bu xəttlər ilə məhdudlaşacağıq: 2,4,7,11,16.

Diqqət yetirin: qonşu rəqəmlərin fərqləri 2-dən başlayan ardıcıl natural ədədləri təsvir edir. Həqiqətən, $4-2=2$, $7-4=3$, $11-7=4$, $16-11=5$. Elə çıxır ki, növbəti düz xətt bundan əvvəl malik olduğumuz hissələrin sayını düz n qədər artırır. Gəlin əmin olaq ki, həmişə belə olacaq.

Fərz edək ki, $n-1$ düz xətt var və biz daha bir dənə düz xətt keçiririk. Yeni düz xətt artıq müstəvinin bölünmüş hissələrindən birindən keçir. Amma o indi daha bir düz xətt ilə kəsişdi və bu hissə artıq iki hissəyə bölündü. Düz xətt növbəti hissəni keçir və daha bir düz xətt ilə kəsişərkən, bu hissəni də iki hissəyə bölür. Hissələrin sayı yenə də bir artdı. Beləliklə, yeni düz xətt bütün $n-1$ xəttləri ilə kəsişəcək və axırıncı $(n-1)$ xətti ilə kəsişəndən sonra, hissələrin sayı $n-1$ miqdarına artacaq. Amma düz xətt bununla bitmir: "köhnə" xəttlər ilə "vidalaşaraq", o növbəti sahəni bölərək, sonsuzluğa gedir.

Beləliklə, n-ci düz xətt həqiqətən də hissələrin sayını n miqdarına artırır, yəni ki, $n>1$ üçün $x_n=x_{n-1}+n$ düzdür. Təkcə x_n üçün n-ə nisbətən düsturu tapmaq qalır. $x_n=an^2+bn+c$ düsturunu sınayaq, burada a,b,c – bizə məlum olmayan ədədlərdir. Onları elə uyğunlaşdırmaq lazımdır ki, iki şərt təmin edilsin:

1) $x_n-x_{n-1}=n$ $(n>1)$
2) $x_1=2$

$$x_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1) + c =$$
$$= (an^2 + bn + c) - 2an - (b-a) =$$
$$= x_n - 2an - (b-a)$$

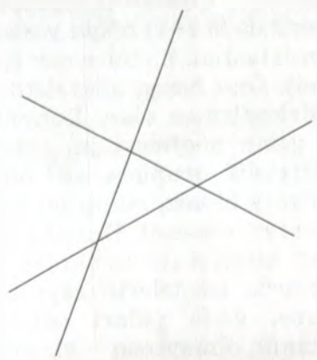
olduğundan, birinci şərtdən alınır ki, hər hansı $n>1$ üçün $2an+(b-a)=n$ bərabərliyi ödənməlidir. Bu təkcə $2a=1$ və $b-a=0$ olanda mümkündür. Deməli, $a=b=1/2$. Ona görə $x_n=n^2/2+n/2+c$. İkinci şərtdən alırıq ki, $x_1=1^2/2+1/2+c=2$, buradan $c=1$. Beləliklə:

$$x^n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 1 = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

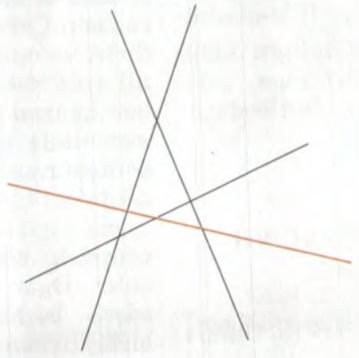
FƏZANIN MÜSTƏVİLƏR İLƏ BÖLÜNMƏSİ MƏSƏLƏSİ

İndi isə biz bu məsələnin fəza ilə bağlı variantını gözdən keçirdək: indi bizdən n müstəvinin fəzanı neçə hissəyə (onları y_n ilə işarələndirək) bölünməsini öyrənməyi tələb edirlər; onlardan heç bir ikisi paralel deyil və onlardan üçü bir düz xətt üzrə kəsişmir və onlardan dördü bir nöqtədən keçmir.

Fərz edək ki, n müstəvi var və fəza y_n hissələrinə bölünüb. Daha bir $(n+1)$ müstəvisini keçirək. Ondan əvvəl keçirilən müstəvilərin hərəsi onunla hər hansı düz xətt üzrə kəsişir və bu n düz xətləri yeni müstəvini x_n hissəyə bölürlər. Bu müstəvilərdən hərəsi ondan əvvəl fəzanın "kəsilmiş" sahəsini



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

MELANXOLİYA VƏ SEHRLİ KVADRAT

Alman rəssamın məşhur "Melanxoliya" qravüründə bir gözəl riyazi obyekt təsvir olunub. Bu rəqəmlər yazılmış damalara bölünmüş kvadratdır. Başa düşmək çətin deyil ki, onlar birdəfəyə bir neçə şərti təmin edirlər:

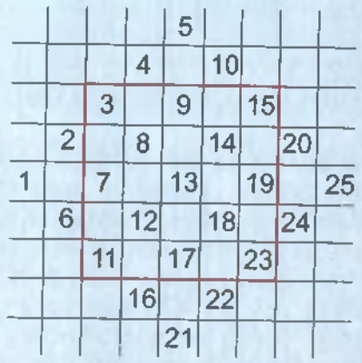
– əgər hər sətirdə bütün ədədləri toplasaq,
– əgər hər sütunda bütün ədədləri toplasaq,
– əgər iki diaqonalda bütün ədədləri toplasaq,

onda cəmlərin hamısı eyni ədədə bərabər olacaq. Təəccüblü kvadratdır! Belə kvadratlar sehrli adlandırılır.

Siz ürəyiniz istəyən böyük ölçüdə sehrli kvadratları düzəltməyi öyrənmək istəyirsiniz? Buyurun. Biz bir əsr sonra fransız riyaziyyatçısı Klod Başe de Mezirak tərəfindən yaradılmış üsuldan istifadə edəcəyik.

Sehrli kvadratı damalı kağızda qurmaq daha rahatdır. Tutaq ki, n – tək ədəddir və bizə 1-dən n^2-na ədədlər ilə $n\times n$ kvadratı qurmaq lazımdır. Mərhələli hərəkət edək.

1. 1-dən n^2-na qədər bütün ədədləri diaqonal kvadrat yaranması üçün diaqonal (hər sıraya n sayda rəqəm) üzrə hər damaya bir rəqəm qaydası ilə sıra ilə yazırıq.



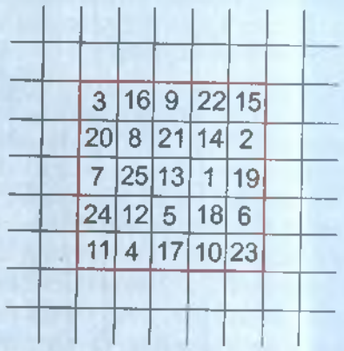
2. Onun mərkəzində $n\times n$ kvadratını ayırırıq. Bu, gələcək sehrli kvadratın əsasıdır (hələlik bütün damalar dolmayıb).

3. Mərkəzi kvadratdan xaricdə yerləşən ədədi "güşəciyi" biz səliqə ilə içəri – kvadratın əks tərəfinə daşıyırıq. Bu "güşəciklərin" rəqəmləri bütün boş damaları doldurmalıdırlar.

Sehrli kvadratı düzəltdik. İndi isə biz yoxlaya bilərik ki, belə $n\times n$ sehrli kvadratda birinci n^2 natural ədədlərdən hər xətt üzrə (sətir, sütun, diaqonal) rəqəmlərin cəmi düz

$$\frac{C^n_{n^2+1}}{n}=\frac{(n^2+1)n}{2}$$-ə bərabərdir.

Sehrli kvadrat kombinatorikada çox vacib istiqamətin doğulmasının əsasını qoyub. O dəqiq sxemləri, yəni çoxlu sayda qəti şərtləri təmin edən rəqəm və ya çoxluq sistemlərindən cədvəlləri gözdən keçirir (O qədər ciddi şərtlərdir ki, qayda olaraq, söhbət artıq mümkün variantların sadalaması haqqında yox, belə sxemin varlığı haqqında gedir).



daha iki hissəyə bölür. Yəni ki, $(n+1)$ müstəvi hissələrin sayını düz x_n hissəyə bölür. Ona görə $y_n+1=y_n+x_n=y_n+(n^2+n+2)/2$. Bundan başqa bizə $y_1=2$ məlum olduğuna görə bu düstur istənilən böyük y_n-i hesablamağa kömək edə bilər. y_n-in n-dən asılı ifadəsini ala bilərik. Əvvəlki məsələdə olduğu kimi $y_n=an^3+bn^2=cn+d$ şəklində axtarsaq, y-in n-dən asılı ifadəsini ala bilərik. Nəticədə:

$$y_n=\frac{n^3+5n+6}{6}$$

ÜMUMİLƏŞMİŞ FAKTORİAL VƏ KATALAN ƏDƏDLƏRİ

Çevrə üzərində $2n$ nöqtə verilib. Onları bir-birilə kəsişməyən n sayda parça ilə cüt-cüt birləşdirmək lazımdır Bunu neçə üsulla etmək olar?

Üsulların axtarılan sayını z_n rəqəmi ilə göstərək. Fərz edək ki, $z_1,z_2,\ldots,z_n$ qiymətləri bizə məlumdur, z_{n+1} qiymətini tapmağa çalışaq. Çevrə üzərində $2(n+1)$ nöqtə yerləşdirək və onlardan istənilən birini seçək (şəkil 4-də A nöqtəsi). Onu başqa nöqtələrdən hər hansısı ilə birləşdirmək olar. Bununla keçirilmiş vətər qalan nöqtələri iki qrupa bölüşdürəcək. Müxtəlif qruplara aid olan nöqtələri birləşdirmək olmaz, çünki bu parça elə keçirilmiş vətəri kəsəcək. Deməli, hər qrupdakı nöqtələri bir-biri ilə birləşdirmək qalır. Əgər qruplarda nöqtələrin sayı tək ədədə bərabərdirsə, onda onları cüt-cüt birləşdirmək mümkün olmayacaq – bir nöqtə artıq qalır. Deməli, A nöqtəsini hər hansı

nöqtə ilə yox, yalnız eləsi ilə birləşdirməliyik ki, 1 və 2-ci qruplarda müvafiq olaraq – 0 və $2n$; 2 və $2n-2$;4 və $2n-4$; ... $2n$ və 0 sayda nöqtə olsun. Əgər qruplardan birində 0 nöqtə varsa, onda birləşmələrin müxtəlifliyini başqa qrupun $2n$ nöqtələri verir və onların sayı z_n bərabərdir. Əgər bir qrupda $2m\neq 0$ nöqtə, başqa qrupda isə $2(n-m)\neq 0$ nöqtə varsa, onda mümkün birləşmələrin sayı z_mz_{n-m}-ə bərabər olur. Buradan z_{n+1} üçün ifadə alırıq:

$$z_{n+1}=z_n+z_1z_{n-1}+z_2z_{n-2}+\ldots+z_{n-2}z_2+z_{n-1}z_1+z_n.$$

Bu düsturdan istifadə edərək, $z_1=1$ olmaqla başlayaraq z_n-in birinci bir neçə qiymətini hesablamaq olar:

$$z_2=1+1=2,$$

$$z_3=2+1\cdot 1+2=5,$$

$$z_4=5+1\cdot 2+2\cdot 1+5=14,$$

$$z_5=14+1\cdot 5+2\cdot 2+5\cdot 1+14=42$$

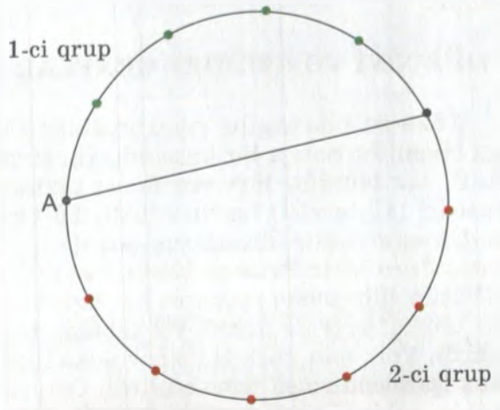
Bu ədədləri *XVIII* əsrdə Leonard Eyler başqa məqsədlər üçün gözdən keçirirdi. O z_n üçün (özünün dediklərinə görə böyük çətinliklə) düstur seçdi:

$$z_n=\frac{(4n-2)!!!!}{(n+1)!}.$$

Kəsrin surətində ümumiləşmiş faktorial dayanır. Bunu açıqlayaq.

$\kappa!$ ifadəsi o deməkdir ki, ən böyüyü κ-ya bərabər olan bütün natural ədədlər birbirinə vurulur. $\kappa!!$ ifadəsi isə o deməkdir ki, hər ardıcıl iki ədəddən ikincisi götürülməklə, bütün natural ədədlər bir-birinə vurulur və vuruqlardan ən böyüyü yenə də κ-dır. Beləliklə, əgər κ cüt ədəddirsə, onda $\kappa!!$ κ-dan böyük olmayan bütün cüt ədədlərin hasilidir ($\kappa!!=2\cdot 4\cdot\ldots\cdot\kappa$); əgər κ tək ədəddirsə, onda $\kappa!!$ κ-dan böyük olmayan bütün tək ədədlərin hasilidir ($\kappa!!=1\cdot 3\cdot\ldots\cdot\kappa$). Buna oxşar olaraq, əgər κ-dan sonra üç nida işarəsi dayanırsa, onda hər üçüncü ədəd vurulur, əgər dörd – hər dördüncü ədəd və s. Bizim misala tətbiq edərək, $(4n-2)!!!!=2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-2)$ alırıq.

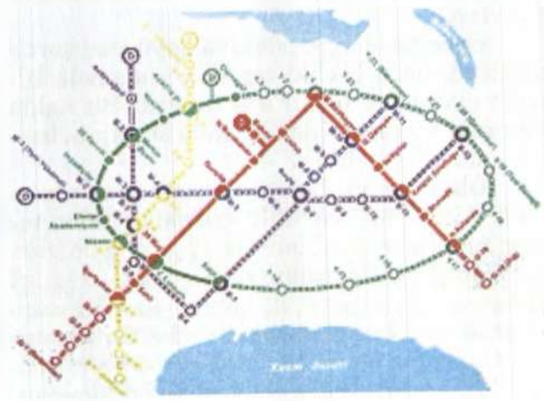
Eylerin tapdığı düsturu bilərək, biz onun doğruluğunu sübut edə bilərik (bunu özünüz etməyə çalışın). Yeri gəlmişkən z_n ədədləri müxtəlif kombinator məsələlərdə peyda olurlar. Onları adətən, *XIX* əsrin belçikalı riyaziyyatçısının şərəfinə Katalan ədədləri adlandırırlar.



Şəkil 4.

QRAFLAR

Hamıya məlumdur ki, qraf zadəganların bir tituludur, məsələn, qraf Lev Nikolayeviç Tolstoy. Riyaziyyatda isə bəziləri xətlər ilə birləşmiş nöqtələrin yığımı qraf adlandırılır. Nöqtələr qrafların təpələri adlandırılır, parçalar isə – onun tilləridir. 1-ci şəkildə bakılılara çox tanış olan bir qraf təsvir olunub. Bu, Bakı metrosunun sxemidir: stansiyalar – təpələrdir, onları bir-biri ilə birləşdirən yollar isə – tilləridir. Nəsil ağacının hissəsi (şəcərə) qrafa misaldır. Burada təpələr – şəxsin əcdadlarıdır, tillər isə onlar arasında qohumluq əlaqələrini göstərirlər.



Şəkil 1. Bakı metropoliteninin sxemi.

Qraflar nəzəriyyəsinin əsasını 1736-cı ildə Königsberq körpüləri haqqında məsələni araşdırarkən Leonard Eyler qoyub.

KÖNİQSBERQ KÖRPÜLƏRİ HAQQINDA MƏSƏLƏ

Keçmiş Königsberq (indiki, Kalininqrad) Preqel çayı üstündə yerləşir. Şəhər daxilində çay iki adanı əhatə edir. Adalara sahillərdən körpülər keçirilib. Köhnə körpülər qalmayıblar, amma onlar təsvir olunan şəhərin xəritəsi qalıb. Königsberlilər hamıya belə bir məsələ həll etməyi təklif edirdilər: şəhərin bütün körpülərini keçib, hər körpüdə bir dəfə olmaq şərti ilə başlanğıc nöqtəyə qayıtmaq.

Şəhər körpülərində gəzməyi Eylerə də təklif etdilər. Müvəfəqiyyətsiz sınaqdan sonra o, körpülərin sxemini çəkdi. Şəhərin hissələri – təpə olan, körpülər isə – tillər olan bir qraf əmələ gəldi (şəkil 2).

Tələb edilən marşrutun mümkünsüzlüyünü sübut etmək üçün, Eyler əvvəlcə daha çətin bir xəritəni gözdən keçirtdi. Nəticədə o sübut etdi ki, qrafın bütün tillərini bir dəfə keçmək şərti ilə başlanğıc nöqtəyə qayıtmaq üçün aşağıdakı iki şərt təmin olunmalıdır:

1) Qrafın hər bir təpəsindən onun tilləri ilə hər hansı başqa təpəyə yol mövcud olmalıdır (bu şərtə əməl edən qraflar əlaqəli qraflar adlandırılır).

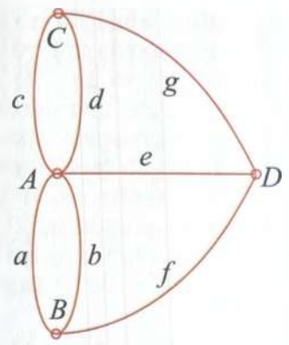
2) Hər təpədən cüt sayda til çıxmalıdır.

Qrafın bütün tillərindən bir dəfə keçən qapalı yolu o vaxtlardan eyler dövrəsi adlandırırlar.

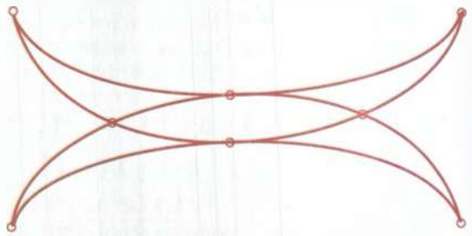
Əgər başlanğıc nöqtəyə qayıtmaq şərtini atsaq, onda biz iki təpədən tək sayda tillərin çıxmasını qəbul edə bilərik. Bu halda hərəkəti bu təpələrdən birində başlayıb, başqasında bitirməliyik.

Ola bilər ki, belə tipli məsələlər çoxlarına "Murzilka" və "Elli" jurnallarından tanışdır. Orada sizə hansısa fiquru kağızdan karandaşı götürmədən və bir xətt üzrə iki dəfə keçməmək şərti ilə çəkməyi təklif edirdilər. 3 və 4-cü şəkillərdə belə iki fiqur çəkilib. Onlardan birincisi "Məhəmmədin qılıncları" adlanılır. Orada Eyler dövrəsi mövcuddur, çünki qrafın altı təpəsindən cüt sayda til çıxır. İkinci fiqurun – "Açılmış məktub" – tək sayda tillər çıxan iki təpəsi (aşağıdakı) var. Ona görə şəkli onlardan birində başlamaq, başqasında isə bitirmək lazımdır.

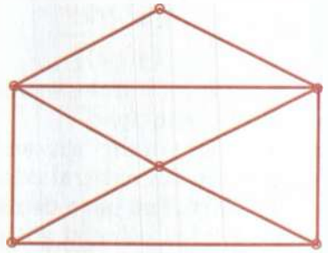
Königsberq körpüləri ilə iş necədir? Burada hər dörd təpədən tək sayda til çıxır,



Şəkil 2.



Şəkil 3.



Şəkil 4.

ona görə burada nə eyler dövrəsi, nə də bir təpədən başqasına bütün tilləri keçən yol yoxdur.

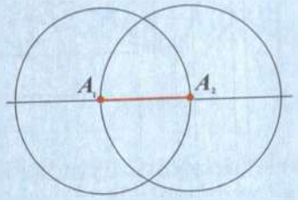
MÜSTƏVİ VƏ İZOMORF QRAFLAR

1859-cu ildə ingilis riyaziyyatçısı Uilyam Hamilton satışa bir başsındıranı çıxartdı. O, hər təpəsinə mıx vurulmuş taxtadodekaedri (12-tərəfli) təsvir edirdi. 20 təpədən hərəsi məşhur bir şəhərin adı ilə işarələnmişdir – Dehli, Brussel, Kanton və s. Qrafın bütün tillərindən keçən və hər təpədə bir dəfə olmaq şərti ilə qapalı yol tapmaq tələb edilirdi. Yolu ipin köməyi ilə hər mıxa ilişdirərək işarələndirmək tələb edilirdi. Oyuncaq "Rubik kubiki" kimi məşhur deyildi, amma

GÖBƏLƏKLƏR VƏ TANIŞLIQLAR

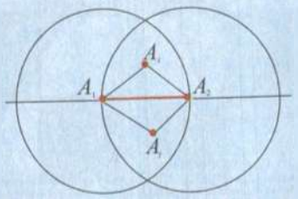
Teorem. Hər hansı 5 göbələyin arasında dördü qabarıq dördbucaqlının təpələrində yerləşir.

Müstəvidə 5 nöqtə götürək: $A_1, A_2, \ldots, A_5$ və onlardan bir-birindən ən uzaqda yerləşən 2 nöqtəni seçək. Tutaq ki, bu A_1 və A_2-dir. Aşağıda göstərildiyi kimi, iki müadil dairə çəkək.



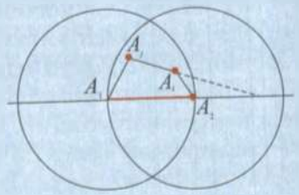
Qalan nöqtələr – $A_3A_4A_5$ – bu iki dairənin kəsişmə sahəsində yerləşməlidirlər. Burada bir neçə hal mümkündür:

1. A_1A_2 parçasından müxtəlif tərəflərdə nöqtələr mövcuddur, amma o zaman $A_1A_iA_2A_j$ dördbucaqlısı qabarıqdır, burada A_i – yuxarı oblastdan hər hansı nöqtədir, A_j – isə aşağı oblastdan hər hansı nöqtədir.



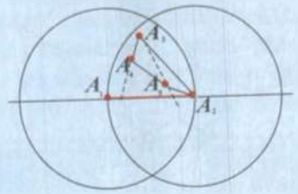
2. A_3, A_4, A_5 nöqtələri A_1A_2 parçasından bir tərəfdə yerləşir. Və burada da öz növbəsində iki hal ola bilər:

a) Onda elə bir A_iA_j parçası tapılar ki, o A_1A_2 xəttini A_iA_j parçasından xaricdə kəsəcək, amma onda A_1, A_2, A_i, A_j nöqtələri qabarıq dördbucaqlı əmələ gətirirlər;



b) Alternativ halda ya A_1, A_3, A_4, A_5, ya da A_2, A_3, A_4, A_5 nöqtələri qabarıq dördbucaqlı əmələ gətirirlər.

Aydın olur ki, əgər qabarıq beşbucaqlı tapmaq istəsəniz, onda sizə 9 nöqtə seçmək lazım olacaq. Özünüz bunu sübut etməyə çalışın.



Ümumiyyətlə, tutaq ki, $N_{(n)}$ – qabarıq n-bucaqlının mövcudluğu təmin olunmuş müstəvinin ən az sayda nöqtələridir. Belə bir fərziyyə var ki:

$N_{(n)} = 2^{n-2} + 1$.

Amma bu hələlik sübut edilməyib.

* * *

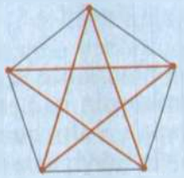
Hər hansı üç insanın arasında bir cinsdən iki nəfər olacaq.

Xalq müdrikliyi

Teorem. Hər hansı altı insan arasında ya üç cüt-cüt tanış olan, ya da üç cüt-cüt tanış olmayan olacaq.

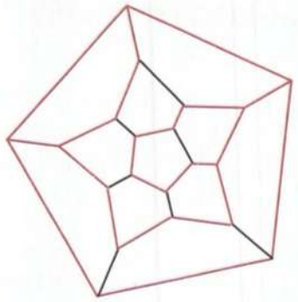
Altı seçilmiş insanlardan sərbəst seçilmiş birinin nöqteyi-nəzərincə baxaq: o öz qarşısında beş nəfəri görür, bəzilərinə onun bir münasibəti var (məsələn, tanışdır), başqalarına isə başqa münasibətdədir (tanış deyil). Aydındır ki, beş nəfərdən həmişə üçü tapılar ki, onlara nisbətdə münasibət birdir. Fərz edək ki, onlar ona tanışdılar. Əgər bu üç insan arasında bir-biri ilə tanış olan cütlük varsa, onda tələb edilən bir-birinə eyni münasibət ilə "üçbucaq" tapılıb. Əgər belə cütlük yoxdursa və deməli, üçü də tanış deyil – hər iki halda biz həlli tapmışıq.

Qeyd etmək lazımdır ki, bu məsələdə altıdan az olmayan miqdarda insanın seçilməsi vacibdir. Misal üçün, beş nəfər arasında tanışlığın (qara) və tanış olmamanın (qırmızı) belə bir təsviri formalaşa bilər.

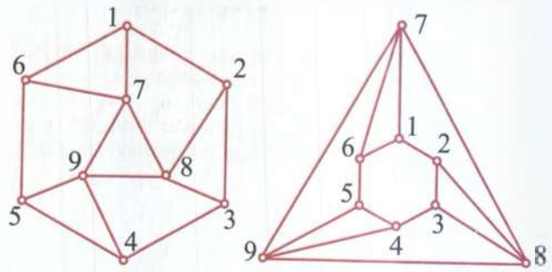


Burada, gördüyümüz kimi, nə qırmızı, nə də qara üçbucaq yoxdur və beləliklə, nə üç cüt-cüt tanış, nə də üç cüt-cüt tanış olmayan da yoxdur. Ona görə altı ekstremal (verilmiş halda – ən kişik mümkün olan say kimi) bir xarakteristikadır, onun mövcudluğu şərti ilə göbələklər haqqında məsələdə $N_{(n)}$ olduğu kimi, tələb edilən xassə yerinə yetirilir.

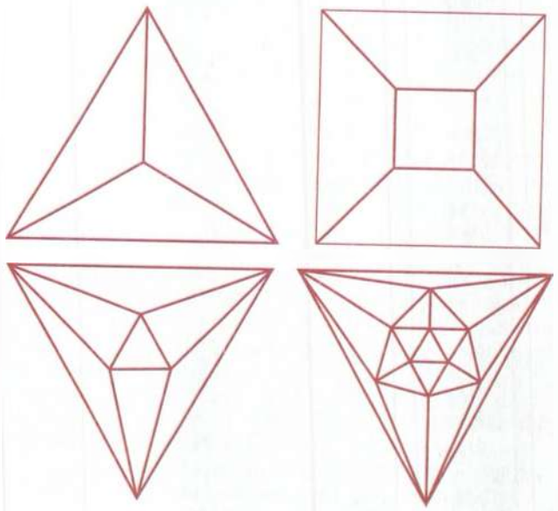
Tanışlıqlar haqqında məsələ kombinatorikanın yeni istiqamətinin – Ramsey nəzəriyyəsinin əsasını qoydu. Bu nəzəriyyənin əsasını yaradan məsələlərdən biri – n-sayda cüt-cüt tanış olan və ya n-sayda cüt-cüt tanış olmayan qrupları seçmək üçün tələb olunan insanların ən az $R_{(n)}$ sayını təyin etməkdir. Müəyyən edilib ki, $R_{(4)}$=18-dir, amma $R_{(n)}$-*in* sonrakı nəticələri məlum deyil.



Şəkil 5.



Şəkil 7.

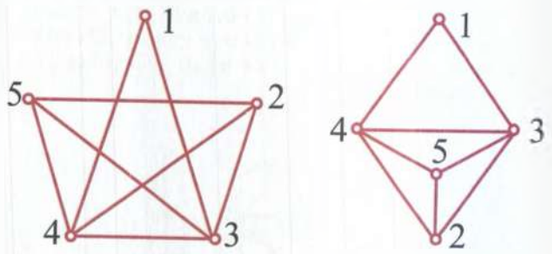


Şəkil 6.

riyaziyyatda çox böyük bir iz qoydu. Qrafın bütün tillərindən keçən və hər təpədə ancaq bir dəfə olan qapalı yolu hamilton dövrəsi adlandırırlar. Eyler dövrəsindən fərqli olaraq, Hamilton dövrəsinin mövcudluq şərtləri hələ də məlum deyil.

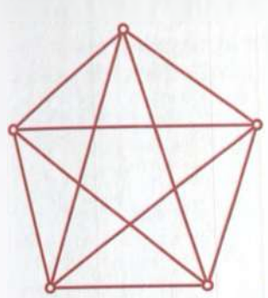
Əgər məftilli dodekaedri müstəviyə qoyub və sonra isə işıq mənbəyini onun yuxarı üzünə yaxınlaşdırsaq, onda tillərin müstəviyə proeksiyaları-kölgələri 5-ci şəkildə təsvir olunmuş qrafı təşkil edəcəklər. Qırmızı rəng ilə Hamilton dövrəsi işarələndirilib. 6-cı şəkildə bu qayda ilə başqa dörd düzgün çoxüzlüdən yaradılmış qraflar göstərilib. Onların üstündə Hamilton dövrəsini tapmağa çalışın.

Proeksiyalar ilə nümunədən göründüyü kimi, qrafların xassələri onun təpələrinin yerdəyişməsi ilə dəyişmir və təpələrin hansı xətlərlə birləşdirildiyindən asılı deyil. 7-ci şəkildə təsvir edilmiş iki qraf bu mənada eynidir: onlarda təpələrin sayı eynidir və əgər bir qrafın iki təpəsi til ilə birləşdirilibsə, onda ikinci qrafın eyni nömrəli olan təpələri til ilə birləşiblər. Bu qeyd daha ciddi şəkildə belə deyilir: Təpələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin etmək mümkün olan, (yəni til ilə birləşdirilmiş təpələrə til ilə birləşdirilmiş təpələr müvafiqdir) iki qraf izomorf (yunan dilindən: "izos" – "bərabər" və "morfs" – "görünüş", "forma") adlandırılır. 8-ci şəkildə təsvir edilmiş qraflar da izomorfdular. Qeyd edək ki, onlardan birində bəzi tillər kəsişirlər, başqasında isə belə kəsişmələr yoxdur. Həmişəmi qrafı tilləri kəsişməmək şərti ilə təsvir etmək olar? Məlum olur ki, xeyr. Belə təsvir etmək mümkün olan qraflar müstəvi qraflar adlandırılır.

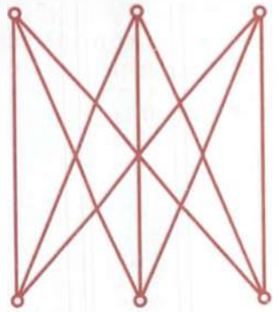


Şəkil 8.

Müstəviyə tillərin kəsişməməsi ilə "uzandırılamayan" iki qrafa baxaq. Onlardan birincisi – hər ikisi til ilə birləşən beş təpə ilə qrafdır. Belə qraf tam qraf adlanır (şəkil 9).



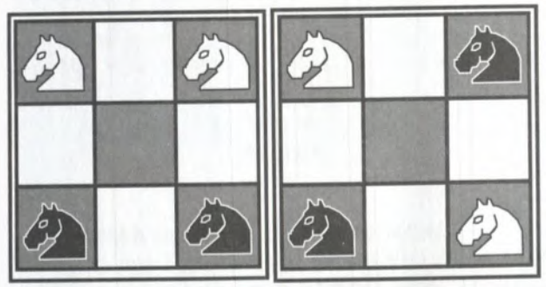
Şəkil 9.



Şəkil 10.

Altı təpə və doqquz til (şəkil 10) ilə ikinci qraf "evlər-quyular" adını daşıyır. Bu ad köhnə başsındıran məsələdən əmələ gəlib.

Üç evdə üç dost yaşayıb. Onların evlərinin yanında üç quyu yerləşirdi: biri duzlu su, ikincisi – dadlı su, üçüncüsü isə – şirin su quyusu idi. Amma bir dəfə dostlar bir-birindən küsdülər. Və onlar belə qərara gəldilər ki, hər quyuya yolları belə çəksinlər ki, bir-biri ilə kəsişməsinlər. Bunu necə etməli? Şəkildə doqquz cığırdan səkkizi çəkilir, amma doqquzuncunu çəkmək olmur.



Şəkil 11.

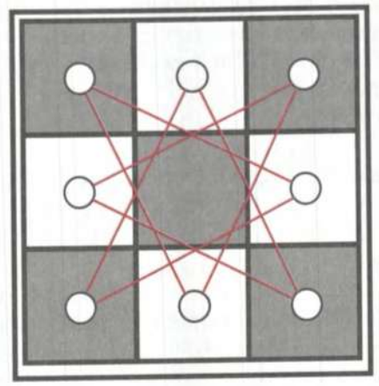
Şəkil 12.

Polşa riyaziyyatçısı Kazimej Kuratovskiy müəyyən edib ki, prinsipcə ayrı cür müstəvi olmayan qraflar mövcud deyil. Daha dəqiq desək, əgər qraf "uzandırılmır", onda onun daxilində bu iki qrafdan (beş təpə ilə tam qraf və ya "evlər-quyular") ən azı birisi ola bilsin ki, tillərdə əlavə təpələrlə "oturur".

Müstəvi qrafların çoxlu sayda maraqlı xassələri var. Misal üçün, Eyler təpələrin sayı (B), tillərin sayı (P) və müstəvinin qraflar ilə bölündüyü hissələrin sayı (Q) arasında adi əlaqə tapıb:

$$B - P + Q = 2$$

Əgər kiçik lampanın köməyi ilə qabarıq çoxüzlünün təpə və tillərindən ibarət olan qrafa izomorf olan müstəvi qrafın necə qurulduğunu xatırlatsaq, onda biz başa düşə bilərik ki, bu düstur hər hansı qabarıq çoxbucaqlı üçün düzdür: həm də B və P – yenə



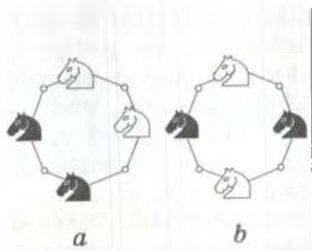
Şəkil 13.

də təpələrin və tillərin sayı, Q isə - çoxüzlünün üzlərinin sayıdır. Yaxınlarda müəyyən edilmişdir ki, bu fakt artıq Rene Dekarta məlum idi.

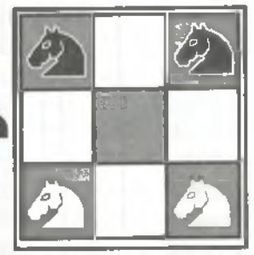
OYUNLAR QRAFI

11-ci şəkildə üstündə iki ağ və iki qara at ilə 3×3 damalı şahmat mini-taxtası təsvir edilib. Məsələ belədir: fiqurları elə yerləşdirmək lazımdır ki, eyni rəngdə olanları taxtanın əks tərəflərində yerləşsinlər (şəkil 12). Onların yerlərini təkcə şahmat atının gedişi ilə dəyişdirmək olar və artıq tutulan yerə başqasını qoymaq olmaz.

Belə bir yerdəyişməsini icra etmək üçün bütün sınaqlar müvəfəqiyyətsizdir. Niyə?



Şəkil 14.



Şəkil 15.

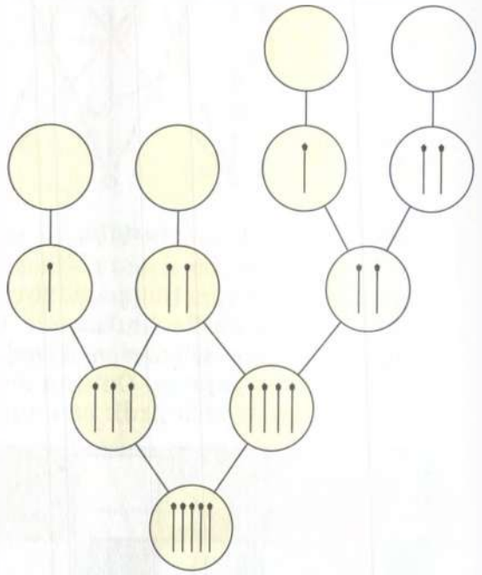
Gəlin atların taxta üstündə mümkün gedişlərinin qrafını çəkək (şəkil 13). Sonra isə iki variantda özü-özünə kəsişməsiz ona izomorf olan qraf çəkək: birində atların başlanğıc vəziyyətini qeyd edək, başqasında isə tələb olunan vəziyyəti (şəkil 14 *a* və *b*). İndi biz artıq başa düşürük ki, niyə məsələ həll olunmur. Atların taxta üstündə hərəkətləri qonşu təpələrə keçid deməkdir və birinci mövqedən ikinci mövqeyə keçmək başqa rəngdə olan atın "üstündən atlanmamaqsız" ola bilməz.

Bu qraf başqa məsələni də həll etməyə kömək edir. O məsələdə 11-ci şəkildə göstərilmiş mövqedən 15-ci şəkildə göstərilmiş mövqeyə ən az sayda gedişlərin köməyi ilə keçirilməsi, yəni ağları və qaraları yerləri ilə dəyişilməsi tələb edilir. Yenə də 14*a* şəklinə qayıdaq. Aydındır ki, fiqurlar bu qraf ilə eyni istiqamətdə hərəkət etməlidirlər və hər ata yalnız 4 gediş etmək lazım olacaq, yəni ümumilikdə 16 gediş etmək lazımdır.

Ümumiyyətlə, oyun qrafı – bu elə bir qrafdır ki, onun təpələri oyun prosesi zamanı yaranan vəziyyətlərdir, tillər isə bu təpələri növbəti gedişdən sonra yaranan təpə-vəziyyətlər ilə birləşdirirlər. Misal üçün, şahmatda başlanğıc vəziyyətdən sonra 20 pozisiya almaq olar: hər piyada bir və ya iki dama qabağı gedə bilər, atlar isə bu və ya digər sahəyə keçə bilər. Qaraların gedişindən sonra mümkün olan pozisiyaların sayı $20 \cdot 20 = 400$-ə bərabər olur və sonra sürətlə çoxalırlar. Elə bu hal şahmat proqramlarının yaradılması zamanı əsas çətinlik oldu.

Oyun qrafı ilə daha yaxın tanış olmaq üçün biz mümkün situasiyalar sayı az olan bir oyunu gözdən keçirək. Tutaq ki, stolun üstündə 5 kibrit var. İki oyunçu növbə ilə 1 və ya 2 kibrit götürür. Axırıncı kibriti götürən qələbə çalır.

Oyunun müxtəlif davamlarının qrafını çəkək (şəkil 16). Görünür ki, hər gedişdən sonra stolda 3 və ya 4 kibrit qalır. Əgər oyunu başlayan stolda 3 kibrit qoysa, onda o udacaq: çünki ondan sonrakı stolda 1 və ya 2 kibrit saxlayacaq, bunları da başlayan oyunçu gələn gedişdə götürəcək. Əgər oyunu başlayan stolda 4 kibrit saxlasa, onda o uduzacaq, çünki ondan sonrakı oyunçu 1 kibriti götürərək, onun üçün 3 dənə kibrit saxlayacaq və bu halda başlayan uduzacaq. Əlbəttə ki, ikinci oyunçu stolda 2 kibrit saxlaya bilər və dərhal uduza da bilər, amma bu inandırıcı görünmür. Belə bir nəticə çıxartmaq olar: əgər kibritlərin sayı 3-ə bölünürsə başlayan uduzur, başqa hallarda isə qələbə çalır.



Şəkil 16.

"Üstəgəl-sıfır" oyunu üçün də qraf yaratmaq olar. Onu araşdıraraq, başa düşə bilərik ki, düz oyunla hər zaman oyunu heçheçə başa vurmaq mümkündür. Əlbəttə ki, bu qraf kibrit oyunu üçün qrafdan daha böyük olacaq.

KÖÇƏRİ TACİRLƏR VƏ DƏMİR YOLLARI

Qraflar nəzəriyyəsinin klassik məsələlərindən biri "kommivoyajör məsələsi" ya da "köçəri tacir məsələsidir".

Özümüz üçün bir neçə şəhəri keçməli və geri qayıtmalı olan ticarət agentini təsvir edək. Bizə bu şəhərləri bağlayan yollar və onların hansı uzunluqda olduqları məlumdur. Biz ən qısa yolu seçməliyik. Bu artıq "oyuncaq" məsələ deyil. Məsələn, yeşiklərdən məktubları çxardan poçt avtomobilinin sürücüsü və köşklərə malları paylayan yük maşının sürücüsü də ən qısa yolu bilmək istərdilər. Bu məsələni həll etmək, xüsusi ilə qrafların təpələrinin sayı çox olanda olduqca çətindir.

DÖRD RƏNG HAQQINDA MƏSƏLƏ

Diqqətlə coğrafi xəritələrə baxanda görə bilərik ki, dəmir və şose yollarını təsvir edən qraflardan başqa, daha biri – dövlətlər (vilayətlər, rayonlar) arasında sərhədləri təsvir edən qraf var (şəkil 1). Til kimi bu xəritələrdə sərhədlər xidmət edir, bu qrafın təpələri isə üç və ya daha çox dövlətlərin sərhədlərinin kəsişdiyi nöqtədir.

Danışmaq istədiyimiz məsələnin tarixi 1852-ci ildən başlayır. Bir dəfə ingilis tələbə Frensis Qutri Böyük Britaniyanın xəritəsini rəngləyirdi. Hər qraflığı o rəng ilə fərqləndirirdi. Təəssüf ki, onun rənglərinin sayı az idi və ona görə o təkrarlamağa məcbur idi. Qutri çalışırdı elə etsin ki, iki həmsərhəd qraflıq müxtəlif rənglərə boyansın. Bu məşğuliyyət onu bir məsələ haqqında fikirləşməyə məcbur etdi, hər hansı xəritəni boyamaq üçün neçə rəng kifayətdir? Qutri hesab edirdi ki, dörd rəng kifayətdir, amma bunu sübut edə bilmirdi. Bu problem bir vaxt London tələbələri arasında aktiv müzakirə edilirdi, amma sonra yaddan çıxdı. 1879-cu ildı ingilis riyaziyyatçısı Artur Keli "Kral coğrafi cəmiyyətinin əsər"lərinin birinci cildində bu məsələni çap etdi və bu məsələ o vaxtdan məşhurlaşdı.

Vaxt keçdikcə, "dörd rəng probleminə" maraq artırdı, amma hətta məşhur riyaziyyatçılar da bu məsələyə cavab tapa bilmirdilər. 1890-cı ildə Persi Xevud sübut etdi ki, hər hansı xəritəni boyamaq üçün beş rəng kifayətdir. 1968-ci ildə sübut etmişdilər ki, əgər xəritənin üzərində 40-dan az ölkə varsa, bu xəritəni dörd rəngin köməyi ilə rənglemək olar.

Nəhayət, 1976-cı ildə amerikan riyaziyyatçıları Kennet Appel və Volfqanq Xaken bu məsələni kompyuter vasitəsi ilə həll etdilər. Onlar bütün xəritələri 2000 nümunəyə böldülər. Onların hazırladığı proqramın əsasında kompyuter xəritələr arasında elə bir nümunə axtarırdı ki, onun üçün dörd rəng kifayət olmasın. Üç nümunə ilə kompyuter bacara bilmədi, və onların üstündə riyaziyyatçılar özləri işləməyə başladılar. Bütün 2000 nümunə üçün kompyuterdən "xeyr" cavabı alaraq, tədqiqatçılar elan etdilər ki, dörd rəng problemi həll edildi. Appel və Xakenin işlədiyi universitet nəzdində poçt bölməsi o gün bütün markaların üstünə "Dörd rəng kifayətdir" möhürü qoyurdu.

Dörd rəng haqqında məsələni bir az başqa formada da göstərmək olar. Sərbəst seçilmiş xəritə üçün aşağıdakı qrafı gözdən keçirək: onun təpələri – dövlətlərin paytaxtlarıdır, tillər ilə ümumi sərhədə malik olan dövlətlərin paytaxtları birləşdirilib (şəkil 2). Alınmış qraf üçün məsələ belə formalaşır: onun təpələrini dörd rənglə til ilə bağlı olan iki paytaxt bir rəngdə olmamaq şərti ilə boyamaq.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

Başqa məsələ isə demək olar ki, kommivoyajör məsələsinin əksidir. Bir neçə böyük şəhəri birləşdirən dəmiryolu çəkmək təklif edilir. Hər hansı şəhər cütün arasında yolun çəkilməsinin qiyməti bəllidir. İndi isə tikilişin ən ucuz variantını tapmaq tələb olunur.

Maraqlısı odur ki, tikilişin ən optimal variantının tapılmasının alqoritmi asandır (qraf nəzəriyyəsinin başqa məsələləri

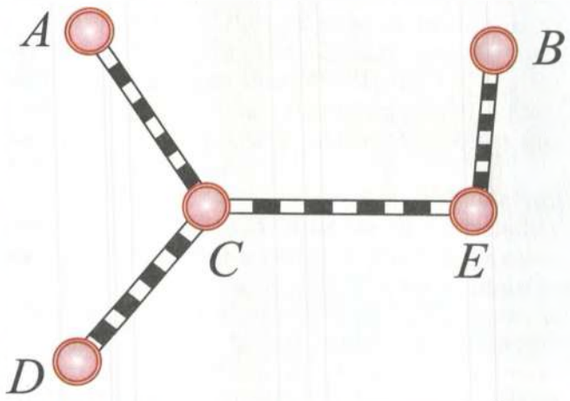
	A	B	C	D	E
A		1,5	1	2	2,5
B	1,5		1,2	3	0,8
C	1	1,2		1,1	0,9
D	2	3	1,1		2,7
E	2,5	0,8	0,9	2,7	

Şəkil 17.

haqqında bunu demək çətindir). *A,B,C,D,E* – beş şəhəri birləşdirən yolu nümunə kimi götürüb və onların əsasında bunu göstərək. Hər cüt şəhər arasında yolun çəkilmə qiyməti cədvəldə, şəhərlərin yerləşməsi isə xəritədə (şəkil 17) göstərilib.

Əvvəlcə ən ucuz yolu tikməyə başlayırıq. Bizim halda bu *B–E* marşrutudur. İndi isə *B* və ya *E*-ni başqa şəhərlər ilə bağlayan ən ucuz yolu tapaq. Bu *E* və *C* arasında yoldur. Onu sxemə daxil edirik. Sonra yenə də – *B,C,E*-ni *A* və ya *D* ilə birləşdirən ən ucuz başa gələn yolu axtarırıq. Bu *C* və *A* arasında yoldur. Dəmiryolu sisteminə təkcə *D*-ni qoşmaq qaldı. Ən ucuz variant, onu *C* ilə birləşdirməkdir. Şəkil 18-də təsvir edilən şəbəkəni alacağıq.

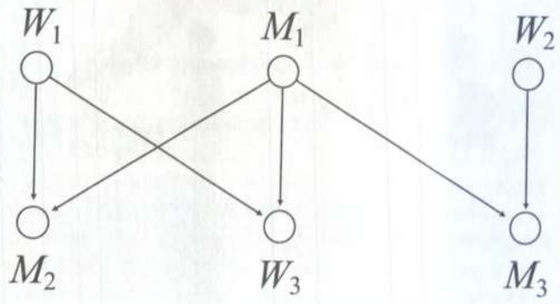
Təsvir etdiyimiz alqoritm, "xəsis" alqoritmlərə aiddir: hər addımda biz ən ucuz yolu axtarırıq. Verilmiş məsələ üçün o çox uyğun gəlir. Amma başqa hallarda "xəsis" alqoritmlər optimal həll verməyə də bilərlər, məsələn, kommivoyajör məsələsində. Burada əgər əvvəldən ən "ucuz" elementləri, yəni ən qısa yolları seçsək, istisna deyil ki, nəticədə çox "bahalı" – uzun yol istifadə etməyə məcbur olacağıq və marşrutun ümumi uzunluğu optimal marşrutdan əhəmiyyətli dərəcədə çox olacaq.



Şəkil 18.

İSTİQAMƏTLƏNDİRİLMİŞ QRAFLAR

Bir çox hallarda təpələri birləşdirən qrafların tillərinin istifadəsi aydın şəkildə ifadə olunmuş istiqamətə yönəlmiş olur. Məsələn, nəsil ağacların (şəkil 19) qrafları, təbii ki, valideynlərdən uşaqlara istiqamətlidir. Ona görə *M* hərfi ilə kişilər və *W* hərfi ilə qadınlar təsvir edilmiş nəsil ağacının fraqmentində, biz görürük ki, M_1 və W_2 ərarvadda bir oğulları var, amma ərdə bundan başqa W_1 ilə birinci evlənmədə iki uşaq (bir oğlan və bir qız) var.



Şəkil 19.

"TƏLƏB OLUNUR... TƏLƏB OLUNUR... TƏLƏB OLUNUR"

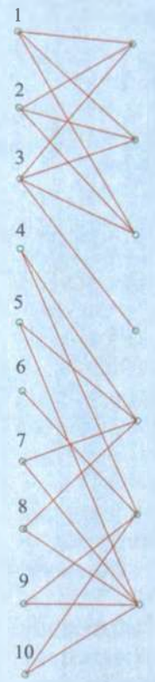
Təsəvvür edək ki, Sakit okean adalarına coğrafi ekspedisiya təşkil olunur. Onun tərkibinə rəhbərdən başqa üç coğraf, aşpaz, radist, həkim və texnik daxil olmalıdırlar. On nəfər eskspedisiyada iştirak etmək arzusundadır, həmçinin onu da qeyd etmək lazımdır ki, onlardan hərəsi göstərilmiş peşələrdən bir və ya bir neçəsinə yiyələnib. Həmişəmi belə bir qrupdan lazım olan mütəxəssisləri seçmək mümkündür?

İki qrup təpəyə malik olan bir qraf çəkək: onlardan onu – iddiaçılara, yeddisi isə – vəzifələrə müvafiqdir. Tillər ilə iddia edənlərin təpələrini vəzifələrin təpələri ilə birləşdirək (şəkil 1).

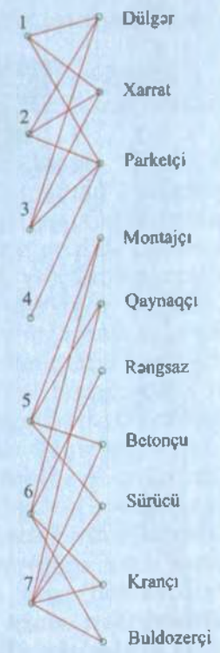
Elə görünür kü, hər şey qaydasındadır, hər vəzifəyə namizəd var. Amma təəsürat aldadıcıdır. Baxın: həkim vəzifəsinə yeganə namizəd (№3) var və əlbəttə ki, o da bu yeri tutacaq. Amma onda üç coğrafın yerinə təkcə iki nəfər qalacaq. Beləliklə, bu iddia edənlər qrupundan komanda yığmaq mümkün olmayacaq.

Biz spesifik bir qrafı gözdən keçirtdik. Onun təpələri elə bir çoxluqlara bölünüblər ki, bir çoxluğun təpələri bir-biri ilə birləşməyiblər. Belə qrafları ikibölgülü adlandırırlar. "Evlər-quyular" qrafı da ikibölgülüdür.

İndi isə əmək birjasına baxaq. Buraya yeddi nəfər gəlib. Onlara peşələrinə görə on iş yeri təklif edilib. Yenə də insanların onların peşələrinə müvafiqliyini göstərən ikibölgülü bir qraf çəkək (şəkil 2). Bu qraf əvvəlki qrafa oxşayır, amma insanlar və vakansiyalar yerlərini dəyişiblər. Yeddilərdən hamısı iş yeri ala biləcəkmi?



Şəkil 1.



Şəkil 2.

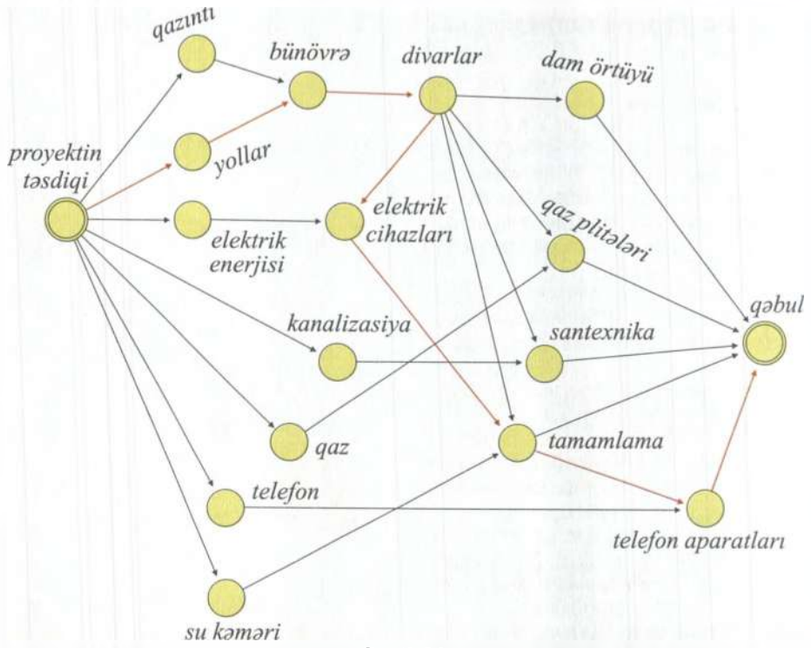
Oyunların qraflarında tillər də tez-tez istiqamətli olurlar: əgər P_1 pozisiyasından P_2 pozisiyasına keçmək olarsa, bu hələ o demək deyil ki, P_2 pozisiyasından P_1 pozisiyasına qayıtmaq olar.

Şəhərin küçələr sistemi də qrafdır. Onun təpələri – meydanlardır, tilləri isə - küçələrdir. Böyük şəhərlərdə bəzi küçələrdə birtərəfli hərəkət tətbiq edilir. Təbii ki, belə bir qraf istiqamətli tilə malik olmalıdır. Onda ikitərəfli hərəkət olan küçələri müxtəlif istiqamətli tillər cütü ilə göstərmək olar.

Tilləri istiqamətlənmiş olan qrafları orqraf adlandırırlar. Onların üstündə müxtəlif nəqliyyat məsələlərini gözdən keçirtmək rahatdır. Məsələn, *A* və *B* şəhərləri arasında yol şəbəkəsi mövcuddur və bir neçə yolda birtərəfli hərəkət tətbiq edilir. Bundan başqa, hər yolun saatda min maşın ölçüsündə keçiricilik qabiliyyəti verilib. Belə bir suala cavab verməyə çalışaq: *A*-dan *B*-yə və *B*-dan *A*-ya hansı maksimal maşın axını mümkündür?

Əgər yolların qrafı daha çətindirsə, həlli tapmaq artıq asan olmayacaq. Elə alqoritmlər icad edilib ki, onların köməyi ilə və kompyuter və ya kompyutersiz orqrafın hər hansı iki təpəsi arasında hər tilin keçiricilik qabiliyyətini bilərək, maksimal maşın axınını təyin etmək olar.

Orqrafın daha bir tətbiqi. Müxtəlif işlər daxilində olan böyük layihələrin tərtib edilməsi zamanı, tez-tez elə situasiyalar yaranır ki, bu və ya digər işi təkcə başqalarını bitirərək başlamaq olar. Məsələn, evin tikilməsi zamanı evin divarları tikilənə qədər bəzək işlərinə başlamaq mümkün deyil və ya evin bünövrəsi qoyulmadan divarlarını tikmək mümkün deyil. İşlərin ardıcıllığı orqraf şəkilində təsvir olunur (şəkil 20). Burada təpələr – aparılan işlərdir (müddətin göstərilməsi ilə), oxlar isə əvvəlki işlərin



Şəkil 20.

bitməyindən sonra icra edilməyi lazım olan işləri göstərirlər. Belə orqraflar şəbəkə qrafikləri adlandırılır. Onlar müəssisənin fəaliyyətinin planlaşdırılması zamanı istifadə edilir.

Məsələn, əgər biz inşaatın başlanılma vaxtını və hər işə sərf edən müddəti bilsək, onda biz asanlıqla hansı materialları nə vaxt gətirməyi və hansı mütəxəssisləri (dülgərlər, rəngsazlar, elektriklər və s.) nə vaxt dəvət etməyi müəyyən edə bilərik. İnşaatın ümumi müddətini təyin etmək üçün, biz orqrafın tillərinə görə ən uzunsürən yolu tapmalıyıq – o maksimal yol adlandırılır. Yolun uzunsürənliyi – bu yolda yerləşən işlərin müddətləri cəmidir.

Şəbəkə qrafiklərindən təkcə inşaatçılar istifadə etmirlər. Onlardan başqa böyük sayda hissə və detallardan ibarət olan traktorların konstruktorları, dəmiryolların dispetçerləri və s. istifadə edirlər.

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ HƏNDƏSƏ

SADƏ VƏ TÜKƏNMƏZ ÜÇBUCAQ

Qədim yunan tarixçisi Herodot yazırdı ki, Nilin hər illik daşqınından sonra misirlilər hər dəfə sahillərin məhsuldar hissələrini yenidən nişanlayırdılar. Və Herodota görə həndəsə – qeometriya – yerin ölçülməsi (yunan dilindən "qeo" – "yer" və "metreo" – "ölçmək") elə bundan da başladı.

Qədim yerölçənlər həndəsi qurmalar edir, sahə və uzunluğu ölçürdülər; astronomlar isə göy cisimlərinin mövqelərini hesablayırdılar – bu hər şey, ümümiyyətlə müstəvi və fəza fiqurları haqqında və ilk növbədə, üçbucaq haqqında böyük biliklər tələb edirdi.

Hamıya tanış olan üçbucaq bütün fiqurlardan ən sadəsi sayılır: hər hansı müstəvi, yəni iki ölçülü fiqurun bir düz xətt üzərində yerləşməyən ən azı üç nöqtəsi var. Əgər bu üç nöqtəni cüt-cüt parçalar ilə birləşdirsək, qurulmuş fiqur üçbucaq olacaq. Yaranmış konturun daxilinə alınmış müstəvi hissəsini də belə adlandırırlar.

ÜÇBUCAĞIN ELEMENTLƏRİ

ABC üçbucağının əsas elementləri bunlardır: təpələr – *A*,*B* və *C* nöqtələri; tərəflər – $a=BC$, $b=AC$ və $c=AB$ təpələri birləşdirən parçalar; tərəflərin üç cütü ilə yaranmış bucaqlar. Bucaqları adətən təpələr kimi adlandırırlar – *A*,*B* və *C* hərfləri ilə (şəkil 1). Bu əsas elementlərdən başqa üçbucaqlarda maraqlı xassələrə malik olan başqa parçaları da araşdırırlar: orta xəttlər, medianlar, tənbölənlər və hündürlüklər (şəkil 2*a*).

Orta xəttlər – iki tərəfin ortalarını birləşdirən parçalardır. Üçbucağın üç orta xəttləri üçbucağın "daxilinə çəkilmiş" ortalıq üçbucaq təşkil edir.

Medianlar (latın dilindən – "ortalıq") – üçbucağın təpələrini qarşı tərəflərin ortaları ilə birləşdirən parçalardır.

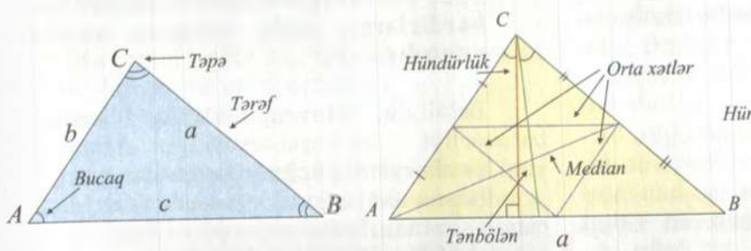
Tənbölənlər (latın dilindən "biss" – "iki dəfə" və "seco" – "parçalamaq") – üçbucağın bucaqlarını ikiyə bölən şüaların üçbucağın daxilində qalan parçalarıdır. Üçbucağın təpəsindən qarşı tərəfə çəkilmiş perpendikulyar üçbucağın hündürlüyü adlanır. Üçbucağın hündürlüyünün üçbucağın tərəfi ilə kəsişdiyi nöqtə hündürlüyün oturacağı adlandırılır. Əgər üçbucağın bir bucağı kordursa, onda tərəfə çəkilmiş hündürlüyün oturacağı tərəfin uzantısı üzərinə düşür (şəkil 2*b*).

Üçbucağın elementlərinin – onun bütün parçalarının və bucaqlarının – adları eyni zamanda onların qiymətlərinin adlarıdır (məsələn, "tənbölənin uzunluğu *a*-ya bərabərdir" yerinə "tənbölən *a*-ya bərabərdir" deyirlər).

ÜÇBUCAQLARIN NÖVLƏRİ

Üçbucağın növünün təyin edilməsi zamanı onun bucaqlarının böyüklüyünü və bərabər tərəflərinin olduğunu nəzərə alırlar. Bu əlamətlərdən birincisinə görə, üçbucaqları belə bölürlər: itibucaqlı – onların bütün bucaqları itidir, düzbucaqlı – bir bucağı düz bucaqdır və korbucaqlı – bir bucağı kor bucaqdır (şəkil 3). Hər hansı üçbucağın bucaqlarının qiymətlərinin cəmi açıq bucağın qiymətinə, yəni 180°-yə bərabərdir və ona görə üçbucağın təkcə bir bucağı iti olmaya bilər.

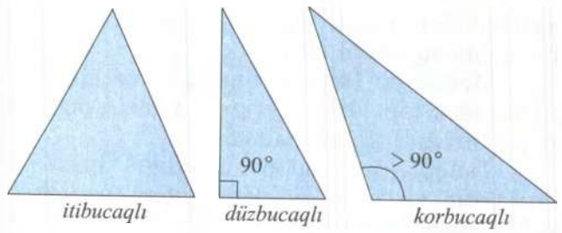
Düzbucaqlı üçbucağın tərəflərinin xüsusi adları var: düz bucağın qarşısında



Şəkil 1.

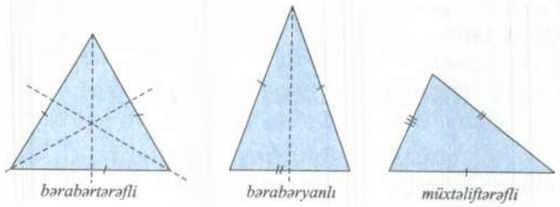
Şəkil 2.

yerləşən tərəf hipotenuz adlanır, başqa iki tərəf isə – katetlərdir.



Şəkil 3.
Bucaqlarına görə üçbucaqların növləri.

Bərabər tərəflərin olmasına görə üçbucaqların üç növünü fərqləndirirlər (şəkil 4). Bərabərtərəfli (və ya düzgün) üçbucaqların üç tərəfi bir-birinə bərabərdir. Bərabəryanlı üçbucaqların iki tərəfi bərabərdir; bu tərəfləri – yan tərəflər adlandırırlar, üçüncü tərəfi isə – oturacaq adlandırılır. Qalan üçbucaqlar isə müxtəlif tərəfli üçbucaqlardır.



Şəkil 4.
Tərəflərinə görə üçbucaqların növləri.

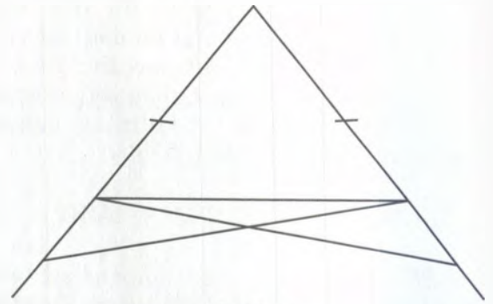
Əgər üçbucaqları onların simmetriyasına görə müqayisə etsək elə bu növlər alınacaq. Kağızdan iki mütləq eyni üçbucaq kəsək. Əgər onlar müxtəlif tərəflidirlərsə, onda onları təkcə bir üsul ilə üst-üstə qoymaq olar; əgər bərabəryanlıdırlarsa – onda iki üsul ilə, əgər bərabərtərəflidirlərsə – onda altı üsul ilə (üsulların sayını düz saymaq üçün, üçbucağın təpələrini hərflər ilə işarələndirin və necə üst-üstə düşdüyünü izləyin).

Bərabərtərəfli üçbucaqların əslində hamısı eynidir – onlar eyni formada olub, bir-birindən təkcə ölçülərinə görə fərqlənə bilərlər. Bərabəryanlı üçbucaqlar isə həndəsəni öyrənməyə başlayanlar üçün ən rahat pillədir. Bu pillədən irəli getmək üçün imkan açılır.

BƏRABƏRYANLI ÜÇBUCAQ

Evklidin "Başlanğıcın"ın ilk teoremlərindən birində bərabəryanlı üçbucaqların əsas xassəsi ifadə edilmişdir: bərabəryanlı üçbucaqda oturacağa bitişik bucaqlar bərabərdir.

Bu teoremin isbatını Evkliddən iki əsr əvvəl yaşamış Miletli Falesə aid edirlər. Sonralar teorem Pons asinorum adını aldı, latın dilindən tərcümədə bu söz "eşşəklər körpüsü" deməkdir. Belə adı müxtəlif cür izah edirlər: biriləri deyirlər ki, onun isbatı üçün Evklidin təsvir etdiyi şəkil körpünü xatırladır (şəkil 5), başqaları isə deyirlər ki, bu körpünü təkcə eşşəklər keçə bilmirlər (buna baxmayaraq müasir ingilis dilində pons asinorum latın ifadəsi bir qədər ayrı mənada istifadə edilir – "təcrübəsiz insanın qabiliyyətlərinin ciddi yoxlanması").



Şəkil 5.

Adətən bərabəryanlı üçbucağın oturacağına bitişik bucaqların bərabərliyini sübut etmək üçün onların simmetrikliyindən istifadə edirlər. Üçbucağı elə çevirib qoymaq olar ki, yan tərəflərdən hərəsi başqası ilə üst-üstə düşərlər: o zaman oturacağa bitişik bucaqlar da bir-biri ilə düz gələrlər. Tərs teorem də düzdür.

✓ **Əgər oturacağa bitişik bucaqlar bərabərdirlərsə, onda üçbucaq bərabəryanlıdır.**

Beləliklə, oturacağa bitişik bucaqların bərabərliyi – bu bərabəryanlığın əlamətidir, yəni bərabəryanlıq üçün kifayət edən şərtdir.

Başqa əlamətlər də var. Məsələn, üçbucaq o zaman bərabəryanlı olacaq ki, üç parçadan hər hansı ikisi – oturacağa çəkilmiş median, hündürlük ya da tənbölən, bərabər olsun. Daha üç əlamət:

✓ **Əgər üçbucağın iki medianı, ya iki tənböləni, ya da iki hündürlüyü bərabərdilərsə, onda belə üçbucaq bərabəryanlıdır.**

Birinci iki əlamət asanlıqla isbat edilir. Amma axırıncı əlamət ya da iki tənbölən haqqında teoremi isbat etmək kifayət qədər çətindir. Bu, Şteyner-Lemus teoremidir. Maraqlısı odur ki, S.L. Lemus riyaziyyatın tarixində təkcə isveçrəli həndəsə alimi Yakob Şteynerə bu faktın həndəsi təsvirini vermək xahişi ilə göndərdiyi məktubu ilə qalıb.

ÜÇBUCAQLARIN BƏRABƏRLİK ƏLAMƏTLƏRİ

ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqları bərabərdirlərsə, onların uyğun tərəfləri və bucaqları bir-birinə bərabərdir, yəni AB tərəfi A_1B_1 tərəfinə bərabərdir, ya da birinci üçbucağın A bucağı ikinci üçbucağın A_1 bucağına bərabərdir və s. Bu aşağıdakı bütün fiqurlara aid olan anlayış ilə eynigüclüdür: üçbucaqlar bərabərdirlərsə, birini başqasına çevirən hərəkət vardır.

İki üçbucağın bərabərliyini, yəni ki, bütün altı elementin bərabərliyini üç elementin bərabərliyindən almaq olar. Müvafiq teoremlər üçbucağın bərabərlik əlamətləri adlandırılır. Burada üç əlaməti göstərək.

Birinci əlamət:

✓ **Bir üçbucağın iki tərəfi və onlar arasındakı bucaq, uyğun olaraq, o biri üçbucağın iki tərəfi və onlar arasındakı bucağa bərabərdirsə, onda bu üçbucaqlar bir-birinə bərabərdirlər.**

Bu o deməkdir ki, üçüncü tərəfi və qalan iki bucaq da bərabərdirlər.

İkinci əlamət:

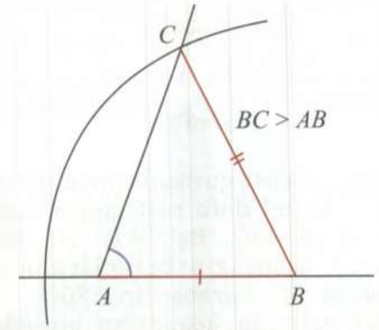
✓ **Əgər bir üçbucağın bir tərəfi və ona bitişik olan iki bucaq ikinci üçbucağın müvafiq olan tərəfinə və bitişik olan iki bucağına bərabərdirlərsə, üçbucaqlar bərabərdir.**

Rəvayətlərə görə bu faktın isbatını Falesin adı ilə bağlayırlar.

Üçüncü əlamət:

✓ **Əgər iki üçbucağın tərəfləri uyğun olaraq bərabərdirlərsə, onda üçbucaqlar da bərabərdirlər.**

Üçbucaqların bərabərliyinin üç əsas əlamətindən başqa daha bir neçəsini göstərmək olar. Qayda olaraq, üçbucaqlar o zaman bərabər sayılırlar ki, onların üç uyğun elementi bərabər olsun və vacib deyil ki, bu elementlər arasında təkcə tərəfi və bucaqlar olmalıdır. Amma belə fikir həmişə düz olmur. Məsələn, iki üçbucağın iki tərəfi və onlardan birinin qarşısında yerləşən bucağa görə "əlamət" düz deyil. Amma əgər məlumdursa ki, baxılan bucağa qarşı tərəf başqa tərəfdən kiçik deyil, onda üçbucaqlar bərabərdirlər. Bunu biz bu elementlər əsasında üçbucaqların qurulmasını təsvir edən 6-cı şəkildən görürük.



Şəkil 6.
Üçbucağın qurulması.

İki düzbucaqlı üçbucağın bərabərliyi üçün heç olmasa birinin tərəf olması şərtilə hər hansı iki elementin (düz bucaqdan başqa) bərabərliyi kifayətdir. Ümumilikdə beş müxtəlif əlamət məlumdur: məsələn, katet və hipotenuza görə, iki katetə, hipotenuza və bir iti bucağa görə və s.

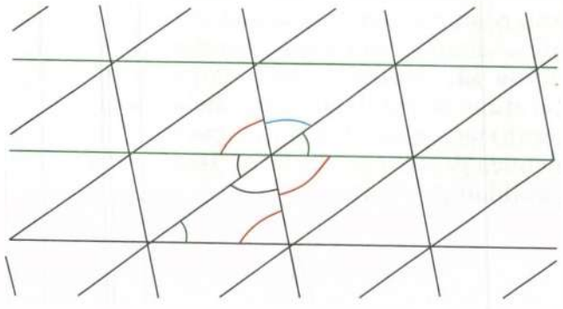
ÜÇBUCAĞIN BUCAQLARININ CƏMİ

Əgər sərbəst şəkildə seçilmiş üç element kimi onun bucaqlarını götürsək, o zaman başqa situasiya əmələ gəlir: sonsuz qədər bərabər bucaqlar ilə cüt-cüt bərabər olmayan üçbucaqlar mövcuddur. İş ondadır ki, üç bucağı bilərək, biz üçbucağın təkcə

iki müstəqil elementini bilirik: bucaqların iki cütünün bərabərliyi təkcə üçüncü bucaqların bərabərliyini təmin edir. Bu fakt artıq üçbucağın bucaqlarının cəmi haqqında qeyd edilmiş teoremdən çıxır:

✓ **Üçbucağın daxili bucaqlarının cəmi 180°-dir.**

Üçbucağın bucaqlarının cəmi teoremi artıq Pifaqorun şagirdlərinə də məlum idi. Onlar bunu müstəvini aralıq və çatsız, bərabər düzgün üçbucaqlar ilə örtmək faktına əsaslanaraq deyirdilər. Bu, ixtiyari üçbucaqlar üçün də düzdür (şəkil 7). Yaranan üçbucaqlı

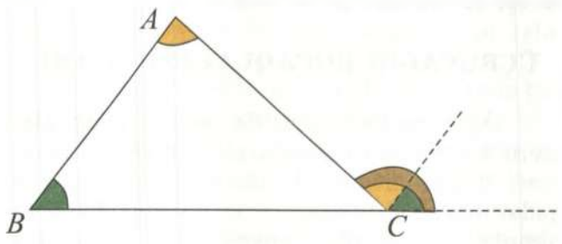


Şəkil 7.

torların hər hansı qovşaqlarında üçbucağın hər bucağına iki dəfə rast gəlmək şərti ilə altı bucaq qovuşur. Beləliklə, altı bucağın cəmi, yəni üçbucağın bucaqlarının ikiqat cəmi tam bucağa bərabərdir – 360°.

Bəzi hallarda üçbucağın bucaqlarının cəmi haqqında teoremin yerinə onunla eynigüclü olan xarici bucaq (yəni bir tərəflə və başqa tərəfin davamı ilə əmələ gəlmiş bucaq) teoremindən istifadə edirlər.

✓ **Üçbucağın xarici bucağı onunla qonşu olmayan iki daxili bucağın cəminə bərabərdir (şəkil 8).**



Şəkil 8.

Üçbucağın bucaqlarının cəmi haqqında teorem – təkcə Evklid həndəsəsinə məxsus olan faktdır. Məsələn, kürənin səthində üçbucağın bucaqları cəmi həmişə 180°-dən çox qiymət ala bilər. Bundan başqa, sferada üçbucaqlar üçün üç bucağa görə bərabərlik əlaməti düzdür (bax "Sfera üzərində fiqurlar" məqaləsinə).

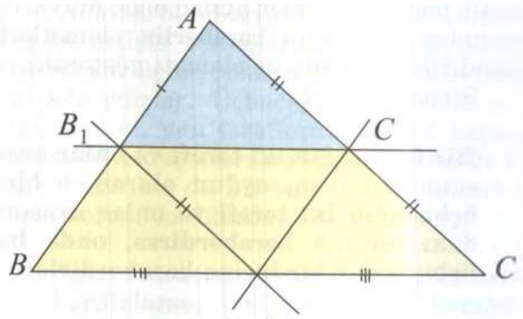
OXŞARLIQ ƏLAMƏTLƏRİ

Əgər üçbucaqların uyğun bucaqları birbirinə bərabərdirsə və uyğun tərəfləri mütənasibdirsə, o zaman üçbucaqlar oxşardırlar deyilir. Bu iki üçbucaqdan hərəsini başqasına bütün məsafələri bir neçə dəfə dəyişən oxşarlıq çevirməsi ilə çevirmək olar (Bu xassə ilə ixtiyari fiqurların oxşarlığı müəyyən edilir).

Üçbucaqda orta xətti keçirərkən oxşarlığın ən sadə halı əmələ gəlir. Onun vasitəsi ilə kəsilmiş balaca üçbucaq eyni bucaqlara və iki dəfə az ölçüdə tərəflərə malikdir (şəkil 9). Bunun nəticəsi olaraq üçbucağın orta xətti haqqında teorem alınır:

✓ **Üçbucağın iki yan tərəfini bir-biri ilə birləşdirən orta xətt oturacağa paraleldir və onun yarısına bərabərdir.**

Üçbucaqların oxşarlığını üçbucağın bərabərlik əlamətləri ilə uyğun gələn üç əlamətə görə təyin etmək olar:



Şəkil 9.

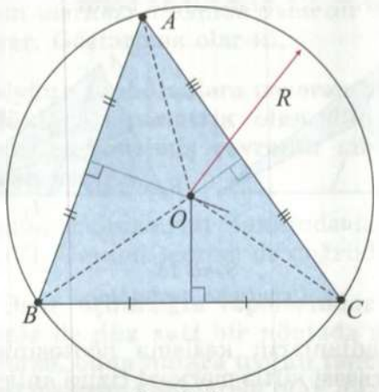
✓ **Əgər: 1) iki uyğun tərəfləri mütənasib və bu tərəflər arasındakı bucaqları bərabərdirsə; 2) uyğun bucaqları bərabərdirsə (iki cüt bucaqların bərabərliyi kifayətdir); 3) uyğun tərəfləri mütənasibdirsə, iki üçbucaq oxşardır.**

Bu əlamətlər teoremlərin, o cümlədən, üçbucağın mühüm nöqtələri və xəttləri haqqında teoremlərin isbatlarında tez-tez istifadə olunur.

GÖRKƏMLİ NÖQTƏLƏR, DÜZ XƏTLƏR VƏ ÇEVRƏLƏR

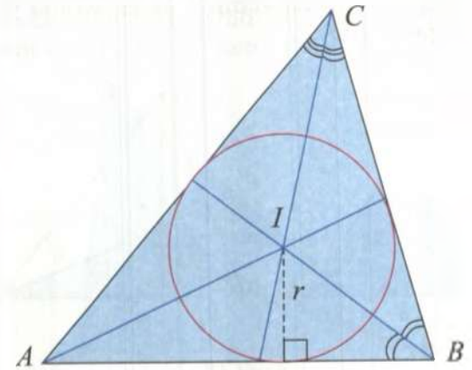
Xaricə çəkilmiş çevrə. Üçbucağın bütün üç təpəsindən keçən çevrəyə belə deyirlər. Onun mərkəzini adətən O hərfi ilə, radiusunu isə *R* hərfi (şəkil 10) ilə göstərirlər. Belə bir çevrənin varlığına və yeganə olduğuna əmin olmaq üçün, diqqət yetirin: mərkəz *O* – üç bərabəryanlı üçbucağın ümumi təpəsidir, onların oturacaqları – verilmiş üçbucağın tərəfləridir. Bu üçbucaqların oturacağa endirilmiş hündürlükləri eyni zamanda mediandırlar. Beləliklə, xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi üçbucağın tərəflərinin ortalarına keçirilmiş perpendikulyarların kəsişməsində yerləşir. Onları elə belə də adlandırırlar – orta perpendikulyarları. Və tərsi: üçbucağın tərəflərinə çəkilmiş orta perpendikulyarlar keçirildiyi tərəflərin uclarından eyni məsafədə yerləşən nöqtələrdən ibarətdir, ona görə hər hansı ikisinin kəsişmə nöqtəsi üç təpədən eyni məsafədədir, deməli, üçüncü perpendikulyarda yerləşir.

Beləliklə, hər hansı üçbucağın tərəflərinə çəkilmiş orta perpendikulyarlar bir nöqtədə kəsişirlər – xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzində. İtibucaqlı üçbucaqda xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi üçbucağın daxilində, düzbucaqlı üçbucaqda hipotenuz üzərində, körbucaqlı üçbucaqda isə onun xaricində yerləşir.



Şəkil 10.

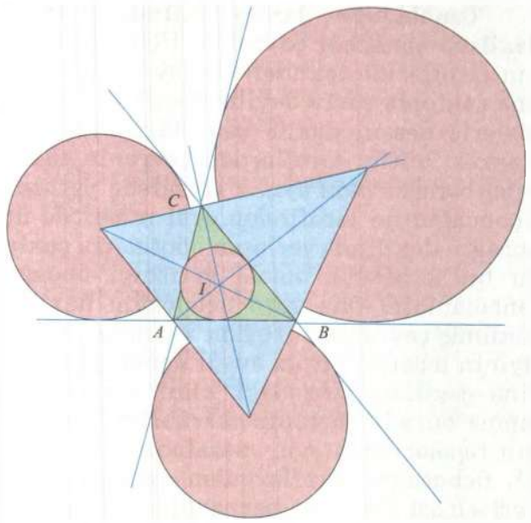
Tənbölənlər, daxilə çəkilmiş və xaricdaxilinə çəkilmiş çevrələr. Üçbucağın bütün tərəflərinə toxunan çevrəyə onun daxilinə çəkilmiş çevrə deyilir (şəkil 11). Başqa sözlərlə desək, daxilə çəkilmiş çevrənin *I* mərkəzi bütün tərəflərdən çevrənin radiusuna bərabər olan eyni *r* məsafədə yerləşir. Üçbucağın iki tərəfindən eyni məsafədə üçbucağın daxilində yerləşən nöqtələrin çoxluğu bu tərəflərin əmələ gətirdiyi bucağın tənbölənidir. Ona görə üçbucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin varlığını və onun yeganəliyinin isbatını bir az əvvəl üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrədəki kimi etmək olar, amma burada çevrənin mərkəzinin üçbucağın təpələrindən eyni məsafədə yerləşməsini, üçbucağın tərəflərindən eyni məsafədə yerləşməsi ilə, orta perpendikulyarları bucaqların tənbölənləri ilə əvəz etmək lazımdır. Bununla birlikdə isbat edilir ki, üç tənbölənin bir kəsişmə nöqtəsi var – bu da *I* mərkəzidir.



Şəkil 11.

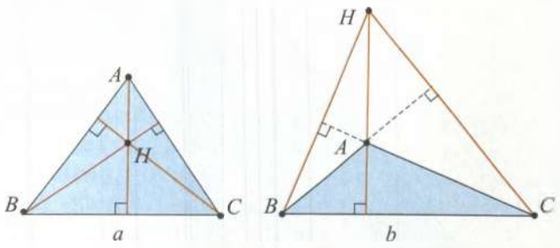
Hərəsi üçbucağın bir tərəfinə (xaricdən) və başqa iki tərəfin uzantısına (şək. 12) toxunan üç çevrə xaricdaxilinə çəkilmiş çevrələrdir. Xaricdaxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi bir daxili bucağın və iki başqa təpədəki xarici bucaqların tənbölənlərinin kəsişmə nöqtəsində yerləşir. Beləliklə, üçbucağın altı tənböləni – üç daxili və üç xarici – üç-üç dörd nöqtədə kəsişirlər – daxilinə çəkilmiş və üç xaricdaxilinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzlərində.

Hündürlük. Hündürlükləri özündə saxlayan düz xəttlər həmişə ortomərkəz adlanan nöqtədə kəsişirlər. İtibucaqlı üçbucaqda ortomərkəz üçbucağın daxilində yerləşir (şəkil 13*a*), düzbucaqlı üçbucaqda düz



Şəkil 12.

bucağın təpəsi ilə üst-üstə gəlir, korbucaqlı üçbucaqda isə – üçbucağın xaricində, hündürlüklərin uzantılarının kəsişməsində yerləşir (şəkil 13*b*).

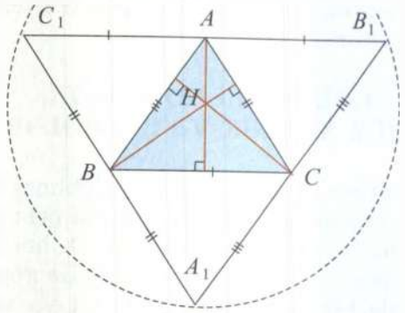


Şəkil 13.

Əgər H – ABC üçbucağının ortomərkəzidirsə, onda A,B,C və H nöqtələrindən hər biri üç başqa nöqtə ilə yaradılmış üçbucağın ortomərkəzləridir.

Üçbucağın ortomərkəzinin varlığını isbat edək. 14-cü şəkildə ABC üçbucağı $A_1B_1C_1$ üçbucağı üçün ortalıq üçbucaqdır; deməli, birinci üçbucağın hündürlükləri ikinci üçbucağın orta perpendikulyarlarıdır. Deməli, onlar ikinci üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin H mərkəzində kəsişirlər və bu mərkəz ABC üçbucağının ortomərkəzi ilə üst-üstə gəlir.

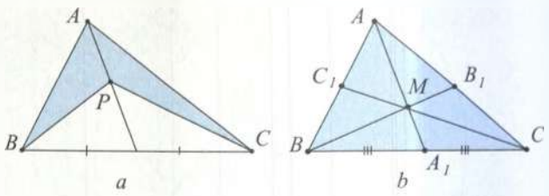
12-ci şəkil bizə tənbölənlər haqda teoremdən hündürlüklər haqqında teoremi almağa imkan verir. Qonşu bucaqların tənbölənləri qarşılıqlı perpendikulyar olduğuna görə, şəkildə dörd çevrənin (xaricdaxili-



Şəkil 14.

nə çəkilmiş və daxilə çəkilmiş çevrənin) mərkəzlərinin hər biri başqa mərkəzlərdə təpələri yerləşən üçbucağın ortomərkəzidir, A,B və C nöqtələri isə onun hündürlüklərinin oturacaqlarıdır. Bu qeydi "çevirmək" olar və isbat etmək olar ki, üçbucağın hündürlükləri – ortoüçbucağın, yəni hündürlüklərin oturacaqları vasitəsi ilə yaradılmış üçbucağın tənbölənləridir. Belə nəticəyə gələ bilərik ki, onların ortaq nöqtəsi var.

Medianlar. Əgər PAB və PAC üçbucaqlarının sahələri bərabərdirsə (şəkil 15) ABC üçbucağının daxilində yerləşən P nöqtəsinin BC tərəfinə çəkilmiş median üzərində yerləşdiyini sübut etmək olar, Buna əsaslanaraq və tənbölənlər və orta perpendikulyarlar haqqında teoremlərdəki kimi mühakimə edərək, əmin ola bilərik ki, medianlar da bir nöqtədə – M nöqtəsində kəsişirlər (şək. 15*b*), amma onu da nəzərə almalıyıq ki, MAB, MBC və MCA üçbucaqları müadildirlər, yəni sahələri eynidir. Bundan başqa, istənilən üçbucaqda M nöqtəsi medianı təpədən başlayaraq 2:1 nisbətində bölür.

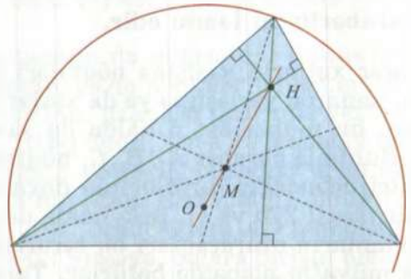


Şəkil 15.
Üçbucağın medianları

Medianların kəsişmə nöqtəsinin maraqlı xassəsi kütlə mərkəzi fiziki anlayışı ilə bağlıdır. Məlum oldu ki, əgər üçbucağın təpələrinə eyni kütlələr yerləşdirsək, onda onların mərkəzi bu nöqtəyə düşəcək.

Eyni kütlələrin mərkəzini bəzən sentroid adlandırırlar. Və məhz ona görə deyirlər ki, medianların kəsişmə nöqtəsi – üçbucağın sentroididir. Elə bu nöqtədə bircins üçbucaq lövhənin kütlə mərkəzi yerləşir. Əgər belə bir lövhənin sentroidindən sancağın ucunu keçirtsək, onda o, tarazılıqda olacaq. Maraqlısı odur ki, məftil üçbucaqlı konturun kütlə mərkəzi onun orta üçbucağının daxilinə çəkilən çevrənin mərkəzi ilə üst-üstə düşəcək.

Eyler düz xətti. Üçbucağın həndəsəsində Leonard Eyler bir sıra çox gözəl kəşflər edib. Məsələn, o sübut edib ki, hər hansı üçbucağın M sentroidi onun xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi O və H ortomərkəz arasında çəkilmiş parçanın üzərində yerləşir və bu parçanı $OM{:}MH=1{:}2$ nisbətində bölür. OH düz xətti verilmiş üçbucağın Eyler düz xətti adlandırılır (şəkil 16). 14-cü şəkildən istifadə edərək Eyler düz xətti haqqında teoremi isbat etməyə çalışın.



Şəkil 16.

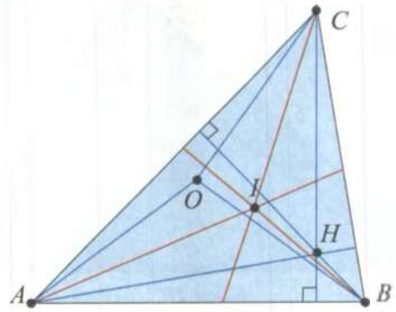
İzoqonal nöqtələr. Bundan başqa üçbucağın ortomərkəz və xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi arasında daha bir maraqlı əlaqə var. Göstərmək olar ki,

✓ **Uyğun tənbölənlərə nəzərən hündürlüklərə simmetrik olan düz xətlər xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən keçir.**

yəni onun radiuslarını daxilində saxlayır. (şəkil 17). Ümumi teorem də doğrudur:

✓ **Əgər üçbucağın təpələrindən çəkilmiş üç düz xətt bir nöqtədə kəsişirlərsə, onda onlara uyğun tənbölənlərə nəzərən simmetrik olan düz xətlər də bir nöqtədə kəsişirlər.**

Belə iki oxşar nöqtə izoqonal nöqtələr adlandırılır. Beləliklə, üçbucağın ortomərkəzi xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzinə izoqonaldır.



Şəkil 17.

Üçbucağın tənbölənlərinə nəzərən uyğun medianları əks etdirərək yeni görkəmli xətlər alınır – simedianlar. Onların L kəsişmə nöqtəsi üçbucağın Lemuan nöqtəsi adlandırılır. O, əsas üçbucağın tərəflərinə proeksiyaları ilə yaradılmış $A_1B_1C_1$ üçbucağının sentroididir (şəkil 18).

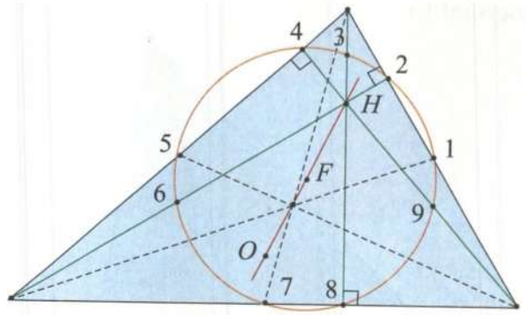
Şəkil 18.

Doqquz nöqtənin çevrəsi. Eyler xətti ilə bağlı fikirlərimizi davam etdirsək, isbat edə bilərik ki,

✓ **Üçbucağın tərəflərinin ortaları (1,5 və 7 nöqtələri), onun hündürlüklərinin oturacaqları (2,4 və 8 nöqtələri) və təpədən ortomərkəzə kimi parçaların ortaları (3,6 və 9 nöqtələri) bir çevrə üzərində yerləşirlər (şəkil 19).**

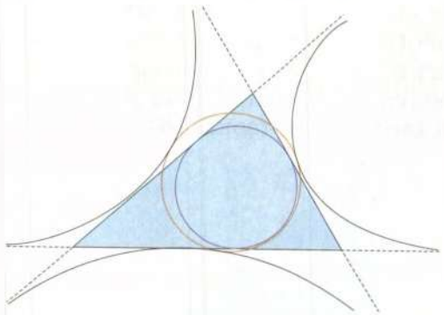
Onun radiusu xaricə çəkilmiş çevrənin radiusunun yarısına bərabərdir, F mərkəzi isə OH parçasının ortasında yerləşir. F çevrəsi ya doqquz nöqtə çevrəsi, ya Eyler çevrəsi, ya da Feyerbax çevrəsi – (filosof Ludviq

Feyerbaxın doğma qardaşı, Almaniyadan əyalət riyaziyyat müəllimi Karl Feyerbaxın xatirinə) adlanır. K. Feyerbax bu çevrənin



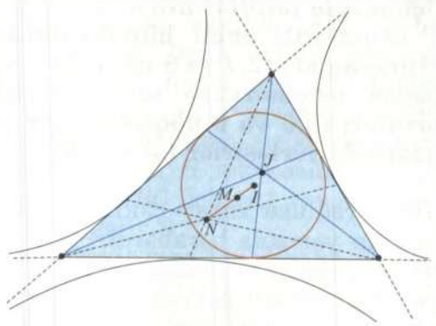
Şəkil 19.

daha bir, ən təəcüblü xassəsini aşkar etdi: o bir daxilə çəkilmiş və üç xaricdaxilinə çəkilmiş çevrələrə toxunur (şəkil 20).


Şəkil 20.

Jerqonn və Naqel nöqtələri. İsbat edə bilərik ki, üçbucağın təpələrindən daxilinə çəkilmiş çevrənin təpələrin qarşısındakı tərəflər ilə toxunma nöqtələrinə çəkilmiş üç parça bir J nöqtəsində kəsişirlər (şəkil 21). Bu nöqtə Jerqonn nöqtəsi adlandırılır.

Üçbucağın hər təpəsini xaricdaxilinə çəkilmiş çevrənin qarşı tərəf ilə toxunduğu nöqtə ilə birləşdirən parçalar da bir N nöq-



Şəkil 21.

təsində – Naqel nöqtəsində kəsişirlər. O, onunla maraqlıdır ki, NI parçası (burada I – daxilində çəkilmiş çevrənin mərkəzidir) üçbucağın M sentroidindən keçir və onunla $NM:MI=2:1$ nisbətində bölünür (şəkil 21).

Çeva teoremi. Bir nöqtədən üç düz xətt keçməsi haqqında teoremlərdən sonra belə bir sual yaranır: oxşar fikirləri usbat etmək üçün bir ümumi üsul varmı? Həqiqətən də, belə bir üsul var. Onu italyan qeometri və texniki Jovanni Çeva aşkarlayıb.

ABC üçbucağının BC, CA və AB tərəflərində A_1, B_1, C_1 nöqtələrini seçək və qarşı tərəfdə dayanan təpələr ilə birləşdirək. Belə xəttləri Çeva xəttləri ya da çevianlar adlandırırlar. Çeva teoremində deyilir ki:

✓ **Əgər üç çevian bir nöqtədə kəsişirlərsə, onda onların A_1, B_1, C_1 oturacaqlarının üçbucağın tərəflərini böldüyü nisbətlər,**

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1 \qquad (*)$$

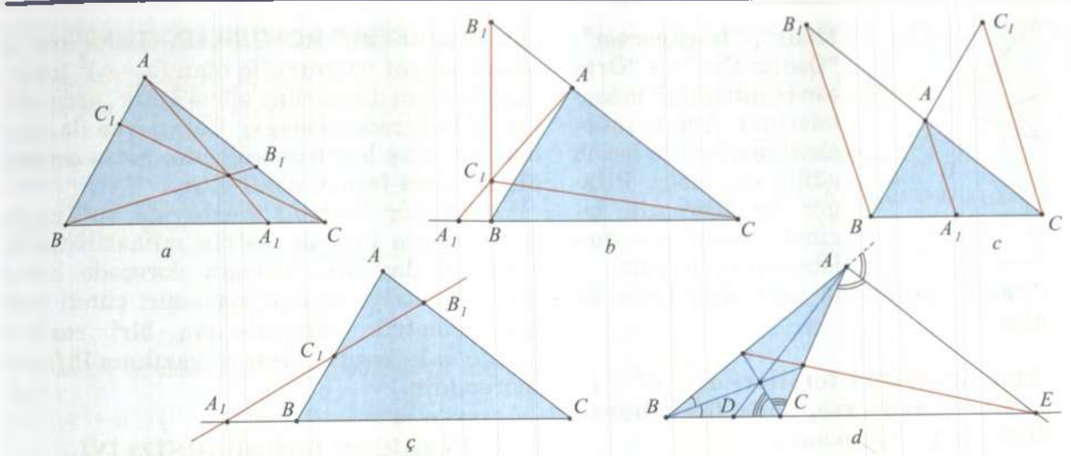
bərabərliyini təmin edir.

Əgər xətlərin kəsişmə nöqtələri üçbucaqdan kənarda yerləşirsə ya da xətlər paraleldirsə, bu münasibət o halda da saxlanılacaq. Bununla bərabər A_1, B_1, C_1 nöqtələrindən ikisi üçbucağın tərəflərinin davamında yerləşir (şəkil 22*b* və *c*). Belə halda deyirlər ki, çevianların oturacaqları bu tərəfləri xaricdən müvafiq nisbətdə bölürlər. Tərs teorem də doğrudur:

✓ **Əgər ABC üçbucağını məhdudlaşdıran xəttlərdə yerləşən A_1, B_1, C_1 nöqtələri Çeva şərtini təmin edirlərsə, həm də məhz elə onun tərəflərində üç nöqtənin hamısı ya da biri yerləşirsə, onda uyğun çevianlar ya bir nöqtədə kəsişirlər, ya da paraleldirlər.**

Bu teoremdən üçbucaqda kəsişən üç xəttin haqqında əvvəl dediklərimizi nəticə kimi çıxartmaq olar.

Menelay teoremi. Çeva teoreminin müzakirəsi zamanı, biz qeyd etdik ki, üçbucağın tərəfində ya çevianların oturacaqlarının hamısı yerləşir, ya da təkcə biri. Belə bir qeydsiz, biz qədim riyaziyyatçı və astronom Menelay Aleksandriyalı (*I-II* əsrlər) adı ilə



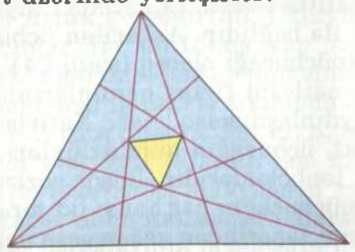
Şəkil 22.

məşhurlaşan başqa klassik teoremin şərtlərinə düşəcəkdik.

✓ **Əgər ABC üçbucağının BC, CA və AB tərəfləri və ya tərəflərin uzantıları hansısa düz xətt ilə uyğun olaraq, A_1, B_1, C_1 nöqtələrində kəsişirlərsə, onda (*) bərabərliyi ödənir (şəkil 22ç).**

Tərs teorem də doğrudur. Bununla belə ya bir nöqtə, ya da nöqtələrin hamısı üçbucağın tərəflərinin uzantısı üzərində yerləşir.

Misal üçün, Çeva və Menelay teoremlərini daxili və xarici bucaqlar üçün tənbölənlərə tətbiq edək. Bizə məlum olduğu xassəyə görə, ABC üçbucağının AD tənböləni BC tərəfini iki hissəyə, onlara bitişik olan tərəflərə mütənasib bölür: $BD/DC=BA/AC$. Elə AE tənböləni üçün də düzdür (şəkil 22*d*): $BE/EC=BA/AC$. Müvafiq bərabərlikləri Çeva teoremində nəzərə alsaq, görərik ki, üç daxili və ya bir daxili və iki xarici tənbölənlər (xarici bucaqların tənbölənləri) bir nöqtədə kəsişirlər. Menelay teoremindən alınır ki, müxtəlif təpələrdən çəkilmiş bir xarici və iki daxili tənbölənlərin oturacaqları bir düz xətt üzərində yerləşirlər.


Şəkil 23.

Morley teoremi. Bu qəşəng teorem *XIX* əsrdə amerikalı Frenk Morley tərəfindən ifadə olunmuşdur.

Üçbucaqların bucaqlarının trisektrisalarını – bucaqları üç bərabər hissəyə bölən xətlər keçirək. Üçbucağın hər tərəfinə bitişik olan trisektrisa cütlərini nişanlayaq (şəkil 23). Nişanlanmış nöqtələr düzgün üçbucağın təpələri olacaq.

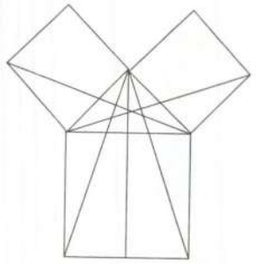
Həqiqətən də, üçbucaqlar həndəsəsi tükənməzdir; iki min ildən artıq belə bir mirvari gözə görünməz qalmışdı.

PİFAQOR TEOREMİ

Parçaların uzunluqlarını, sahələri, fiqurlarda bucaqların qiymətlərini birləşdirən düsturları metrik münasibətlər adlandırırlar. Və deməк olar ki, bu münasibətlərdən ən məşhuru Pifaqor teoremidir. O düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri arasında adı bir əlaqə müəyyən edir:

✓ **Hipotenuzun kvadratı katetlərin kvadratlarının cəminə bərabərdir.**

Artıq həmişə bu teoremi məşhur yunan alimin adı ilə təsvir edirik, amma bu teorem Pifaqordan bir neçə əsr əvvəl qədim riyaziyyatçılara məlum idi. Bu teoremin ən məşhur formalarından biri – 3,4 və 5 ($3^2+4^2=5^2$) tərəfləri ilə "misir üçbucağı" – haqqında e.ə. 2000-ci ilə aid olan papirusda deyilir. Elə bu münasibətə babil mixi yazılı lövhəciklərdə də, qədim Çin və qədim hind elmi əsərlərində də rast gəlmək olar (bax "Qədim



Misir", "İkiçayarası", "Qədim Çin" və "Orta əsr Hindistanı" məqalələrinə). Amma müasir riyaziyyatda hesab edilir ki, məhz Pifaqor bu teoremin birinci məntiqəuyğun isbatını vermişdir.

Pifaqor teoreminə tərs olan fikir də doğrudur:

✓ **Əgər üçbucağın tərəfləri $a^2 + b^2 = c^2$ şərtini ödəyirlərsə, onda bu üçbucaq düzbucaqlı üçbucaqdır.**

Həqiqətən, əgər hansısa üçbucaq üçün belə bir bərabərlik təmin edilirsə, onda o, üç tərəfləri ilə a və b katetli düzbucaqlı üçbucağa bərabər olacaq.

Hipotenuzun uzunluğunu bilavasitə tapmağa imkan verən Pifaqor teoreminin sayəsində düz xəttdən müstəviyə, müstəvidən üçölçülü fəzaya və sonra çoxölçülü fəzalara yol açılır. Bununla onun həndəsə və ümumilikdə riyaziyyat üçün müstəsna vacibliyi qeyd edilir.

Birmənalı demək olar ki, Pifaqor teoremində, toxumdakı kimi, bütün Evklid planimetriyası bağlanıb. Dekart koordinatları üçün iki nöqtə $A(x_1;y_1)$ və $B(x_2;y_2)$ arasında düsturu $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ yada salaq. Bir tərəfdən bu AB hipotenuzu ilə və koordinat oxlarına paralel olan katetlərdən (onların uzunluqları $|x_2-x_1|$ və $|y_2-y_1|$ bərabərdir) ibarət olan düzbucaqlı üçbucaq üçün Pifaqor teoremidir. Başqa tərəfdən isə, əgər $(x;y)$ ədədlər cütünü müstəvinin nöqtələri kimi götürsək, onda artıq bu düstur məsafə anlayışıdır. Bu düsturun vasitəsi ilə məsafə ilə bağlı olan bütün anlayışları çıxartmaq olar, məsələn, üçbucaqların bərabərliyi və oxşarlığı. Və ya, məsələn, çevrə aşağıdakı qaydaya tabe olan $(x;y)$ cütlərinin çoxluğu kimi təyin edilir:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=const$$

burada $(x_0;y_0)$ – hansısa verilmiş nöqtədir (çevrənin mərkəzi).

Başqa həndəsi anlayışları da məsafə terminləri vasitəsi ilə təyin etmək olar: xüsusi halda, AB parçası – elə bir C nöqtələrin çoxluğudur ki, $AC+CB=AB$. Daha bir z koordinatını və müvafiq olan $(z_2-z_1)^2$ toplananı məsafə düsturuna əlavə etsək, artıq biz üçölçülü fəzada olacağıq. Belə qayda ilə həndəsi quruluş hər hansı ölçüdə, hətta sonsuz ölçüdə olan fəzaya daxil olur.

Pifaqor teoremi müstəvidə və fəzada çoxlu sayda ümumi metrik münasibətlərin əsasında dayanır. Mühüm dərəcədə hətta triqonometriya da ona əsaslanır: çünki əsas triqonometrik eyniliklərdən biri $cos^2\alpha + sin^2\alpha = 1$– başqa formada yazılmış Pifaqor teoremidir.

ÜÇBUCAQ BƏRABƏRSİZLİYİ. KLASSİK EKSTREMAL MƏSƏLƏLƏR

Üçbucağın həndəsəsində ən böyük və ən kiçik qiymətlər ilə bağlı bir neçə çox gözəl məsələ var. Onlar haqqında danışmasaq, üçbucaq haqqında hekayəmiz tam olmayacaq. Belə məsələlərin həlli zamanı birinci plana üçbucağın elementləri arasında bərabərsizliklərlə ifadə olunan yanaşmalar çıxır.

Üçbucaq bərabərsizliyi. Bu bərabərsizliyə görə, üçbucağın hər tərəfi başqa iki tərəfin cəmindən kiçikdir. Müasir həndəsə dərsliklərinin tərtib edilməsi zamanı, bu qayda artıq aksiom kimi götürülür, baxmayaraq ki Evklidin "Başlanğıc"ında bu teoremdir. Aksiom kimi o həm də məsafənin əsas xüsusiyyətləri kimi də götürülür: iki nöqtə arasında məsafə onlardan üçüncü nöqtəyə kimi məsafələrin cəmindən çox deyil.

Üçbucaq bərabərsizliyindən elə nəticəyə gəlmək olar ki, parça iki nöqtəni birləşdirən ən qısa xətdir. Üçbucağın həndəsəsində iki ekstremal məsələni həll edəndə məhz bu xüsusiyyətdən istifadə edirlər.

Fanyano məsələsi. Verilmiş üçbucağın daxilinə minimal perimetr ilə üçbucaq çəkmək lazımdır. Bu məsələ Fanyano məsələsi adlandırılır. Onun adı 1755-ci ildə bu məsələnin analitik həllini çap etmiş italyan riyaziyyatçı ilə bağlıdır. Axtarılan üçbucaq həmişə ortoüçbucağı olacaq (şəkil 24).

Bu nəticəni fizika qanunlarının köməyi ilə aydınlaşdırmaq olar. Xatırlamaq lazımdır ki, üçbucağın hündürlükləri ortoüçbucağın tənbölənləridir. Başqa sözlər ilə desək, ortoüçbucağın hər hansı iki tərəfi onların ümumi təpəsindən keçən əsas üçbucağın tərəfi ilə bərabər bucaqlar əmələ gətirirlər.

ÜÇBUCAQDA METRİK MÜNASİBƏTLƏR

ABC üçbucağında tərəfləri a,b və c; bucaqları – A,B və C; A təpəsindən keçirilmiş hündürlüyü – h_a; medianası – m_a; tənböləni – l_a; daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiuslarını müvafiq olaraq r və R; yarımperimetri – p; sahəni isə – S hərfləri işarələndirək.

ABC düzbucaqlı üçbucaq (C düz bucaq ilə) üçün belə münasibətlər doğrudur:

$c^2 = a^2 + b^2$ (Pifaqor teoremi),

$a = c\sin A = c\cos B$,

$a = b\,tg\,A = b\,ctg\,B$,

$r = (a+b-c)/2$.

İxtiyari üçbucaq üçün belə münasibətlər doğrudur:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ (kosinuslar teoremi)

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ("gücləndirilmiş" sinuslar teoremi)

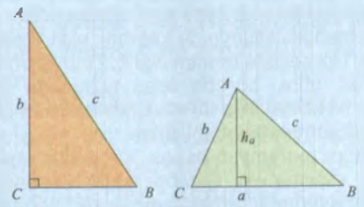
$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R} =$$

$$= 2R^2\sin A\sin B\sin C = \frac{1}{2}rp.$$

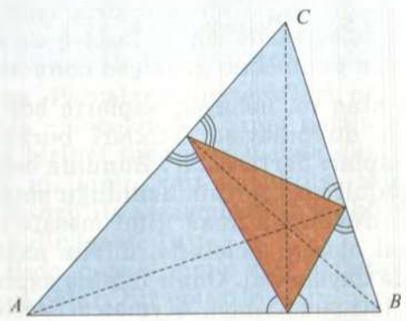
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (Heron düsturu)

$m_a^2 = (2b^2 + 2c^2 - a^2)/4$,

$l_a = \frac{2bc\cdot\cos A/2}{b+c}$



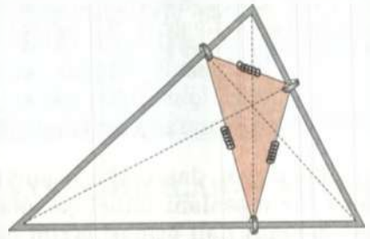
Ona görə ortoüçbucağın tərəfi boyunca buraxılmış işiq şüası (ya da bilyard şarı), "düşmə bucağı qayıtma bucağına bərabərdir" qanununa əsaslanaraq "böyük" üçbucağın tərəflərindən əks etdirərək, perimetr üzrə fasiləsiz ortoüçbucağına dəyəcək, yəni ortoüçbucağın perimetri belə bir şüanın traektoriyasıdır, işıq isə məlum olduğuna görə ən qısa yolu seçir.



Şəkil 24.

Fanyano məsələsinin daha bir "mexaniki" interpretasiyası var. Tutaq ki, üçbucaq məftildəndir, həmçinin onun hər tərəfinə balaca bir üzlük geyindirilib. Üzlüyün içindən yayçıqlar ilə dartılmış sap keçirilib (şəkil 25). Əgər sistemdə müqavimət yoxdursa, maksimal dərəcədə sıxılanda o hansı bir vəziyyəti tuta bilər? Təbii ki, o, uzunluğu az olan vəziyyəti tutacaq. Son mövqedə hər üzlüyə təsir edən qüvvələrin cəminin sıfıra bərabər olduğunu nəzərə alaraq, bizə artıq sapın parçalarının üçbucağın müvafiq tərəfləri ilə bərabər bucaqlar yaratdığını hesablamaq çətin olmayacaq və buradan belə nəticəyə gələ bilərik ki, sap ortoüçbucağını təşkil edir.

Əlbəttə ki, belə ardıcıl fikirlər həndəsi isbat kimi işlənə bilməz, amma məsələnin həlli zamanı bizə kömək edə bilər.



Şəkil 25.

Ferma-Toriçelli nöqtəsi. Üçbucaqdakı bu nöqtə keçmişin üç məşhur aliminin adı ilə bağlıdır. İlk dəfə bu nöqtənin adını fransız riyaziyyatçısı Pyer Ferma çəkdi. O ABC üçbucağında elə bir F nöqtəsi haqqında məsələni həll edirdi ki, bu məsələnin şərtinə görə təpələrə qədər məsafələrin cəmi $FA+FB+FC$ ən minimal qiymətə malik olmalıdır.

İsveçrəli geometr Yakob Şteyner elə bu problemi bir az ümumi şəkildə gözdən keçirirdi: o üç məntəqəni birləşdirən ən qısa yolu tapmaq istəyirdi. Məlum oldu ki, belə bir şəbəkə fərqi olmadan bir nöqtədə kəsişən üç düz yoldan ibarət olmalıdır, həmçinin bu yollardan biri bir nöqtəyə sıxıla bilər (Fermanın məsələsindəki kimi). Belə bir ifadə artıq ixtiyari sayda məntəqə üçün sırf

PİFAQOR TEOREMİNİN DÖRD İSBATI

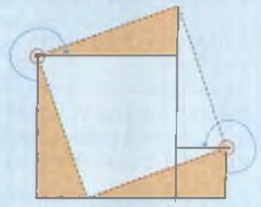
Pifaqorun zamanından, onun teoreminin yüzlərlə isbatı peyda oldu, onların sayı elə çox idi ki, bu teorem artıq Ginnesin rekordlar kitabına yazılıb. Amma prinsipial olaraq fərqli ideyalar bu isbatlarda az istifadə edilir.

Evklidin "Başlanğıc"ında bu teoremin aşağıdakı ifadəsi verilib: hipotenuzda qurulmuş kvadratın sahəsi, katetlərdə qurulmuş kvadratların sahələri cəminə bərabərdir. Kifayət qədər çətin olan isbatın mənası ondadır ki, daha böyük kvadrat daha balaca olan kvadratlar ilə müadil olan iki hissənin cəmi kimi təqdim edilib. Amma birinci kvadratı iki hissəyə də kəsmək olar. Belə isbatlardan biri 1-ci şəkildə təqdim edilib. Onu "şarnir" isbat adlandırırlar, çünki burada əsas üçbucağa bərabər olan təkcə iki hissə yerlərini dəyişdirir və onlar qalan fiqura elə bir şarnirlər ilə bağlıdırlar.

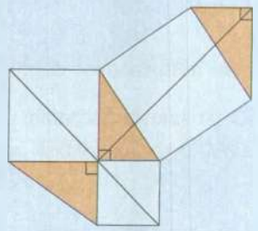
Pifaqor teoreminin başqa, təmiz həndəsi birbaşa isbatı – kəsilmə yox, bərabər fiqurlar ilə bərabər fiqura qədər kvadratın tamamlanmasıdır. Leonardo da Vinçi tərəfindən verilmiş bu isbatı 2-ci şəkil təsvir edir (cizgiyə əsaslanaq onu bərpa etməyə çalışın).

Pifaqor teoreminin başqa isbat qrupunda sahəni hesablamaq üçün düstur istifadə edilir, yəni onlarda həndəsə cəbr ilə uyğunlaşır. Belə isbatlardan biri XII əsrin hind riyaziyyatçısı Bxaskaranın elmi əsərində verilib. O onunla məşhurdur ki, cizgi altında bütün mətn təkcə "Bax!" sözündən ibarətdir. Tarixçilər elə hesab edirlər ki, Bxaskara hipotenuzda qurulmuş kvadratın sahəsini c^2 dörd üçbucağın $4(ab/2)$ və tərəfi katetlərin fərqinə bərabər olan kvadratın $(a-b)^2$ sahələrinin cəmi şəklində göstərmişdir , yəni ki

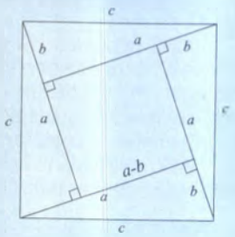
$$c^2 = 4\frac{ab}{2} + (a-b)^2$$



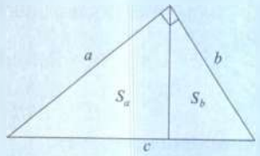
Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.



Şəkil 4.

Sadələşdirmədən sonra bu bərabərlik bizə tanış olan $a^2 + b^2 = c^2$ düsturuna çevrilir.

Bir sıra isbatda üçbucaqların oxşarlığından istifadə edilir. Aşağıda belə isbatlardan ən səciyyəvisi göstərilib. Hipotenuza çəkilmiş hündürlük S sahəli düzbucaqlı üçbucağı iki S_a və S_b (şəkil 4) sahəsi ilə əsas üçbucağa oxşar üçbucağa bölür. Həmçinin onun tərəfləri üçüçbucağın hipotenuzudur. Üçbucaqların sahələri nisbəti bu tərəflərin kvadratları nisbətindədir:

$$S_a : S_b : S = a^2 : b^2 : c^2.$$

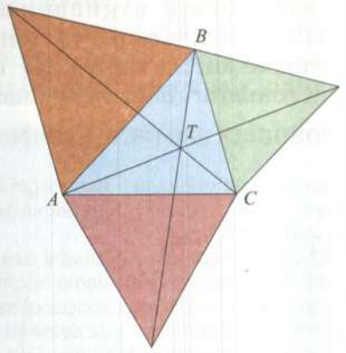
Amma $S_a + S_b = S$. Beləliklə, $a^2 + b^2 = c^2$.

praktiki əhəmiyyət daşımağa başlayır. Məsələn, belə bir məsələni kabel şəbəkələrinin çəkilməsi zamanı həll etmək lazım olur.

Birləşdirilən məntəqələrin verilmiş yerləşməsi üçün ən qısa şəbəkələrin qurulmasına aid bir neçə alqoritm hazırlanıb. Amma bu məsələnin xoşagəlməz bir xüsusiyyəti var: məntəqələrin sayı artdıqca, kompyuter tərəfindən onun həlli zamanı icra edilən əməliyyatların sayı sürətlə – (məntəqələrin sayından asılı üstlü funksiyalar kimi) artmağa başlayır. Nəticədə hətta ən güclü kompyuterlərdə məqbul müddətə yalnız iyirmi-otuz məntəqə üçün məsələni həll etmək olur. Olan alqoritmləri yaxşılaşdırmaq məqsədi ilə riyaziyyatçılar bu gün də ən qısa şəbəkələrin quruluşunu araşdırmağa davam edirlər.

Fermanın klassik məsələsinin həlli üçün fiziki modeli belə qurmaq olar: hansısa lövhədə üçbucaq çəkək, hər təpəsinə mıx vuraq, hər mıxın üstündən uclarında eyni yük ilə sap ataq və, nəhayət, sapların boş qalan uclarını düyünləyək. Yükləri buraxanda, onlar sapları dartacaqlar. Bununla belə sapların şaquli hissələrinin uzunluğu maksimal olacaq, düyündən mıxa kimi məsafə isə ən minimal olacaq. Beləliklə, düyün axtarılan nöqtədə dayanacaq. Onun üstünə saplar boyunca istiqamətlənən, qiymətcə bərabər və bir-birini tarazlaşdıran üç qüvvə təsir edəcəyinə görə saplar arasında bucaqlar bərabər olmalıdırlar. Beləliklə, üçbucağın tərəfləri F nöqtəsindən (120°) bərabər bucaqlar ilə görsənəcəklər.

Üçbucağın bu şərtləri ödəyən nöqtəsini civəli barometrin ixtiraçısı kimi məşhur olan italyan riyaziyyatçısı Evanjelista Torriçeli qurub. Belə bir nöqtə təkcə 120°-dən çox olmayan bucaqlar olan üçbucaqlarda mövcud ola bilər və Ferma nöqtəsi ilə üst-üstə düşür. Amma Ferma məsələsinin üçbucağın bucaqlarından biri 120°-dən böyük olduqda da həlli var. Bu halda F nöqtəsi iti bucağın təpəsi ilə üst-üstə düşür.



Şəkil 26.

Toriçelli nöqtəsini belə almaq olar: üçbucaqdan xaricdə onun tərəflərinin üstündə düzgün üşbucaqlar çəkək (şəkil 26) və əsas üçbucağın hər təpəsini əks tərəfdə qurulmuş düzgün üçbucağın təpəsi ilə birləşdirək. Alınan parçalar bərabərdir, bir-biri ilə bərabər bucaqlar yaradırlar (60°) və T nöqtəsində – Toriçelli nöqtəsində – kəsişirlər.

ÇOXBUCAQLILAR

Əgər ardıcıllıq ilə müstəvidə bir neçə parça elə çəksək ki, hər sonra gələn əvvəlkinin sonunda başlasın, onda sınıq xətt əmələ gələcək. Parçalar onun tərəfləri, onların ucları isə – təpələridir. Sınıq xəttin axırıncı təpəsi birinci təpə ilə üst-üstə düşərsə, deyirlər ki, sınıq xətt qapalıdır, əgər sınıq xətt öz-özü ilə kəsişmirsə, onda bu sadə sınıq xətdir (şəkil 1*a*).

Sadə qapalı sınıq xətt müstəvini iki hissəyə bölür. Bir oblastın ixtiyari nöqtəsindən bu oblastın istənilən nöqtəsinə bu oblastı tərk etmədən keçmək olar, başqa oblastın hər hansı nöqtəsinə yol isə sınıq xətti kəsəcək. Belə bir aydın fikiri isbat etmək çox çətin işdir. Bu təkcə 1882-ci ildə fransız riyaziyyatçısı Kamil Jordan tərəfindən edilmişdi (ümumi hal üçün).

Sadə qapalı sınıq xətt ilə verilən oblastlardan biri həmişə sonludur, başqası isə sonsuzdur. Birincisini – sınıq xəttin daxili, ikincisini isə – xarici oblastı adlandırırlar.

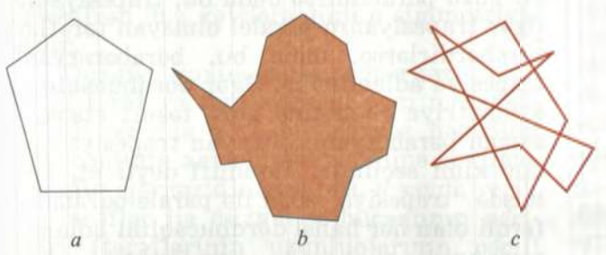
Daxili oblastı ilə sadə qapalı sınıq xətti çoxbucaqlı adlandırırlar (şəkil 1*b*). Çox vaxt elə bu sözlə qapalı sınıq xəttin özünü (şək. 1*c*), bəzən isə ixtiyari oblastın bir neçə hissədən ibarət olan sərhədini də (şək. 1*ç*) göstərirlər.

Çoxbucaqlını məhdudlaşdıran sınıq xəttin həlqələrini onun tərəfləri, təpələri birləşdirən başqa parçaları isə onun diaqonalları adlandırırlar. Aydındır ki, çoxbucaqlının tərəflərinin sayı onun bucaqlarının sayına bərabərdir. Və ona görə n sayda tərəfləri olan çoxbucaqlı n-bucaqlı adlandırılır. Çoxbucaqlının təpəsindəki bucağın, yəni bu təpədən çıxan tərəflər arasında bucağın qiyməti fiqurun "daxilində" hesablanır (şək. 2). Beləliklə, şüalar arasında bucaqdan fərqli olaraq (onun qiymətləri 0°-dən 180°-yə qədər olur), çoxbucaqlının bucağı 0°-dən 360°-yə qədər dəyişə bilər (radian ölçüdə götürsək, 0-dan 2π qədər). Bucaqları açıq bucaqdan çox olmayan çoxbucaqlıların vacib bir sinfi var. Bu, qabarıq çoxbucaqlılardır.

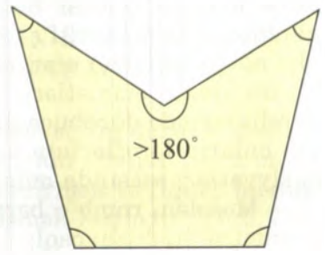
ÇOXBUCAQLILARIN NÖVLƏRİ

Əgər çoxbucaqlı onun hər hansı bir tərəfini saxlayan düz xətdən bir tərəfdə yerləşirsə, o zaman bu çoxbucaqlı qabarıq adlanır. Üçbucaqlar hamısı qabarıqdırlar, amma böyük sayda tərəflər olan çoxbucaqlılar həm qabarıq (şəkil 1*a*), həm də qabarıq olmaya bilərlər (şəkil 1*b*,2).

Çoxbucaqlıların təsnif edilən başqa bir əlaməti – müxtəlif simmetriyaların möv-

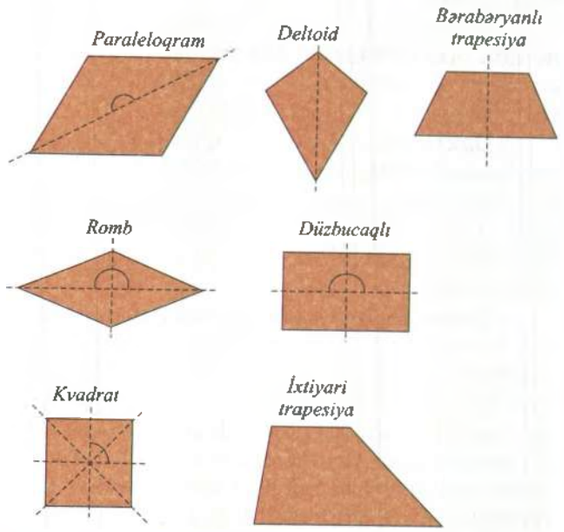


Şəkil 1.



Şəkil 2.

cudluğudur. Bu nəzər-nöqtədən dördbucaqlılara baxaq (şəkil 3).



Şəkil 3.

Dördbucaqlıların üç növü təkcə bir simmetriyaya malikdirlər: paraleloqram – mərkəzi simmetrik fiqurdur; deltoid – bir diaqonala nəzərən simmetrikdir; bərabəryanlı trapesiya – oturacaqların ortalarını birləşdirən xəttə nisbətən simmetrikdir.

İki simmetriya oxu olan çoxbucaqlılar da var. Bu oxlar hökmən perpendikulyardırlar, onların kəsişmə nöqtəsi isə dördbucaqlının simmetriya mərkəzidir. Bu romb və düzbucaqlıdır. Birincisində simmetriya oxları – diaqonallardır, ikincisində isə orta xətlərdir.

Nəhayət, "ən simmetrik" dördbucaqlıya – kvadrata – bütün sayılmış simmetriya növləri məxsusdur, bundan başqa onun dörd simmetriyasının ümumi nöqtəsinin ətrafında 90°-yə bölünən bucaq qədər dönən zaman özü özü ilə uyğunlaşır (özü-özünə keçir).

Ümumiyyətlə, dördbucaqlının verilmiş növə məxsus olması üçün bir neçə eynigüclü, amma müxtəlif şərtlər var. Onlardan biri növün anlayışı kimi götürülür, başqaları isə onun əlamətlərinə dönür. Məktəb dərsliklərində dördbucaqlıların növləri adətən onların tərəflərinin və bucaqlarının xüsusiyyətləri əsasında müəyyən edilir.

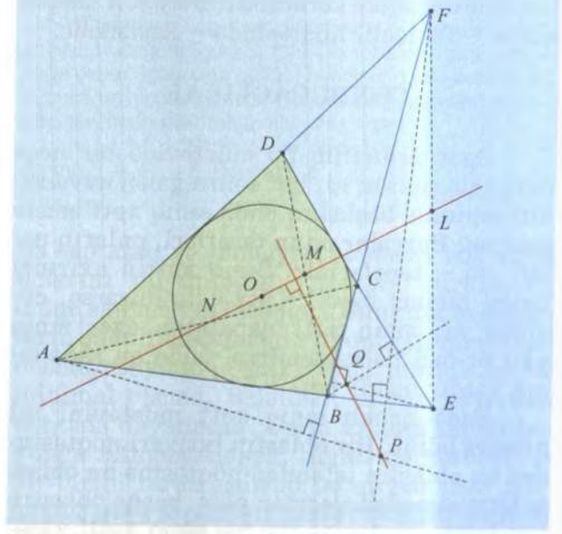
Məsələn, romb – bərabər tərəfləri olan dördbucaqlı, düzbucaqlı – bərabər (düz) bucaqları olan dördbucaqlı, paraleloqram – paralel tərəfləri olan dördbucaqlıdır. Paraleloqramı təyin etmənin belə üsulu ilə mərkəzi simmetriyadan başqa uyğunlaşmalara da "icazə verilir", düzbucaqlı və romb onun xüsusi formalarıdır, kvadrat isə eyni zamanda həm rombdur, həm də düzbucaqlıdır.

DÖRDBUCAQLININ HƏNDƏSƏSİNDƏN

Dördbucaqlının həndəsəsi üçbucağın həndəsəsi kimi zəngindir. İndi isə biz iki böyük alimin adı ilə bağlı olan faktlardan danışacağıq.

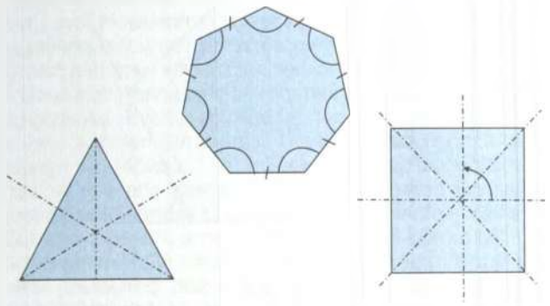
ABCD dördbucaqlısının tərəflərini uzadaq. Onda qarşı tərəflərin uzantılarının kəsişmə nöqtələrini birləşdirən *L* parçasının ortası və dördbucaqlının *M* və *N* diaqonallarının orta nöqtələri bir düz xətdə yerləşəcəklər. Bu düz xətt Qauss xətti adlandırılır. Əgər dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkilibsə, onda bu düz xəttin üstündə çevrənin mərkəzi də yerləşir (Nyuton teoremi).

İndi isə ardıcıl olaraq biz dörd düz xətdən hər hansı üçünü seçərək, onlar ilə yaradılmış üçbucaqların hündürlüklərinin kəsişmə nöqtələrini quracağıq. Alınan dörd nöqtə (şəkildə təkcə ikisi göstərilib – ΔABF üçün *P* və ΔABF üçün *Q*) Qauss xəttinə perpendikulyar olan xətt üzərində yerləşir.



Əgər dördbucaqlının tərəflərinin təkcə bir cütü paraleldirsə onda bu, trapesiyadır. Əgər trapesiyanın paralel olmayan tərəfləri bərabərdirlərsə, onda bu, bərabərəryanlı trapesiya adlandırılır. Əgər dördbücaqlıları simmetriya əlamətinə görə təsnif etsək, o zaman bərabəryanlı olmayan trapesiya ayrı növ kimi seçilmir. Təsadüfi deyil ki, keçmişdə "trapesiya" sözü ilə paraleloqramdan fərqli olan hər hansı dördbucaqlını adlandırırdılar.

Elementar həndəsədə düzgün çoxbucaqlıları xüsusi ayırırlar. Onların bütün tərəfləri və bucaqları bərabərdirlər (şəkil 4). Düzgün çoxbucaqlılar həmişə qabarıqdırlar, amma bərabər həlqələrə və bucaqlara malik olan özünükəsişdirən qapalı sınıq xətlər də



Şəkil 4.

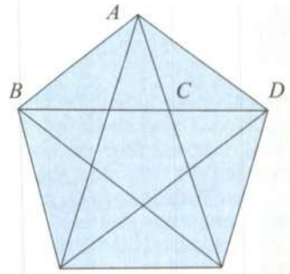
mövcuddur. Bu növdə fiqurları düzgün ulduza bənzər çoxbucaqlılar ya da pentqramlar – düzgün beşguşəli ulduz (şəkil 5-də düzgün beşbucaqlının daxilində təsvir olunub) ilə oxşarlığına görə poliqramlar adlandırırlar.

İxtiyari düzgün çoxbucaqlını (qabarıq və ya ulduza bənzər) özü üzərinə elə yerləşdirmək olar ki, istənilən seçilmiş iki tərəfindən biri digərinin üstünə düşsün; bu fikir onun istənilən iki təpə nöqtəsi üçün də doğrudur. Və tərsinə: belə xassəyə malik olan çoxbucaqlı düzgün çoxbucaqlıdır.

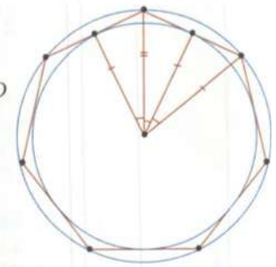
Amma elə düzgün olmayan çoxbucaqlılar da var ki, onların yalnız tərəfləri (rombda olduğu kimi) və ya yalnız bucaqları (düzbucaqlıda olduğu kimi) üçün bu xassə doğru olur.

Düzgün çoxbucaqlının özünün özü ilə uyğunlaşması üçün $2n$ sayda üsul var: onların birinci yarısı – mərkəz adlanan nöqtənin ətrafında dərəcə ölçüsü $360°/n$-ə bölünən bucaq qədər dönmələr, başqa yarısı isə – mərkəzi təpələr və tərəflərin ortaları ilə birləşdirən düz xəttlərə görə n simmetriyalardır.

Düzgün çoxbucaqlının mərkəzi onun bütün tərəf və təpələrindən eyni məsafədə yerləşir və ona görə bu mərkəz həmçinin çoxbucaqlının xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir (şəkil 6). *n* sayda verilmiş tərəflər ilə düzgün *n*-bucaqlının perimetri (tərəflərinin uzunluqlarının cəmi) onun daxilinə çəkilmiş *n*-bucaqlıların arasında onun xaricinə çəkilmiş çevrənin uzunluğuna daha çox yaxındır; xaricinə çəkilmiş çevrəyə yanaşmada da elə bu xüsusiyyət var. Çevrənin uzunluğunun hesablanması qədim vaxtlarda çox vacib olduğuna görə, onun daxilinə çəkilmiş kifayət qədər böyük *n* üçün düzgün çoxbucaqlının perimetrinin hesablanmasına çox diqqət yetirilmişdir. Bu sahədə xüsusilə Arximedi qeyd etmək olar (bax "Dairə və çevrə" məqaləsinə).



Şəkil 5.



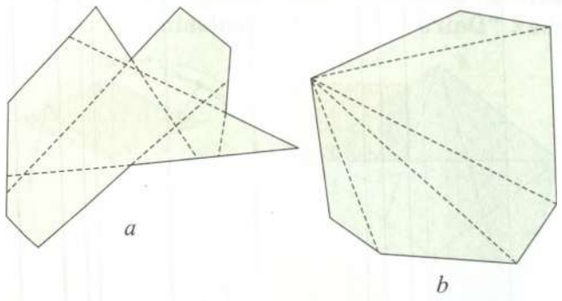
Şəkil 6.

Bununla belə, Arximeddən xeyli əvvəl zamanlarda artıq düzgün çoxbucaqlılar qədim yunan alimlərinin diqqətini cəlb edirdi. Rəqəmlərin əsas rol oynadığı fəlsəfənin nümayəndələri, Pifaqorun şagirdləri çevrənin bərabər hissələrə bölünməsinə, yəni daxilinə çəkilmiş düzgün çoxbucaqlının qurulmasına çox böyük əhəmiyyət verirdilər. Evklidin "Başlanğıc"ında pərgar və xətkeş ilə qurulmuş üçdən altıya kimi tərəflər ilə çoxbucaqlıların, həm də on beşbucaqlının da nümunələri gətirilir. Bu, axırıncı nümunə ilə qədim astronomların hesablamaları əsasında çox maraqlanırdılar, çünki onlara görə ekliptika müstəvisinin ekvatora meyl bucağı tam bucağın 1/15-nə, yəni ki 24°-yə (əsl qiyməti bundan bir az azdır – 23°27′) bərabərdir. Düzgün çoxbucaqlıların qurulması haqqında məsələ yalnız iki min ildən sonra tam həll edilmişdir (bax "Həndəsi qurmalar" məqaləsinə).

ÇOXBUCAQLININ BUCAQLARININ CƏMİ HAQQINDA TEOREM

Hər hansı çoxbucaqlını qabarıq çoxbucaqlılara bölmək asandır: bunun üçün onun tərəflərini davam etdirmək və fiquru bu düz xəttlər boyunca kəsmək lazımdır (şəkil 7*a*). Həmçinin çoxbucaqlını elə də bölmək olar ki, hissələrinin təpələri onun təpələri ilə

üst-üstə düşsün. Öz növbəsində, istənilən təpədən diaqonallar çəkməklə qabarıq çoxbucaqlını üçbucaqlara bölmək olar (şəkil 7*b*). Beləliklə, hər hansı çoxbucaqlını üçbucaqlara bölmək olur. Bu bizə çoxbucaqlıların xüsusiyyətlərini almaqda faydalı olur. Bu xassələrdən ən önəmlisi – çoxbucaqlının bucaqlarının cəmi haqqında teoremdir.

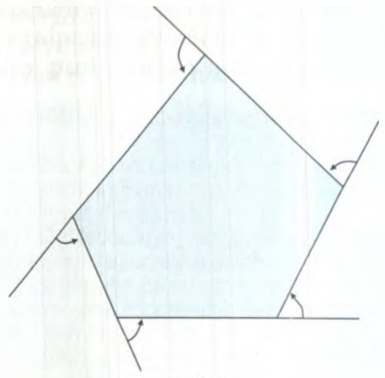


Şəkil 7.

7*b* şəkilində qabarıq n-bucaqlı n-2 sayda üçbucağa bölünüb. Onların bucaqlarının cəmi n-bucaqlının bucaqlarının cəminə bərabərdir. Amma məlum olduğuna görə, hər üçbucağın bucaqlarının cəmi 180°-dir. Beləliklə, hər hansı qabarıq çoxbucaqlının bucaqlarının cəmi $(n-2)180°$-yə bərabərdir, (radian ölçü ilə götürsək, onda $(n-2)\pi$). Diqqətəlayiq odur ki, bucaqların cəmi çoxbucaqlının formasından asılı deyil; təkcə onun tərəflərinin sayı vacibdir. Bunun səbəbi, n-bucaqlının xarici bucaqlarını, yəni daxili bucağa qonşu olan bucaqları gözdən keçirdikdə daha yaxşı aydın olur.

Çoxbucaqlını onun tərəfində hansısa nöqtədən başlayaraq elə o nöqtədə bitirərək sərhəd boyunca keçək. Tərəf ilə gedən zaman, bizim istiqamətimiz dəyişmir və hər təpədə bir xarici bucağa bərabər olan bucaq qədər dönürük (şəkil 8). Yolun axırında biz başladığımız istiqamətdə hərəkət edirik. Beləliklə, keçmə zamanı bizim hərəkətimizin istiqaməti bir tam dövr bitirir və bu o deməkdir ki, təpələrdəki ayrı-ayrı dönmə bucaqlarının cəmi, yəni bütün xarici bucaqların cəmi, təkcə çoxbucaqlının formasından yox, həm də onun tərəflərinin sayından da asılı deyil və 2π-yə bərabərdir!

Əlbəttə ki, biz bu nəticəyə bucaqların cəmi haqqında teoremdən da gələ bilərik. Həqiqətən, hər təpədə daxili və xarici bucaqların cəmi π-yə bərabərdir. Deməli, n-bucaqlıda bütün belə cəmləri toplasaq, biz $n\pi$ alacağıq, o zaman xarici bucaqlar isə $n\pi - (n-2)\pi = 2\pi$-yə bərabər olacaq.



Şəkil 8.

Bucaqların cəmi üçün elə bu düstur həmçinin qabarıq olmayan çoxbucaqlılar üçün də düzdür (özünükəsişdirmələrsiz). Bunu isbat etmək üçün, ixtiyari seçilmiş n-bucaqlını diaqonallar ilə qabarıq çoxbucaqlıya bölmək lazımdır.

ÇOXBUCAQLININ SAHƏSİNİ NECƏ TAPMAQ OLAR?

Paraleloqramın sahəsi bu düsturlar ilə hesablanır:

$$S = ab\sin\alpha = ah$$

Burada a – onun oturacağıdır; b – yan tərəfi, α – bu tərəflər arasında bucaq, h – hündürlükdür (şəkil 9*a*).

Trapesiyanın sahəsi:

$$S = \frac{a+b}{2}h$$

Burada a və b – onun oturacaqlarıdır, h – hündürlükdür (şəkil 9*b*).

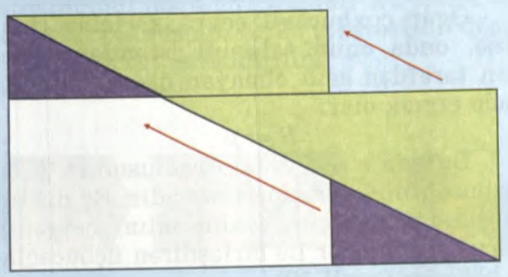
Əgər bizə e və f diaqonalları və onlar arasında α bucağı məlumdursa, onda istənilən dördbucaqlının sahəsi aşağıdakı düstur ilə tapılır:



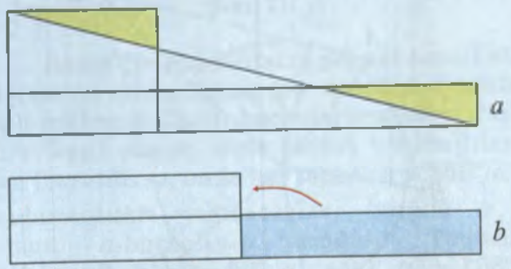
Şəkil 9.

ÇOXBUCAQLILARIN EYNİTƏRKİBLİLİYİ. BOLYAY-QERVİN TEOREMİ.

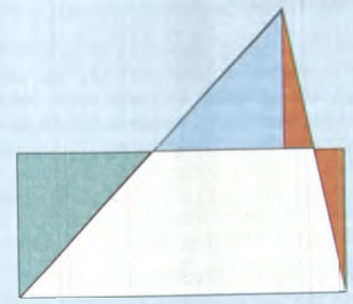
Həndəsədə teorem və düsturların çoxusu fiqurların kəsilməsi və sonra isə hissələrin yerlərini dəyişdirmə ilə isbat olunur – məsələn, Pifaqor teoremi (bax "Sadə və tükənməz üçbucaq" mövzusuna). Əgər iki fiquru eyni hissələrin yığımına kəsmək olarsa (yəni bu yığımların hissələrin arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq müəyyən etmək olar, yəni müvafiq olan hissələri bərabərdir), onda belə tipli fiqurları eynitərkibli fiqurlar adlandırırlar. Eynitərkibli fiqurlar, təbii ki, müadildirlər – onların sahələri bərabərdir. Çoxbucaqlılar üçün tərs teorem də düzdür: iki müadil fiqur eynitərkiblidir. 1832-ci ildə onu macar riyaziyyatçısı Farkaş Bolyay (qeyri-Evklid həndəsəsinin banilərindən birinin – Yanış Bolyayın atasıdır), amma ondan müstəqil olaraq bir il sonra alman P. Qervin isbat edib. Sübutun açarı 1-ci şəkildə göstərilmiş düzbucaqlının yenidən biçilməsidir: "alçaq" üçbucağı iki üçbucaq və bir beşbucağa kəsərək, kəsilmə xətti boyunca üçbucaqları çəkib, biz başqa, "hündür" düzbucaqlı alırıq. Bu üsul ilə verilmiş düzbucaqlını ona müadil olan hər hansı düzbucaqlıya çevirə bilərik – bizə təkcə yeni düzbucaqlının əvvəlkidən iki dəfədən çox olmayaraq "hündür" olması lazımdır. Əgər iki düzbucaqlının hündürlükləri nisbəti iki dəfədən çoxdursa (şəkil 2*a*), onda bir neçə dəfə istifadə edilən adi dəyişilmə (şəkil 2*b*) sayəsində "alçağı" bir az "yüksəldəcəyik". İndi artıq hər hansı çoxbucaqlını biz müəyyən olunmuş h hündürlüyü ilə düzbucaqlıya çevirə bilərik: onu üçbucaqlara kəsərik, hər üçbucağı düzbucaqlıya döndərərik (şək. 3), alınmış düzbucaqlını hansısa h hündürlüyünə gətirərik və şaquli tərəflər ilə qovuşdurarıq.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

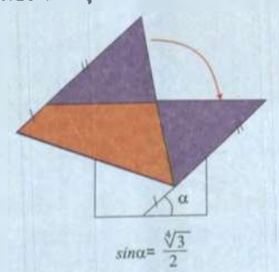


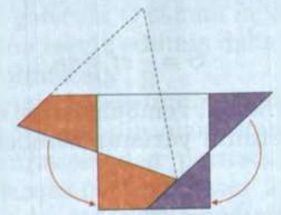
Şəkil 3.

Əgər iki çoxbucaqlı müadildirsə, onda onlara h hündürlüyü ilə müvafiq olan düzbucaqlılar bərabərdilər. Beləliklə bu çoxbucaqlılar eyni fiqur ilə eynitərkibli dirlər, buradan biz artıq elə nəticəyə gələ bilərik ki, özləri arasında da eynitərkibli dirlər.

Burada nişanlanmış isbat konstruktivdir: onun tərkibində bir çoxbucaqlının başqa çoxbucaqlıya biçilməsinin alqoritmi var. Amma ən az sayda hissələrdən istifadə edərək bunu necə etmək sualı, hər müəyyən halda ayrı-ayrı həll edilir. Belə tipli məsələlər adətən kifayət qədər çətin olurlar, amma əyləncəli riyaziyyatda çox məşhurdurlar. Belə məsələlərin klassik nümunəsi – düzgün üçbucağın eyni sahəli kvadrata çevrilməsidir. Onun bu janrın məşhur ustası ingilis Qenri Dyudeniya məxsus olan həlli 4-cü şəkildə göstərilib. Gördüyünüz kimi, Dyudeni fiquru təkcə dörd hissəyə bölməyə nail oldu.

Həmçinin maraqlısı odur ki, Bolyay-Qervin teoreminə oxşar fikir çoxüzlülər üçün doğru deyil: məsələn, eyni həcmli kub və düzgün tetraedr eynitərkibli deyillər. Bu hal haqqında daha ətraflı "Müadil və eynitərkibli fiqurlar" məqaləsində danışılıb.





Şəkil 4.

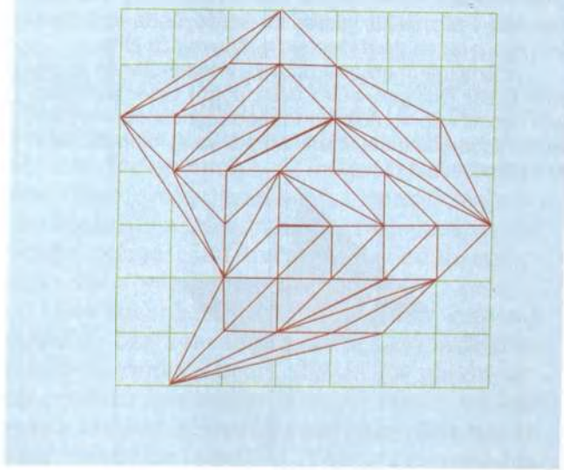
PİK DÜSTURU

Təpələri tam rəqəmli şəbəkənin düyünlərində yerləşmiş, yəni təpələrinin koordinatları tam ədədlər olan, çoxbucaqlıya baxaq. Onun sahəsini onun tərkibində düyünlərin hesablanması vasitəsilə tapılması üçün düstur mövcuddur. Belə tipli çoxbucaqlıları şəbəkənin düyünlərində yerləşən təpələr ilə nə daxilində, nə də tərəflərində düyün olmayan üçbucaqlara bölmək olar. Göstərmək olar ki, bütün üçbucaqların sahəsi eynidir və $\frac{1}{2}$-ə bərabərdir. Onda çoxbucaqlının sahəsi qiymətcə onların T sayının yarısına bərabərdir.

Bu ədədi tapmaq üçün: çoxbucaqlının tərəflərinin sayını n ilə göstərək, onun daxilindəki düyünlərin sayını i-ilə, b hərfi vasitəsilə isə təpələri daxil edən tərəflərində düyünlərin sayını işarələndirək. Bütün üçbucaqların bucaqlarının cəmi πT-yə bərabərdir. İndi isə bu cəmi başqa üsul ilə tapaq. Hər hansı daxili düyündə təpə ilə bucaqların cəmi 2π-yə bərabərdir, elə çıxır ki, ümumi cəmi isə $2i\pi$-yə bərabərdir; təpələrdə yox, tərəflərdəki düyünlərdə bucaqların ümumi cəmi $(b-n)\pi$-yə bərabərdir, çoxbucaqlının təpələrində bucaqların cəmi isə $(n-2)\pi$-yə bərabərdir. Beləliklə, $\pi T = 2i\pi + (b-n)\pi + (n-2)\pi$, buradan çoxbucaqlının sahəsi üçün:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

Pik düsturu kimi tanınan ifadəni alırıq. Məsələn, şəkildə $b=9$, $i=24$, deməli çoxbucaqlının sahəsi 27,5-ə bərabərdir.



$$S = \frac{1}{2} ef \sin\alpha$$

Xüsusi halda, rombun sahəsi onun diaqonalları hasilinin yarısına bərabərdir:

$$S = \frac{1}{2} ef$$

İstənilən dördbucaqlının sahəsini onun tərəfləri a,b,c və d və bir cüt qarşı bucaqların cəmi φ vasitəsilə ifadə etmək olar:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

Burada p – dördbucaqlının yarımperimetridir.

Çevrənin daxilinə çəkilmiş dörbucaqlının sahəsi Braxmaquptanın düsturu ilə:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

Xaricinə çəkilmişin sahəsi isə

$$(a+c=b+d)$$

$S = \sqrt{abcd} \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$ düsturu ilə hesablanır.

Əgər dördbucaqlı eyni zamanda həm çevrənin xaricinə, həm də çevrənin daxilinə çəkilibsə, onda onun sahə düsturu daha sadə olur:

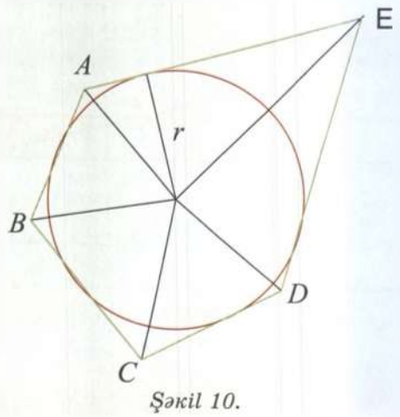
$$S = \sqrt{abcd}$$

İxtiyari çoxbucaqlının sahəsini tapmaq üçün ümumi üsulun mahiyyəti, onu üçbucaqlara bölüb, hərəsinin sahəsini tapıb, onları toplamaqdadır. Bəzən bir çoxbucaqlını üçbucaqların cəmi və fərqi kimi göstərirlər. Amma ixtiyari n-bucaqlının sahəsini tapmaq üçün adi və yığcam bir düstur yoxdur. Və bu fakt təəcüblü deyil, çünki onun daxilində istər-istəməz dəyişənlərin sayı çox olacaq. n-bucaqlını (onun forma və ölçülərini) vermək üçün, biz onun $2n-3$ elementlərini: məsələn, bir tərəfdən başqa bütün tərəflərin uzunluqlarının və onlar ilə əmələ gəlmiş bucaqların $n-2$ qiymətlərini göstərməliyik.

Əgər çoxbucaqlı çevrə xaricinə çəkilibsə, onda onun sahəsini istənilən sayda olan tərəfdən asılı olmayan qısa düstur ilə ifadə etmək olar:

$$S = r\,p$$

Burada r – çevrənin radiusudur, p isə çoxbucaqlının yarımperimetridir. Bu düsturu çıxartmaq üçün çoxbucaqlını çevrənin mərkəzini təpələr ilə birləşdirən üçbucaqlara bölürlər (şəkil 10).



Şəkil 10.

Ümumi halda isə bizə təkcə n-bucaqlının ardıcıl təpələrin $(x_1;y_1)$, $(x_2;y_2)$, ..., $(x_n;y_n)$ koordinatlarının vasitəsilə ifadə olunmuş düstur ilə kifayətlənmək qalır:

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + \right.$$

$$\left. +\ldots+(x_ny_1 - x_1y_n)\right|$$

Bu düsturun fərqləndirici xüsusiyyəti ondadır ki, burada sahə n-bucaqlının öz xüsusiyyətlərinin (tərəflər, bucaqlar) vasitəsilə yox, onun təpələrinin koordinatları ilə ifadə olunub. Axırıncılar isə n-bucaqlının koordinat oxlarına nəzərən yerləşməsindən asılıdır. Və ona görə bu düsturu tam "həndəsi" düstur saymırlar. Amma praktiki məsələlərdə o kifayət qədər rahatdır.

PARKETLƏR – MÜSTƏVİNİN ÇOXBUCAQLILAR İLƏ DÖŞƏNİLMƏSİ

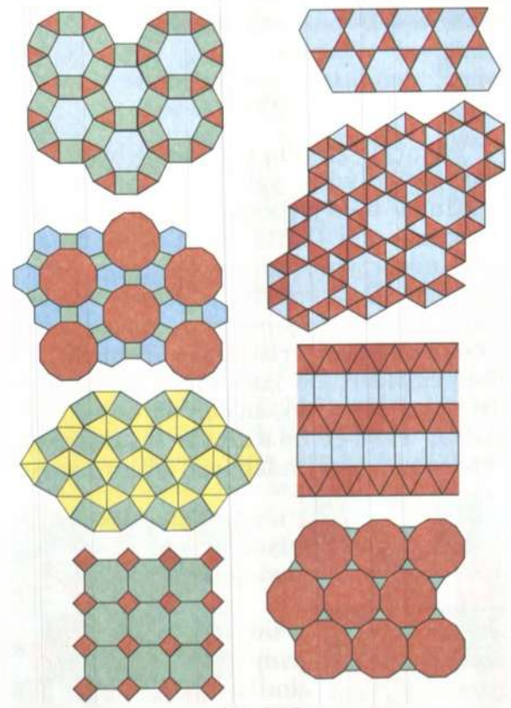
Artıq pifaqor məktəbinin təmsilçilərinə məlum idi ki, müstəvini aralıqlarsız döşəmək üçün düzgün çoxbucaqlıların təkcə üç növü var – üçbucaq, kvadrat və altıbucaqlı (şəkil 11). Bu döşəmələrdən hərəsində, ya iki çoxbucaqlı ümumi tərəfə malikdilər, ya da təkcə ümumi təpəyə, ya da ümumiyyətlə ümumi nöqtələri yoxdur. Bu tələbi təmin edən çoxbucaqlılar ilə müstəvinin döşənilməsi parket adlandırılır.



Şəkil 11.

Başqa çoxbucaqlıların parket təşkil etməməsinə əmin olmaq çox sadədir. Burada bizə çoxbucaqlıların bucaqlarının cəmi düsturu lazım olacaq. Əgər parket n-bucaqlılardan ibarətdirsə, onda hər təpədə $\kappa = 360°/\alpha_n$ çoxbucaqlıları yığışacaqlar, burada α_n – düzgün n-bucaqlının bucağıdır. Tapmaq çətin deyil ki, $\alpha_3 = 60°$, $\alpha_4 = 90°$, $\alpha_5 = 108°$, $\alpha_6 = 120°$ və $120° < \alpha_n < 180°$ olduqda $n \geq 7$. Ona görə $360°$ α_n-ə təkcə $n=3;4;6$ olduqda tam bölünə bilər.

Düzgün çoxbucaqlılardan parketlər o mənada düzgündülər ki, onlar özlərinin bütün təpələrinə və tərkib hissələrinə – çoxbucaqlı-hissəciklərə (bu hissəcikləri ya döşəmənin üzü, ya da plitka adlandırırlar) – nəzərən "eyni cür düzəldiliblər". Başqa sözlə desək, parketin iki hər hansı təpəsi üçün elə bir uyğunlaşma göstərmək olar ki, bu uyğunluqda onun bir təpəsi başqasının üstünə gəlir. Bu, parketin hər hansı iki plitkası üçün də düzdür.

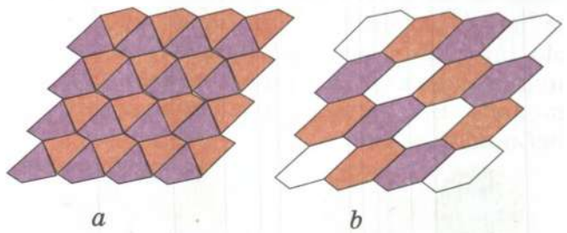


Şəkil 12.

"Təpələrə" görə düz olmağını tələb etmək olar, amma düzgün çoxbucaqlıların müxtəlif növlərinin istifadəsinə icazə vermək lazım gələcək. O zaman üç əsas parketə 12-ci şəkildə təsvir edilmiş daha səkkiz parket əlavə olunacaq.

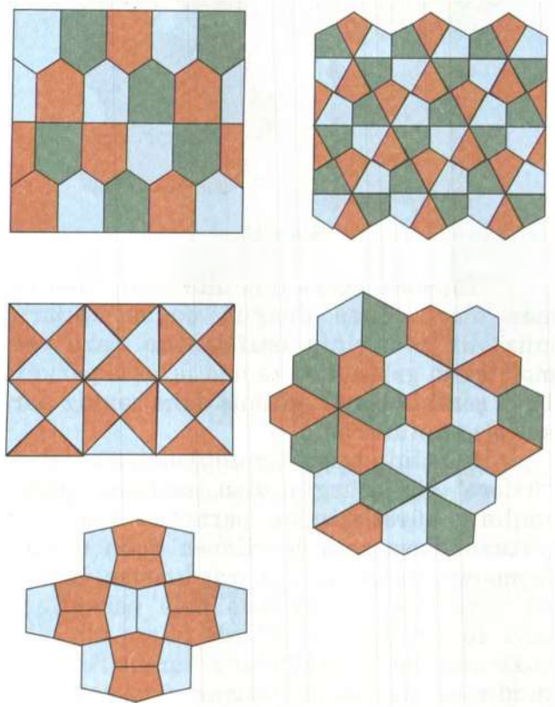
Həmçinin başqa ümumiləşdirməni də – "üzlərə" görə düzgün olan istənilən çoxbucaqlının sürətlərindən parketlər (yəni bir plitkanı başqasına çevrilməsi üçün uyğunlaşmalara imkan verən) araşdırırlar. Birinci üç parketlər ilə birlikdə belə parketlərin sayı 46-dır. Bu parketlərdə plitka ola bilən çoxbucaqlıları planiqonlar adlandırırlar. Aydındır ki, müstəvini ixtiyari üçbucağın sürətləri ilə döşəmək olar, amma ixtiyari dörd-

bucaqlının planiqon olması daha az aydındır (şək. 13*a*). Bu, qarşı tərəfləri bərabər və paralel olan altıbucaq üçün də düzdür (şək. 13*b*). Daha beş misal 14-cü şəkildə göstərilib.

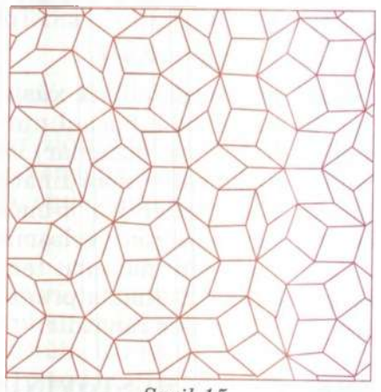


Şəkil 13.

Yuxarıda gözdən keçirilmiş bütün parketlər periodikdir, yəni onların hərəsində parketin bir neçə plitkadan ibarət olan oblastını seçmək olar (hətta çoxlu üsullar ilə) və paralel köçürmənin köməyilə bütün parketi almaq olar. Belə konstruksiyalara alimlərin marağı periodik döşəmələrin, xüsusilə fəzanın döşəmələrinin kristallik quruluşları modelləşdirmələri ilə izah oluna bilər. Həmçinin qeyri-dövri döşəmələr də mövcuddur. Məsələn, 1936-cı ildə alman riyaziyyatçısı X. Foderberq tərəfindən icad edilmiş müstəvinin doqquzbucaqlılar ilə çox gözəl spiral döşəməsi buna misaldır. Bununla belə, bu plitkaları mərkəzi-simmetrik səkkizbucaqlılara birləşdirsək, onlar ilə müstəvini periodik də döşəmək olar.



Şəkil 14.



Şəkil 15.

Uzun müddət surətləri müstəvini təkcə qeyri-periodik döşəyə bilən plitkaların və bir neçə müxtəlif plitkalar yığımının mövcud olmadığını hesab edirdilər. Amma *XX* əsrin 60-cı illərində bu hipotez təkzib edilmişdir, amma bunun üçün 20 000-dən artıq plitka növündən yığım lazım oldu. Addım-addım plitkaların sayını azaltmağa nail olurdular və nahayət, on ildən sonra ingilis riyaziyyatçı Rodjer Penrouz təkcə iki adi plitka ilə kifayətlənməyə nail oldu. Amma onların döşəməyi zamanı fiqurların bir neçə uyğunlaşma qaydalarına riayət etmək lazımdır (bunun yerinə fiqurların qıraqlarında xüsusi dişəklər edirlər, onların üst-üstə düşməsi qaydalara riayət edilməyini təmin edir). Fiqurların formaları müxtəlif ola bilər, amma onların hamısı düzgün beşbucaqlı ilə bağlıdırlar. Belə oxşar plitka cütlərinin nümunəsi kimi Robinson üçbucaqları ola bilər (şəkil 5-də *ABC* və *ACD* üçbucaqları). Başqa nümunə – iti bucağı 72° və 36° olan rombdur. Penrouzun başqa mozaikaları kimi, bu parket də (şəkil 15) kvazi-dövraşırıdır (latın "quasi" – "təxminən"), yəni onun hər hansı sonlu hissəsi onun daxilində sonsuz qədər təkrar olunur. Amma ən maraqlısı ondadır ki, kvazi-periodik döşəmələrin – ilk vaxtlarda onlar ağılın oyunları kimi başa düşülürdülər – icad edilməsindən sonra kvazi-periodik quruluşu olan maddələr aşkarlanmışdılar.

ÇEVRƏ VƏ DAİRƏ

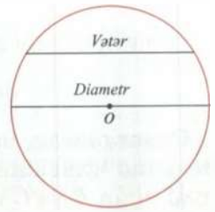
ANLAYIŞI VƏ SADƏ XASSƏLƏRİ

Çevrə ilə çox sayda maraqlı, gözəl və çətin teoremlər bağlıdır. Onların xassələri ilə tanış olmayan və onlardan istifadə edə bilməyən həndəsəni bilmir. Beləliklə, çevrəni bir növ "həndəsənin təkəri" adlandırmaq olar. Həmçinin təkərin xassələrindən biri – onun oxu hərəkət etdiyi səthə nisbətdə həmişə bir məsafədə qalır – riyazi şəkildə çevrənin anlayışına dönür. Çevrə – mərkəz adlı nöqtədən eyni məsafədə ya da radiusda (lat. Radius – "təkərin dəndənəsi", "şüa", şəkil 1) yerləşən nöqtələrin çoxluğuna deyilir. Mərkəzi çevrənin nöqtələri ilə bağlayan parçalara radius deyirlər.

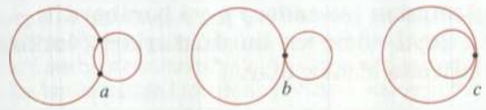
Başqa qapalı xətlərdən çevrəni onun iki xassəsi fərqləndirir. İlk əvvəl, o eyni uzunluq ilə (yəni perimetr ilə) başqa qapalı xətlər ilə müqayisədə maksimal sahə əhatə edir. Bu çevrənin izoperimetrik (latın "isos" – bərabər) xassəsidir.



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

Sonra isə çevrə özü üstə sürüşə bilər, bununla belə onun hər bir nöqtəsi başqa bir sərbəst seçilmiş nöqtəsi ilə üst-üstə gələ bilər. Çevrədən başqa bu xassə təkcə düz xəttə məxsusdur, amma o qapalı deyil. Ona görə, əyri qılıncın qınına dəqiqlik ilə daxil ola bilməsi üçün o, çevrə üzrə əyri olmalıdır.

Müstəvinin çevrə daxilində qalan hissəsi (yəni mərkəzdən radiusdan çox olmayan məsafədə yerləşən nöqtələr çoxluğu) dairə adlanır. Vətər – çevrənin hər hansı iki nöqtəsini bir-biri ilə birləşdirən parçaya deyilir. Çevrənin mərkəzindən keçən vətər diametr adlanır. O radiusdan ikiqat böyükdür və çevrənin nöqtələri arasında maksimal uzunluğa malikdir (şəkil 2). Hər hansı vətər və deməli çevrənin nöqtələri arasında hər hansı parça tamamilə dairəyə aiddir, başqa sözlə, dairə – qabarıq fiqurdur. Düz xəttin çevrə ilə ikidən artıq ortaq nöqtəsi ola bilməz. Əgər belə nöqtələrin sayı ikidirsə, onda bu düz xətt kəsən xətt adlanır, bir olsa, onda toxunan xətdir.

İki çevrə ikidən çox ümumi nöqtəyə malik ola bilməz. Əgər belə nöqtələrin sayı ikidirsə, onda deyirlər ki, bu çevrələr kəsişirlər (şək. 3*a*), əgər birdirsə, onda onlar bir-birinə toxunurlar. Əgər çevrələr bir-birindən xaricdə yerləşirlərsə, toxunma xaricidir (şək. 3*b*), əgər biri başqasının daxilində yerləşirsə, onda daxili toxunmadır (şək. 3*c*). Əgər mərkəzləri eyni olan çevrələrin ortaq nöqtəsi yoxdursa, onda belə çevrələri konsentrik çevrələr adlandırırlar.

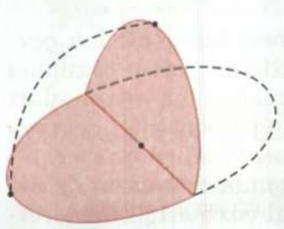
ÇEVRƏNİN SİMMETRİYASI

Diametr çevrəni iki bərabər hissəyə bölür. "Başlanğıc"ın izahçısı Proкl bu kəşfi antik fəlsəfənin və elmin banisi Falesə aid edirdi. Bu fikiri dəqiqləşdirmək üçün deyə bilərik ki, çevrə onun hər hansı diametrinə (dəqiqləşdirsək, onu saxlayan düz xəttə, şəkil 4) nəzərən simmetrikdir.

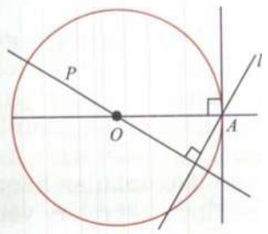
Çevrənin simmetriyasından bir sıra faydalı nəticələrə gəlmək olar. İlk əvvəl:

✓ **Çevrənin hər bir nöqtəsinə təkcə bir toxunan xətt qurmaq olar. Toxunma nöqtəsinə çəkilmiş radiusa toxunan xətt perpendikulyardır.**

Həqiqətən, tutaq ki, l – çevrənin A nöqtəsindən keçən istənilən düz xəttdir. O mərkəzindən ona p perpendikulyarını çəkək (şəkil 5). l düz xəttinin əvvəlcədən çevrə ilə iki ortaq nöqtəsi var, bununla belə p oxuna



Şəkil 4.



Şəkil 5.

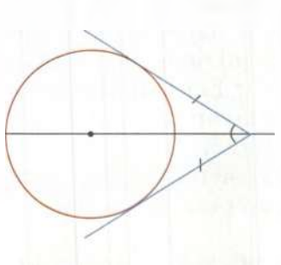
nəzərən simmetrik olan nöqtə həm düz xətdə, həm də çevrədə yerləşir. Və ona görə A təkcə o zaman yeganə kəsişmə nöqtəsi ola bilər ki, l düz xətti və OA radiusu bir-birinə perpendikulyar olsun.

Sonra (şəkil 6):

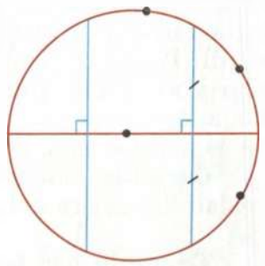
✓ **Bir nöqtədən çevrəyə çəkilmiş toxunanların parçaları bərabərdirlər: onlar ilə əmələ gəlmiş bucağın daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi bucağın tənböləni üzərində yerləşir.**

Belə teoremləri də isbat etmək asandır (şəkil 7):

✓ **Vətərə perpendikulyar olan diametr, onu iki bərabər hissəyə bölür; çevrənin iki paralel vətər arasında yerləşən qövsləri bərabərdirlər; əgər toxunan xətt vətərə paraleldirsə, onda toxunan xətt vətərin gərdiyi qövsü yarıbayarı bölür.**



Şəkil 6.



Şəkil 7.

Çevrənin iştirakı ilə maraqlı məsələ və teoremlərin sayı həndəsənin bir neçə minillik inkişaf tarixi boyunca təəccüb doğurası qədər çox yığılıb. Biz onlardan bir neçəsi ilə qısaca tanış olacağıq. Oriyentir kimi bir neçə sadə, amma çox vacib teoremləri seçəcəyik.

TOXUNANLAR HAQQINDA TEOREM

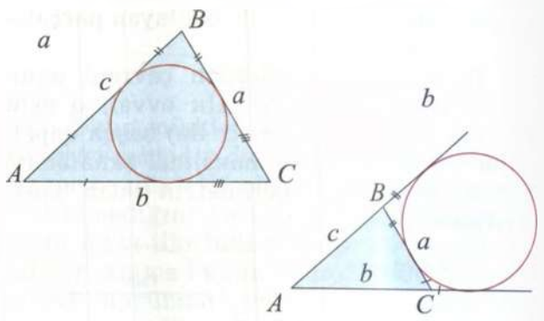
Dediklərimizə görə, bir nöqtədən çevrəyə keçirilmiş iki toxunan xəttin toxunma nöqtələrinə qədər parçalarının uzunluqları bərabərdir. Bu uzunluğu nöqtədən çevrəyə kimi toxunan üzrə məsafə adlandırırlar.

Toxunanlar haqqında teoremsiz daxilə çəkilmiş çevrələr, yəni çoxbucaqlının tərəflərinə toxunan çevrələr haqqında heç bir məsələ tam ola bilmir.

Üçbucaqlarda təpədən toxunma nöqtələrinə qədər məsafələr. ABC üçbucağının tərəfləri üçün onun daxilinə çəkilmiş çevrənin toxunma nöqtələri ilə bölündüyü parçaların uzunluqlarını (şəkil 8a), məsələn, A nöqtəsindən çevrəyə qədər toxunan üzrə t_A məsafəsini tapaq. b və c məsafələrini toplayaq, onların cəmindən a tərəfini çıxaq. Bir təpədən çəkilmiş toxunanların parçalarının bərabərliyini nəzərə alaraq, biz $2t_A$ alarıq. Beləliklə:

$$t_A = (b + c - a)/2 = p - a$$

Burada $p=(a+b+c)/2$ – verilmiş üçbucağın yarımperimetridir. B və C təpələrinə bitişik olan parçaların uzunluqları müvafiq olaraq $p-b$ və $p-c$-yə bərabərdir.



Şəkil 8.

Oxşar olaraq, üçbucağın a tərəfinin xaricdaxilinə (xaricindən) toxunan çəkilmiş çevrəsi üçün B və C-dən toxunma məsafələri müvafiq olaraq $p-c$ və $p-b$-yə bərabərdir, A nöqtəsindən isə sadəcə p-yə bərabərdir.

Qeyd edək ki, bu düsturları "tərsinə" də istifadə etmək olar.

✓ **Tutaq ki, BAC bucağının daxilinə çevrə çəkilib, belə ki, bucağın təpəsindən çevrəyə toxunma nöqtəsinə qədər məsafəsi p və ya $p-a$-ya bərabərdir, burada p – ABC üçbucağının yarımperimetridir, $a=BC$. Onda çevrə BC düz xəttinə toxunur (müvafiq olaraq üçbucağın ya xaricindən, ya da daxilindən).**

Həqiqətən, tutaq ki, toxunma nöqtəsinə qədər məsafə $p-a$-ya bərabərdir. Onda çevrə ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin toxunduğu nöqtələrdə toxunur, yəni bir-biri ilə üst-üstə gəlirlər. Deməli, o BC-ya toxunur.

Xaricə çəkilmiş dördbucaqlı. Toxunanların bərabər parçaları haqqında teoremdən nəticəyə gələ bilərik ki (şəkil 9a):

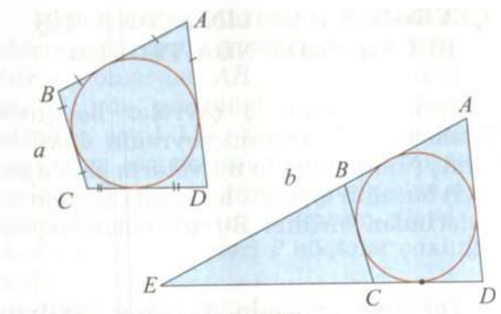
✓ **Əgər dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək olarsa, onda onun qarşı tərəflərinin cəmləri bərabərdir: $AD+BC=AB+CD$.**

Qeyd edək ki, xaricə çəkilmiş dördbucaqlı hökmən qabarıq olmalıdır. Tərsi də düzdür:

✓ **Əgər dördbucaqlı qabarıqdırsa və onun qarşı tərəflərinin cəmləri bərabərdirsə, onda onun daxilinə çevrə çəkmək olar.**

Paraleloqramdan fərqli olan dördbucaqlı üçün bunu isbat edək. Tutaq ki, dördbucaqlının hansısa qarşı tərəflərinin, məsələn AB və BC, uzantıları E nöqtəsində kəsişirlər (şəkil 9b). ADE üçbucağının daxilinə çevrə çəkək. Onun E nöqtəsinə kimi toxunan üzrə məsafəsi t_E ilə ifadə olunur:

$$t_E = \frac{1}{2}(AE + ED - AD)$$



Şəkil 9.

Amma şərtlərimizə görə qarşı tərəflərin cəmləri bərabərdir, deməli $AD+BC=AB+CD$ və ya $AD=AB+CD-BC$. Bu ifadəni t_E üçün ifadədə nəzərə alsaq, alarıq:

$$t_E = \frac{1}{2}((AE - AB) + (ED - CD) + BC) =$$

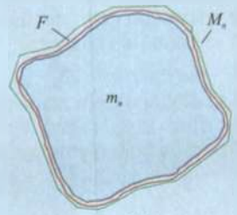
$$= \frac{1}{2}(BE + EC + BC)$$

Bu isə BCE üçbucağının yarımperimetridir. Yuxarıda isbat olunmuş şərtə görə nəticəyə gələ bilərik ki, çevrə BC-yə toxunur.

ÇEVRƏNİN UZUNLUĞU VƏ DAİRƏNİN SAHƏSİ

Çevrənin uzunluğu üçün $2\pi R$ və dairənin sahəsi üçün πR^2 düsturları hər bir yuxarı sinif şagirdinə məlumdur. Bu düsturlar min il boyunca riyaziyyatçıların və hesablayıcıların xüsusi diqqətində idilər. π ədədinin təyin olunmasına maraq dairənin kvadraturasını həll etmək – verilmiş dairəyə müadil olan kvadratın xətkeş və pərgar ilə qurulması (bax "Qədminin üç məşhur məsələləri" məqaləsinə) arzuları ilə saxlanılırdı, ondan daha güclü isə bu məsələnin "yalan" həllərinin təkzib edilməsi səyləri ilə saxlanılırdı. Sonradan isə π ədədinin dəqiqləşdirilməsi özünəməxsus riyazi idmana çevrildi, bizim vaxtımızda isə – kompyuterlərin və kompyuter proqramların yaxşı cəhətlərini göstərmək üsuluna döndü (bax "π ədədi" məqaləsinə).

Əslində isə düsturlar təkcə onu göstərirlər ki, çevrənin uzunluğu onun radiusuna, dairənin sahəsi isə – radiusun kvadratına mütənasibdir, bununla belə birinci əmsal ikincidən iki dəfə böyükdür. Bu xassənin göstərilməsini çevrənin uzunluğundan və dairənin sahəsindən nəticə kimi çıxartmaq olar. Amma anlayışlar özü parçanın uzunluğu və çoxbucaqlının sahəsi kimi elə də sadə deyil. Çünki burada biz "əyri" fiqurlar ilə işləyirik.



Şəkil 1.

Əyrixəttli fiqurların sahəsini onlara yaxın olan çoxbucaqları quraraq təyin edirlər (bax "Uzunluq, sahə, həcm" məqaləsinə). Anlayışların detalları fərqlənə bilər, amma onların mahiyyəti aşağıdakı cümləyə gətirilir. Əgər verilmiş fiqur F-in tərkibindəki çoxbucaqlıların ardıcıllığı m_n və onu tərkibində saxlayan çoxbucaqlıların M_n ardıcıllığı elədirlər ki, M_n və m_n sahələri fərqi n-in artırılması ilə azalır, onda iki ardıcıllıqdakı çoxbucaqlıların sahələri F-in sahəsi kimi götürülən eyni limit qiymətə yönəlirlər.

Əgər F – dairədirsə, ona M_n və m_n yerinə təbii olaraq daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlıları götürmək lazımdır. Onlar bir-birinə oxşardırlar. Əgər çoxbucaqlıları elə qoysaq ki, birincinin tərəflərinin ortaları ikincinin təpələri ilə üst-üstə düşsün, κ_n oxşarlıq əmsalı tapmaq asandır (şəkil 2):

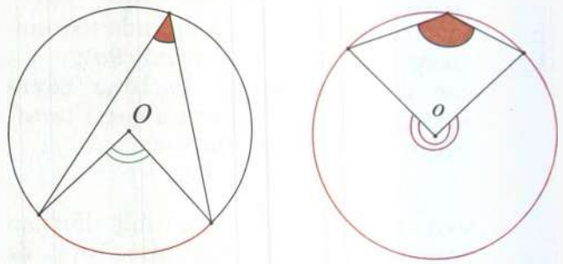
$$\kappa_n = OB:OA = \frac{1}{\cos\angle AOB} = \frac{1}{\cos\frac{180^\circ}{n}}$$

Oxşar fiqurların sahələri nisbəti onların oxşarlıq əmsallarının kvadratına bərabərdir. n-nın artırılması ilə bu əmsal 1-ə yaxınlaşdığına görə, onda $(\kappa_n^2 - 1)S_n$ bərabər olan M_n və m_n sahələrinin fərqi $S_n - s_n$ sıfıra yığılır. Beləliklə, dairənin sahəsi onun daxilinə və xaricinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlıların $n \to \infty$ şərti ilə sahələrinin limitinə bərabərdir.

ÇEVRƏNİN DAXİLİNƏ ÇƏKİLMİŞ BUCAQ HAQQINDA TEOREM

Xaricinə çəkilmiş çevrələr haqqında məsələlərin həlli zamanı çevrənin daxilinə çəkilmiş (ümumi uc ilə iki vətərin əmələ gətirdiyi) bucağın qiyməti haqqında teorem ən vaciblərindən biridir. Bu teoremdə deyilir ki:

✓ **Verilmiş çevrənin daxilinə çəkilmiş bucaq bu bucağa uyğun qövsün dərəcə ölçüsünün yarısına bərabərdir.**



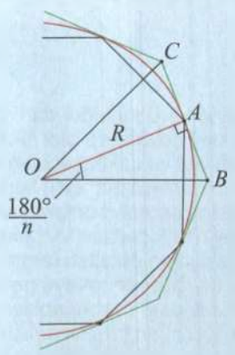
Şəkil 10.

Başqa sözlə desək, o, bu qövsə söykənən mərkəzi bucağın (təpəsi çevrənin mərkəzində olan bucağın) yarısına bərabərdir; mərkəzi bucağın qiymətləri 0°-dən 360°-yə qədər dəyişə bilər (şəkil 10).

Daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teorem Evklidin "Başlanğıc"ında elə bu gün dərsliklərdə təqdim edilən şəkildə təsvir olunub. Amma bu teorem hələ Xiosdan Hippokrata məlum idi (e.ə. *V* əsr). Diametrə söykənən daxilə çəkilmiş bucağın düz bucaq olmasını artıq babillilər də bilirdilər. Güman edilir ki, bu fikiri Fales isbat etmişdir.

Daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teoremdən onun təpəsi çevrə üzərində yerləşməsə də qövsün köməyi ilə bucağın ifadəsini almaq olar.

✓ **Əgər bucağın təpəsi çevrədən xaricdə, iki tərəfi isə çevrə ilə kəsişirlərsə,**



Şəkil 2.

Vahid radiuslu dairənin xaricinə sahəsi c_n olan düzgün *n*-bucaqlı çəkək. *R* radius ilə dairənin xaricinə çəkilmiş düzgün *n*-bucaqlı *R* oxşarlıq əmsalı ilə birincisinə oxşardır və ona görə $S_n = c_n R^2$ sahəsinə malikdir. Elə bu cR^2 mütənasiblik əmsalı məşhur π ədədidir.

Amma π ədədini adətən çevrənin uzuluğu vasitəsilə müəyyən edirlər. Elə ona görə bu ədədi Leonard Eyler π adlandırdı – yunan dilində "çevrə" sözünün birinci hərfidir. Xaricə çəkilmiş düzgün *n*-bucaqlının mərkəzinin bütün təpələr ilə birləşdirərək üçbucaqlara bölək. 2-ci şəkildə üçbucaqlardan birinin *OBC*-in sahəsi:

$$\frac{1}{2} BC \cdot OA = \frac{1}{2} a_n R$$ bərabərdir.

Burada a_n – çoxbucaqlının tərəfləridir. Ona görə:

$$S_n = \frac{1}{2} Q_n R$$

Burada $Q_n = na_n$ – xaricə çəkilmiş *n*-bucaqlının perimetridir. $n \to \infty$ ilə S_n sahəsi cR^2-na yaxınlaşır, deməli Q_n perimetri $2cR$-ə yaxınlaşır. Düzgün daxilə çəkilmiş *n*-bucaqlının P_n perimetri Q_n/κ-ya bərabərdir, $\kappa_n \to 1$ ona görə də o da elə bu limitə yönəlir. Verilmiş çevrə üçün daxilə və xaricə çəkilmiş çoxbucaqlıların ümumi limiti onun uzunluğu kimi götürülür.

π ədədini qiymətləndirməyi bilavasitə anlayışların köməyi ilə etmək olar. Məsələn, vahid dairənin sahəsi onun xaricinə çəkilmiş kvadratın sahəsindən azdır; buradan π<4. Daxilinə çəkilmiş kvadratı gözdən keçirərək, tapırıq ki, π>2. Xaricinə və daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlıların tərəflərini çoxaldaraq bu qiymətləti dəqiqləşdirmək də olar. Amma sahələri ilə yox, perimetrlərdən istifadə etmək daha yaxşı olardı. Çevrənin daxilinə çəkilmiş hər hansı çoxbucaqlının perimetri çevrənin xaricinə çəkilmiş çoxbucaqlının perimetrindən kiçikdir. Ona görə 1 radiusu və 2π uzunluğu ilə $p_n < 2\pi < q_n$ bərabərsizliklərini təmin edir, burada p_n və q_n – daxilinə və xaricinə çəkilmiş *n*-bucaqlıların perimetridir. Artıq *n*=4-də bu bizə aşağıdan pis olmayan qiymət verir: $2\pi \geq p_4 = 4\sqrt{2}$ $\pi \geq 2{,}8$. Arximed aşkar etdi ki, əgər daxilinə çəkilmiş *n*-bucaqlının a_n tərəfini bilsək, daxilə çəkilmiş $2n$-bucaqlının a_{2n} tərəfini hesablamaq çətin olmayacaq. Pifaqor teoremini istifadə edərək bu çətin olmayan hesablamanı özünüz keçirib, düsturu ala bilərsiniz:

$$a_{2n}^n = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}$$

Arximed özü altıbucaqdan başlayaraq, öz ikiqat artırılma üsulunu dörd dəfə tətbiq etdi və yaranan 96-bucaqlının köməyi ilə belə qiymətlər aldı:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Bu qiymətlər uzun müddət ən yaxşı qiymət olaraq qalırdılar.

onda bu bucaq onun çevrədən kəsdiyi qövslərin dərəcə ölçüləri fərqinin yarısına bərabərdir (şəkil 11*a*).

✓ **Təpə nöqtəsi çevrənin daxilində yerləşən bucaq, bu bucağa və qarşılıqlı bucağa uyğun qövslərin dərəcə ölçülərinin yarıcəminə bərabərdir (şəkil 11*b*).**

Ona görə söykəndiyi qövsün yarısına bərabər olan bucağın təpəsi həmişə çevrə üzərində yerləşir.

Qurma məsələlərində tez-tez elə *P* nöqtələrin çoxluğunu gözdən keçirtmək lazım olur ki, onlardan *AB* parçası "verilmiş bucaq altında görünür" (yəni *APB* bucağı sabitdir, şəkil 12). Yuxarıda verilmiş teoremlərdən elə nəticəyə gəlmək olar ki, bu çoxluq *AB*-yə nəzərən simmetrik olan *A* və *B* ucları ilə qövslərdən ibarətdir. Qeyd edək ki, *A* və *B* ucları özləri *P* nöqtələr çoxluğuna daxil deyillər.

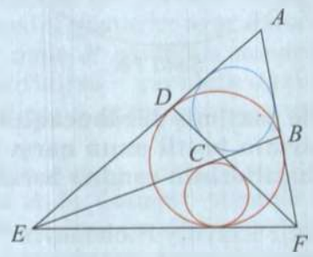
Daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teoremin mühüm nəticəsi – daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının əlamətidir:

YAPON MƏBƏDLƏRİNDƏN MƏSƏLƏLƏR

XVII-XIX əsrlərdə Yaponiyada sequnlar hakimlik edən zaman, onlar bütün dünyadan təcrid edilmişdilər. Kəşflər ilə mübadilə üçün yapon həndəsəçiləri taxta lövhəciklərdə rəngli cizgilər çəkərək, onları paqodalara verirdilər. Orada onları dam altında asırdılar. Məsələlər ilə lövhəciklərin çoxlu hissəsi – onları san qaku adlandırırlar – bizim günümüzə kimi qalıb. Həll ilə məsələlər bizə həmçinin yazılı variantda da çatıb.

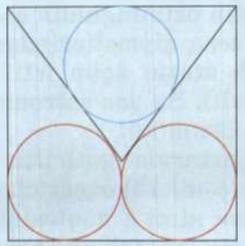
San qakuların çoxusunda çətin və zərif konstruksiyaları görmək olar: kvadratın daxilinə çəkilmiş çevrələr, üçbucaqlar və daha çətin fiqurlar var, amma həmçinin onların arasında ellips və kürə ilə lövhəciklər də var. Burada biz bir neçə misal gətirmişik.

Məsələ 1. Əgər *ABCD* (şəkil 1) dördbucaqlısının daxilinə çevrə çəkmək olarsa, onda *AEF* və *CEF* üçbucaqlarının daxilinə çəkilmiş çevrələr *EF* tərəfinə eyni nöqtədə toxunurlar. Əks fikir də düzdür.



Şəkil 1.

Məsələ 2. Əgər qırmızı çevrələr bərabərdilərsə, onda göy çevrə də onlara bərabərdir (şəkil 2).



Şəkil 2.

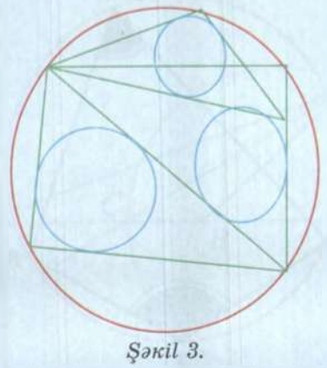
Paqodada 1800-cü ildə "elan edilən" aşağıdakı teorem xüsusilə güclü təəssürat bağışlayır.

Məsələ 3. Çevrənin daxilinə çəkilmiş çoxbucaqlının təpəsindən diaqonalların hamısını keçirək və əmələ gələn üçbucaqların daxilinə çevrələr çəkək (şəkil 3). Onda bu çevrələrin radiusların cəmi hansı təpə əsas olduğundan asılı olmayaraq eyni olacaq.

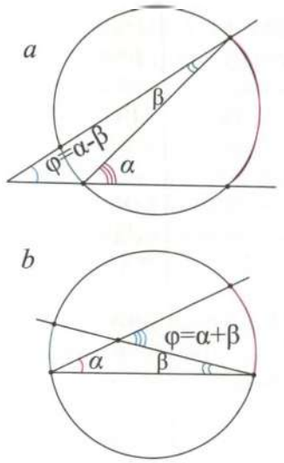
Üç fikirin hamısı toxunan xəttləri haqqında teorem ilə isbat olunur, həmçinin birinci iki məsələdə bir dənəsi də kifayətdir.

Üçüncü məsələnin həlli zamanı daha güclü xassəni isbat etmək daha rahatdır: verilmiş çoxbucaqlılarının üçbucaqlara kəsişməyən diaqonallar ilə hər hansı bölünməsi zamanı gözdən keçirilən çevrələrin radiuslarının cəmi sabit qalır. İsbat zamanı aşağıdakı Karno teoremindən istifadə edilir:

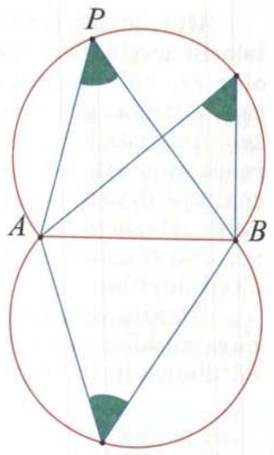
✓ **Daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusların cəmi xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzindən onun tərəflərinə qədər məsafələrin cəbri cəminə bərabərdir. Həmçinin əgər mərkəz və üçbucaq bu tərəfdən bir yarımmüstəvidə yerləşirlərsə, onda tərəfə qədər məsafə üstəgəl işarəsi ilə götürülür, əks təqdirdə çıxma işarəsi ilə götürülür.**



Şəkil 3.



Şəkil 11.

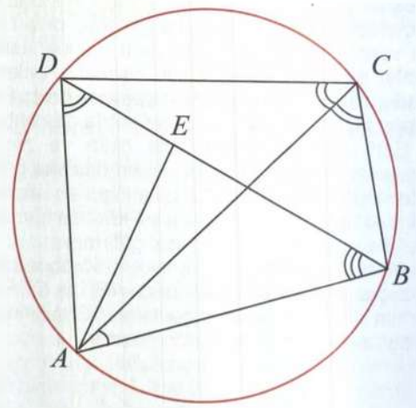


Şəkil 12.

PTOLEMEY TEOREMİ

Dördbucaqlını çevrə daxilinə çəkilə bilməsi üçün zəruri və kafi şərt olaraq, daha bir xassəsini çıxartmaq üçün daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teoremdən istifadə edək.

Çevrənin daxilinə çəkilmiş $ABCD$ dördbucaqlısına baxaq (şəkil 14). BD diaqonalında elə bir E nöqtəsini götürək ki, $\angle BAC = \angle EAD$ bərabərliyi təmin edilsin. ABC və AED üçbucaqları oxşardırlar, çünki A təpəsində olan bucaqlardan başqa onların C və D təpələrində bərabər (daxilinə çəkilmiş) bucaqları var. Aydındır ki, ACD və ABE üçbucaqlıları oxşardırlar. Onda $BE = AB \cdot CD / AC$, $ED = AD \cdot BC / AC$. Amma $BE+ED=BD$, ona görə $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$. Başqa sözlə:



Şəkil 14.

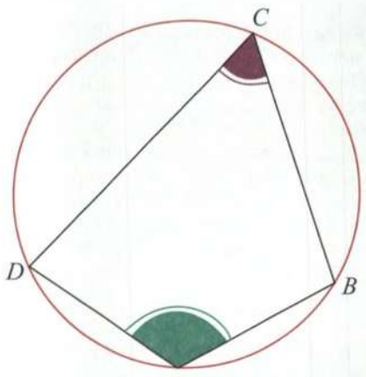
✓ **Daxilə çəkilmiş dördbucaqlının diaqonallarının hasili onun qarşı tərəflərinin hasillərinin cəminə bərabərdir.**

Bu fikir Klavdiy Ptolemeyin "13 kitabda astronomiyanın böyük riyazi quruluşu" (Almaqest) adlı məşhur əsərində verilir. İndi isə teorem onun adını daşıyır. Lakin bu teorem artıq Arximedə məlum idi. Ptolemey onu vətərlərin uzunluğunun onların gərdiyi qövslərin bucaq qiymətlərindən asıllıq cədvəlini tərtib etmək üçün istifadə edib (sinuslar cədvəli). Bu ona astronomik hesablamalar üçün lazım idi.

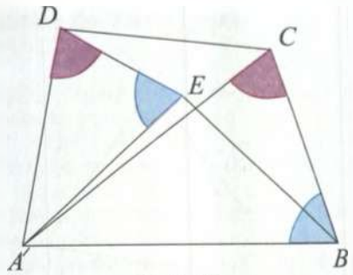
Əgər yuxarıda gətirilən isbatı ABC üçbucağına (şəkil 15) oxşar olan AED üçbucağının təpəsi kimi E nöqtəsini qurub, ixtiyari $ABCD$ dördbucaqlısına tətbiq etsək, onda ACD və ABE üçbucaqları yenə də oxşar

✓ **Qarşı bucaqlarının cəmi 180° olarsa, dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək mümkündür və tərsinə, dördbucaqlının xaricinə çevrə çəkmək olursa, onun qarşı bucaqlarının cəmi 180°-dir.**

Həqiqətən, əgər dördbucaqlı çevrənin daxilinə çəkilibsə (şəkil 13), onda onun qarşı bucaqlarının söykəndiyi qövslər bir tam çevrə əmələ gətirirlər, onun bucağının qiyməti isə 360°-dir, deməli bu bucaqların cəmi 180°-yə bərabərdir. Və tərsi: tutaq ki, $ABCD$ dördbucaqlısının A və C bucaqlarının cəmi 180°-yə bərabərdir. A,B və D nöqtələrindən çevrə keçirək. Onun BAD qövsünün bucaq qiyməti $360°-2\angle BAD = 2(180°-\angle BAD) = 2\angle BCD$ bərabərdir, buradan, biz artıq qeyd etdiyimizə görə, BCD bucağı çevrənin daxilinə çəkilib nəticəsinə gələ bilərik.



Şəkil 13.



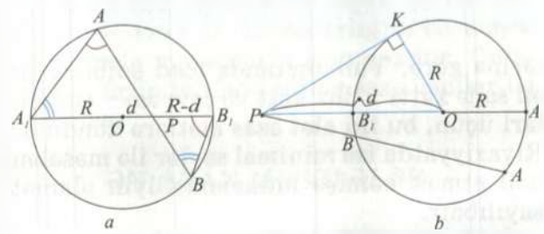
Şəkil 15.

olacaqlar. $BE + ED \geq BD$ üçbucaq bərabərsizliyindən biz $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ "Ptolemey bərabərsizliyini" alacağıq. Dördbucaqlının A, B, C və D təpələri bir çevrədə yerləşirlərsə və yalnız o zaman bu bərabərsizlik bərabərliyə dönür.

ÇEVRƏYƏ NƏZƏRƏN NÖQTƏNİN DƏRƏCƏSİ

Verilmiş çevrəyə nəzərən P nöqtəsinin dərəcəsi d^2-R^2 fərqi kimi təyin olunur, burada $d=PO$ – P nöqtəsindən O mərkəzinə qədər məsafə, R isə onun radiusudur. Bu kəmiyyətin sadə həndəsi mənası var: P nöqtəsindən keçirilmiş və çevrə ilə iki nöqtədə (onları A və B kimi göstərək) kəsişən düz xəttlər üçün, $PA \cdot PB$ hasili sabitdir və P nöqtəsinin dərəcəsinin mütləq qiymətinə bərabərdir. Fərqin işarəsi isə çevrəyə nəzərən nöqtənin yerləşməsini göstərir: əgər dərəcəsi müsbətdirsə – onda P çevrədən kənarda yerləşir, əgər mənfidirsə – çevrənin daxilində, sıfıra bərabərdirsə – onda çevrənin üzərində yerləşir.

Əmin olmaq üçün, P nöqtəsindən AB vətər və A_1B_1 diametr olmaqla kəsişən iki düz xətt keçirək (şəkil 16*a* və *b*). Daxilə çəkilmiş bucaqların xassələrindən PAA_1 və PB_1B (bucaqlara görə) üçbucaqlarının oxşarlığı çıxır, uyğun tərəflərin nisbətlərinin müqayisəsindən isə – aşağıdakı bərabərlik alınır:



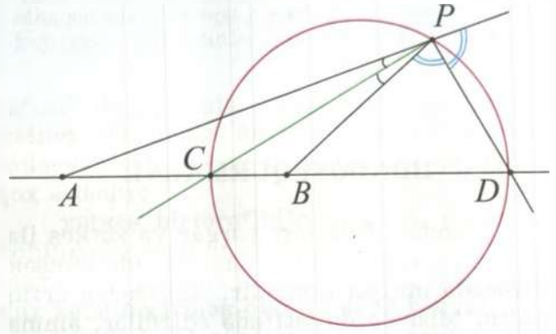
Şəkil 16.

$$PA \cdot PB = PA_1 \cdot PB_1 = |d - R| \cdot (d + R).$$

Çevrədən kənarda yerləşən P nöqtəsinin dərəcəsi onun toxunma nöqtəsinə qədər PK məsafəsinin kvadratına bərabərdir, çünki Pifaqor teoreminə görə, $d^2 - R^2 = PO^2 - OK^2 = PK^2$ (şəkil 16*b*). Buradan biz toxunanın kvadratı haqqında teoremə gələ bilərik: toxunanın kvadratı kəsənin (şəkildə PA) onun xarici hissəsinə (PB) hasilinə bərabərdir: $PK^2 = PA \cdot PB$.

APOLLONİY ÇEVRƏSİ

İsgəndəriyyə məktəbinin məşhur həndəsə alimi Perqli Apolloniya aşağıdakı məsələ məxsusdur: verilmiş iki A və B nöqtələrinə qədər məsafələri nisbəti sabit olan, yəni $PA/PB=const$ şərti ilə P nöqtələrinin həndəsi yerini tapmaq tələb olunur. Tutaq ki, bu nisbət r-ə ($r \neq 1$) bərabərdir. AB düz xəttində axtarılan çoxluğun iki nöqtəsi var – AB parçasının daxilində və xaricində; gəlin onları C və D kimi göstərək (şəkil 17). Tutaq ki, P – axtarılan çoxluğun qalan nöqtələrindən biridir. Bizə məlum olan teoremə görə, APB üçbucağının P bucağın tənböləni AB tərəfini $AP/PB=r=AC/CB$ nisbətdə bölür və ona görə o, PC ilə üst-üstə gəlir. Oxşar olaraq, PD – APB ilə qonşu olan bucağın tənböləni dir. Qonşu bucaqların tənbölənləri perpendikulyardır: burada $\angle CPD = 90°$. Deməli, daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teoremə görə A və B nöqtələri üçün P nöqtəsi CD diametri ilə Apolloniy çevrəsi adlanan çevrədə yerləşir. İsbat edə bilərik ki, $AP/PB=r$ verilmiş çevrənin hər bir P nöqtəsi üçün təmin edilir, yəni o axtarılan çoxluqdur.

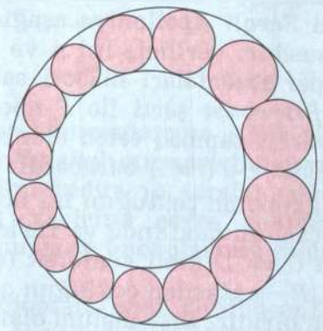


Şəkil 17.

HƏR ŞEY VƏ YA HEÇ NƏ

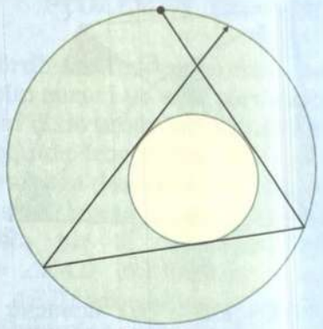
Çevrə haqqında ifadə tərzi eyni, mahiyyətcə fərqli olan iki gözəl teorem var. Onlardan birincisini adətə görə Şteynerin porizmi adlandırırlar. Biri başqasının daxilində yerləşən iki çevrəni gözdən keçirək. Onların yaratdığı halqanın (düzgün olub olmamağı vacib deyil) daxilinə çevrə çəkək. Bu çevrə iki çevrəyə də toxunacaq. Sonra isə halqanın daxilinə çevrələri elə çəkək ki, hər əvvəlki çevrə sonrakı çevrə ilə toxunsun (şəkil 1). Çevrələrin cərgəsi əmələ gəlir. Teoremdə deyilir:

✓ **Əgər bu cərgə qapanarsa, yəni bu cərgənin *n* saylı çevrəsi birinci çevrə ilə toxunacaqsa, onda birinci çevrəni harada çəkməyimizdən asılı olmayaraq, belə cərgə həmişə qapalı olacaq və həmişə *n* addımdan sonra qapanacaq.**



Şəkil 1.

İkinci teoremdə – Ponsele alternativi – iki çevrənin arasında çoxbucaqlılar "yerləşdirirlər". Xarici çevrədə nöqtə götürək, ondan daxili çevrəyə toxunan xətti çəkək və sonra isə bu toxunan xəttini xarici çevrə ilə ikinci dəfə kəsişənə qədər uzadaq. Alınan kəsişmə nöqtəsindən daha balaca olan çevrəyə tərəf yenə də toxunan xətti çəkək (şəkil 2) və bu qurmanı davam edəcəyik. Bizdə xarici çevrənin daxilinə çəkilmiş və daxili çevrənin xaricinə çəkilmiş sınıq xətt alınır. Aydındır ki, iki imkanımız var: ya hansısa addımda başlanğıc nöqtəyə qayıdacayığ və sınıq xətt qapanacaq, bundan sonra isə artıq keçdiyimiz "orbit"ə görə biz yenə də keçməli olacağıq və ya başlanğıc nöqtəyə biz heç vaxt qayıtmayacağıq. Məlum oldu ki, bu məsələnin cavabı, yəni, başlanğıc nöqtəyə qayıdacağıq ya yox, nöqtənin özündən asılı deyil. Bundan başqa, əgər sınıq xətt qapanacaqsa, onun həlqələrinin sayı bütün nöqtələr üçün eyni olacaq. Başqa sözlə:

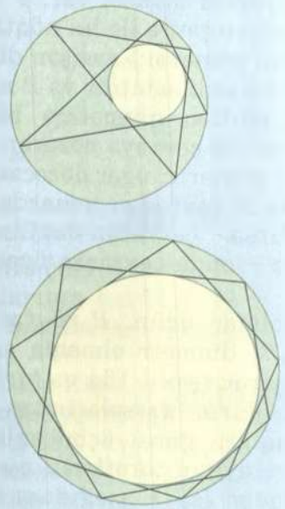


Şəkil 2.

✓ **Ya xarici çevrənin daxilinə çəkilmiş və daxili çevrənin xaricinə çəkilmiş *n*-bucaqlılar (qapalı *n*-həlqəli sınıq xətlər) mövcud deyil, ya da onların sayı sonsuz qədər çoxdur və onların təpəsi kimi xarici çevrənin istənilən nöqtəsini götürmək olar (şəkil 3).**

Ponselenin teoremi elə bundan da ibarətdir.

Burada gətirilmiş teoremlərin ikisi də elementar deyil. Əgər inversiya adlı xüsusi həndəsi çevirmədən istifadə etsək, birincisini isbat etmək asan olacaq. Ponsele teoremi bizə daha asan görünə bilər, amma onun məlum olan isbatları çətindirlər və dərin ümumiləşdirilmələrə gətirir.



Şəkil 3.

HƏNDƏSİ QURMALAR

Həndəsi fiqurları pərgar və xətkeş ilə qurmaq sənəti qədim Yunanıstanda yüksək dərəcədə inkişaf etmişdir. Xətkeşdən artıq qədim Misirdə də istifadə edirdilər, amma pərgarı isə, qədim Roma şairi Ovidiyin sözlərinə görə, Yunanıstanda icad ediblər. İki ən sadə xətti – düz xətt və çevrəni – çəkdikləri üçün, bu iki alət əsas alətlərə döndülər. Riyaziyyatda isə minimal səylər ilə məsələni həll etmək həmişə mükəmməlliyin əlaməti sayılıbdır.

RADİKAL OX VƏ RADİKAL MƏRKƏZ

$P(x;y)$ nöqtəsinin $O(a;b)$ mərkəzli çevrəyə nəzərən dərəcəsini koordinatlarda belə yazmaq olar:

$$d^2 - R^2 = OP^2 - R^2 = (x-a)^2 + (y-b^2) - R^2.$$

İki çevrəyə nəzərən eyni dərəcəyə malik olan nöqtələrin çoxluğunu tapaq. Bu çevrələrə nəzərən $P(x;y)$ nöqtəsinin dərəcələrinin ifadələrini bərabərləşdirək. Sadəlik üçün bir çevrənin mərkəzi – koordinat başlanğıcı, başqasının isə – $(a;0)$ nöqtəsi olsun və onların radiusları uyğun olaraq r və R olsun. Onda Ox oxuna perpendikulyar olan düz xətti verən belə bir tənlik alınacaq:

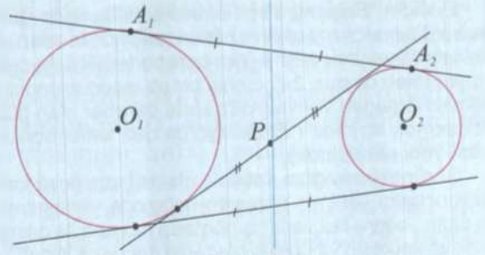
$$x^2 + y^2 - r^2 = (x-a)^2 + y^2 - R^2, \text{ yaxud}$$

$$x = \frac{a^2 + r^2 - R^2}{2a}$$

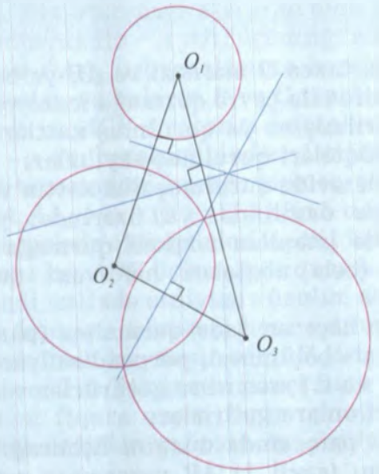
Beləliklə, iki çevrəyə nisbətdə eyni dərəcələrə malik olan nöqtələr bu çevrələrin mərkəzlərindən keçən düz xəttə perpendikulyar olan xətt qururlar. Bu düz xətt çevrələrin radikal oxu adlanır. Xüsusilə, kəsişən çevrələrin radikal oxu – verilmiş çevrələrə nisbətdə sıfır dərəcəyə malik olan kəsişmə nöqtələrindən keçən düz xətdir. Çevrələr bir-birinə toxunanda, radikal ox onların ortaq toxunan xətti olur. Əgər çevrələr bir-birindən xaricdə yerləşirlərsə, onda onların radikal oxunu onların ortaq toxunan xətt parçalarının ortalarından keçən düz xətt kimi qurmaq olar, çünki çevrələrin belə yerləşməsi zamanı oxun nöqtələrinin dərəcələri uyğun toxunanların parçaları kvadratlarına bərabərdirlər (şəkil 1).

Üç çevrəni götürək və cüt-cüt onların radikal oxlarını quraq. Ümumi halda, yəni çevrələrin mərkəzləri bir düz xətdə yerləşməyən zaman (şəkil 2), radikal oxlar üç çevrəyə nisbətdə dərəcəsi eyni olan nöqtədə kəsişirlər. Bu nöqtə onların radikal mərkəzi adlandırılır. Həqiqətən, hər hansı iki radikal oxun kəsişmə nöqtəsi üç çevrəyə nisbətdə eyni dərəcəyə malikdir, yəni üçüncü oxun üstündə yerləşir. Buradan elə nəticəyə gəlmək olar ki, üçbucağın hündürlükləri bir nöqtədə kəsişirlər. Həqiqətən, hansısa tərəfə çəkilən hündürlük iki başqa tərəfi diametr olmaqla qurulan çevrələrin ümumi nöqtəsidir (şəkil 3). Ona görə bütün üç tərəfin üstündə qurulan çevrələrin mərkəzi həm də hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi olacaq.

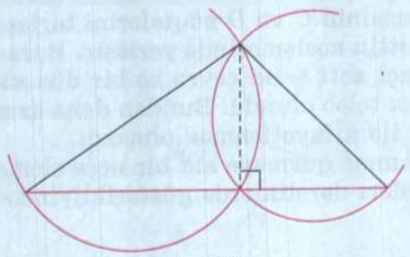
Əgər üç çevrənin mərkəzi bir düz xətdə yerləşirsə, onda onların radikal oxları ya paraleldir (onda radikal mərkəz ümumiyyətlə mövcud deyil), ya da üst-üstə düşürlər, belə halda bu üçqat oxun hər hansı nöqtəsi radikal mərkəz ola bilər.



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

Həndəsini öyrənənlər üçün qurma məsələlər heç vaxt öz cazibədarlığını itirməyəcəklər. Belə məsələlərin sayı çoxdur. Onların həlli üçün istifadə edilən əsas üsullar ilə tanış olaq.

ƏN ASAN MƏSƏLƏLƏR

Qurma məsələlərində, "oyunun qaydalarını" dəqiq ifadə etmək, yəni pərgar və xətkeş ilə hansı əməliyyatlar edilməsini müəyyən etmək çox vacibdir. Bu qaydalar çox sadədir:

xətkeş birtərəflidir və onun üstündə bölünmələr yoxdur, onları heç cızmaq da olmaz; onun köməyi ilə iki verilmiş nöqtədən düz xətti keçirmək olar və daha heç nə.

verilmiş O nöqtəsi və AB parçası ilə

EVKLİDİN "BAŞLANĞIC"INDAN "QƏRİBƏ" BİR CÜMLƏ

Evklidin "Başlanğıc"ının birinci səhifələrində qurmaya aid bir neçə məsələnin həlləri gətirilir. Məsələn, 1 cümləsində verilmiş tərəfə görə bərabərtərəfli üçbucaq qurmaq tələb olunur. 2-ci cümlə bir az təəccübləndirir: verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə bərabər olan düz xətt çəkmək lazımdır ("Başlanğıc"da düz xətlər sonludurlar, yəni parçalardır).

Göründüyünə görə, məsələ elə də çətin deyil: pərgarın uclarını verilmiş parçanın uclarında yerləşdirək onu ölçək, sonra isə verilmiş nöqtədə mərkəz ilə çevrə çəkək və xətkeşin vasitəsilə çevrənin hər hansı bir nöqtəsi ilə verilmiş nöqtəni birləşdirək. Amma hər şey bu qədər də sadə deyil: Evklid təkcə o zaman çevrəni çəkməyə icazə verir ki, onun radiusu mərkəzdən keçirilmiş parça kimi verilmiş olsun – başqa sözlə mərkəz və çevrə üzərində nöqtə verilən zaman çevrə qurula bilər. Radiusa bərabər olan parçanı bir nöqtədən başqasına aparmaq təkcə ikinci cümlədə təsviri verilmiş xüsusi qurma ilə olar. Düzgün üçbucağın qurulması zamanı radiusun götürüb aparılması lazım deyil. Əksinə, bu qurulmanın özü Evklidin 2-ci cümlədə verdiyi məsələnin ağıllı həlli zamanı istifadə edilir.

Parçaları köçürməyi öyrənəndən sonra, biz faktiki olaraq başlanğıc məhdudiyyəti qaldırırıq və pərgar ilə adət etdiyimiz üsul ilə istifadə etməyə haqq əldə edirik.

pərgarla təkcə O mərkəzi və AB-ya bərabər olan radius ilə çevrə qurmağa icazə verilir;

verilmiş və ya qurulmuş xəttlərin kəsişmə nöqtələri qurulmuş sayılırlar;

müstəvidə qurulmuş düz xəttin və çevrənin ya daxilində, ya üzərində, ya da xaricində istənilən nöqtəni qurmağa icazə verilir (belə nöqtələri hər vaxt qurmaq olar);

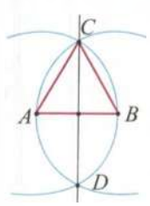
bir neçə ən sadə qurmaları (parçanın yarıbayarı bölünməsi, perpendikulyarın çəkilməsi və s.) əsas kimi götürürlər və daha çətinləri onlara gətirirlər.

AB parçasında düzgün üçbucağın qurulmasını (şəkil 1) AB parçasının ortasını müəyyən etmək üçün istifadə edirlər: o, verilmiş parça və bu qurma zamanı çevrələrin kəsişməsinin C və D nöqtələrini birləşdirən düz xəttin kəsişməsində yerləşir. Burada üç köməkçi xətt – iki çevrə və bir düz xətti – çəkmək tələb olundu. Bundan daha az sayda xətlər ilə kifayətlənmək olmazdı.

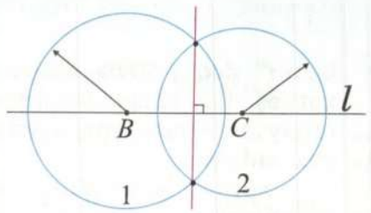
Amma qurmaya aid bir neçə elementar məsələləri dərsliklərdə göstərildiyindən daha asan həll etmək olar. Məsələn, verilmiş A nöqtəsində verilmiş l düz xəttinə perpendikulyarı standart götürülən üç xətt ilə yox, iki köməkçi xəttin vasitəsilə qurmaq olar. Şəkil 2 *a* və *b*-də müvafiq olaraq iki hal göstərilib – A nöqtəsi l-in üzərində yerləşmədikdə və A l-in üzərində yerləşdikdə (B və C l üzərində istənilən nöqtələrdir, D isə l-ə aid olmayan nöqtədir). Şəkillərdə rəqəmlər xətlərin keçirilməsinin ardıcıllığını göstərirlər.

Verilmiş düz xəttə paralel olan düz xətti elə bu qədər tez qurmaq olar. Verilmiş A nöqtəsindən mərkəzi ixtiyari O nöqtəsində olan c çevrəsi çəkilir. Bu çevrənin l düz xəttilə O_1 kəsişmə nöqtəsi mərkəz olmaqla, radiusu ikinci kəsişmə nöqtəsi P-dən A-ya qədər məsafəyə bərabər olan d çevrəsi çəkilir. Onda B – iki qurulmuş çevrənin müvafiq kəsişmə nöqtəsi olmaqla, AB düz xətti l-ə paraleldir.

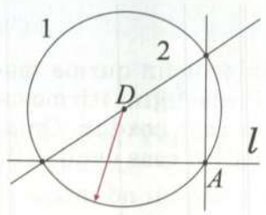
Optimal həndəsi qurmaların nəzəriyyəsini XIX əsrdə fransız həndəsə alimi Emil Lemuan tədqiq etmişdir. Qurmaların çətinliyini qiymətləndirərək, o təkcə çəkilmiş



Şəkil 1.

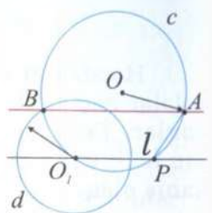


a



b

Şəkil 2.



Şəkil 3.

xətlərin sayını yox, həmçinin xətkeşin nöqtəyə və pərgarın iynəsinin nöqtəyə neçə dəfə dəydiyini sayırdı. Lemuanın həndəsi – qrafik adlandırdığı optimal həllər başqa həllər ilə müqayisədə daha yüksək dəqiqlik təmin edirlər.

QURMA MƏSƏLƏLƏRİNİ NECƏ HƏLL ETMƏLİ?

Qurma məsələlərinin həll üsulları təfərrüatı ilə işlənilib hazırlanıblar. Bir neçə misalda onların ən vacibləri ilə tanış olaq.

Məsələ 1. $a=BC$ tərəfi, bu tərəfə çəkilmiş h_a hündürlüyü və qarşısındakı α bucağına görə ABC üçbucağı qurun.

a uzunluqlu BC parçası quraq (şəkil 4). A nöqtəsinin yerləşməsini tapaq. Şərtə görə o BC düz xəttindən h_a məsafəsində yerləşir. Bu şərti təmin edən nöqtələrin çoxluğu – BC-dən h_a məsafədə yerləşən iki paralel düz xətdir. Yenə şərtə görə, A nöqtəsi BC parçasının $BAC=\alpha$ bucağı altında göründüyü nöqtələr çoxluğuna məxsusdur, yəni BC-yə nəzərən simmetrik olan qövslər cütünə aiddir (müvafiq olan çevrənin O mərkəzi BC-ya çəkilmiş orta perpendikulyarında yerləşir, həm də nəzərə almalıyıq ki BOC bucağı 2α-ya bərabərdir.). Deməli, A – düz xətlər cütünün qövslər cütü ilə kəsişmə nöqtələrindən biridir. Şəkilin simmetriyasına görə bütün alınan üçbucaqlar bərabərdirlər, ona görə bu məsələnin həlli yeganədir (ya da ümumiyyətlə mövcud deyil).

Axtarılan nöqtəni bir neçə şərti təmin edən çoxluqların kəsişmə nöqtəsi (ya da nöqtələrin həndəsi yeri) kimi qurulmasının həll üsulu elə belə də adlanır – çoxluqların kəsişmə üsulu ya da həndəsi yerlər üsulu.

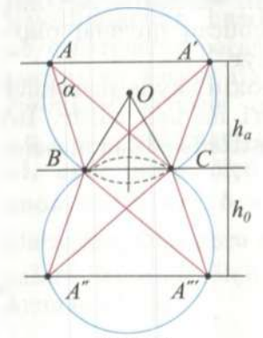
Məsələ 2. $2p$ (üçbucağın perimetri), h_a və $\alpha = \angle BAC$ ilə üçbucaq quraq.

Bu məsələni təkcə düz xəttlərdən ibarət olan çoxluqların kəsişmə üsulu ilə həll etmək olar. Təpə nöqtəsi A olmaqla α (şək. 5) bucağını quraq. Məsələnin başqa iki şərtini icra etmək üçün BC düz xəttini necə qurmaq olar? BC düz xəttindən A təpəsinə qədər məsafə və üçbucağın perimetri müvafiq olaraq h_a və $2p$-yə bərabər olmalıdırlar. Şübhəsiz, birinci şərt təkcə o zaman ödənə bilər ki, BC düz xətti mərkəzi A nöqtəsində yerləşən h_a radiuslu çevrəyə toxunan olsun. Göstərmək olar ki (bax "Çevrə və dairə" məqaləsinə), ikinci şərti bucağın daxilinə çəkilmiş hansısa çevrəyə toxunan xətlərin çoxluğu təmin edir. Bu çevrənin bucağın tərəfləri ilə toxunma nöqtələri M və N onun təpəsindən p məsafəsində yerləşirlər. Axtarılan düz xətt iki ailəyə aiddir, yəni çevrələrin ortaq (daxili) toxunanıdır. Bizə təkcə çevrəni və onun ilə toxunan xətti çəkmək qalır. Toxunan xəttin qurulması – ayrı məsələdir.

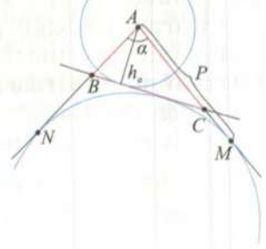
2-ci məsələni başqa cür də həll etmək olar. Fərz edək ki, axtarılan ABC üçbucağı artıq qurulub. BC tərəfinin uzantısı üzərində $BA_1=BA$ və $CA_2=CA$ (şəkil 6) parçalarını ayıraq. Biz oturacağı $A_1A_2=2p$ olan əvvəlki h_a hündürlük ilə – A_1AA_2 üçbucağı alacağıq. A_1AB və CAA_2 üçbucaqlarının bərabəryanlı olmağından və onların B və C təpələrindəki $ABC=\beta$ və $ACB=\gamma$ xarici bucaqları cəminin $\pi-\alpha$-ya bərabərliyindən istifadə edərək, A təpəsindəki bucağı tapmaq çətin deyil: $\angle A_1AA_2 = \alpha + (\beta+\gamma)/2 = (\pi+\alpha)/2$. Birinci məsələdə olduğu kimi A_1AA_2 üçbucağını, sonra isə ABC üçbucağını quraq.

İndi istifadə etdiyimiz üsulun adı onun yerinə danışır – köməkçi fiqur üsulu. İkinci məsələdə belə bir fiqur kimi A_1AA_2 fiquru istifadə edilir. Tez-tez köməkçi fiqur rolunu axtarılan fiqura oxşar fiqur oynayır. Belə hallarda deyirlər ki, oxşarlıq üsulu tətbiq edilir.

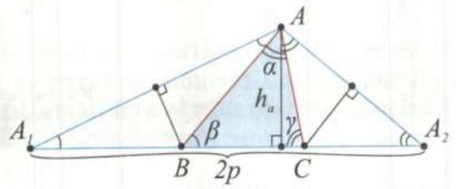
Məsələ 3. Üç hündürlük verilib, üçbucaq qurmaq tələb olunur.



Şəkil 4.



Şəkil 5.



Şəkil 6.

Üçbucağın tərəflərinin onlara çəkilmiş hündürlüyə hasilləri bərabər olduğundan (sahənin ikiqatına bərabərdir), tərəflər uyğun hündürlüklərlə tərs mütənasibdirlər: $b:a=h_a:h_b$, $c:a=h_a:h_c$. Beləliklə, tərəflərin nisbəti məlumdur, bu isə o deməkdir ki, axtarılan üçbucağa oxşar olan üçbucağı l, $l\cdot h_a/h_b$, $l\cdot h_a/h_c$ götürərək qurmaq olar (burada l – ixtiyari parçadır). Bundan sonra isə bizə təkcə üçbucağın ölçülərini elə dəyişdirmək qalır ki, l tərəfinə çəkilmiş hündürlük h_a-ya bərabər olsun (şəkil 7).

Qurmanı tezləşdirmək üçün incə bir üsul mövcuddur: məsələnin şərtlərində verilmiş hündürlüklərdən üçbucaq quraq, onun daxilində hündürlüklər çəkək və yenə də alınmış hündürlüklərdən üçbucaq quraq. Elə o, tərəflərin və hündürlüklərin tərs mütənasibliyinə görə axtarılan üçbucağa oxşar olacaq. Təəssüf ki, belə üsulu hər dəfə istifadə edə bilmərik: verilmiş hündürlüklərdən ola bilər ki, üçbucaq alınmasın.

Maraqlısı odur ki, medianlarına görə üçbucağın qurulması elə bu üsul ilə baş verir. AM və MB-yə bərabər və paralel olan CD parçasını quraq, burada M – AB-nın ortasıdır (şəkil 8). Şəkildən göründüyü kimi, istənilən ABC üçbucağının medianlarına bərabər və paralel olan parçalardan BND üçbucağı qurmaq olar, onun medianları həmçinin əsas üçbucağın tərəflərinə paralel və mütənasib (3/4 əmsalı ilə) olacaq.

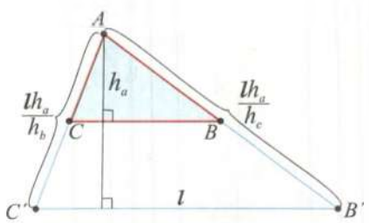
Rərgar və xətkeşin vasitəsilə verilmiş tənbölənlərinə görə üçbucaq qurmaq olarmı? Ümumi halda – xeyr.

Qurma ilə bağlı çoxlu sayda məsələlər müstəvinin çevrilmələri ilə həll edilir. İki müxtəlif növ çevirmə istifadə edilən məsələni gözdən keçirək.

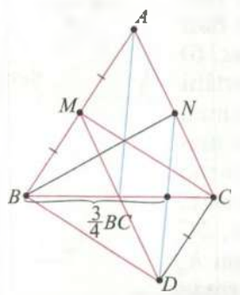
Məsələ 4. l düz xəttindən bir tərəfdə yerləşən A və B nöqtələrindən bu düz xəttə toxunan çevrə çəkək.

Bu dəfə biz ümumi və ən maraqlı hal ilə məhdudlaşacağıq, burada AB düz xətti l-ə nə paraleldir, nə də perpendikulyardır (şəkil 9). AB parçasına p orta perpendikulyarını (axtarılan çevrənin mərkəzi bu perpendikulyarın üstündə yerləşməlidir) çəkək və ona nəzərən l düz xəttini əks etdirək. Xatırladaq ki, çevrə öz diametrinə nəzərən simmetrikdir. Və ona görə axtarılan çevrə əks olunmuş m düz xətt ilə toxunmalıdır. Beləliklə, ox simmetriyasının vasitəsilə biz məsələni daha yaxşı tanış olan məsələyə gətirdik: verilmiş A nöqtəsindən keçən çevrəni (belə bir çevrə hökmən B nöqtəsindən də keçəcək) bucağın daxilinə çəkək (l və m tərəfli). Bu köməkçi məsələni – fiquru özünə oxşar olan fiqura çevirən homotetiyanın – köməyi ilə həll etmək olar. Bucağın daxilinə çəkilmiş hər bir d çevrəsi axtarılan çevrəyə $\kappa = OA/OA'$ əmsalı ilə O təpəsinə nəzərən homotetikdir, burada A' – d-nin OA ilə kəsişmə nöqtələrindən biridir. Ona görə bucağın daxilinə hər bir çevrəni çəkmək olar, sonra isə onu κ dəfə dartıb uzatmaq olar (ya da sıxmaq).

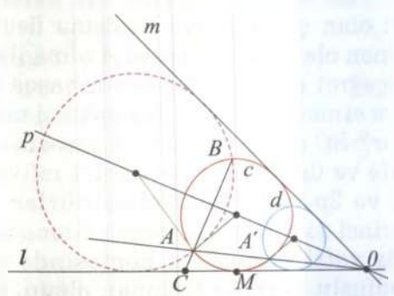
Bu məsələni həm də "cəbri" üsul ilə də həll etmək olar. AB-ni l ilə C kəsişmə nöqtəsinə qədər uzadaq. Toxunan xəttinin kvadratı haqqında teoremə görə (bax "Çevrə və dairə" məqaləsinə), C-dən axtarılan çevrənin l düz xətti ilə toxunma nöqtəsinə qədər məsafənin kvadratı $CA\cdot CB$ hasilinə bərabərdir. Ona görə l üzərində C-dən $\sqrt{CA\cdot CB}$ uzunluqlu parça qurmaq kifayətdir, beləliklə, biz M toxunma nöqtəsini alacağıq, sonra isə A,B və M nöqtələrindən çevrə çəkirik. Parçanı iki istiqamətdə ayırmaq olar, ona görə bizdə iki həll ola bilər.



Şəkil 7.

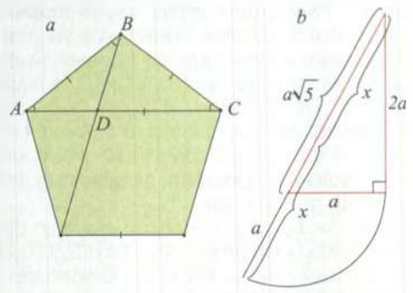


Şəkil 8.



Şəkil 9.

Cəbri üsulun daha bir istifadə nümunəsi. Düzgün beşbucaqlı quraq (şəkil 10*a*). Bunun üçün lazım olan parça və bucaqları verilmişlərin vasitəsilə düsturlar ilə ifadə



Şəkil 10.

edək. Beşbucaqlının tərəfini a ilə, diaqonalını x ilə işarə edək. ABC və BDA üçbucaqlarının oxşarlığından istifadə edərək, alacağıq:

$AB:AC = AD:AB = (AC - CD):AB$

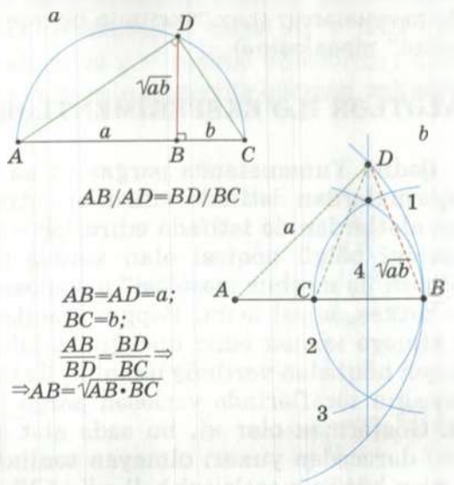
ya da $a/x = (x-a):a$ (çünki $CD=BC=AB$), buradan

$$x = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{2}$$

x parçasının a parçasına görə vurulması 10*b* şəkilində göstərilib.

QURMA MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLİNİN MÜMKÜNLÜYÜ

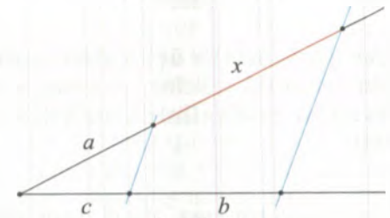
Axırıncı qurmada parçaları toplamaq, yarıya bölmək və $\sqrt{5}$-ə vurmaq lazım oldu. Ümumiyyətlə, pərgar və xətkeşin vasitəsilə hansı cəbr əməliyyatları icra etmək olar? Əl-



Şəkil 11.

bəttə, kiçiyin böyükdən çıxılması və toplanmasını. Yuxarıda bizə $\sqrt{ab}$ qurulması, yəni a və b parçalarının həndəsi ortasını qurmaq lazım oldu. Bu qurma ona əsaslanır ki, düzbucaqlı üçbucağın hündürlüyü hipotenuzu böldüyü iki parçanın həndəsi ortasına bərabərdir (şəkil 11*a*). Amma 11*b* şəkilində daha qısa həlli verilib: təkcə dörd xətt çəkilir ($AB=a$ parçası şərtlərdə verilib, qurmanın özündə isə punktirli xətlər lazım deyil – onlar həlli əsaslandırmağa kömək edirlər).

Verilmiş a,b və c parçalarına görə "dördüncü münasib parçanı" $x=ab/c$ qurmaq çətin deyil. Bunu Fales teoreminin köməyilə necə etmək məlumdur (şəkil 12). Bu teoremə görə bucağın bir tərəfində paralel düz xətlər ilə kəsilən parçalar başqa tərəfindəki müvafiq parçalar ilə münasibdirlər.



Şəkil 12.

Hansısa e parçasını ölçü vahidi kimi götürək. Onda biz təkcə iki parçanın $a+b$ cəmini qurmağı deyil, həmçinin onların hasilinə bərabər olan parçanı qura bilərik – bu parçanın uzunluğu seçilmiş etalonda a və b uzunluqlarının hasilinə bərabər olacaq: o ab/e parçasına bərabər olacaq (belə ifadəni pərgar və xətkeş ilə qurmağı biz artıq öyrənmişik). Oxşar olaraq $a/b = ae/b$ və $\sqrt{a} = \sqrt{ae}$ parçaları da qurulur. Qeyd edək ki, əgər başqa ölçü vahidini e' götürsək, onda ab/e', ae'/b, $\sqrt{ae'}$ parçaları da başqa olacaqlar. Ona görə ab, a/b yaxud $\sqrt{a}$ parçaları haqqında ölçü vahidi verilmədən danışmaq olmaz.

QURMA MƏSƏLƏLƏRİNDƏ CƏBR

Beləliklə, verilən ölçü vahidi ilə xətkeşin və pərgarın köməyi ilə parçalar ilə dörd hesab əməli icra etmək olar və həmçinin parçadan ikincidərəcəli kökü çıxartmaq olar. Birinci dörd əməliyyatı daxil edən ifadələr rasional ifadələr adlandırılır, amma həm də

beşinci əməliyyatı, yəni kvadrat kökün çıxarılmasını özünə daxil edənlər isə, – kvadratik-irrasional ifadələr adlandırılır. Beləliklə, pərgarın və xətkeşin köməyi ilə verilmiş ədədlərdən hər bir kvadratik-irrasional ifadə qurmaq olar. Məlum oldu ki, daha heç nə qurmaq olmaz!

Həqiqətən, qurma zamanı hər addımı diqqətlə təhlil etsək görə bilərik: xətkeş və pərgar ilə götürülən ədədlərdən (məsələn, parçaların uzunluğu) qurduğumuz hər şey ya rasional olur, ya da kvadratik-irrasional olur. Və ona görə xətkeş və pərgarın köməyi ilə bu və ya digər məsələlərin həll edilməsi haqqında sual hansısa tənliyin kvadrat radikallarda həll edilməsi haqqında suala çevrilir. Əgər bu tam əmsalları olan üçüncüdərəcəli tənlikdirsə – bu tez-tez olur – onda aşağıdakı fakt qeyd olunur:

✓ **Əgər tam əmsallı üçüncüdərəcəli tənliyin rasional kökləri yoxdursa, onda o kvadrat radikallarda da həllə malik deyil.**

$\frac{p}{q}$ ixtisarolunmaz kəsri tam əmsallı tənliyin köküdürsə, bu kəsrin sürəti sərbəst həddin, məxrəci isə yüksək dərəcəli hədd əmsalının bölənidir olduğunu göstərmək elə də çətin deyil. (bax "Yüksək dərəcəli tənliklər" məqaləsinə). Və ona görə tam əmsallı üçüncüdərəcəli tənliklərə gətirilən qurma məsələləri onun mümkün rasional köklərinin seçilməsi ilə yoxlanılır.

Misal üçün üçbucağın üç tənbölənə görə qurulması haqqında məsələni gözdən keçirək. Tutaq ki, onlardan ikisi bir-birinə bərabərdir, üçüncüsü isə hər birindən dörd dəfə kiçikdir. O zaman üçbucaq bərabəryanlıdır və onun yan tərəfinin oturacağına nisbəti x-in $16x^3+16x^2-3x-4=0$ tənliyini ödəyəcəyini tapmaq çətin deyil. Tənlik nə rasional, nə də kvadratik-irrasional köklərə malikdir, deməli belə bir üçbucaq qurmaq olmur. Əgər məsələ hətta bir yeganə halda da həll edilmirsə, onda məsələnin heç ümumi həlli də yoxdur. Amma bu məsələ ümumiyyətlə həll edilmir fikirini iddia etmək olmaz. Əgər, məsələn, üç tənbölən bərabərdirlərsə, onda müvafiq olan üçbucaq bərabərtərəflidir və onu qurmaq asandır.

DAİRƏNİN BÖLÜNMƏSİ HAQQINDA MƏSƏLƏ

Bu köhnə məsələ riyaziyyatın tarixində qədimin üç məşhur məsələsindən az olmayan şərəfli bir yer tutur. Bu məsələdə verilmiş sayda tərəflər ilə düzgün çoxbucaqlı qurmaq lazımdır və ya çevrəni bərabər hissələrə bölmək lazımdır (bu eyni şeydir).

Qədimlər dairəni 2,3,4,5,6,8,10,12,15 hissəyə bölə bilirdilər. Ümumiyyətlə, düzgün $2n$-bucaqlını düzgün n-bucaqlıdan təkcə xaricinə çəkilmiş çevrənin bölündüyü qövsləri yarıbayarı bölmək ilə almaq olar. Belə üsul ilə k-bucaqlıya əsaslanaraq bütün $(2k)$-bucaqlıları qurmaq olar.

Onbeşbucaqlını qurmaq üçün çevrənin daxilinə eyni zamanda təkcə ümumi təpə ilə düzgün üçbucaq və beşbucaqlı çəkmək kifayətdir. Onların təpələri çevrəni böldüyü qövslərdən ən balacası 360°/15-ə (çevrənin 2/5–1/3=1/15) bərabər olacaq. Belə üsul ilə düzgün pq-bucaqlını da çəkmək olar, bunun üçün çevrənin daxilinə düzgün p-bucaqlı və q-bucaqlı çəkmək lazımdır və p və q rəqəmləri isə qarşılıqlı sadə olmalıdırlar (yəni 1-dən başqa ortaq bölənləri olmasın).

Düzgün yeddi və doqquz-bucaqlı qurmaq – bu zaman kvadrat radikallarda həll edilməyən tənliklər əmələ gəlirlər. Amma hansı düzgün n-bucaqlıları pərgar və xətkeş ilə qurmaq olar sualı uzun müddət açıq qalmışdır. *XVIII* və *XIX* əsrlərin sərhədində bu suala cavabı Karl Fridrix Qaus vermişdir. Böyük riyaziyyatçı isbat etdi ki, düzgün n-bucaqlı (burada n – sadə ədəddir), n ədədi $2^{2^k}+1$ şəklində olduqda və təkcə o zaman pərgar və xətkeşin köməyi ilə qurula bilər. Birinci bir neçə belə bir ədəd – 3,5,17,257, 65537. Qauss özü 17-bucaqlının qurulmasını tapdı. Qeyd etmək lazımdır ki, 19 yaşında etdiyi elə bu kəşf onun gələcək sənətini müəyyən etdi.

Elə bu üsul ilə riyazıyyatçılar təyin etdilər ki, qədimin üç məsələsindən təkcə ikisinin həlli yoxdur – bunlar kubun ikiqat artırılması və bucağın üçəbölünməsi haqqında məsələlərdir (bax "Qədimin üç məşhur məsələsi" məqaləsinə)

ALƏTLƏR İLƏ EKSPERİMENTLƏR

Qədim Yunanıstanda pərgar və xətkeş ilə qurmalardan istifadə edirdilər. Amma başqa alətlərdən də istifadə edirdilər – məsələn, iki bölgü nöqtəsi olan xətkeş (bax "Qədimin üş məşhur məsələsi" məqaləsinə). Belə xətkeş, misal üçün, Pappın məsələsini həll etməyə kömək edir: bucağın daxilində yerləşən nöqtədən verilmiş uzunluq ilə ucları bucağın tərəflərində yerləşən parça çəkmək. Göstərmək olar ki, bu sadə alət dördüncü dərəcədən yuxarı olmayan tənliklərə gətirilən bütün məsələləri həll edir (əlbəttə

ki, çevrəni xətkeşin köməyi ilə çəkmək olmaz. Adətən əgər mərkəz və çevrənin hansısa nöqtəsi verilibsə, onda hesab edilir ki, çevrə qurulub).

Amma icazə verilənin çərçivəsi genişlənən məsələlər yox, əksinə, daralan çərçivələr ilə məsələlər daha çox maraq kəsb edirdilər. Həndəsənin birinci məhdudlaşdırılmalarından biri o idi ki, pərgarın qollarının arasını dəyişdirmək olmaz. *X* əsrdə fars riyaziyyatçısı Məhəmməd Abul-Vəfa bu mövzuya elmi əsər yazdı və burada çoxlu sayda məsələlərin incə həllərini göstərdi.

1797-ci ildə italyan Maskeroni "Pərgarın həndəsəsi" elmi əsərini çap etdirdi. Bu əsərdə isbat olunurdu ki, pərgar və xətkeş ilə qurulan hər bir qurmanı təkcə bir pərgar ilə yerinə yetirmək olar (əlbəttə ki, pərgar ilə düz xətt qurmaq olmurdu və ona görə Maskeroni sayırdı ki, əgər iki nöqtə verilibsə, onda düz xətt artıq qurulub). Daha sonra, artıq *XX* əsrdə 1672-ci ildə çap edilmiş və yaddan çıxarılmış danimarkalı Q. Morun kitabı aşkar olunmuşdur. Bu kitabda alim başqa üsul ilə eyni teoremi isbat etmişdir.

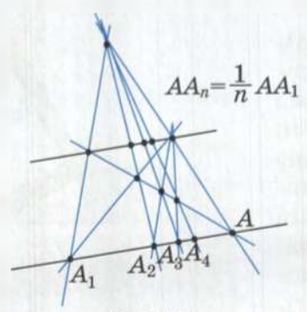
Məsələlərin daha bir sinfi – müstəvidə bir köməkçi fiqur vasitəsilə təkcə xətkeşin köməyi ilə qurmalardır. Məsələn, 13-cü şəkildən belə bir neçə qurma çıxartmaq olar: paralel düz xətt verilmə şərti ilə parçanın ikiqat artırılması və yarıbayarı bölünməsi, və tərsinə, verilmiş orta ilə parçaya paralel düz xəttin qurulması. 14-cü şəkildə isə ona paralel verilmiş düz xətt şərti ilə parçanın $1/n$ hissəsinin qurulması verilib. Ümumiyyətlə, əgər müstəvidə $ABCD$ paraleloqramı verilib, P nöqtəsini təkcə $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AD}$ (burada p və q – rasinal ədədlərdir) olduqda tək xətkeşin köməyilə qurmaq mümkündür.

Əgər müstəvidə qeyd olunmuş mərkəzlə çevrə çəkilibsə, onda pərgar və xətkeş ilə qurulan hər bir qurmanı təkcə bir xətkeş ilə qurmaq olar. Bunu 1833-cü ildə isveçrəli Yakob Şteyner sübut edib. 15*a* və *b* şəkillərində belə tipli iki qurma göstərilib: verilmiş A nöqtəsindən verilmiş dairəyə iki toxunan xətt və onun diametrinə isə perpendikulyar çəkilib (belə bir qurmalarda dairənin mərkəzi lazım deyil). Başqa sözlə, əgər məsələni təkcə pərgar və xətkeş ilə həll etmək olarsa, onda pərgarı təkcə bir dəfə istifadə etmək kifayətdir. Həm də alınır ki, daimi ara ilə pərgar adi pərgarı əvəz edir. Sonralar isə məlum oldu ki, həm də çevrədən istəyən qədər balaca bir qövsə və mərkəzə malik olmaq kifayətdir. Həm də verilmiş çevrənin mərkəzini təkcə xətkeş ilə qurmaq olmaz.

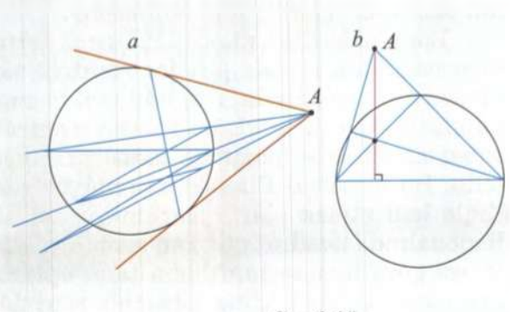
XIX əsrdə müxtəlif qeyri-klassik vasitələr ilə qurmaları çox böyük maraq ilə öyrənirdilər. Xüsusilə, ikitərəfli xətkeş (başqa sözlə, onun iki paralel kənarları ilə istifadə etmək icazə verilirdi) və düz bucaqlı günyə ilə qurulmuş qurmaları gözdən keçirdirdilər. Günyəni elə yerləşdirmək olar ki, onun ucları verilmiş nöqtələrdən keçsinlər, təpəsi isə verilmiş xəttə düşsün. Bu sadə olan alətlərdən hərəsi pərgar ilə xətkeşi asanlıqla əvəz edir, həmçinin hərdənbir daha sadə həllər almağa imkan verirlər. Hərdənbir hətta ekzotik alətlərdən də istifadə edilirdi – məsələn, tənbölənləri çəkmək üçün cihaz. Amma məlum oldu ki, maksimal imkanlara günyələrin cütü malikdir (bax "Qədimin üç məşhur məsələsi" məqaləsinə). Onların köməyi ilə dördüncü dərəcədən çox olmayan tənliklərə gətirilən hər bir məsələni həll etmək olar.



Şəkil 13.



Şəkil 14.



Şəkil 15.

QƏDİMİN ÜÇ MƏŞHUR MƏSƏLƏSİ

Qədim zamanlardan qurmaya aid üç məsələ məlumdur: kubun ikiqat artırılması, bucağın triseksiyası və dairənin kvadraturası haqqında məsələlər. Onlar riyaziyyatın tarixində xüsusi rol oynamışlar. Axırda sübut olundu ki, təkcə pərgar və xətkeşin köməyi ilə bu məsələləri həll etmək mümkün deyil. Amma məsələnin şərti – "həll edilməzliyini isbat etmək" – artıq irəliyə bir cəsarətli addım idi. Bununla birlikdə ənənəvi olmayan alətlər ilə həllərin çoxluğu təklif edilirdi. Bunlar cəbrdə və həndəsədə yeni ideyaların yaranmasına və inkişafına gətirdi. Riyaziyyat həvəskarları da standart olmayan və yaxın həllərdə müvəfəqiyyət qazanmışdılar – onların arasında qədimin üç məşhur məsələsi çox məşhur idi. Məsələlər hamıya asan gəlir: amma onların ifadələri bizi aldadır. Riyazi jurnalların redaksiyaları indiyə kimi bu məsələlər ilə bağlı məktublar alırlar. Bu məktubların müəllifləri çoxdan müəyyən edilmiş həqiqətləri təkzib etməyə çalışıb, üç məşhur məsələdən hər hansının pərgar və xətkeş ilə həllini təfərrüatları ilə təqdim edirlər.

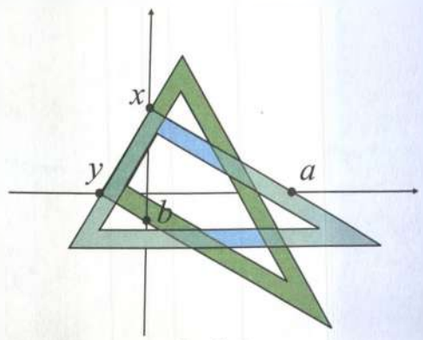
KUBUN İKİQAT ARTIRILMASI

Bu məsələdə verilmiş kubdan iki dəfə böyük həcm ilə kub düzəltmək tələb olunur. Axtarılan kubun tili $a\sqrt[3]{2}$-dır, burada a – verilmiş kubun tilidir. Əgər təxmin etsək ki, a=1, onda axtarılan kubun tili $x^3-2=0$ tənliyin köküdür. Bu məsələnin rasional kökləri yoxdur, deməli kvadratik-irrasional həlli də yoxdur. Beləliklə, kubun ikiqat artırlmasını pərgar və xətkeş ilə həyata keçirmək mümkün deyil. *XIX* əsrin əvvələrində təxminən belə fikirləşirdilər. Elə o vaxt bunun üçün lazım olan cəbr aparatı icad edilmişdir.

Elə hesab edilir ki, kubun ikiqat artırılması haqqında məsələ pifaqor məktəbi təmsilçilərinin zamanında, e.ə. 540-cı ildə əmələ gəlmişdir. Ola bilər ki, bu məsələ kvadratın ikiqat artırılması haqqında məsələdən əmələ gəlib. Bu məsələni Pifaqor teoremi ilə asandlıqla həll etmək olar – verilmiş kvadratın diaqonalında kvadrat qurmaq lazımdır. Əfsanələrə görə üstünə tanrıların taun epidemiyası göndərdikləri Afina şəhərinin sakinləri, Delos adasında yerləşən orakulun yanına nümayəndə heyəti göndərdilər. Onlar dəniz yoluxmasından qurtulmağı və tanrıların rəğbətini necə qazanmağı öyrənmək istəyirdilər. Cavab belə idi: "Apollon məbədinin qurbangahını ikiqat artırın və taun kəsiləcək". Qurbangah isə kub formalı idi. Afina sakinləri elə hesab edirdilər ki, məsələ çox asandır və ikiqat artırılmış til ilə qurbangah tikdilər. Amma taun daha da gücləndi. İkinci dəfə orakuldan soruşdular və belə bir cavab aldılar: "Həndəsəni daha yaxşı öyrənin". Tanrıların rəğbətini necə qazandıqları haqqında əfsanə daha heç nə demir, amma axır ki taun şəhəri tərk etdi. Kubun ikiqat artırılması haqqında məsələni artıq delos məsələsi adlandırmağa başladılar.

Başqa bir əfsanə də məlumdur. E.ə. *VI* əsrin yunan şərhçisi *I* Ptolemeya yazılmış məktub haqqında xəbər verir. Bu məktubda deyilir ki, çar Minos öz oğlunun məzarında kub formalı başdaşı tikib, amma abidənin ölçüləri ilə razı qalmamış, onu kubun iki dəfə artırılması üçün tilini ikiqat artırılması haqqında əmr verdi. Şərhçi çar Minosun səhvini göstərir (nəticədə fiqurun səthinin sahəsi dörd dəfə, həcmi isə səkkiz dəfə artırıldı) və deyir ki, o zaman həndəsə alimləri bu məsələni həll etməyə çalışdılar.

Amma xətkeş və pərgar ilə bu məsələni həll edə bilmədiklərinə görə, yunanlar başqa alətlərdən, mexanizmlərdən və xüsusi əyrilərdən də istifadə etdilər. E.ə. *V* əsrin məşhur alimi Xioslu Hippokrat kubun ikiqat artırılmasını verilmiş a və b parçaları üçün "iki orta mütənasib" x və y-in qurulmasına, yəni $a : x = x : y = y : b$ ($b=2a$ şərti ilə biz $x = a\sqrt[3]{2}$ alırıq) tənliyinin həllinə gətirdi. E.ə. təqribən 340-cı ildə bu ideyanı ənənəvi olmayan cizgi alətlərin – iki düz bucaq – köməyi ilə Platon reallaşdıra bildi (şəkil 1).



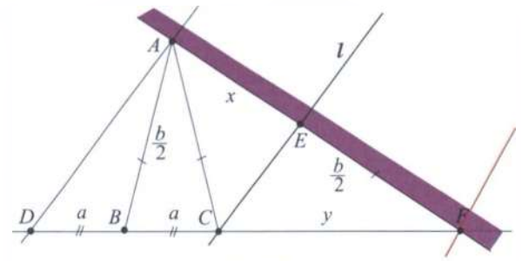
Şəkil 1.

E.ə. 350-ci ildə Menexm konik kəsiklərdən – müstəvinin konusla kəsişdiyi əyri xətlər (bax "Görkəmli əyrilər" məqaləsinə, burada əyrilər ilə qədimin üç məşhur məsələlərinin başqa həll üsullarını görmək olar) – istifadə edərək kubun ikiqat artırılması haq- qında məsələləri həll edirdi. Bu məsələ üçün həlləri həm də başqa böyük yunan riyaziyyatçıları da verib: Yevdoks, Eratosfen, Apolloniy, Heron, Papp və s.

Kubun ikiqat artırılması haqqında məsələnin həllərindən biri şəkil 2-də göstərilib. Burada $BC=BD$, $AB=AC=EF$, $l=CE$ düz xətti isə AD-yə paraleldir. $BC=a$, AB=b/2, $AE=x$ və $CF=y$ qəbul edərək, tapa bilərik ki, x və y – a və b-nin iki orta mütənasibidir və ya

$$x = \sqrt[4]{a^2b},\ y = \sqrt[4]{ab^2}$$

xüsusi halda, $b=2a$ şərti ilə $x = a\sqrt[3]{2}$. AEF düz xəttindən başqa bu fiqurdakı bütün nöqtələr və xəttlər pərgar və xətkeş ilə qurulur; düz xətti isə xətkeşdə işarələrə icazə versək çəkmək olar. E və F işarələri bizə kifayətdir; bir-birindən $b/2$ məsafədə onları çəkmək lazımdır. Onda AEF düz xəttini qurmaq üçün, xətkeşi elə qoyurlar ki, onun ucu A nöqtəsindən keçsin, o zaman bir işarə l üstünə düşəcək, başqası isə BC düz xəttinin üstünə.



Şəkil 2.

İsgəndəriyyədən Nikomed (e.ə. *II* əsr) bu məsələnin həlli üçün xüsusi əyri xəttdən istifadə etdi – konxoidadan ("konxoides" sözü yunan dilindən tərcümədə "midiya balıqqulağına oxşar" mənasını verir; şəkil 3).

ERATOSFENİN MEZOLYABİYİ

Qədim yunan alimi Eratosfen riyazi nəticələri və hadisələri əyani surətdə göstərmək fürsətini əldən qaçırmırdı və həmçinin praktiki həllərin alınma üsullarını təklif edirdi. Məsələn, o mezolyabiy icad edib – iki ədəd arasında iki mütənasibin hesablaması üçün cihaz.

Mezolyabiy iki paralel istiqamətlər ilə asanlıqla çəkilən üç eyni düzbucaqlı lövhədən (metaldan, taxtadan, kartondan və s.) ibarətdir; şəkildə gördüyünüz kimi hər lövhədə onun diaqonalı çəkilib (hər lövhə öz rənginə boyanılıb; şəkilə bax).

Əgər M nöqtəsi verilibsə (üçüncu lövhənin tilində), onda lövhələri elə qarışdırırlar ki, dörd nöqtə – A,Q,P və M – bir düz xəttin üstündə yerləşsinlər (P və Q başqa lövhələrin qırağı ilə diaqonalların kəsişmə nöqtələridir). Onda iki balaca üçbucağın görülən oxşarlığına görə AFN üçbucağın daxilində AF və MK qiymətləri arasında iki orta mütənasib alınır:

$$\frac{AF}{QG} = \frac{QG}{PH} = \frac{PH}{MK}$$

Xüsusi halda, əgər AF=2 və MK=1, onda $PH = \sqrt{2}$:

$$2 = \frac{AF}{MK} = \frac{AF}{QG}\cdot\frac{QG}{PH}\cdot\frac{PH}{MK} = \left(\frac{PH}{MK}\right)^3$$

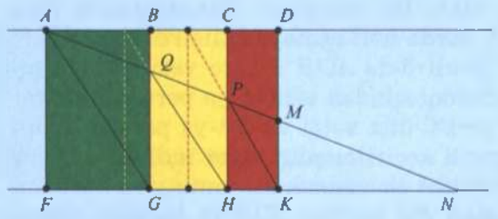
bu şərt bizə kubun ikiqat artırılması haqqında məsələni həll etmək imkanı yaradır.

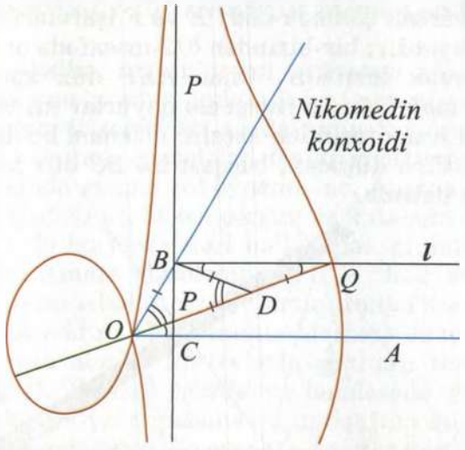
Məşhur məsələnin elə bu həll etmək üsulu haqqında Eratosfen çar Ptolemey Everqeta yazırdı:

"Alətlərin köməyi ilə biz məsələnin çox asan həll üsulunu icad etmişik; bu üsuldan istifadə edərək iki verilmiş düz xətt üçün biz iki yox, hətta üç orta mütənasib tapa bilərik. Bundan sonra biz ümumiyyətlə hər bir verilmiş paraleloqramlar ilə məhdudlaşmış həcmi kuba döndərmək, bir formanı başqasına, onları oxşar etmək və oxşarlığı qoruyaraq həm qurbangahları, həm də məbədləri böyüdə bilərik. Həmçinin maye və səpələnən cisimlərin ölçülərini biz kuba çevrildib, onun tərəfinin ölçüsü ilə müxtəlif qabların tutumlarını ölçə bilərik. Bu icad həmçinin katapulta və daşatanları böyütmək istəyənlər üçün faydalı olacaq, çünki atışın uzunluğunu artırmaq üçün, həmçinin mütənasib olaraq – həm enliyi, həm qiymətini, həm deşiyi, həm oynağı, həm qoyulan ağırlığları artırmaq lazımdır, bu isə orta - mütənasibliyi tapmadan mümkün deyil".

Arximedin əsərlərinin şərhçisi Evtokiy əsərlərindən birində – "Kürə və silindr haqqında" – Eratosfenin məktubunu əlavə kimi yerləşdirdi. Elə bu yolla o bizə qədər çatdı. Əlbət bilərək ki, epistollar (məktublar) və əlyazmalar o qədər də uzunömürlü deyillər, Eratosfen – o, İsgəndəriyyə kitabxanasını idarə edirdi – mezolyabiyini məbədde hədiyyə kimi yerləşdirdi. Və mezolyabini yazı ilə techiz etdi – bu yazıda mezolyabiy ilə iş qaydaları təsvir edilib. Və alimin icadı gələn nəsillər üçün qorunurdu.

Loqarifmik xətkeşin və noniusun əcdadı olan mezolyabiy xətkeş və pərgar kimi bərabərhaqqlı həndəsi alətə elə də dönmədi. Niyə?





Şəkil 3.

Əgər işarələnmiş xətkeşi həmişə elə yerə dəyişək ki, onun kənarı daima A (onu konxoidanın polyusu adlandırırlar) nöqtəsindən keçsin, E isə bütün l düz xətti boyunca qaçacaq (konxoidanın oturacağı), onda 2-ci şəkildə onu F nöqtəsi təsvir edəcək. EF daimi uzunluğu interval adlandırılır. Dəqiqləşdirsək, bu konxoidanın bir qolu olacaq; ikinci qolunu isə E-yə nəzərən F nöqtəsinə simmetrik nöqtə təsvir edir. Nikomed F nöqtəsini 2-ci şəkildə A polyusu və l oturacağı ilə konxoidanı çəkərək tapırdı. O, bu əyrilərin çəkilməsi üçün xüsusi bir cihaz icad etdi.

BUCAĞIN TRİSEKSİYASI

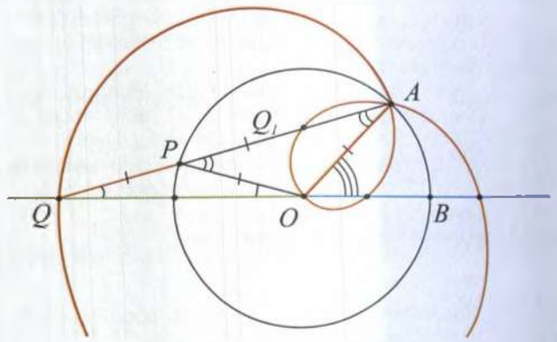
Hər bir bucağı pərgar və xətkeş ilə iki, bəzi bucaqları isə üç bərabər hissəyə bölmək çətin deyil. Axırıncı dediyimiz əməliyyat bucağın trisekisiyası adlandırılır. Məsələn, biz düzbucağın üçdə bir hissəsini düzgün üçbucağın bucağını yarıbayarı bölsək, qura bilərik, yaranmış 30° bucaqda tənbölən keçirtsək, biz 15°-li bucaq alacağıq – 45°-li bucağın üçdə bir hissəsidir. Əlbəttə, belə tipli qurmalar elə ümid yaradıb ki, hər bir bucağın xətkeş və pərgar ilə trisekisiyasını qurmaq olar. Bu məsələni Yunanıstanda hələ e.ə. V əsrdə həll etməyə çalışırdı- lar.

Şəkil 3-də AOB – bizə verilmiş bucaqdır, B nöqtəsindən isə OA-ya perpendikulyar olan $p=BC$ düz xətti və OA-ya paralel olan l düz xətti keçirilmişdir. Əgər indi biz $a=OPQ$ düz xəttini elə çəksək ki, onun p və l arasında qalan PQ parçası $2OB$-ya bərabər olsun, onda POC bucağı verilmiş bucağın üçdə bir hissəsini təşkil edəcək (bunu biz OBD və BDQ üçbucaqların bərabəryanlı olmağından (burada D – PQ parçasının ortasıdır) və üçbucağın xarici bucağı haqqında teoremdən istifadə edib, isbat edə bilərik). a düz xəttini işarələnmiş xətkeş ilə, yəni üstündə bir-birindən $2OB$ məsafədə iki işarə qoyulmuş xətkeşin köməyilə qurmaq olar.

Elə bu məqsəd ilə Nikomed O polyusu, p oturacağı və $2OB$ intervalı ilə öz konxoidasını düzəldib; o l xətti ilə axtarılan Q nöqtəsində kəsişir.

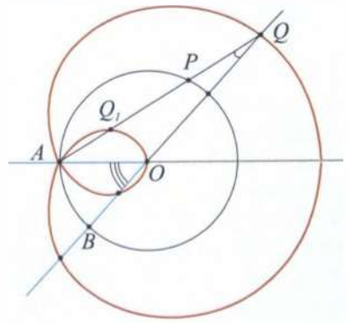
1593-ci ildə Fransua Viyet isbat etdi ki, hər hansı üçüncüdərəcəli tənliyi ya bucağın trisekisiyasına, ya da kubun ikiqat artırılmasına gətirmək olar. Hər iki məsələ konxoidanın köməyi ilə həll edildiyinə görə, Nyuton təklif etdi ki bu əyrini "standart" əyrilər sırasına daxil etsinlər.

Arximed öz trisekisiya üsulunu yaratdı. 4-cü şəkildə verilmiş bucaq – bu çevrənin radiusların arasındakı AOB bucağıdır. İşarələnmiş xətkeşin köməyi ilə biz A nöqtəsindən düz xətti elə keçirdək ki, OB düz xəttinin davamının və çevrənin arasında onun PQ parçası çevrənin radiusuna bərabər olsun. 3-cü şəkildəki kimi, burada da OAP və OPQ üçbucaqları əmələ gəlir və asanlıqla isbat etmək olar ki, OQA bucağı verilmişdən üç dəfə kiçikdir.



Şəkil 4.

Əlbəttə ki, elə bu halda da P nöqtəsini tapmaq üçün biz A polyusu və OB oturacağı ilə Nikomedin konxoidasından, daha dəqiq desək, onun oturacağından polyusa tərəf sabit parçanın yerləşdirilməsi zamanı əmələ gələn ikinci "daxili" qolundan istifadə edə bilərik. Hər verilmiş AOB bucağı üçün yeni konxoida çəkmək lazım olur. Amma bütün bucaqlar üçün bir əyri ilə də kifayətlənə bilərik. Elə bu A polyusu ilə konxoidanı gözdən keçirək, amma artıq oturacağı kimi bizim çevrəmizi götürək (şəkil 5); başqa sözlə desək, bu konxoidanı P çevrəni keçərkən, P-dən radiusa bərabər olan məsafəyə uzaqlaşan AP düz xəttinin Q və Q_1 nöqtələri təsvir edəcəklər. Alınan əyri xətt məşhur filosof və riyaziyyatçı Blez Paskalın atası Etyen Paskalın xatirəsinə Paskal ilbizi adlandırılır. 4 və 5-ci şəkilləri müqayisə edərkən, görə bilərik ki, əgər 5-ci şəkildə OB düz xətti verilmiş bucaq altında ilbizin OA simmetriya oxuna keçirilibsə, onda $\angle OQA$ onun üçdə bir hissəsinə bərabər olacaq.



Şəkil 5.

Elidli Qippiy (e.ə. təxminən 420-ci ildə) bucağın trisekisiyası üçün sonra kvadratissa adlandırılmış əyridən istifadə etmişdir.

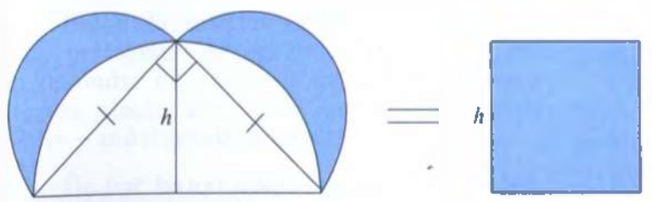
1837-ci ildə fransız riyaziyyatçısı P. Vansel qəti surətdə isbat etdi ki, trisekisiyanı pərgar və xətkeş ilə reallaşdırmaq mümkün deyil. Tutaq ki, $\beta = \alpha / 3$. Məlum olan düstura görə $cos\alpha = 4cos^3\beta - 3cos\beta$. Onda $x = 2cos\beta$ qiyməti üçün, belə bir tənlik alınır $x^3 - 3x - a = 0$, burada $a = 2cos\alpha$. Verilmiş α bucağın trisekisiyanın həndəsi məsələsi pərgar və xətkeş ilə təkcə o zaman həll ediləndir ki, alınmış cəbri tənlik kvadrat radikallarda həll edilən olsun. Götürək, məsələn, $\alpha = 60°$. Onda tənlik belə bir şəkil alacaq $x^3 - 3x - 1 = 0$. O kvadrat radikallarda həll edilən deyil, deməli, pərgar və xətkeşin köməyi ilə trisekisiya mümkün deyil. Ümumi halda da mümkün deyil. Maraqlısı odur ki, n tam olduqda $360°/n$ şəkili bucaqlar üçün trisekisiya təkcə n 3-ə bölünmədiyi halda mümkündür.

DAİRƏNİN KVADRATURASI

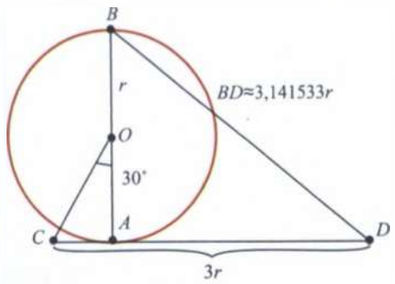
Dairənin kvadraturası haqqında məsələdə pərgar və xətkeşin köməyi ilə verilmiş dairəyə müadil olan kvadratın qurulması tələb olunur. Yəqin ki, bu məsələ hələ e.ə. iki min əvvəl qədim Misir və Babildə məlum idi. Bu məsələyə birinci dəfə e.ə. V əsrdə rast gəlirik. Qədim yunan tarixçisi Plutarxın dediklərinə görə filosof Anaksaqor həbsxanada vaxt keçirərkən, dairəni kvadrata gətirmək, yəni dairəni müadil kvadrata döndərmək istəyirdi. Əgər verilmiş dairənin radiusunu 1 götürsək, onda axtarılan kvadratın tərəfi $\sqrt{\pi}$ olmalıdır.

"Kvadraturçıların" ümidləri həm də onunla əsaslanırdı ki, pərgar və xətkeş ilə kvadraturalanan əyrixəttli fiqurlar mövcuddur. Xiosdan Hippokrat belə bir fiqurlardan birini tapıb – "Hippokratın ayparaları" (şəkil 6). O həmçinin kvadraturaya imkan verən başqa ayparaları da tapdı, amma əlbəttə ki, bu ona məsələni həll etməyə kömək etmədi. Qeyd edək ki, hansı ayparalar kvadraturalıdırlar sualı çətin oldu və tam olaraq təkcə XX əsrdə sovet riyaziyyatçısı N.Q. Çebotarev tərəfindən həll edilmişdi.

Çoxlu sayda qurmalar təklif edilmişdir. Amma ən yaxşı halda onlar π-nin kifayət qədər dəqiqliyi ilə yaxın qiymətini verirdilər (məsələn, şəkil 7). Amma başqa iki



Şəkil 6.



Şəkil 7.

məsələnin həllərindən fərqli olaraq, bu qurmalar prinsipal yaxın idilər. Buna baxmayaraq, bu qurmaların müəllifləri öz qurmaların dəqiqliyinə şübhələnmirdilər və bunu hərarətlə isbat edirdilər. Bu mövzuya ən məşhur mübahisələrdən biri İngiltərədə *XVII* əsrin iki böyük alimi – filosof Tomas Qobbs və riyaziyyatçı Con Vallis arasında baş verdi. Çox qoca yaşında Qobbs dairənin kvadraturasına həsr edilmiş ona yaxın "həll" çap etdirdi.

Beləliklə, dairənin kvadraturası haqqında məsələ üçündən ən çətini oldu. İki başqa məsələdə istifadə edilən üsul buraya uyğunlaşmadı, çünki π ədədinin mahiyyəti $\sqrt[3]{2}$-dən və triseksiyanın gətirildiyi tənliklərin başqa köklərindən fərqlidir. Təkcə 1882-ci ildə Ferdinand Lindeman isbat etdi ki, π ədədi transsendentdir, yəni tam əmsallı heç bir çoxhədlinin kökü deyil. Deməli, o həm də kvadratik-irrasional da deyil, çünki əks halda hansısa çoxhədlinin kökü olardı. Beləliklə, nəhayət ki Lindeman qədimin üç ən məşhur məsələlərindən axırıncısının pərgar və xətkeş ilə həlli probleminə nöqtə qoydu.

FƏZADA HƏNDƏSƏ

STEREOMETRİYANIN ƏSASLARI

Öz fəaliyyəti dövründə insan hər addımda fəza fiqurlarının formalarını, ölçülərini, qarşılıqlı yerləşməsini araşdırıb öyrənmək ehtiyacı ilə qarşılaşır. Belə tipli məsələləri həm ən böyük miqyaslar ilə qarşılaşan astronomlar, həm də atom və molekulların quruluşunu araşdıran fiziklər həll edirlər. Həndəsənin belə məsələləri araşdıran bölməsi stereometriya adlanır (yunan. "stereos" – "həcmi", "məkani").

Paradoksal görünə bilər, amma planimetriyadakı – müstəvidə həndəsə – "müstəvi" anlayışı lazım deyil. Məsələn, siz: "Üçbucağın müstəvisində nöqtə verilib", dedikdə güman edirsiz ki, müstəvidən kənarda da nöqtə var. Belə bir fərziyyə planimetriyada artıqdır: çünki bütün fəaliyyət təkcə bir müstəvidə baş verir. Stereometriyada biz artıq bir neçə müstəvi ilə iş aparırıq. Müstəvilərin hərəsində planimetriyadan məlum olan bütün anlayışlar və teoremlər qalır, amma müstəvilərin xassələrini yenidən təsvir etmək lazım olur.

STEREOMETRİYANIN AKSİOMALARI

Beləliklə, stereometriyada planimetriyanın əsas anlayışlarına daha biri əlavə olunur – müstəvi. Və onunla birlikdə müstəvilərin həndəsənin başqa obyektləri ilə "qarşılıqlı münasibətlərini" qaydaya salan aksiomlar da əlavə olunur. Belə aksiomların sayı üçdür.

Birincisi – fəzaya çıxış aksiomu – "həndəsi hərəkətlərin teatrına" yeni, üçüncü ölçü əlavə edir:

✓ **Bir müstəvidə yerləşməyən dörd nöqtə var (şəkil 1*a*).**

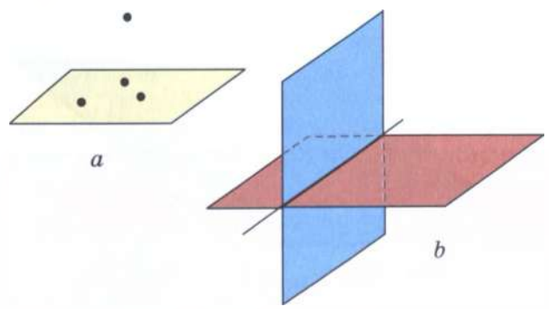
Beləliklə, müstəvidə heç də bütün nöqtələr yerləşmir. Amma bu kifayət deyil. Bizə lazımdır ki, müxtəlif müstəvilərin sayı sonsuz olsun. Bu ikinci aksiom ilə təmin edilir – müstəvinin aksiomu:

✓ **Üç hər hansı nöqtədən müstəvi keçir.**

Üçüncü aksiom ilə biz kağızdan fiqurlar düzəldəndə rastlaşırıq: hamı bilir ki, bu zaman əmələ gələn əymə xətləri – düz xətlərdir. Müstəvilərin kəsişmə aksiomu belədir:

✓ **Əgər iki müstəvinin ümumi nöqtəsi varsa, onda onların kəsişməsi düz xətdir (şəkil 1*b*).**

Buradan, yeri gəlmişkən, biz belə bir nəticəyə gəlirik ki, əgər üç nöqtə bir düz xəttin üzərində yerləşmirsə, onda onlardan keçən müstəvi yeganədir.



Şəkil 1.

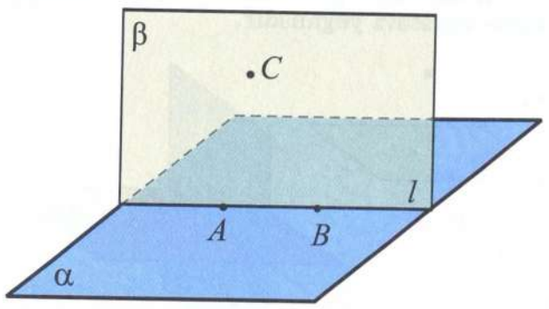
Həqiqətən, əgər hansısa üç nöqtədən iki müxtəlif müstəvi keçirsə, onda bu nöqtələrdən düz xətt keçirmək olar, yəni bu müstəvilərin kəsişdiyi düz xətti keçirtmək olar. Qeyd edək ki, axırıncı xassə özü tez-tez aksiomlara daxil edilir. Üçüncü aksiom stereometriyada çox vacib və elə də aşkar olunmayan rol oynayır: o fəzanı dəqiqlik ilə üçölçülü edir, çünki dörd və ondan artıq ölçülü fəzada müstəvilər bir nöqtə üzrə kəsişə bilərlər.

Üç verilmiş aksioma bir neçə müstəvini araşdırmağımızı nəzərə alaraq planimetriya aksiomları da əlavə edilir. Məsələn, düz xəttin aksiomunu – iki müxtəlif nöqtədən təkcə bir düz xətt keçirtmək olar – stereometriyaya eynən keçirdirlər, amma o artıq fəzanın müxtəlif nöqtələrinə yayılır.

Nümunə kimi elə bu aksiomdan çox faydalı bir nəticə çıxaraq: müstəvi ilə ən azı iki ümumi nöqtəsi olan düz xətt bütünlüklə bu müstəvidə yerləşir.

Tutaq ki, l düz xətti α müstəvisinin A və B nöqtələrindən keçir (şəkil 2). A müstəvisindən kənarda ən azı bir C nöqtəsi yerlə-

şir (fəzaya çıxış aksiomuna görə). Müstəvinin aksiomuna görə A,B və C nöqtələrindən β müstəvisini keçirmək olar. O C nöqtəsini daxil etdiyi üçün α müstəvisindən fərqlidir və α ilə iki ümumi nöqtəyə malikdir – A və B. Deməli, β α müstəvisi ilə A və B nöqtələrinin məxsus olduğu l düz xətti kimi düz xətt üzrə kəsişirlər. Düz xəttin aksiomuna görə müstəvilərin kəsişmə xətti l ilə üst-üstə düşür. Amma bu xətt, yəni l α müstəvisində yerləşir. Bunu da isbat etmək lazım idi.



Şəkil 2.

Sonra isə bizə lazım olan planimetriyanın aksiomlarını xatırladacağıq, hələlik isə əsas nəticəni ifadə edək:

✓ **İstənilən müstəvidə planimetriyanın bütün müddəaları doğrudur.**

Lakin, indi bizə "fəzaya çıxış" zamanı həndəsədə yaranan anlayışlar və faktlar haqqında danışmaq daha maraqlı olacaq.

DÜZ XƏTLƏR. MÜSTƏVİLƏR. PARALELLİK

Artıq düz xətlərin paralelliyi kimi anlayışın yeni bir ifadədə ehtiyacı var: Bir müstəvinin üzərindəki iki düz xəttin ortaq nöqtəsi yoxdursa, onlar paraleldir. Beləliklə, imtahanda tələyə düşməyin – iki paralel düz xətdən bir müstəvi keçirməyin mümkünlüyünü "isbat etməyin", çünki bu paralel düz xətlərin anlayışından artıq bəllidir! Stereometriyanın aksiomalarına daha bir, planimetriyanın məşhur paralellik haqqında aksiomu da əlavə edirlər və onun köməyi ilə fəzada paralel düz xəttlərin əsas xüsusiyyətini isbat edirlər:

✓ **Düz xətt üzərində yerləşməyən nöqtədən verilmiş düz xəttə təkcə bir paralel düz xətt keçirmək olar.**

Paralel düz xətlərin paralelliyin tranzitivliyi adlanan başqa xüsusiyyəti də qalır:

✓ **Əgər a və b düz xəttləri c düz xəttinə paraleldirlərsə, o zaman onlar bir-birinə də paraleldirlər.**

Amma stereometriyada bunu isbat etmək daha çətindir. Müstəvidə paralel olmayan düz xətlər kəsişməyə məcburdurlar və ona görə eyni zamanda üçüncü düz xəttə paralel ola bilməzlər (o zaman paralel xətlərin aksiomu pozulur). Fəzada isə paralel olmayan və kəsişməyən düz xətlər (onlar müxtəlif müstəvilərdə yerləşirlər) də var. Belə düz xətləri çarpaz xətlər adlandırırlar.

3-cü şəkildə kub təsvir olunub; AB və BC düz xəttləri kəsişirlər, AB və CD – paraleldirlər, AB və B_1C_1 isə çarpazdırlar. Gələcəkdə biz stereometriyanın anlayışlarını və faktlarını göstərmək üçün tez-tez kubun köməyinə əl atacağıq. Bizim kubumuz 6 kvadrat-üzdən ibarətdir. Buna əsaslanaraq, biz artıq onun başqa xüsusiyyətlərini çıxardacağıq. Məsələn, biz deyə bilərik ki, AB C_1D_1 paraleldir, çünki onların hər biri daxil olduğu kvadratların ortaq CD tərəfinə paraleldir.

Stereometriyada həm də müstəvilərin paralelliyi araşdırılır: iki müstəvi və ya bir müstəvi və düz xətt ortaq nöqtəsi yoxsa, paraleldirlər. Əgər düz xətt müstəvi üzərində yerləşirsə, onları paralel saymaq əlverişlidir. Müstəvilər və düz xəttlər üçün tranzitivlik haqqında teoremlər də düzdür:

✓ **Əgər iki müstəvi üçüncü müstəviyə paraleldirsə, onda onlar bir-birlərinə də paraleldirlər.**

✓ **Əgər düz xətt və müstəvi hansısa bir düz xəttə (və ya müstəviyə) paraleldirlərsə, onda onlar bir-biri ilə də paraleldirlər.**

İkinci teoremin xüsusi vacib halı – düz xəttin və müstəvinin paralellik əlamətidir:

✓ **Düz xətt müstəvi üzərindəki hər hansı düz xəttə paraleldirsə, müstəviyə də paraleldir.**

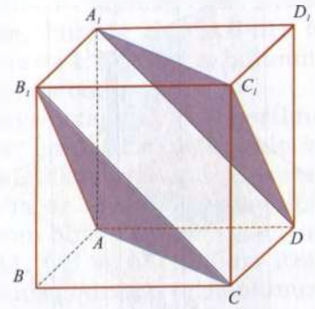
Bu isə müstəvilərin paralellik əlamətidir:

✓ **Əgər bir müstəvinin iki kəsişən düz xətti başqa müstəvinin müvafiq olaraq iki kəsişən xəttinə paraleldirsə, onda müstəvilər də paraleldir.**

Belə sadə teorem də tez-tez istifadə olunur:

✓ **İki paralel müstəvilərin üçüncü müstəvi ilə kəsişdiyi düz xətlər bir-birinə paraleldirlər.**

Kuba bir də baxaq (şəkil 3). Düz xəttin və müstəvinin paralelliyi haqqında əlamətdən nəticəyə gələ bilərik ki, misal üçün, A_1B_1 düz xətti $ABCD$ müstəvisinə paraleldir (çünki o bu müstəvidə yerləşən AB-ya paraleldir), kubun qarşı üzləri isə, xüsusi halda, $A_1B_1C_1D_1$ və $ABCD$, müstəvilərin paralellik əlamətinə görə paraleldirlər: bir üzdə



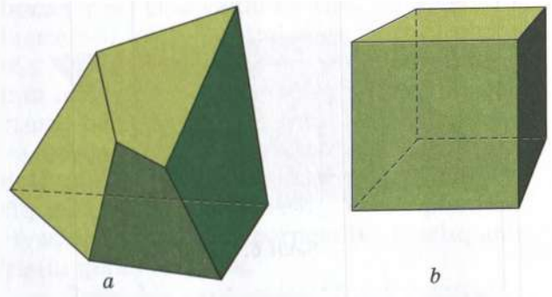
Şəkil 3.

A_1B_1 və C_1D_1 xətləri, baçqasında AB və CD xətlərinə müvafiq olaraq paraleldirlər. Və bundan daha asan bir nümunə. AA_1 və CC_1 düz xətlərindən keçən müstəvi $A_1B_1C_1D_1$ və $ABCD$ paralel müstəvilərini AC və A_1C_1 düz xətləri üzrə kəsir, deməli, bu düz xətlər paraleldirlər: ona oxşar olaraq B_1C və A_1D düz xətləri də paraleldirlər. Deməli, kubu üçbucaqlara görə kəsən AB_1C və A_1DC_1 müstəviləri də paraleldirlər.

FƏZA FİQURLARININ TƏSVİRİ

Belə bir aforizm var: "Həndəsə – bu düzgün olmayan cizgidə düzgün düşünmək sənətidir". Həqiqətən, əgər biz yuxarıda verilən düşüncələrə qayıtsaq, onda başa düşərik ki: onları müşahidə edən kubda yeganə fayda o oldu ki, bizim üçün işarələrin ifadəsi üçün yer qənaət etdi. Elə bu üsul ilə biz onu cisim kimi $4a$ şəkilində təsvir edə bilərdik, baxmayaraq ki, orada təsvir edilmiş "nə isə" nəinki kub deyil, heç çoxbucaqlı da deyil. Bununla belə yuxarıda qeyd edilmiş aforizmdə həqiqətin təkcə bir hissəsi qeyd edilib. Çünki "fikirləşmək" – hazır olunmuş isbatı ifadə etmək üçün – əvvəl onu fikirləşib tapmaq lazımdır. Bunun üçün isə verilmiş fiquru, onun elementləri arasında münasibəti özümüzə aydın təsvir etməliyik. Belə təsviri yaratmaq üçün bizə düzgün çəkilmiş cizgi kömək edə bilər. Bundan başqa, biz həmçinin görəcəyik ki, stereometriyada düzgün çəkilmiş cizgi elə belə məsələnin şəkili yox, o məsələnin həllinin əsası ola bilər.

Rəssam (dəqiq desək, realist-rəssam) kubu biz gördüyümüz kimi təsvir edəcək (şəkil 4*b*), yəni perspektivdə və ya mərkəzi proeksiyada. α müstəvisinə O nöqtəsindən

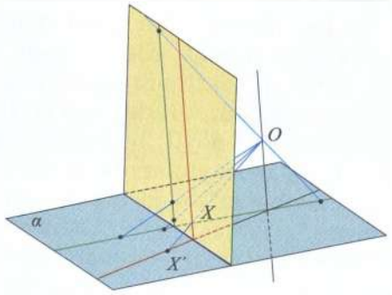


Şəkil 4.

(proyeksiyanın mərkəzi) mərkəzi proyeksiya zamanı ixtiyari X nöqtəsi X' kimi işarələnir, bu nöqtədə α OX ilə kəsişir (şəkil 5). Mərkəzi proyeksiya nöqtələrin düzxətli yerləşməsini saxlayır, amma, bir qayda olaraq, bucaqları və məsafələri dəyişdirməklə bərabər paralel düz xətləri kəsişən xətlərə çevirir. Onun xüsusiyyətlərinin öyrənilməsi həndəsənin vacib bölməsinin yaranmasına gətirib çıxartdı (bax: "Proektiv həndəsə" məqaləsinə).

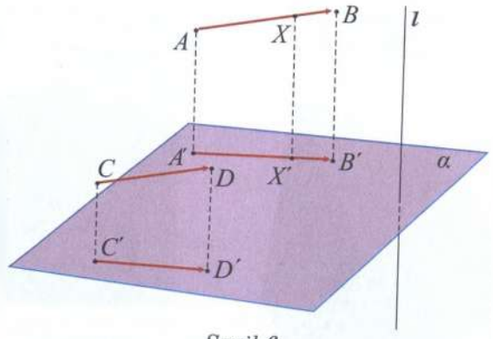
Amma həndəsi çertyojda başqa proeksiya istifadə edilir. O, mərkəz proyeksiyalamadan O mərkəzi sonsuzluğa uzaqlaşanda, və beləliklə də OX düz xətləri paralel olduqda yaranır.

A müstəvisini və onu kəsən l düz xəttini seçək. X nöqtəsindən l-ə paralel olan düz xətt keçirək. X' nöqtəsi – bu düz xəttin α



Şəkil 5.

müstəvisi ilə kəsişmə nöqtəsidir və α müstəvisinə l düz xətti boyunca X-in paralel proyeksiyasıdır (şəkil 6). Fiqurun proyeksiyası onun bütün nöqtələrinin proyeksiyalarından ibarətdir. Həndəsədə fiqurun təsviri dedikdə onun paralel proyeksiyasını başa düşürlər.



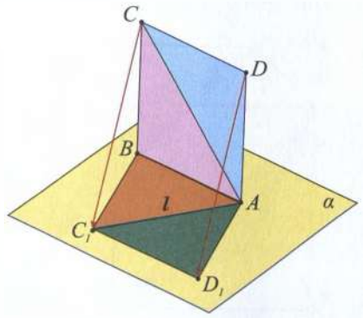
Şəkil 6.

Xüsusi halda, düz xəttin təsviri – düz xətdir ya da nöqtədir (düz xətt proyeksiyanın istiqamətinə paralel olduqda). Çertyojda paralel düz xətlər elə paralel də qalırlar, həmçinin burada paralel parçaların nisbəti də qalır, baxmayaraq ki, uzunluqları dəyişir. Yuxarıda deyilənlərin hamısını paralel proeksiyanın əsas xüsusiyyətinin çox qısa bir ifadəsinə sığışdırmaq olar:

✓ **Əgər, A', B', C' və D' – A,B,C,D nöqtələrin proyeksiyalarıdırsa və $\overline{AB} = \kappa\overline{CD}$ isə onda $\overline{A'B'} = \kappa\overline{C'D'}$.**

Buradakı cızıq o deməkdir ki, onlar istiqamətlənmiş parçalardır (vektorlar), bərabərlik isə – təkcə uzunluqların yox, həmçinin istiqamətlərin üst-üstə düşməsi deməkdir (şəkil 6). Beləliklə, əgər A və B nöqtələrinin təsvirini versək, onda birmənalı olaraq X-in bütün nöqtələrin təsvirləri də müəyyən ediləcək, çünki κ vuruğu $\overline{AX} = \kappa\overline{AB}$ bərabərliyində həm paralel proeksiyada, həm də orijinalında da eynidir. Oxşar olaraq, bir düz xətdə yerləşməyən üç nöqtənin təsvirinə görə birmənalı olaraq onlardan keçən müstəvinin bütün nöqtələrinin təsviri bərpa edilir. Bir müstəvidə yerləşməyən dörd nöqtə verildikdə isə, biz irəlicədən fəzanın bütün nöqtələrinin yerləşməsini müəyyən edirik.

Eyni zamanda verilmiş üç nöqtənin, yəni üçbucağın, təsviri istənilən ölçüdə üçbucaq ola bilər. Bunda əmin olmaq çətin deyil: verilmiş ABC üçbucağının AB tərəfindən α müstəvisini keçirək, onun içində lazım olan formada ABC_1 üçbucağı quraq və α müstəvisinə $l=CC_1$ düz xətti boyunca ABC üçbucağının proeksiyasını çəkək (şəkil 7). ABC şəklində bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucağı götürərək və onu $ABCD$ kvadratına qədər tamamlasaq, görərik ki, paralel proeksiyada

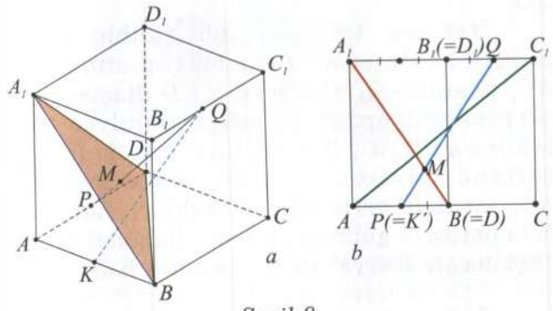


Şəkil 7.

kvadrat asanlıqla hər hansı bir paraleloqrama çevrilir. Bundan əlavə, həmçinin isbat etmək olar ki, hər hansı verilmiş üçbucaqlı piramidanın təsviri bir düz xəttə yerləşməyən, onları bir-biri ilə birləşdirən parçalar ilə hər hansı dörd nöqtə ola bilər.

Düzgün seçilmiş təsvir bizə məsələni düzgün həll etməyə kömək edir. Misal üçün götürək ki, kubun A_1BD kəsiyi tərəfindən (şəkil 8*a*) AD və B_1C_1 tillərinin P və Q ortalarını birləşdirən parçanı hansı nisbətlərə uyğun böldüyünü tapaq. Kuba BB_1 yan tili tərəfindən baxaq, dəqiq desək, BD düz xətti boyunca kubun AA_1C_1C müstəvisinə proyeksiyasını çəkək. Aydındır ki, bu daxilində oturacaqların ortalarını birləşdirən parça keçirilmiş AA_1C_1C düzbucaqlısı olacaq (B və D nöqtələri üst-üstə gələcəklər; şəkil 8*b*); axtarılan kəsik artıq balaca bir parçaya

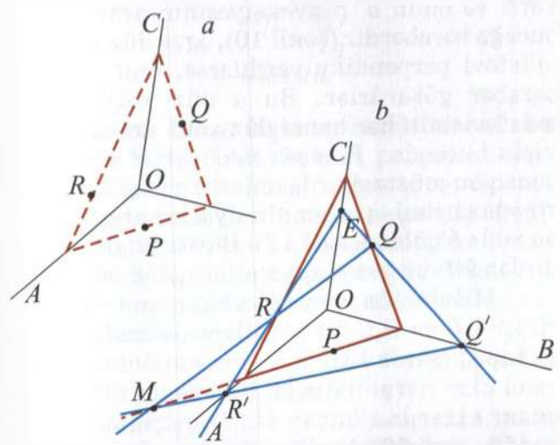
çevriləcək (8*b* şəklində o qırmızı rəngdədir), P və Q nöqtələri isə AD və B_1C_1 parçalarının ortaları olacaqlar. Aydındır ki, bizim şəklimizdə, $A_1Q=3PB$, onda deməli, $PM:MQ=1:3$. Paralel proyeksiyanın əsas



Şəkil 8.

xüsusiyyətinə görə bu bərabərlik həmçinin fəzada da düzdür. Elə bu proyeksiyanın vasitəsilə kubda çəkilmiş A_1BD müstəvisi ilə bölünmüş hər hansı parçanın hissələrinin arasında nisbəti tapmaq olar: xüsusi halda, KQ parçası, burada K – AB-nin ortasıdır, onunla yenə də 1:3 nisbətdə bölünür, AC_1 isə 1:2 nisbətində bölünür.

"Fəzaya çıxanda", yəni verilmiş müstəvi fiqur hər hansı fəza obyektinin təsviri kimi təqdim ediləndə alınan planimetrik məsələlər daha da effektiv görsənilirlər. Belə məsələlərdən biri: Təpə nöqtələri ortaq başlanğıclı OA, OB və OC şüaları üzərində olmaqla üçbucaq qurmaq tələb olunur və həmçinin onu elə qurmaq lazımdır ki, onun tərəfləri AOB, BOC və COA bucaqların daxilində verilmiş P,Q və R nöqtələrindən keçsinlər.



Şəkil 9.

Bu çox çətin məsələdir. Amma əgər siz əvvəlcədən onun cizgisinə (şəkil 9*a*) üzlərində üç nöqtə ilə üçüzlü bucağın təsviri kimi baxsaz, onda başa düşərsiz ki, siz bu bucağın PQR müstəvisi ilə kəsiyinin qurulması məsələsi ilə məşğul olursuz. Məsələnin həlli 9*b* şəklində verilir; yeri gəlmişkən, o həmçinin kəsiklərin qurulmasının əsas üsulunu aydınlaşdırır. OC şüasının sərbəst seçilmiş E nöqtəsindən verilmiş R və Q nöqtələrinin OAB müstəvisinə proyeksiyalarını çəkirik: R' və Q' nöqtələri alırıq. RQ düz xətti OAB müstəvi ilə $R'Q'$ düz xəttinin M nöqtəsində kəsişir. Axtarılan kəsiyin səthi OAB müstəvisi ilə MP düz xətti üzrə kəsişir. Qalanları isə aydındır.

PERPENDİKULYARLIQ. BUCAQLAR. MƏSAFƏLƏR

İndiyə qədər, biz heç yanda məsafə və bucaq kimi belə vacib həndəsi anlayışlardan lazımınca istifadə etmirdik. Hətta kubdada bizə təkcə, onun üzləri – paraleloqramlar lazım idi, onun bütün tərəflərinin və bucaqlarının bərabərliyi heç lazım deyildi. Kubun və başqa fəza fiqurların xassələrini bütün dolğunluğu ilə araşdırmaq üçün bizə müvafiq anlayışlar lazımdır. İlk əvvəl, planimetriyadan məlum olan perpendikulyarlıq anlayışını genişləndirək.

Əgər düz xətt müstəvini P nöqtəsində kəsirsə və bu müstəvidə P nöqtəsindən keçən hər hansı düz xətt ilə perpendikulyardırsa, onda deyirlər ki, verilmiş düz xətt və müstəvi perpendikulyardırlar.

Məsələn, bizə aydındır ki, kubun AA_1 tili $ABCD$ oturacağına perpendikulyardır. Amma bu tilin əslində oturacaqda yerləşən və A nöqtəsindən keçən hər hansı düz xəttə perpendikulyar olduğunu necə yoxlamaq olar? Məlum olur ki, bizə düz xəttin və müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətinə görə təkcə AA_1 xəttinin AB və AD ilə düz bucaq yaratdıqları kifayətdir:

✓ **əgər l düz xətti iki kəsişən a və b düz xəttinə perpendikulyardırsa, onda o, bu a və b düz xətlərindən keçən müstəviyə də perpendikulyardır.**

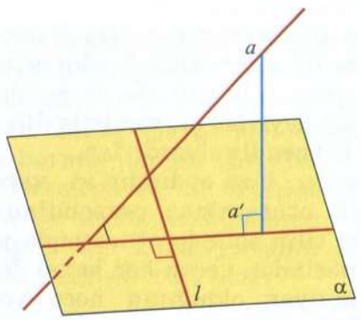
Həmçinin, burada l düz xəttinin a və b düz xətləri ilə kəsişdiyini söyləmək vacib

deyil. Əgər istənilən nöqtədən, xüsusi halda l düz xəttinin müstəvi ilə kəsişmə nöqtəsindən keçən düz xətlər perpendikulyardırsa, onda onlara paralel olan çarpaz düz xətlər də perpendikulyar olur. Beləliklə, indi artıq deyə bilərik ki, müstəviyə perpendikulyar olan düz xətt, müstəvidə yerləşən hər hansı düz xətt ilə perpendikulyardır. Aşağıdakı teorem doğrudur:

✓ **Fəzanın verilmiş nöqtəsindən verilmiş düz xəttə perpendikulyar olan təkcə bir müstəvi keçirmək olar və həmçinin bir nöqtədən verilmiş müstəviyə təkcə bir perpendikulyar düz xətt keçirmək olar.**

Müstəviyə perpendikulyar xətt boyunca ona paralel proeksiya verilmiş müstəviyə ortoqonal (yəni düzbucaqlı) proeksiya adlandırılır. Adətən, sadəcə "proeksiya" deyiləndə, ortoqonal proeksiya haqqında fikirləşirlər. O paralel proeksiyanın bütün ümumi xüsusiyyətlərinə malikdir. Amma onun həmçinin spesifik xüsusiyyətləri də var, onları fəzada bucaqlar və məsafələr haqqında məsələləri həll edəndə istifadə etmək olar.

Düz xəttin və müstəvinin perpendikulyarlıq əlamətindən çox sadə, amma çox vacib bir üç perpendikulyar haqqında teorem çıxır (şəkil 10):

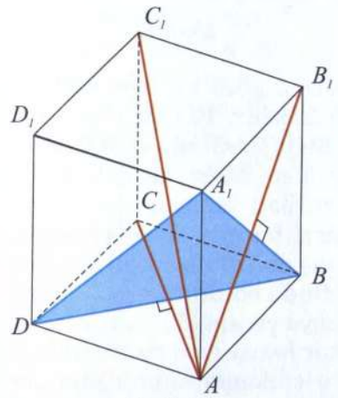


Şəkil 10.

✓ **Müstəvi üzərində mailin oturacağından keçirilmiş düz xətt, onun proyeksiyasına perpendikulyardırsa, onda o mailə də perpendikulyardır.**
Və tərsinə:
Müstəvi üzərindəki düz xətt mailə perpendikulyardırsa, onda o mailin proyeksiyasına da perpendikulyardır.

Müstəviyə mail müstəviyə perpendikulyar olmayan, amma onunla kəsişən hər hansı xəttə deyirlər. Bu teoremin hər iki şərti a və a'-dan keçən müstəvinin l düz xəttinə perpendikulyar olması ilə eyni güclüdür.

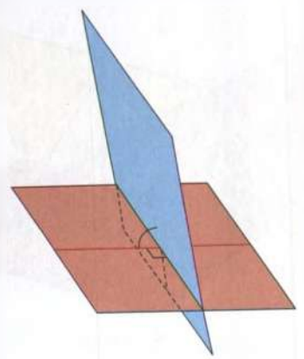
Hər iki teoremi kuba tətbiq edək (şəkil 11). Onun AC diaqonalının oturacağa AC_1 proeksiyası oturacağın BD diaqonalına perpendikulyardır; üç perpendikulyar teoreminə görə AC_1 diaqonalının özü də BD-yə perpendikulyardır. Elə bu səbəbə görə də AC_1 və A_1B perpendikulyardılar. Buradan belə nəticəyə gəlmək olar ki, diaqonal A_1BD "üçbucaqlı kəsiyə" də perpendikulyardır.

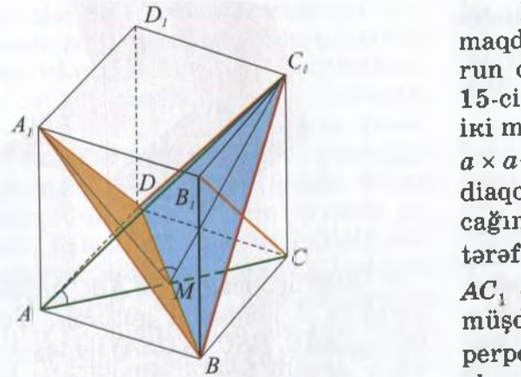


Şəkil 11.

Stereometriyada adi müstəvi bucaqlardan başqa həmçinin bucaqların daha üç növü ilə işləmək lazım olur. Çarpaz xətlər arasında bucaq tərifə görə onlara paralel olan kəsişən xətlər arasında bucağa bərabərdir. a düz xətti və α müstəvisinin arasında bucaq a düz xətti və onun a' proyeksiyasının arasındakı bucağa bərabərdir (şəkil 10), əgər düz xətt və müstəvi perpendikulyardılarsa, onu 90°-yə bərabər götürürlər. Bu a düz xətti və α müstəvisinin hər hansı düz xətti arasında ən kiçik bucaqdır. Kəsişən müstəvilər arasında bucaq bu müstəvilərdə onların kəsişmə xətlərinə keçirilmiş perpendikulyarlar arasındakı bucaqla ölçülür (şəkil 12). Bütün bu bucaqlar 0°-dən 90°-yə qədər qiymətlər qəbul edirlər.

Misal üçün, bizim kubumuzun tərəflərinin A_1B və B_1C diaqonalları arasında bucağı tapaq (şəkil 13). B_1C düz xəttini ona paralel olan qarşı üzün A_1D diaqonalı ilə əvəz edək: axtarılan bucaq BA_1D bucağına bərabərdir, yəni 60°-dir (BA_1D üçbucağı bərabərtərəflidir). AC_1 diaqonalı və kubun oturacağı arasında bucaq AC_1 düz xətti və onun oturacağa AC proeksiyası arasındakı CAC_1 bucağına bərabərdir, yəni $arctg(C_1C / AC) = arctg\left(1/\sqrt{2}\right)$. BDA_1 və BDC_1 müstəvilər arasında bucaq isə (şəkil 13) A_1MC_1 bucağına bərabərdir, burada M – BD-nın orta nöqtəsidir, çünki MA_1 və MC_1 düz xətləri bu müstəvilərdə yerləşir və onların BD kəsişmə xəttinə perpendikulyardırlar (çətin olmayan hesablama bizə *arccos* (1/3) verir).

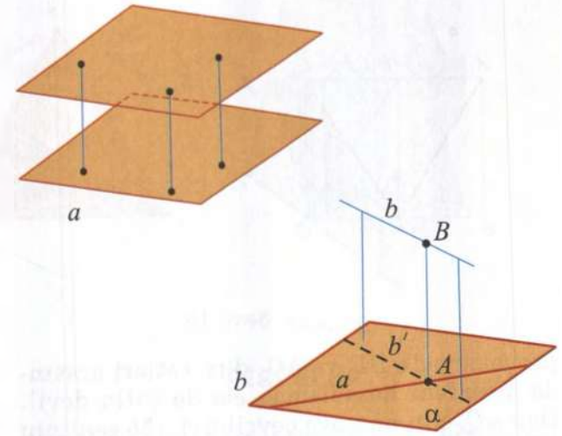

Şəkil 12.



Şəkil 13.

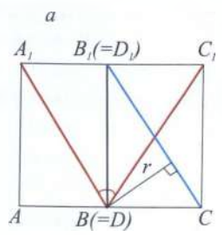
İki hər hansı fiqur arasında məsafə bu fiqurları birləşdirən ən qısa parçaya deyirlər. Deməli, nöqtədən müstəviyə məsafə nöqtədən müstəviyə çəkilmiş perpendikulyara bərabərdir – o hər hansı maildən qısadır, çünki düzbucaqlı üşbucağın kateti hipotenuzdan qısadır. Paralel müstəvilər arasında məsafə, aydındır ki, bir müstəvinin istənilən nöqtəsindən o biri müstəviyə qədər məsafəyə bərabərdir (şəkil 14*a*).

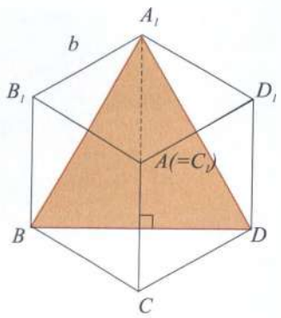
a və b çarpaz düz xətləri arasında məsafə haqqında sual daha maraqlandırıcıdır. a düz xəttindən b düz xəttinə paralel olan α müstəvisini keçirək (şəkil 11*b*), b düz xəttinin α-ya ortoqonal proeksiyasının a-düz xətti ilə A kəsişmə nöqtəsini və b-nin A-ya proeksiyalanan B nöqtəsini tapaq. AB parçası α müstəvisinə perpendikulyardır və ona görə a və b düz xətlərinin ortaq perpendikulyarıdır. Onun uzunluğu çarpaz düz xətlər arasında məsafəyə bərabərdir.



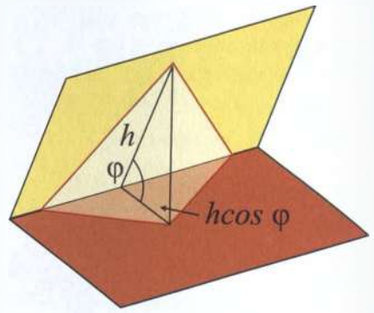
Şəkil 14.

Fəzada məsafələri və bucaqları tapmaqdansa, uyğun qiymətləri verilmiş fiqurun ortoqonal proeksiyasında tapmaq olar. 15-ci şəkildə tilinin uzunluğu a olan kubun iki maraqlı ortoqonal proeksiyası göstərilib: $a \times a\sqrt{2}$ ölçülü düzbucaqlı dördbucaq (ACC_1A_1 diaqonal müstəvisinə proeksiya və ya oturacağın BD diaqonalı boyunca proeksiya) və tərəfi $a\sqrt{2/3}$ olan düzgün altıbucaqlı (kubun AC_1 diaqonalı boyunca proeksiya; biz görmüşdük ki, AC_1 düz xətti BDA_1 müstəvisinə perpendikulyardır və ona görə tərəfi $a\sqrt{2}$ olan düzgün üçbucaq belə proeksiyada "pozulmur"). Birinci proeksiyanın köməyi ilə, məsələn, BDA_1 və BDC_1 müstəviləri arasında bucağı tapmaq olar – o bu müstəvilərin proeksiyalandığı iki qırmızı düz xətt arasında bucağa bərabərdir. İki çarpaz BD və B_1C tərəfləri arasında r məsafəsi isə $15a$ şəkildəki B nöqtəsindən B_1C düz xəttinə qədər məsafəyə bərabərdir (B və B_1C – uyğun olaraq birinci və ikinci diaqonalların təsviridir). Səbəbini fikirləşin (burada diaqonalların ortaq perpendikulyarının proyeksiya müstəvisinə paralel olduğu vacibdir). Asanlıqla tapmaq olar ki, $r = a/\sqrt{3}$. Elə bu





Şəkil 15.



Şəkil 16.

proyeksiyada BD və AC_1 düz xətləri arasında məsafəni hesablamaq elə də çətin deyil. Onu AC_1-nin nöqtəyə çevrildiyi $15b$ şəklinin köməyi ilə tapmaq daha da asandır: altıbucaqlının mərkəzindən BD-yə qədər məsafə altıbucaqlının tərəfinin yarısına, yəni $a/\sqrt{6}$-ya bərabərdir.

Fiqurun sahəsini, onun proeksiyasının sahəsini və müstəvilər arasında bucağı birbirinə bağlayan maraqlı bir əlaqəni qeyd edək:

✓ **Ortoqonal proeksiyanın S_{pr} sahəsi çoxbucaqlının S sahəsinin $\cos\varphi$-yə hasilinə bərabərdir, burada φ – çoxbucaqlının müstəvisi ilə proyeksiya müstəvisi arasında bucaqdır:**

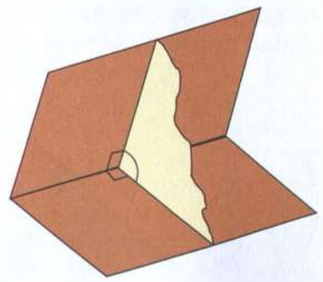
$$S_{pr} = S\cos\varphi$$

Bu iki müstəvinin kəsişmə xətti ilə bir tərəfi üst-üstə gələn (şəkil 16) və ya ona paralel olan üçbucaq üçün aydındır. Hər hansı üçbucağı isə belə üçbucaqlara bölmək olar. Əyrixətli fiqurları çoxbucaqlılar ilə yaxınlaşdıraraq, alarıq ki, proeksiyanın sahəsi üçün düsturlar həmçinin onlar üçün də düzdür.

İKİÜZLÜ VƏ ÇOXÜZLÜ BUCAQLAR

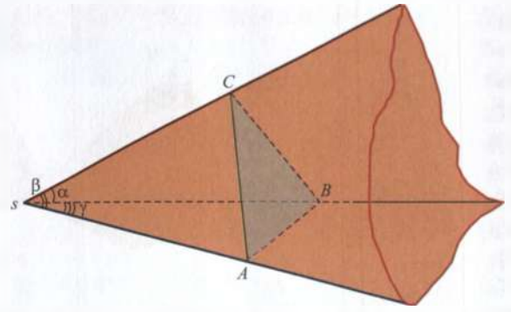
Ortaq düz xətlə məhdud edilmiş iki yarımmüstəvinin əmələ gətirdiyi fiqura ikiüzlü bucaq deyilir. (şəkil 17). Yarımmüstəvilər – onun üzləridir, ümumi sərhədləri isə tildir. Onun tilinə perpendikulyar olan müstəvi ilə ikiüzlü bucağın kəsişdiyi şüalar cütü ikiüzlü bucağın xəttli bucağını təşkil edir. İkiüzlü bucağın bütün xətti bucaqları bərabərdirlər və onların qiymətini ikiüzlü bucağın qiyməti kimi qəbul edirlər. Müstəvilər arasında bucaqdan fərqli olaraq onun qiymətləri 0°-dən 180°-yə qədər dəyişə bilərlər.

Bəzən ikiüzlü bucaq kimi ümumi sərhədli iki yarımmüstəvinin böldüyü fəzanın iki hissəsindən hər hansı birini götürmək rahatdır. Müvafiq olaraq belə bir "cismani" ikiüzlü bucağın xətti bucağı onun tilinə perpendikulyar olan müstəvinin, üzlərin bu müstəvi ilə kəsişdiyi şüalar ilə məhdudlaşan hissəsi olacaq. Onun qiymətləri isə 0°-dən 360°-yə qədər ola bilər.

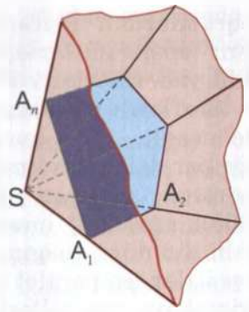


Şəkil 17.

ABC üçbucağını və ABC müstəvisindən kənarda S nöqtəsini götürək. Üç müstəvi bucaq (ASB, BSC və CSA) ilə təşkil olunmuş fiqur üçüzlü bucaq adlandırılır (şəkil 18). Müstəvi bucaqlar – onun üzləridir, S nöqtəsi – təpəsidir, SA, SB və SC şüaları isə – tilləridir. Xüsusiyyətlərin çoxu ilə üçüzlü bucaqlar üçbucaqları xatırladırlar. Üçüzlü bucağın altı əsas elementlərini seçmək olar: tillərin cütləri onun üçbucağın tərəflərinə müvafiq olan üç müstəvi bucaqlarını təşkil edirlər, üzlərin cütləri isə onları tərkibində saxlayan, üçbucaqda təpə bucaqlarına müvafiq olan ikiüzlü bucaqları verirlər. Adi üçbucağın tərəfləri kimi müstəvi bucaqlar da özünəməxsus "bərabərsizliyi" təmin edirlər: onlardan hərəsinin qiyməti başqa ikisinin cəmindən azdır. Amma elə burada



Şəkil 18.



Şəkil 19.

onların fərqi yaranır: üçüzlü bucağın "perimetri", yəni onun müstəvi bucaqlarının cəmi məhdudlaşdırılıb – o daima 360°-dən azdır. Ümumilikdə qeyd edilmiş bərabərsizliklər ($\alpha+\beta>\gamma$, $\beta+\gamma>\alpha$, $\gamma+\alpha>\beta$ və $\alpha+\beta+\gamma<360°$) α,β və γ müstəvi bucaqlar ilə üçüzlü bucağın mövcudluğunu təmin edirlər. Üçüzlü bucaqların və üçbucaqların oxşarlığının səbəbi əgər üçüzlü bucağı mərkəzi onun təpəsində yerləşən kürə ilə kəsişdirsək, daha aydın görsənir. O zaman üçüzlü bucağın xassələrini kəsişmədə yaranan sferik üçbucağın xassələri kimi təqdim etmək olar, onlar isə – özünəməxsus olsa da – adi üçbucaqların xassələrini təkrarlayırlar (bax "Sfera üzərində fiqurlar" məqaləsinə).

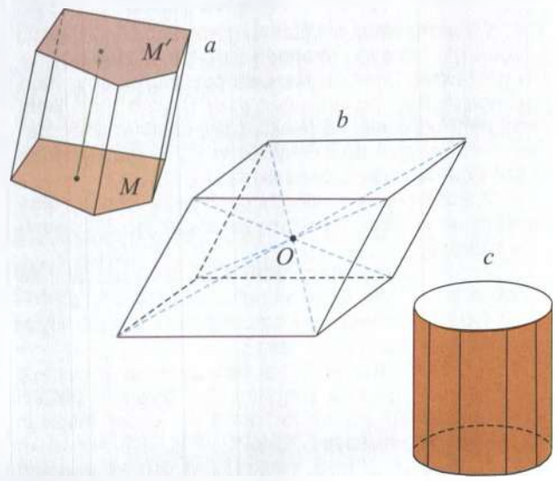
Əgər üçüzlü bucağın tərifində üçbucağı ixtiyari n-bucaqlı $A_1A_2\ldots A_n$ ilə əvəz etsək, onda çoxüzlü (düzgün desək, n-üzlü) bucağın tərifini alacağıq (şəkil 19). Üçüzlü bucaq üçün olduğu kimi, bunun üçün də onun təpəsi, tilləri, üzləri, müstəvi və ikiüzlü bucaqları müəyyən edilirlər. Çoxüzlü bucağın müstəvi bucaqları daim açıq bucaqdan (180°) azdılar və onlardan hər biri başqalarının cəmindən azdır. Qabarıq çoxüzlü bucaqda ($A_1A_2\ldots A_n$ qabarıq çoxbucaqlısına görə düzəldilmiş) müstəvi bucaqların cəmi 360°-dən azdır.

Çoxüzlü bucağın ikiüzlü bucağını təbii olaraq "içəridən" ölçmək lazımdır, başqa sözlər ilə, $A_1A_2\ldots A_n$ çoxbucaqlısının uyğun daxili bucağını saxlayan ikiüzlü "cismani" bucaq kimi; onun qiyməti 360°-yə qədər hər hansı bir qiymət qəbul edə bilər.

CİSİMLƏR

Stereometrik ekskursiyada bizim yoldaşımızı – kubu biz altı kvadratdan ibarət olan hansısa fiqur kimi, yəni səth kimi müəyyən etmişik. Onun daxilində olan nöqtələri, ona qoşsaq, onda biz cisim kimi kub alacağıq. İndi isə cisimlərin bir neçə ən sadə növləri ilə tanış olaq, sonra isə ümumiyyətlə, cisimin tərifini verək.

Prizmalar və silindrlər. M müstəvi çoxbucaqlısını götürək, onu onun müstəvisi ilə kəsişən düz xətt üzrə M' vəziyyətinə paralel köçürək və M-in bütün nöqtələrini onlara müvafiq olan M' nöqtələri ilə birləşdirək (şəkil 20a). Bizim keçirdiyimiz bütün parçaların birləşməsi olan cisim prizma adlandırılır (yunan "prizmadan" – "mişarla kəsilmiş nə isə"). Onun səthi oturacaqlardan – M və M' çoxbucaqlılardan və yan üzlərdən – müvafiq olan oturacaqlarda qurulmuş



Şəkil 20.

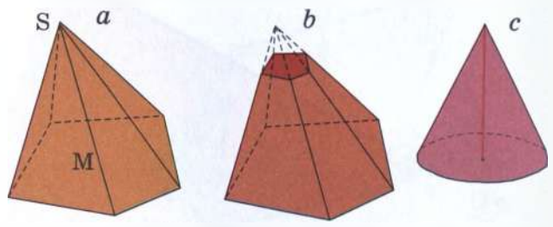
paraleloqramlardan ibarətdir. Oturacaqların uyğun təpələrini birləşdirən parçalar – prizmanın yan tilləridir. Prizmaları oturacaqların tərəflərinin sayına görə adlandırırlar – üçbucaqlı, ..., n-bucaqlı. Əgər onun oturacağı paraleloqramdırsa – onda prizma paraleloqrama oxşayan paralelepipeddir (şəkil 20*b*): məsələn, onun O simmetriya mərkəzi bütün dörd diaqonalın ortaq ortasıdır, qarşı üzlər isə paralel və bərabərdirlər. Əgər prizmanın yan tilləri oturacağa perpendikulyardırsa, onda deyirlər ki, o düzdür. Qalan prizmalar – maildirlər.

Oturacağı düzbucaqlı olan düz prizma – düzbucaqlı paralelepipeddir, kub isə onun bur növüdür. Kuba düzgün prizmanın (yəni oturacağı düzgün çoxbucaqlı olan düz prizma) bir növü kimi də baxmaq olar.

Prizmanın tərifində M çoxbucaqlısını dairə ilə əvəz etsək, biz dairəvi silindrin tərifini alarıq (yunan "kilindoros"; şəkil 20*c*). Oturacaqların çevrələrində uyğun olan nöqtələri birləşdirən parçalar doğuran adlanırlar. Əgər onlar oturacağa perpendikulyardırlarsa, onda silindr düzdür. Elementar həndəsədə düz dairəvi silindri adətən sadəcə silindr adlandırırlar.

Prizma və silindr, oturacaqları hər hansı müstəvi fiqur ola bilən ümumiləşdirilmiş silindrin növləridir.

Piramida və konus. "Piramida" sözünü həndəsəyə yunanlar daxil etdilər. Güman edilir ki, bu söz ən gözəl piramidaları yaradanlardan, misirlilərdən götürülüb. Başqa nəzəriyyəyə görə, piramida sözü "piros" (çovdar) sözündən əmələ gəlib, güman edirlər ki, yunanlar çörəkləri elə bu formada bişirirdilər. Prizmaya oxşar olaraq, piramida – M müstəvi çoxbucaqlısının – onun oturacağının – nöqtələrini oturacağın müstəvisində yerləşməyən S nöqtəsi – təpəsi – ilə birləşdirən parçalardan ibarət olan cisimdir (şəkil 21*a*). S nöqtəsindən M çoxbucaqlısının təpələrinə qədər keçirilən parçalar yan tillər adlandırılır. Yan tillər və M oturacağının hər tərəfi ilə təşkil olunmuş üçbucaqlar isə piramidanın yan üzləri adlandırılır. Oturacağında n-bucaqlı olan piramida n-bucaqlı piramida adlandırılır. Əgər piramidanın oturacağı – düzgün çoxbucaqlıdırsa, yan tilləri isə bərabərdirlərsə – belə bir piramida düzgün adlandırılır. Əgər piramidanın təpəsini oturacağa paralel müstəvi ilə kəsib atsaq, onda alınan fiqura kəsik piramida deyilir (şəkil 21*b*).



Şəkil 21.

Piramidanın tərifində M çoxbucaqlısını dairə ilə əvəz etsək, onda biz dairəvi konusun tərifini (yunan "konos" – "itiləmiş əşya"), ondan isə kəsik konusun tərifini alacağıq. Dairəvi konusun təpəsini çevrənin nöqtəsi ilə birləşdirən parça doğuran adlandırılır. Elementar həndəsədə konus anlayışı altında adətən düz dairəvi konus başa düşülür; onun təpəsinin proeksiyası oturacağın mərkəzinə çəkilir (şəkil 21*c*).

Konus və piramida – oturacağı hər hansı müstəvi fiqur ola bilən ümumiləşdirilmiş konusun növləridir.

Kürə və sfera. Verilmiş O nöqtəsindən R məsafəsində yerləşən fəzanın bütün nöqtələri ilə təşkil olunmuş fiqur sfera adlandırılır, O – onun mərkəzi, R – isə onun radiusudur. Sfera küreni məhdudlaşdırır. Radiusdan çox olmayan məsafədə yerləşən nöqtələrin çoxluğu kürə adlandırılır. Maraqlısı odur ki, mənasında və səslənmədə fərqinə baxmayaraq, iki termin yunan dilində olan bir sözdən əmələ gəliblər – "sfaira" – "şar", "top".

Əlbəttə ki, siz artıq gördünüz ki, sferanın və kürənin tərifləri dairə və çevrənin tərifləri ilə eyni görsənir. Bu iki cüt fiqurun xüsusiyyətlərində çox oxşar şey tapmaq olar. Məsələn, sferanın və müstəvinin qarşılıqlı yerləşməsini gözdən keçirəndə biz üç hal qeyd edə bilərik. Əgər müstəvidən sferanın mərkəzinə qədər d məsafəsi radiusdan azdırsa, onda müstəvi və sfera $\sqrt{R^2 - d^2}$ radiuslu çevrə üzrə kəsişirlər. Əgər $d=R$, onda müstəvi və sferanın bir ortaq nöqtəsi var, həmçinin müstəvi bu nöqtəyə çəkilmiş radiusa perpendikulyardır. Belə müstəvilər sferaya (və müvafiq olan kürəyə) toxunan adlanırlar. $d>R$ olsa, onda kürə və müstəvi kəsişmirlər.

Düz xəttin sfera ilə bir ortaq nöqtəsi varsa, düz xətt sferaya toxunandır. Bu nöqtədə sferaya toxunan bütün düz xətlər bu nöqtədə sferaya toxunan müstəvidə yerləşirlər. Toxunan xətlər haqqında teorem kürə üçün də düzdür: verilmiş nöqtədən kürəyə çəkilmiş bütün toxunan xətlərin, bu nöqtədən toxunma nöqtəsinə qədər parçaları bərabərdirlər.

Sfera üzərində fiqurların xüsusiyyətləri həndəsənin xüsusi bölməsində araşdırılır (bax "Sfera üzərində fiqurlar" məqaləsinə).

Fırlanma cisimləri. Silindri düzbucaqlının bir tərəfinin ətrafında fırlanmasından alınan cisim kimi təqdim etmək olar. Konusu isə – düzbucaqlı üçbucağın katet ətrafında fırlanmasından alınan, küreni isə – yarımdairənin diametrin ətrafına fırlanmasından alınan cisim kimi təqdim etmək olar. Qeyd edilmiş müstəvi fiqurların nöqtələri fırlanma zamanı ona perpendikulyar olan müstəvilərdə hansısa düz xətdə – fırlanma oxunda yerləşən mərkəz ilə çevrələri xaricinə çəkirlər. Ümumi halda belə üsul ilə yerləşmiş çevrələrin birləşməsini fırlanma fiquru adlandırırlar. Fırlanma fiqurlarının daha bir maraqlı halı – tordur, yəni çevrənin müstəvisində yerləşməyən, amma çevrə ilə kəsişməyən düz xəttin ətrafında fırlananda əmələ gələn səth. Əgər toru "doldursaq", yəni ki, çevrəni yox, dairəni fırlatsaq, onda dolutoriy adlı bir fırlanma cisimi əmələ gələcək. Fırlanma cisimlərin səthini və həcmini hesablamaq üçün gözəl və sadə düsturlar mövcuddur (bax "fırlanma cisimlərinin həcmi və səthi" məqaləsinə).

İxtiyari cisim. İndi isə artıq biz nəticə kimi cisimin ümumi bir tərifini verə bilərik. Amma bunu başlamaq üçün, bir az uzağa getməli olacağıq.

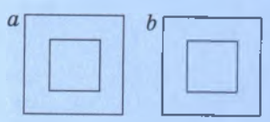
FƏZA TƏSƏVVÜRÜNƏ, TƏSVİRƏ VƏ... DÜŞÜNMƏYƏ BİR NEÇƏ MƏSƏLƏ

1. Rəsmxəttin qaydalarına görə çoxüzlünün "əks", bizdən görünməyən tərəfində yerləşən tillərini punktir ilə göstərmək lazımdır. Hansısa çoxüzlü bir fiqur həm qabaqdan, həm də yuxarıdan şəkil 1*a* və *b* göstərilmiş kimi eyni görsənir. Bu təsvirlərdə punktir yoxdur, deməli bizdən gizli tillər də yoxdur. Bu fiqurun yandan necə görünəcəyini özünüz fikirləşin.

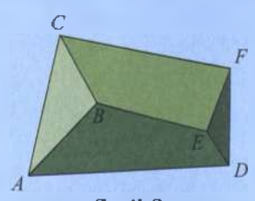
2. Şəkil 2 üzləri üç dördbucaqlı və iki üçbucaq olan çoxüzlünün təsviri (məsələn, yuxarıdan görünüş kimi) ola bilərmi?

3. 3-cü şəkildə qarşı tilləri birləşdirən parçalar ilə üçbucaqlı piramida təsvir olunub. Şəkilə görə bu parçaların fəzada kəsişdiklərini başa düşmək olarmı? Əgər bu mümkündürsə, onda necə?

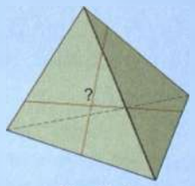
4. Düzgün tetraedrin hər tilini üç bərabər hissəyə bölüblər və bölünmə nöqtələrindən tərəflərə paralel olan müstəvilər keçirdiblər (şəkil 4). Onlar tetraedri hansı və neçə hissəyə bölürlər?



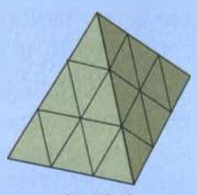
Şəkil 1.



Şəkil 2.



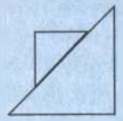
Şəkil 3.



Şəkil 4.

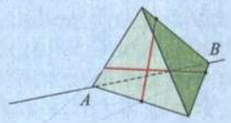
368-Cİ SƏHİFƏDƏKİ MƏSƏLƏLƏRƏ CAVABLAR

1.



2. Xeyr. *AD*,*BE*,*CF* düz xəttləri bir nöqtədə kəsişməlidirlər.

3. Olar. Əgər göy düz xəttlərin kəsişmə nöqtələri *AB* düz xəttində yerləşirsə, ya da onlar paraleldirlərsə, parçalar təkcə o zaman kəsişirlər (yəni bir müstəvidə yerləşirlər)



4.15 hissəyə: verilmişdən üç dəfə balaca 11 tetraedr və 4 düzgün oktaedr.

Fəzada hər hansı bir fiqurda daxili oblastı və sərhədi seçmək olar. Belə ki, kürənin sərhədi uyğun sferanın nöqtələrindən, piramidanın sərhədi isə – onun yan üzlərinin və oturacağın nöqtələrindən ibarətdir. Daha ciddi danışsaq, onun yaxınlığında fiqura məxsus olan nöqtələr, həm də fiqura məxsus olmayan nöqtələr yerləşirsə, nöqtəni sərhəd nöqtəsi adlandıra bilərik. Nöqtə özü isə ola bilər ki, fiqura aid olmasın. Misal üçün, O təpəsindən başqa, konusun bütün nöqtələrindən ibarət olan fiquru araşdıraq. O nöqtəsi – sərhəd nöqtəsidir, amma o həmçinin fiqura aid deyil. Fiqurun sərhədi – onun sərhəd nöqtələrinin çoxluğudur. Öz sərhədini daxil edən fiqur qapalı fiqur adlanır. Və ona görə yuxarıda göstərilmiş təpəsiz konus – açıq fiqurdur. Fiqurun sərhəd nöqtəsi olmayan nöqtələri onun daxili oblastını təşkil edirlər; onlar elə belə də adlanırlar – daxili nöqtələr. Hər hansı daxili nöqtə üçün mərkəzi bu nöqtədə olmaqla bütövlükdə bu fiqura aid olan kürəcik mövcuddur. Misal üçün, R radiuslu kürənin mərkəzdən $x<R$ məsafədə yerləşən nöqtəsi üçün $R-x$ radiuslu kürəcik götürmək olar.

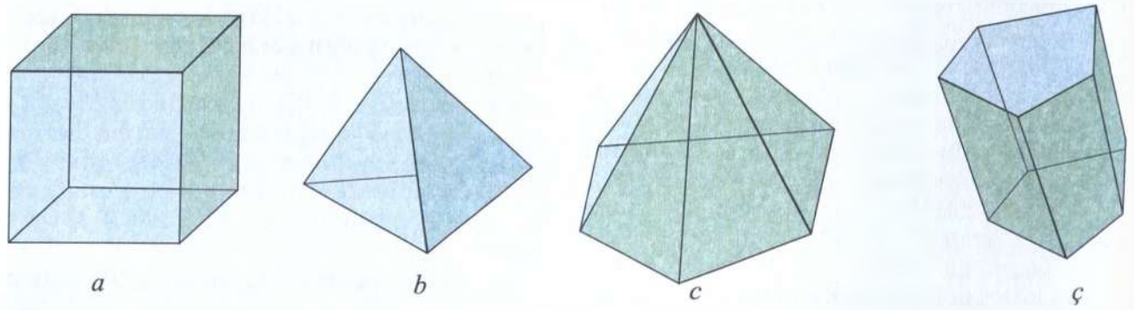
Daxili nöqtələrə malik olan, sərhədi daxili oblastin sərhədi ilə üst-üstə gələn və fiqurun daxilində hər hansı iki nöqtəni sınıq xətt ilə birləşdirmək imkanı verən fiqur cisim adlanır. Qabarıq cisimdə isə hər hansı iki nöqtə arasında fiqurun daxilində yerləşən parça çəkmək olar. Yuxarıda göstərilmiş fiqurların – prizma, konus, kürə və s. – cisim olduğunu yoxlamaq çətin deyil. Cisim olmayan fiqurların nümunələri: sferadan "təmizlənmiş" kürə; yarımfəza; kvadrat; iki toxunan kürədən ibarət olan fiqur. Onların hərəsi üçün tərifin hansısa bir hissəsi pozulur (hansı olduğunu təyin edin). Cisimin sərhədini onun səthi adlandırırlar.

Cisimlərin vacib bir sinfini çoxüzlülər – sərhədləri çoxbucaqlılardan ibarət olan cisimlər təşkil edirlər. Onlara prizma və piramidalar misaldır.

Çoxüzlülər bu bölmənin başqa məqalələrində danışılan çoxlu sayda maraqlı xüsusiyyətlərə malikdirlər.

ÇOXÜZLÜLƏR

Sərhədi çoxbucaqlılardan ibarət olan cisim çoxüzlü adlanır. Uşaq kubikləri, arxitektur binalar, zərgərlik bəzəkləri – çoxüzlüləri siz hər yerdə tapa bilərsiz. Məsələn, kub (şəkil 1*a*). Onun səthi altı bərabər kvadrat ilə – üzlər ilə təşkil olunub. Hər üz dörd təpəyə malikdir, amma təpələrin hamısı eyni vaxtda üç üzə aiddirlər; kubun ümumiyyətlə, səkkiz təpəsi var. Hər üzün dörd tərəfi var. Üzlərin tərəfləri kubun tilləri adlandırılır. Onların ümumi sayı 12-dir və onun hər tili iki üzə məxsusdur. Demək olar ki, kub ("kubik") – bizə ən yaxşı məlum olan çoxüzlüdür. Amma ən sadəsi deyil. Bu mənada çempion üçbucaqlı piramida və ya tetraedrdir (şəkil 1*b*). O təkcə dörd təpəyə malikdir, bundan az götürmək heç olmaz, çünki hər hansı üç nöqtəsi bir müstəvidə yerləşir. Üzlərin sayı da dörddür – təpələri tetraedrin təpələrində yerləşən üçbucaqlardır, tillərin sayı isə altıdır. Sadəliyinə baxmayaraq, tetraedr çoxlu sayda maraqlı xüsusiyyətlərə malikdir (bax "Tetraedrin həndəsəsi" məqaləsinə). Tetraedr və kub – məktəbdə, bizim ətrafımızda ən tez-tez rast



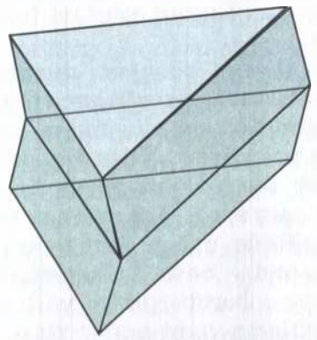
a *b* *c* *ç*

Şəkil 1.

gəldiyimiz çoxüzlülərin iki ailəsinin nümayəndəsidirlər. Tetraedr – piramidanın, kub isə prizmanın bir növüdür. Bütün nöqtələri qeydə alınmış bu cisimlərin tərifləri "Stereometriyanın əsasları" məqaləsində verilib. Amma çoxüzlüləri başqa üsul ilə də – onların üzlərini təsvir edərək təyin etmək olar.

Belə ki, n-bucaqlı piramida – bir üzü ixtiyari n-bucaqlı (oturacağı), qalan n üzləri isə – üçbucaqlar olan çoxüzludur. Onların üzlərinin hansı üsul ilə birləşdiyini dəqiqləşdirməmək də olar, çünki əgər siz onlardan çoxüzlü təşkil etmək istəsəz, onda dərhal əmin olarsız ki, bütün üçbucaqlar ortaq təpəyə malik olmalıdırlar, onların bu təpə qarşısındakı tərəfləri isə oturacağın tərəfləri olmalıdırlar.

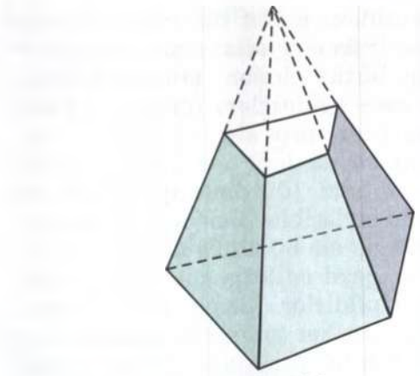
Oxşar olaraq, n-bucaqlı prizma paralel müstəvilərdə yerləşən iki bərabər n-bucaqlılardan (oturacaqlar) və n sayda paraleloqramlardan təşkil olunub. Amma asta olun, verilmiş tərifdə balaca n hərfini yaddan çıxarmayın! Ən mötəbər lüğətlərdə və



Şəkil 2.

hərdən həndəsə dərsliklərində aşağıdakını oxumaq olar: prizma – ikiüzü paralel tərəflər ilə çoxbucaqlı olan çoxüzlüdür, qalan üzləri isə – paraleloqramlardır. Elə bir hər şey düzdür, amma 2-ci şəkildən gördüyümüzə görə bu, düzgün tərif deyil. Və hətta qabarıq çoxüzlülər ilə məhdudlaşsaq da, o düzgün olmayacaq. Özünüz kontr nümunə fikirləşməyə çalışın. Eyni zamanda belə bir sual üstündə fikirləşin: bütün üzləri kvadrat olan hər çoxüzlü kubdurmu? Cavablar – məqalənin axırındadır.

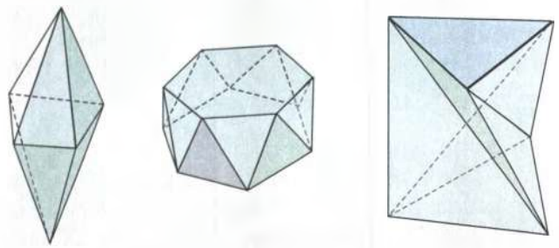
Prizma və piramidalar ilə bağlı çoxüzlülərin daha bir neçə növü 3-cü və 4-cü şəkildə göstərilib: kəsik piramida, bipiramida (ümumi oturacağa görə simmetrik olan iki



Şəkil 3.

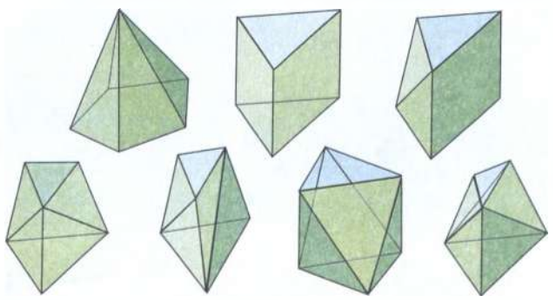
piramidanın birləşməsi), antiprizma (düzgün n-bucaqlı prizmanın oturacağını mərkəzin ətrafında $180°/n$ dərəcəyə fırlatsaq və oturacaqların təpələrini ziqzaqşəkilli sınıq xətt ilə birləşdirsək, belə bir fiqur alınacaq).

Əgər üçbucaqlı antiprizmanı daha da güclü "burmağa başlasaq" 4-cü şəkildə göstərilmiş çoxüzlü əmələ gələcək. ilk baxışdan o heçnə ilə fərqlənmir. Amma o intuisiyaya zidd olan maraqlı bir xüsusiyyətə malikdir: fərqi olmadan hər hansı dörd təpəni götür, onlar ilə müəyyən edilən tetraedr antiprizmanın daxilində bütövlükdə yerləşməyəcək! Müstəvidə buna oxşar heç nə mümkün deyil: hər hansı çoxbucaqlını yeni təpələr əlavə etmədən üçbucaqlara bölmək olar. "Həddindən artıq burulmuş antiprizmanın" bu paradoksal xüsusiyyəti onun qabarıq olmamasından irəli gəlir (xatırladaq ki, cisim, xüsusilə, çoxüzlü o zaman qabarıq adlanır ki, hər hansı iki nöqtə ilə birlikdə, o həmçinin onları birləşdirən parçanı da daxil edir; bax "Qabarıq fiqurlar" məqaləsinə). Hər hansı qabarıq çoxüzlünü şəkillərdə gördüyümüz kimi, təpələri onun təpələri ilə üst-üstə gələn tetraedrlərə bölmək olar.



Şəkil 4.

5-ci şəkildəki kəsik piramida və kub tamamilə əks xüsusiyyətlərə malikdirlər – birincisində bütün üzlər müxtəlifdirlər, ikincisində isə – eynidirlər, amma müəyyən mənada onları bir sinfə aid etmək olar: hər ikisinin eyni sayda üzü var (altı), bütün üzləri bir tiplidir (dördbucaqlılardır) və eyni qayda ilə birləşiblər (hər təpədə üç-üç). Paralelepiped də elə bu sinfə aiddir. Deyirlər ki, bütün qeyd edilmiş çoxüzlülər eyni kombinator tiplidirlər. Başqa sözlə desək, bu çoxüzlülərdən hər hansının təpəsinə hər hansı başqa çoxüzlünün təpəsini elə tutuşdurmaq olar ki, uyğunluq qarşılıqlı birqiymətli olacaq, əgər bir çoxüzlüdə təpələr til ilə birləşdiriliblərsə (və ya bir üzdə yerləşirlər), onda başqa çoxüzlünün uyğun təpələri üçün də bu düz olacaq. "Həddindən artıq burulmuş antiprizma" və 4-cü şəkildə təsvir olunmuş bipiramida eyni tiplidirlər. Çoxbucaqlının tipini də oxşar olaraq müəyyən etmək olar, amma burada hər şey daha da asandır: aydındır ki, eyni sayda təpələri olan çoxbucaqlılar bir tipə aiddirlər. Çoxüzlülər isə başqadırlar. Verilmiş B sayda təpələr ilə onların tiplərinin sayı sürətlə çoxalır. Əgər B=4 isə, qabarıq çoxüzlülərin bir növü var – üçbucaqlı piramida, B=5 isə – iki (dördbucaqlı piramida və üçbucaqlı bipiramida), amma B=6 olduqda onların sayı artıq 7-dir (şəkil 5), B=7 olduqda 34-dür, B=8 – artıq 257-dir, B=9 – 2606-dır, B=10,11,12 isə artıq 30000, 400000 və 5000000-dən böyük ədədlər alınır. Belə bir qiymətləndirilmə və ümumiyyətlə çoxüzlülərin kombinatorikasının belə bir məsələləri bizim vaxtımızda xətti proqramlaşdırma ilə bağlı praktiki məna kəsb etməyə başladı. Xətti proqramlaşdırılma tətbiqi riyaziyyatın, ilk növbədə



Şəkil 5.

riyazi iqtisadiyyatın, elə bir bölməsidir ki, burada çoxölçülü fəzalarda qabarıq çoxüzlülərdə xətti funksiyaların ən böyük və ən kiçik qiymətlərinin hesablanması üsulları işlənib hazırlanırlar.

Çoxüzlü formaların ucsuz-bucaqsız okeanında öz mükəmməlliyi ilə beş düzgün çoxüzlü və ya platon cisimləri seçilir. Onların qurulması ilə də Evklidin "Başlanğıc"ı bitir.

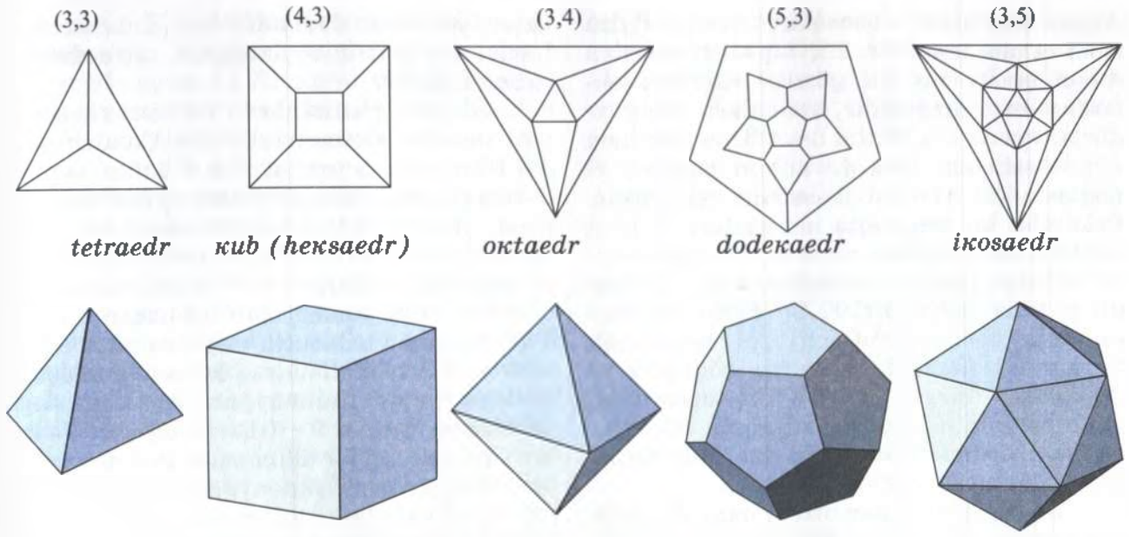
PLATON VƏ ARXİMED CİSİMLƏRİ

Əgər çoxbucaqlının tərəfləri və bucaqları bərabərdirsə, onda belə bir çoxbucaqlı düzgün adlanır. Elə bu üsul ilə düzgün çoxüzlülər də müəyyən edilir.

Üzləri bərabər düzgün çoxbucaqlılar və hər tildəki ikiüzlü bucaqları bərabər olan çoxüzlüyə düzgün çoxüzlü deyilir.

Düzgün çoxbucaqlıların sayı sonsuz qədər çoxdur: hər $n \geq 3$ üçün düzgün n-bucaqlı mövcuddur (bununla belə oxşarlığa qədər dəqiqlik ilə bir dənə). Düzgün çoxüzlülərin sayı isə beşdir. Bunun səbəbini başa düşməyə çalışaq.

Dərhal qeyd edək ki, düzgün çoxüzlünün təpələrində çoxüzlü bucaqlar bərabərdirlər, çünki onların müstəvi və ikiüzlü bucaqları bərabərdirlər. Xüsusilə, bu o deməkdir ki, hər təpədə eyni sayda üz cəmləşir. Onu q ilə işarə edək. Əgər gözdən keşirtdiyimiz çoxüzlünün üzləri – düzgün p-bucaqlılardırsa, onda onun müstəvi bucaqları $\pi(p-2)/p$-yə bərabərdirlər və hər təpənin ətrafındakıların cəmi isə – $\pi q(p-2)/p$-yə bərabərdir. Amma qabarıq çoxüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının cəmi 2π-dən azdır. Beləliklə $q(p-2)<2p$. Bu bərabərsizliyi həmçinin belə bir şəkildə yazmaq olar: $(q-2)(p-2)<4$. İndi isə, nəzərə alaraq ki, p və q – 3-dən az olmayan tam ədədlərdir, (p,q) mümkün olan cütləri seçmə ilə tapmaq asandır. Bunlardır: (3,3), (4,3), (3,4), (5,3) və (3,5). 6-cı şəkildə yuxarıdan hər qeyd edilmiş hal üçün "tor", yəni çoxüzlünün tillərinin birləşməsinin sxemi təsvir olunub. Tor – kombinator tipli çoxüzlünün əyani təsviridir. Düzgün çoxüzlünün torunun birmənalı olaraq (p,q) ədədlər cütü ilə müəyyən edilməsini asanlıqla yoxlamaq olar. Müstəvidə sadəcə p-bucaqlı çəkin və onu yeni p-bucaqlılar ilə əhatə edin, vacib deyil ki, hamısı düzgün olsun, amma bir vacib şərtin təmin



Şəkil 6.

edilməsi ilə: hər təpədə onların sayı q-yə bərabər olmalıdır. Torların altında elə 6-cı şəkildə çoxüzlülərin özləri təsvir olunub. Onların hamısı müxtəlif sayda üzlərə malikdirlər və onların saylarına görə adlar da alıblar: tetraedr (4 üz; yunan "tetra" – dörd və "xedron" – "üz"), heksaedr (6 üz; o bizə kub kimi məlumdur), oktaedr (8 üz), dodekaedr (12 üz), ikosaedr (20 üz). Amma riyaziyyat üçün hətta üçölçülü şəkil də obyektin mövcudluğunu isbat etmir. Fərz edin ki, məsələn, siz 12 bərabər düzgün beşbucaqlıdan, hər təpədə onları üç-üç birləşdirərək dodekaedr düzəldirsiz. Elə alınmayacağını ki, siz növbəti üzü yapışdıranda əmələ gəlmiş aralığa yerləşdirmək məqsədi ilə hansısa üzü əyib bükə bilərsiz? Bundan başqa, siz hələ yoxlamalısız ki, düzəldilmiş çoxüzlülərdə ikiüzlü bucaqlar bərabər olsunlar.

Biz ona əsaslanacağıq ki, (p,q)=(4,3) ilə düzgün çoxüzlü – kub mövcuddur: bu aydındır. Kubun əsasında çoxüzlülərin başqa dörd növünü də düzəltmək olar. Əsassız deyil ki, İohann Kepler kubu bütün düzgün cisimlərin "əcdadı" sayırdı.

Kubun qarşı üzlərinin kəsişən diaqonallarının ucları düzgün tetraedrin təpələridir (şəkil 7*a*). Kubun hər üzünün mərkəzini qonşu üzlərin mərkəzləri ilə birləşdirərək, biz 12 bərabər parça – düzgün oktaedrin tillərini (şəkil 7*b*) alacağıq. Çoxüzlülərin hər ikisinin üzləri – düzgün üçbucaqlardır, bu cisimlərdən hərəsinin tilini isə hər hansı başqasına kubun çevrilməsi ilə keçirmək olar, bu çevrilmə ilə çoxüzlü özü özünə keçir. Buradan ikiüzlü bucaqların bərabərliyi alınır.

İkosaedri isə düzəltmək bundan çətindir. Kubun hər tərəfində üzün mərkəzində onun iki tərəfinə paralel olan eyni x uzunluğu ilə parçaları elə çəkək ki, qonşu üzlərdə parçalar perpendikulyar olsunlar (7*c* şəkilində qırmızı parçalar). Şəkildə göstərilmiş kimi qırmızı parçaların uclarını birləşdirək (göy xətlər ilə). Bizdə (3,5) tipli iyirmiüzlü alınacaq, yəni onun bütün üzləri – üçbucaqlardır və hər təpəsinin yanında onların sayı beşdir. Kubun simmetrikliyinə görə, ikosaedrin bütün göy tilləri, bu tillərdə ikiüzlü bucaqlar kimi bərabərdir. x-i elə seçək ki, göy tillər qırmızı tillərə bərabər olsunlar. Pifaqor teoreminin köməyi ilə göy tilin uzunluğunu x ilə ifadə edək. Onda (şək. 7*c*):

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 = AC^2 + CD^2 + DB^2 =$$

$$= (x^2 + a^2 + (a-x)^2)/4$$

Burada a – kubun tilinin uzunluğudur. $AB^2 = x^2$ şərti müsbət kökü $x = a\left(\sqrt{5}-1\right)/2$-yə bərabər olan $x^2 + ax - a^2 = 0$ tənliyinə gətirir. Maraqlı odur ki, a-nın yanında alınan vuruq, yəni kubun daxilinə çəkilmiş ikosaedrin tili x-in kubun tilinə nisbəti – hər yerdə mövcud olan qızıl kəsikdir. Verilmiş x qiymətində bizim çoxüzlünün üzləri – düzgün üçbucaqlardır.

Amma hələ ikiüzlü bucaqların bərabərliyini isbat etmək lazımdır. Bir təpədən, məsələn A-dan çıxan beş tili gözdən keçirək; onlardan biri qırmızıdır, qalanları isə göydürlər (şəkil 7*c*). Bütün beş tilin ucları həm A nöqtəsindən, həm də kubun mərkəzi O nöqtəsindən də eyni məsafədə yerləşirlər. Beləliklə, bu beş nöqtə mərkəzləri O və A nöqtələrində yerləşən sferaların kəsişməsində yerləşir, yəni bir çevrədə və onları birləşdirən tillər bərbərdirlər. Çevrənin daxilinə çəkilmiş bərabərtərəfləri olan beşbucaqlı düzgündür. Deməli: bizim beş nöqtəmiz və A nöqtəsi – düzgün piramidanın təpələridir, onun təpəsinin yanındakı ikiüzlü bucaqlar isə bərabərdirlər, yəni qırmızı tildə bucaq göy tildə bucaq kimidir.

Dodekaedri ikosaedrdən oktaedri kubdan alınma üsulu ilə almaq olar. Biz görmüşük ki, ümumi təpə ilə beş üz düzgün beşbucaqlı piramida, onların mərkəzlərini birləşdirən parçalar isə düzgün beşbucaqlını əmələ gətirir (şəkil 7ç). Belə üsul ilə əmələ gələn beşbucaqlıların sayı on ikidir. Onikiüzlünün təpələrində yerləşən üçüzlü bucaqlar eyni müstəvi bucaqlara malikdirlər, yəni onlarda ikiüzlü bucaqlar da bərabərdirlər. Deməli, bu, düzgün dodekaedrdir.

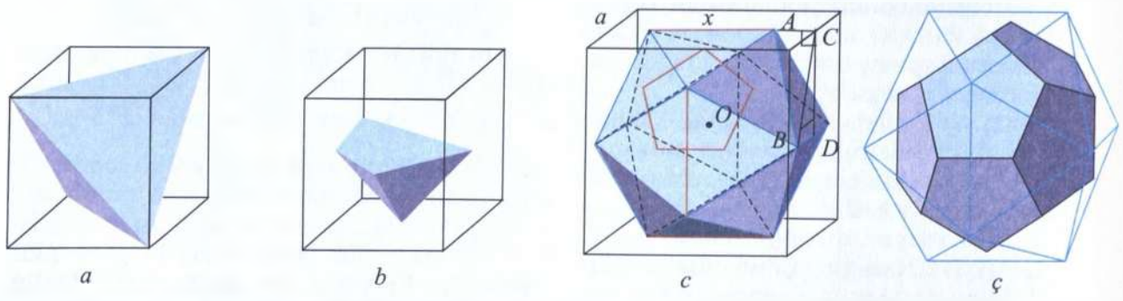
Beləliklə, (p,q) cütün hər beş mümkün olan qiymətləri üçün düzgün çoxüzlü düzəldilib. Və verilmiş p və q ilə hər hansı düzgün çoxüzlü elə bu p və q ilə başqasına oxşar olacaq, çünki p və q ədədləri birmənalı olaraq üzlərin formasını və düzgün çoxüzlünün ikiüzlü bucaqlarının qiymətini müəyyən edir.

Biz (p,q) tipli düzgün çoxüzlünün üzlərinin mərkəzləri (q,p) tipli düzgün çoxüzlünün təpələri olmasından iki dəfə istifadə etmişik. Qalan hallarda da bu düzgün olacaq. İki belə çoxüzlü ikili adlanırlar. Onların eyni sayda tilləri var, amma təpələr və üzlər yerlərini dəyişdiriblər. Kub və oktaedr, dodekaedr və ikosaedr, tetraedr özözünə ikilidir.

Düzgün çoxüzlülərin mühüm xüsusiyyəti onların simmetrikliyidir. Çoxüzlünün AB tilini və ona yanaşı olan F üzünü seçək. O zaman onun belə bir özünə uyğunlaşdırılması, yəni öz-özünə keçirən hərəkəti mövcuddur ki, AB tili hər hansı verilmiş CD tilinə keçəcək, A nöqtəsi – C və ya D ucuna, F üzü isə – ona yanaşı olan iki üzdən birinə. Tillərin, onun uclarının və yanaşı olan üzün surətləri birmənalı olaraq özünəuyğunlaşma verirlər, onda özünəuyğunlaşmaların sayı $4P$ olacaq, harada P – tillərin sayıdır. Və bu bir tipli çoxüzlülər üçün maksimal mümkün olan miqdardır. Özünəuyğunlaşmaların yarısı – müvafiq olaraq $2\pi / p$, π və $2\pi / q$-yə bölünən bucaqlara dönmələrdir (çoxüzlünün mərkəzini üzlərin mərkəzi, tillərin ortası və təpələr ilə birləşdirən oxların ətrafında). Başqa yarısı isə – müstəvilərə nəzərən simmetriyalar və "güzgü dönmələri"dir (dönmə oxuna perpendikulyar olan müstəviyə nisbətdə dönmələr ilə icra edilməklə birlikdə). Qeyd edilmiş "maksimal simmetriklik xüsusiyyətini" tez-tez düzgün çoxüzlünün tərifi kimi qəbul edirlər.

Düzgün çoxüzlüləri həmçinin platon cisimləri də adlandırırlar, baxmayaraq ki Platondan bir neçə əsr əvvəl belə cisimlər haqqında Pifaqorun şagirdləri də bilirdilər. "Timey" dialoqunda Platon onları dörd əsas element ilə bağlayıb. O belə hesab edirdi ki, kub, tetraedr, oktaedr və ikosaedr müvafiq olaraq torpağın, odun, havanın və suyun korpuskul formasına malikdilər. Beşinci çoxüzlünü isə o bütün Kainatın modeli sayırdı.

Başqa məşhur yunanın Arximedin, adı ilə isə yarıdüzgün adlanan çoxüzlüləri bağlayırlar (arximed cisimləri). O onları bizə



a *b* *c* *ç*

Şəkil 7.

çatmamış "Çoxüzlülər haqqında" kitabında təsvir edib. Düzgün çoxüzlülərin kəsilməsi ilə əmələ gələn 13 Arximed cisiminə və iki sonsuz seriyaya – düzgün prizma və bərabər tillər ilə antiprizmaya – malikik.

Platondan sonra Kainatın quruluşunu çoxüzlülər ilə bağlamaq təşəbbüsünü reallaşdırmağa İohann Kepler çalışdı. O, onun vaxtında məlum olan altı planetin orbitlərini daxil edən sferaları gözdən keçirtdi. Və böyük və ya az dəqiqlik ilə sferalar arasında beş düzgün çoxüzlü yerləşdirdi. Onları o elə üsul ilə yerləşdirdi ki, onlardan hərəsi daha balacasının xaricinə çəkilmişdir və eyni zamanda daha böyüyün daxilinə çəkilmişdir. Amma həndəsədə Keplerin adı onun açdığı iki ulduzlu düzgün cisimlər ilə bağlıdır. Onların ümumi sayı dörddür; qalan ikisini fransız riyaziyyatçısı Lui Puanso 1809-cu ildə tapıb.

EYLER DÜSTURU

Bir cədvəl tərtib edək və daxilinə bir neçə çoxüzlü üçün təpələrin (B), tillərin (P) və üzlərin (Q) sayını yazaq:

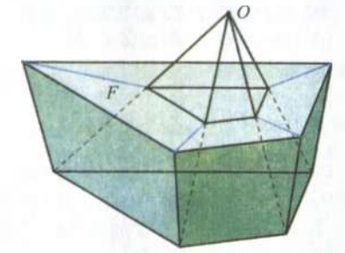
Çoxüzlü	B	P	Q
Dodekaedr	20	30	12
Oktaedr	12	30	20
n-bucaqlı piramida	$n+1$	$2n$	$n+1$
n-bucaqlı prizma	$2n$	$3n$	$n+2$

Görmək çətin deyil ki, cədvəldəki bütün çoxüzlülər üçün təpələrin sayı çıx tillərin sayı və üstəgəl üzlərin sayını 2-yə bərabərdir:

$$B-P+Q=2 \qquad (*)$$

Siz bu bərabərliyin düzgünlüyünü gözdən keçirtdiyimiz başqa çoxüzlülər üçün də – hətta sizin seçiminizə görə hər hansı qabarıq çoxüzlülər üçün də yoxlaya bilərsiniz. İlk dəfə belə bir gözəl münasibəti 1620-ci ildə Rene Dekart tapdı. 1720-ci ildə qabarıq çoxüzlülərin tiplərinin onların təpələrinin sayından asılılığını təsvir edəndə bu münasibəti Eyler yenidən açdı. İndi bunu Eyler düsturu adlandırırlar.

Eyler münasibətinin isbatlarının sayı çoxdur. Onlardan birində çoxbucaqlının bucaqlarının cəmi üçün düstur istifadə edilir. Çoxüzlünün kənarında hansısa F üzünə yaxın olan O nöqtəsini götürək və qalan üzləri isə mərkəz O-dan F üstünə proeksiyasını çəkək (şəkil 8). Onların proeksiyaları F üzünün çoxbucaqlara bölünməsini təşkil edirlər



Şəkil 8.

(düzgün çoxüzlülərin torları belə üsul ilə düzəldiliblər). Bütün alınan çoxbucaqlıların və F üzünün özünün σ bucaqları cəmini iki üsul ilə hesablayaq. n-bucaqlının bucaqlarının cəmi $\pi(n-2)$-yə bərabərdir. Bu ədədləri bütün üzlər üçün cəmləyək (həmçinin F üzü üçün də). πn tipli hədlərin cəmi bütün üzlərin tərəflərinin cəminə bərabərdir, yəni ki $2P$ – çünki P tillərdən hərəsi iki üzə məxsusdur. Toplananların sayı Q-yə bərabər olduğundan, $\sigma = \pi(2P-2Q)$ alırıq. İndi isə hər bölünmə təpəsində bucaqların cəmini tapaq və bu cəmləri toplayaq. Əgər təpə F üzün daxilində yerləşirsə, onda bucaqların cəmi 2π-dir. Belə təpələrin sayı $B-\kappa$-dır, burada κ – F üzünün təpələrinin sayıdır, deməli, onların qiyməti $2\pi(B-\kappa)$-yə bərabərdir. F təpələrində yerləşən bucaqlar σ cəmində iki dəfə hesablanırlar (F bucaqları kimi və bölünmə çoxbucaqlılarının bucaqları kimi); onların qiyməti isə $2\pi(\kappa-2)$-dır. Beləliklə, $\sigma = \pi 2(B-\kappa)+2\pi(\kappa-2) = 2\pi(B-2)$. İki nəticəni bərabərləşdirərək və 2π-yə bölərək, biz lazım olunan bərabərliyi alırıq: $P-Q=B-2$.

Eyler düsturu bizə yalnız kombinator tipli çoxüzlülərə məxsus olan xüsusiyyətlərdən fikir söyləmək imkanı verir. Fərz edək, çoxüzlü "kombinator-düzgündür", yəni onun bütün üzləri – p-bucaqlılardır və hər təpədən q sayda til çıxır. Hətta onun üzlərinin formaları haqqında heç nə bilməyə-bilməyə, biz iddia edə bilərik ki, o beş platon cisimindən biri kimi tipdə olacaq. Və həqiqətən, onun bütün təpələrindən çıxan tillərin cəmi qB-dir, bu cəmdə hər til iki dəfə

hesablanır (o, iki uca malikdir) və ona görə o $2P$-yə bərabərdir. İki üsul ilə bütün üzlərin tərəflərinin sayını hesablayaraq, biz müəyyən edəcəyik ki, $2P=pQ$. Q və B ədədlərini tillərin sayının vasitəsilə ifadə edək və alınmış ifadələri Eyler düsturunda yazaq. Nəticədə biz belə bir tənliyə gələcəyik:

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=\frac{1}{2}+\frac{1}{P}$$

Ondan belə bir bərabərsizlik çıxarılır:

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{p}>\frac{1}{2}$$

Bu bərabərsizliyi təkcə bizə məlum olan beş (p,q) cütü təmin edir. P,Q və B qiymətlərini beş haldan hərəsində düz bizim tənliklərdən hesablamaq olar.

Eyler düsturu təkcə qabarıq çoxüzlülər üçün yox və hətta təkcə çoxüzlülər üçün istifadə edilmir. Kürənin üstündə hər hansı səlis bir qraf çəkək, yəni götürək bir neçə nöqtəni (təpə) və onların bir hissəsini xətlər (tillər) ilə elə birləşdirək ki, hər təpədən tillər ilə başqa təpəyə keçmək olsun. Yaranmış üzlərin sayını sayaq – kürənin xətlər ilə bölündüyü fraqmentlərini, üzlərin sayı təpə və tillərin sayı ilə eyni münasibət ilə bağlı olacaq. Eyler xarakteristikası adlanan $B-P+Q$ qiyməti bütün "kürə kimi təşkil edilmiş" çoxüzlülər üçün 2-yə bərabər olacaq – onları əgər rezindən düzəldib doldursaq, təşbihlərlə danışaraq, kürəciyə dönəcəklər. Belə çoxüzlüləri sadə adlandırırlar. Aydındır ki, bütün qabarıq çoxüzlülər sadədirlər. Amma, məsələn, "üçbucaqlı bublikin" (şəkil 9) Eyler xarakteristikası sıfıra bərabərdir. Göstərmək olar ki, g sayda "seyrək deşiyə" malik olan çoxüzlü üçün o $2-2g$-yə bərabərdir.



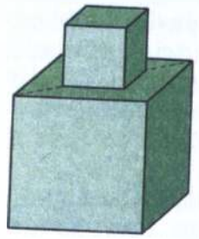
Şəkil 9.

Eylerin teoremi topologiyanın ən birinci teoremlərindən oldu. Topologiya – fiqurların fasiləsiz deformasiyalar zamanı saxlanılan ümumi xüsusiyyətləri haqqında elmdir.

TƏRİFLƏRƏ QAYIDIŞ

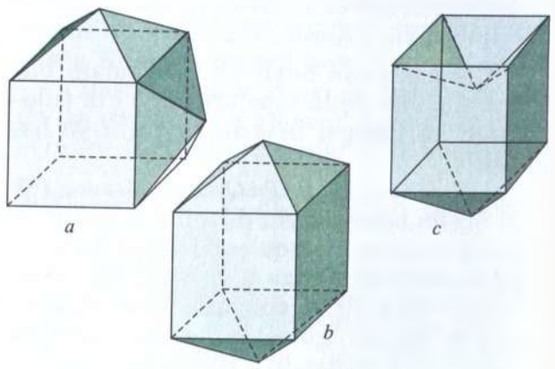
Çoxüzlülər haqqında ən mühüm teoremlər qabarıq çoxüzlülərə aiddirlər. Onlar ilə iş aparanda "üz nə deməkdir?" tipli suallar bizdə yaranmır, çünki bu suallara cavablar təbii və asandır. Amma qabarıq olmayan çoxüzlülər bizə problem yarada bilərlər.

Kubun yuxarı üzünə ondan balaca olan kubu qoyaq (şəkil 10). Bu sadə, amma qabarıq olmayan çoxüzlüdür. Onun üçün Eyler



Şəkil 10.

düsturunu yoxlayaq: $B=16$, $P=24$, $Q=11$; $B-P+Q=3$?! Anlaşılmazlığın səbəbi ondadır ki, bizim çoxüzlünün üzlərindən biri – böyük kubun yuxarı üzündən qalan – "pis"dir: onun "deşiyi" var. Bu deşiyə görə tillər iki bir-biri ilə əlaqəsi olmayan qrupa bölünürlər. İşi təkcə iki kubu birləşdirən əlavə tillərin çəkilməsi ilə həll etmək olar. Məsələn, 11-ci şəkildə göstərildiyi kimi. Eyler düsturu ilə indi işlər qaydasındadır, amma biz qəbul etməliyik ki, təriflər ilə iş qaydada



Şəkil 11.

deyil, çünki biz yenidən til və üzlərin sayını hesablamağı əlavə izah etməliyik.

Bu və bir neçə başqa vəziyyətlərdə çoxüzlünü cisim kimi yox, hansısa qayda ilə bir neçə çoxbucaqlıdan tərtib edilmiş səth kimi təqdim etmək daha məqsədəuyğun olardı. Doğrudur, belə bir halda çoxüzlünün tərifi daha çətin olur və bir neçə varianta malikdir. Onlardan birini deyək.

Səth kimi çoxüzlü – düz çoxbucaqlıların sonlu yığımıdır. Onlar fəzada elə yerləşiblər ki: 1) onlardan hər hansının bir tərəfi eyni zamanda təkcə başqalardan birinin tərəfi kimi xidmət göstərir; 2) onlardan hər hansı ikisi çoxbucaqlar yığımından "cığır" ilə birləşirlər, ardıcıl çoxbucaqlılar bir tərəfə görə həmsərhəd olurlar; 3) əgər iki çoxbucaqlı bir ümumi təpəyə malikdirlərsə, onda onları birləşdirən "cığırı" eyni təpə ilə çoxbucaqlılardan düzəltmək olar. Çoxbucaqlılar üzlərdir, onların tərəfləri və bucaqları isə – çoxüzlünün tilləri və təpələridirlər.

Birinci şərt səthin qapalığını təmin edir – onun qırağı yoxdur; ikinci şərt deyir ki, səth rabitəlidir (əlaqəlidir) – yəni bir hissədən ibarətdir; üçüncü şərt isə çoxüzlülərin sayından, məsələn, başqa ümumi nöqtələrə malik olmayan ümumi təpə ilə iki kubdan ibarət olan fiquru istisna edir. Amma qeyd edək ki, bu tərif səthin özünükəsişdirməsinə imkan verir. Düzgün ulduzlu cisimlər məhz belədirlər. Məsələn, onlardan axırıncısının üzləri – düzgün beşbucaqlılardır; hər təpədə onlar özünükəsişdirən beşguşəli ulduza oxşar düzgün beşüzlü bucaq təşkil edirlər. Qalan ikisində isə üzlərin özləri ulduzlu beşbucaqlılardır.

Əgər çoxüzlü-səth özü özü ilə kəsişmirsə, onda o məqalənin əvvəlində gətirilmiş tərifə müvafiq olaraq hansısa çoxüzlü-cisminin səthi ilə üst-üstə gəlir. Amma onun əksi düz deyil: məsələn, çoxüzlü-cisimin daxilində boşluqlar ola bilər, onda onun sərhədi əlaqəsiz olacaq.

KOŞİ TEOREMİ VƏ ÇOXÜZLÜLƏRİN ƏYİLMƏSİ

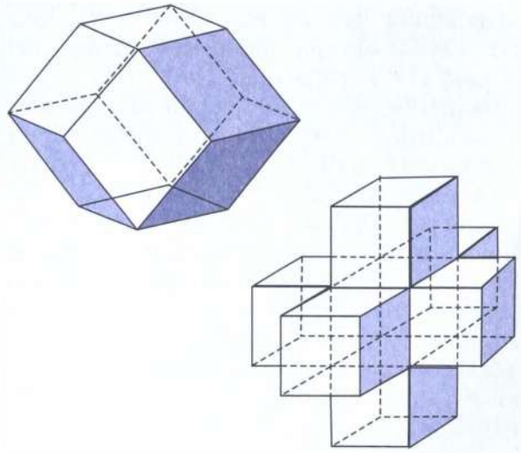
Axırda isə biz çoxüzlülər nəzəriyyəsinin ən axırıncı nailiyyətlərindən biri ilə tanış olaq. Amma uzaqdan başlamalı olacağıq.

Fərz edin ki, sizdə karton çoxüzlülərin yığımı var və onlardan siz bir dənə çoxüzlü yapışdırmaq istəyirsiniz. Əlbəttə ki, bunu daim etmək olmur, amma əgər alınsa, belə bir çoxüzlü yeganə olacaqmı? Bizə üzlərin yapışdırılma ardıcıllığı verilmədiyinə görə, biz asanlıqla belə bir nümunə fikirləşə bilərik ki, müxtəlif çoxüzlülər yaransın – 11*a* və *b* şəkillərində çoxüzlüləri müqayisə edin. Amma əgər yapışdırılma ardıcıllığı verilibsə? O zaman da alınan nəticə yeganə olmayacaq: 11*b* və *c* şəkillərində nümunələri müqayisə edin. Axırıncı nümunədə çoxüzlülərdən biri qabarıq deyil və bu təsadüfi deyil. 1813-cü ildə fransız riyaziyyatçısı Oqusten Koşi isbat etdi ki, eyni üzlər yığımı ilə, eyni ardıcıllıq ilə birləşdirilən iki qabarıq çoxüzlü bərabərdir. İfadəsinə görə çox sadə və aydın bir faktın Eyler düsturuna əsaslanan isbatı elementar olmasına baxmayaraq, çox mürəkkəbdir.

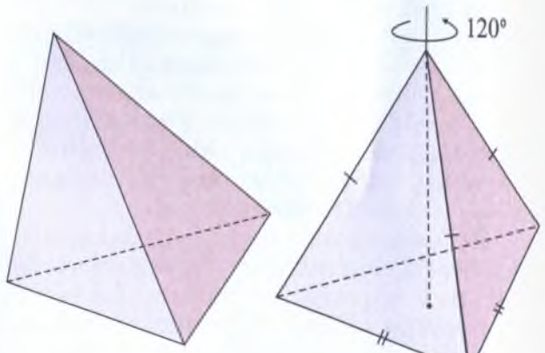
Koşi teoremindən elə çıxır ki, tillərin eyni uzunluğu ilə (p,q) tipində verilmiş düzgün çoxüzlülər bərabərdirlər və həmçinin üzləri düzgün çoxbucaqlı olan, hər hansı kombinator-düzgün çoxüzlü platon cisimlərindən biridir. Amma indi bizi Koşi teoreminin başqa nəticəsi maraqlandırır: heç bir qabarıq çoxüzlü əyilmir.

Bu fikiri əyani surətdə aydınlaşdıraq. Təsəvvür edin ki, çoxüzlünün üzləri mütləq bərk bir parçadan düzəldilib, amma bir biri ilə şarnir ilə birləşdiriliblər, yəni onun səthini tillər üzrə əymək olar. Onda, əgər çoxüzlü qabarıqdırsa, o bütövlükdə mütləq bərk olacaq və onun üzlərinin arasında bucaqlar dəyişə bilməzlər. Həqiqətən, əgər bu belə olmasaydı, biz onu bir az əysəydik, biz tamamilə başqa, amma elə o üzlər ilə elə o ardıcıllıq ilə birləşdirilmiş hələ qabarıq olan çoxüzlü alacaqdıq. Amma Koşi isbat edib ki, bu mümkün deyil.

Əyilən çoxüzlülər mövcuddurmu? Hələ 1766-cı ildə Eyler təxmin edib ki, yox. Çox uzun vaxt sadə çoxüzlülər üçün Eylerin hipotezi həqiqətə yaxın sayılırdı. Koşinin teoremi onu sübut edirdi. Bir az sonra isbat olunmuşdu ki, təkcə çoxüzlü yox, həmçinin hər hansı qabarıq qapalı səth əyilmir. Amma 1979-cu ildə riyaziyyat dünyasında sensasiyalı bir kəşf baş verdi: amerikan R. Konnelli birinci fleksoru (əlbəttə ki, qabarıq olmayan), yəni əyilən çoxüzlü qura bildi, amma bir az qəribə idi. Daha bir il sonra K. Şteffen yalnız doqquz təpə ilə fleksor tapdı (yəqin ki, bu ən aşağı rəqəmdir).



Şəkil 12.



Şəkil 1.

Şəkil 2.

Yaxınlarda fleksorun bir maraqlı xüsusiyyəti isbat olunmuşdur: əyilmə zamanı onların həcmi dəyişmir. Gələn səhifədə bu xüsusiyyət haqqında ətraflı yazılıb.

Məqalənin əvvəlində verilmiş suallara cavab, gördüyünüz kimi, 12-ci şəkildə təsvir olunub.

TETRAEDRİN HƏNDƏSƏSİ

Üçbucaq – ən sadə çoxbucaqlı olduğu kimi, tetraedr və ya üçbucaqlı piramida (şəkil 1) – ən sadə çoxüzlüdür. Tetraedrin həndəsəsi onun "müstəvi qardaşının" həndəsəsi kimi zəngindir. Üçbucağın çoxlu xüsusiyyətlərini dəyişilmiş halda tetraedrdə görə bilərik. Həmçinin tetraedr dördbucaqlı ilə də kifayət qədər oxşarlığa malikdir – çünki ikisi də dörd təpəyə malikdir.

Üçbucaqlara oxşar olaraq, tetraedrləri də simmetriklik dərəcəsinə görə təsnif etmək olar. Bərabəryanlı üçbucağa düzgün üçbucaqlı piramida müvafiqdir (şəkil 2). Düzgün piramida hündürlüyün ətrafında 120° və 240° dönmədə və həmçinin oxdan və yan tillərdən keçən müstəvilərə nəzərən simmetriyalar zamanı da özü-özünə keçir. Fikir verin ki, "düzgün tetraedr" termini məntiqə sığmayan adətə görə düzgün üçbucaqlı piramidanın bir növü sayılır – bütün tilləri bərabər olan tetraedr, yəni – onun bütün üzləri bərabərtərəfli üçbucaqlardır. Belə tipli tetraedr mümkün qədər çox özünəuyğunlaşma yığımına malikdir. O özünə keçirən 12 çevirməyə malikdir. Düzgün tetraedrin 6 simmetriya müstəvisi, 6 simmetriya oxu var (onları müəyyənləşdirin).

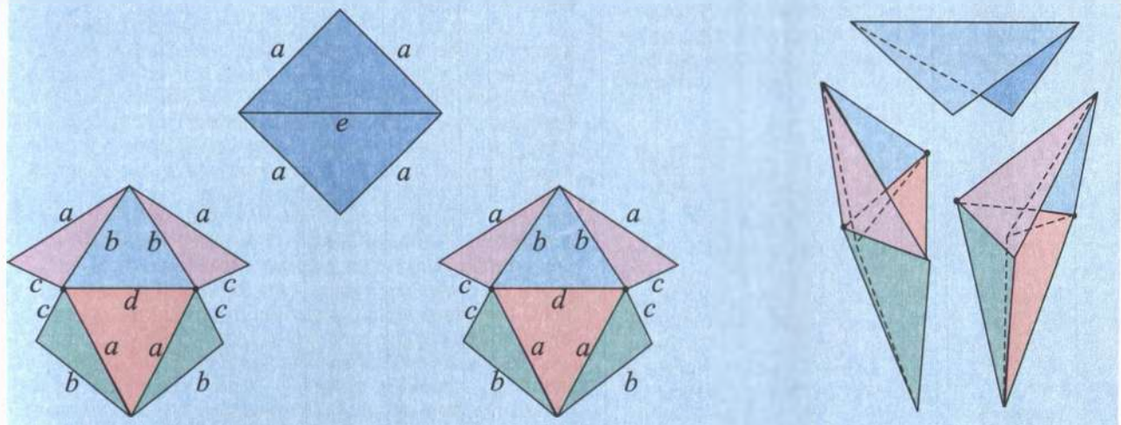
Düzgün tetraedr – ən simmetrik üçbucağın – düzgün üçbucağın "stereometrik əkizidir". Amma burada bizi sürpriz gözləyir: başqa, müəyyən mənalarda daha qanunauyğun olaraq bu rola iddia edən biri var. Lakin, onun haqqında biz bir az sonra danışacağıq. Hələlik isə biz üçbucaq həndəsəsindən bir neçə teoremi yada salaq (bax "Sadə və tükənməz üçbucaq" məqaləsinə) və baxaq görək, onlardan hansılarını tetraedrin həndəsəsinə keçirtmək olar.

TETRAEDR VƏ SFERALAR

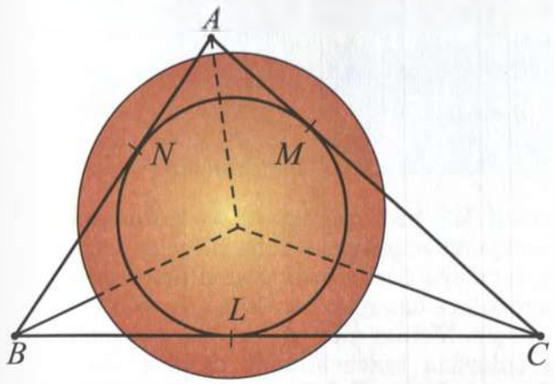
İstənilən üçbucaq bir xaricinə çəkilmiş və bir daxilinə çəkilmiş çevrəyə malikdir. Eynilklə hər tetraedr bir xaricinə çəkilmiş (bütün üzlərə toxunan) və bir daxilinə çəkilmiş (bütün təpələrdən keçən) sferalara malikdir. Bu xüsusiyyətlərin isbatları müvafiq olan planimetrik isbatları təkrarlayırlar: daxilinə çəkilmiş sferanın mərkəzi bütün üzlərdən eyni məsafədə və üzlərin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucaqların bissektor müstəvilərinin kəsişməsində yerləşir (yəni altı bissektor müstəvi bir nöqtədən keçir), xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzi isə bütün təpələrdən eyni məsafədə və üzlərin xaricinə çəkilmiş çevrələrin mərkəzlərindən keçirilmiş perpendikulyarların kəsişmə nöqtəsində yerləşir (yəni dörd perpendikulyar bir nöqtədə kəsişirlər).

ŞTEFFEN FLEKSORUNU NECƏ HAZIRLAMAQ OLAR

Şəkildə göstərilmiş üç hissəni kifayət qədər qalın olan kağızdan kəsin. Aşağıdakı ölçüləri götürmək daha rahat olardı: a=12, b=10, c=5, d=11, e=17. Qonşu c tillərini bir-biri ilə elə yapışdırın ki, ağ dairəciklərdə çuxurlar əmələ gəlsin, qara dairəciklərdə isə qabarıqlıqlar. Bizdə iki tam oxşar bir fiqur alınacaq. Və onları tamamilə bir-biri ilə uyğunlaşdırmaq olar. Onlardan birini başqasına daxil edin və b qırağına görə onları yapışdırın. Konstruksiyanın hərəkətliliyindən istifadə edərək azad təpələri aralayın, onların arasına salın və a qıraqlarının boyunca üçüncü hissəni yapışdırın. Yığım bitdi! Hissələri ya yapışqan lent ilə, ya da daxili tərəfindən bütün till boyunca yapışqan çəkilmiş adi kağız zolaqları ilə yapışdırmaq olar. Amma elə ola bilər ki, sizin modeliniz siz təsəvvür etdiyiniz qədər əyilə bilməyəcək.



Amma üz və təpədən başqa tetraedr həm də tillərə malikdir. Belə bir sual yaranır: onun bütün altı tilinə toxunan bir kürəni çəkmək olarmı (onu daxilinə yarıçəkilmiş adlandırırlar) (şəkil 3)? ...Bəzi hallarda. Burada tetraedr özünü dördbucaqlı kimi aparır və daxilinə yarıçəkilmiş kürənin mövcudluq şərtləri çevrə xaricinə çəkilmiş dördbucaqlınınkı ilə eynidir. Bu şərtlərin hər ikisi eyni bir cütün uzunluqlarının cəmi bir-birinə bərabər olmasından ibarətdir. Bu, elə o planimetrik bir əlamətdir, amma o fərqlə ki, indi o fəza dördbucaqlısı (indiki halda tetraedrin iki cüt qarşı tilləri ilə yaranmış dördbucaqlılardır) üçün tətbiq edilib. Daxilinə yarıçəkilmiş kürəyə malik olan tetraedrlər karkas tetraedrlər adlanırlar. İndi bütün öyrəndiklərimiz, demək olar ki, planimetriyanın təkrarı idi. Amma gözlənilməyən bir fakt: məlum olur ki, qarşı tillərdəki ikiüzlü bucaqların cəmi bərabər olduqda və yalnız onda tetraedr karkaslı ola bilər. Bucaqlar və sferalar bir-biri ilə nə cür bağlıdırlar? Fikirləşin.



Şəkil 3.

Amma daha böyük gözlənilməzliklər tetraedrin xaricdaxilinə çəkilmiş sferaların, yəni onun bütün üzlərinin müstəvilərinə toxunan, amma tetraedrdən kənarda yerləşən kürələrin araşdırılması zamanı üzə çıxır. Onların əlamətlərini təkrarlayır: belə bir sfera təkcə o zaman mövcud ola bilər ki, tetraedrin qarşı tillərinin hər bir cütünün uzunluqları cəmi bir-birinə bərabər olsun. Əslində, bu elə o planimetrik bir əlamətdir, amma o fərqlə ki, indi o fəza dördbucaqlısı (indiki halda tetraedrin iki cüt qarşı tilləri ilə yaranmış dördbucaqlılardır) üçün tətbiq edilib. Daxilinə yarıçəkilmiş kürəyə malik olan tetraedrlər karkas tetraedrlər adlanırlar. İndi bütün öyrəndiklərimiz, demək olar ki, planimetriyanın təkrarı idi. Amma gözlənilməyən bir fakt: məlum olur ki, qarşı tillərdəki ikiüzlü bucaqların cəmi bərabər olduqda və yalnız onda tetraedr karkaslı ola bilər. Bucaqlar və sferalar bir-biri ilə nə cür bağlıdırlar? Fikirləşin.

Amma daha böyük gözlənilməzliklər tetraedrin xaricdaxilinə çəkilmiş sferaların, yəni onun bütün üzlərinin müstəvilərinə toxunan, amma tetraedrdən kənarda yerləşən kürələrin araşdırılması zamanı üzə çıxır.

HERONUN DÜSTURUNDAN ÇOXÜZLÜNÜN HƏCMİNƏ QƏDƏR

Yuxarı sinifin hər şagirdi bilir ki, Heronun düsturu üçbucağın sahəsini onun tərəfləri vasitəsilə ifadə edir:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Başqa çoxbucaqlılar üçün belə bir düsturun olmaması, sizi təəccübləndirməməlidir. Misal üçün, dördbucaqlı üçün belə bir düsturun mövcudluğu onun sahəsi təkcə onun tərəflərinin uzunluğu ilə müəyyən edilməsi demək idi. Amma bu elə deyil: məsələn, a uzunluğunda tərəfləri olan rombun sahəsi bucaqdan asılı olaraq, 0 və a^2 arasında ola bilər.

Çoxüzlülərə keçək. Tetraedr üçbucağın çoxüzlü analoqudur. Onun üçün də həcmi onun tilləri vasitəsi ifadə edən düstur mövcuddur. Tetraedrdə 6 till var; $l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6$ – onların uzunluqlarının kvadratları olarsa (şəkil 1), onda:

$$V^2 = \frac{1}{144}(l_1l_5(l_2 + l_3 + l_4 + l_6 - l_1 - l_5) + l_2l_6(l_1 + l_3 + l_4 + l_5 - l_2 - l_6) + l_3l_4(l_1 + l_2 + l_5 + l_6 - l_3 - l_4) - l_1l_2l_4 - l_2l_3l_5 - l_1l_3l_6 - l_4l_5l_6).$$

Üzləri, üçbucaq olan daha mürəkkəb çoxüzlülərdə həcm təkcə tillərin uzunluğu ilə müəyyən edilmir. Nümunə üçün uzağa getmək lazım deyil. İki üzə görə bir-biri ilə bitişmiş T_1 və T_2 tetraedrlərindən yaranmış altüzlünü gözdən keçirək (şəkil 2). Bu altüzlünü $T_1 + T_2$ işarə edək. Onun V həcmi iki tetraedrin $V_1 + V_2$ həcmlərinin cəminə bərabərdir. İndi isə başqa $T_1 - T_2$ çoxüzlünü götürək. O birincidən təkcə onunla fərqlənir ki, aşağıda yerləşən tetraedr yuxarıdakına "basılıb". Aydındır ki, $T_1 - T_2$ çoxüzlünün tilləri (və hətta onun üzləri) $T_1 + T_2$ çoxüzlünün müvafiq tillərinə (və üzlərinə) bərabərdir. Amma ikinci şoxüzlünün V' həcmi başqa olacaq: o tetraedrlərin $V_1 - V_2$ həcmlərinin fərqinə bərabərdir.

Amma burada 1996-cı ildə rusiyalı riyaziyyatçı İ.X. Sabitov tərəfindən isbat olunmuş çox gözəl bir teorem mövcuddur. Tutaq ki, ixtiyari çoxüzlü verilib, onun bütün üzləri üçbucaqlardır. Bu çoxüzlüyə əsaslanaraq (dəqiq desək, onun kombinatop tipinə) xüsusi bir çoxhəddli qurmaq olar:

$$F(V) = V^n + a_1V^{n-1} + a_2V^{n-2} + \ldots + a_n$$

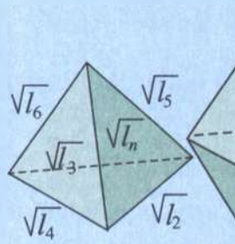
$a_1 \ldots a_n$ əmsalları çoxüzlünün tillərinin uzunluqlarının kvadratları ilə dörd hesab əməli vasitəsilə ifadə olunurlar. Əgər I əmsalların yerinə biz konkret çoxüzlünün tillərinin uzunluqlarının kvadratlarını yazsaq, onda əmsalları ədədi olan çoxhədli alınacaq. Sabitovun göstərdiyinə görə, verilmiş çoxüzlünün həcmi bu çoxhədlinin köklərindən biridir.

İndi isə $T_1 - T_2$ və $T_1 + T_2$ çoxüzlüyə qayıdaq. Kombinatorlu olaraq onlar eyniliklə düzəldilibər və müvafiq tilləri bərabərdirlər. Sabitovun teoreminə əsasən, bu iki çoxüzlüyə bir çoxhədli cavab verir. Onların həcmləri isə verilmiş çoxhədlinin müxtəlif kökləridir.

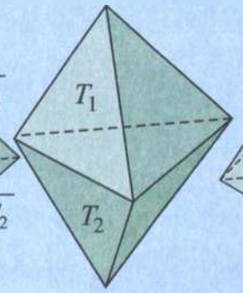
Bu teoremi, həmçinin üçbucaqlı üzlərə malik olmayan çoxüzlülərə də tətbiq etmək olar. Amma üçbucaqlı olmayan hər bir üzü ilk əvvəl üçbucaqlara bölmək lazımdır. Çoxhədlinin əmsallarının asılı olduğu parametrlər kimi əsas çoxüzlünün tillərinin uzunluğu ilə bərabər bölünmə zamanı yaranmış yeni tillərin də uzunluqlarını da gözdən keçirtmək lazımdır.

Başqa tərəfdən, Komellinin göstərdiyinə görə, əyilən çoxüzlülər də mövcuddur (Koşi teoremindən elə çıxır ki, onlar təkcə qabarıq ola bilməzlər). Hər əyilən çoxüzlü, misal üçün, akkordeonun xəzzləri kimi formasını dəyişir. Formasını dəyişəndə xəzzlərin daxili həcmi dəyişir və əsl mahiyyəti bundadır. Amma əyilən çoxüzlülərin həcminin dəyişilməsinə baxanda – nəticə çıxdı ki, heç dəyişmir: formasını dəyişməyinə baxmayaraq, əyilən çoxüzlü həcmini qoruyur. Belə bir problem qoyulmuşdur: əyilmə zamanı çoxüzlülərin həcminin dəyişilməzliyi haqqında fikiri ya da isbat etmək, ya da təkzib etmək.

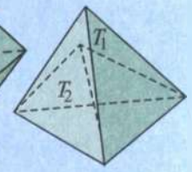
Bu problemin müsbət həlli Sabitovun teoremindən gəlir: hər hansı əyilən çoxüzlünün forması dəyişilənde, onun həcmi heç dəyişmir. Həqiqətən, forma dəyişilməsi zamanı, həm çoxüzlünün kombinator tipi, həm də tillərin uzunluğu qorunub, saxlanılır. Ona görə, həm əsas çoxüzlüyə, həm də onun bütün fasiləsiz forma dəyişmələrinə eyni çoxhəddli müvafiqdir, onun kökləri arasında bu çoxüzlərin həcmlərinin bütün mümkün olan qiymətləri var. Amma fasiləsiz forma dəyişməsi zamanı həcm təkcə fasiləsiz dəyişilməlidir və ona görə konkret çoxhədlinin kökü olmaq üçün, əyilmə zamanı çoxüzlünün həcmi dəyişilməz olmalıdır.



Şəkil 1.

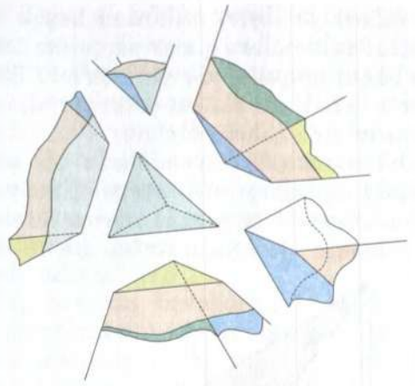


Şəkil 2.



Şəkil 3.

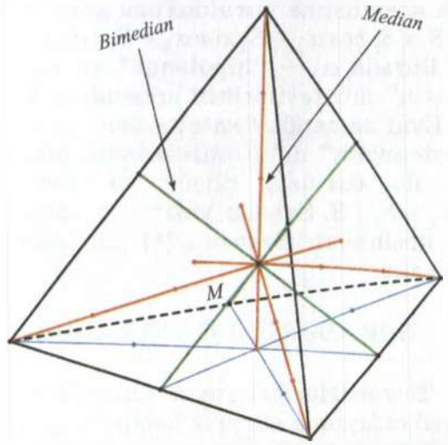
Məlum olduğu kimi hər bir üçbucaq üç xaricdaxilinə çəkilmiş çevrəyə malikdir. Tetraedrin üzlərinin müstəviləri fəzanı 15 hissəyə bölürlər (şəkil 4). Təpələrə yanaşı olan dörd üçüzlü bucaqlardan başqa, qalan 11 hissə bütün dörd müstəvi ilə məhdudlaşır. Tetraedrin daxilində, həm də onun dörd "əsasının" daxilinə – üzlərə yanaşı olan hissələrində – bütün müstəvilərə toxunan sfera həmişə mövcuddur. Amma tilləri yanaşı olan və formaya görə dördhamarlı damlara və ya çardaqlara oxşayan altı hissə ilə iş bir az çətinləşir. Məlum olur ki, iki "çardaqdan" qarşı tillərdən təkcə birində daxilinə çəkilmiş sfera ola bilər. Beləliklə, düzgün tetraedrdə


Şəkil 4.

– onun bütün "çardaqları" bərabərdirlər – "çardaqlı" sferalar ümumiyyətlə yoxdur, çünki əgər olsaydılar, onlar bütün "çardaqlarda" mövcud olmalıdırlar. Beləliklə, tetraedr dörddən az olmadan, yeddidən çox olmadan xaricdaxilinə çəkilmiş sferaya malikdir, bununla belə bütün aralıq miqdarlar mümkündürlər.

TETRAEDRİN MEDİANLARI

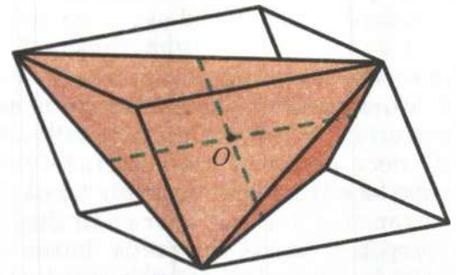
Üçbucağa qayıdaq və xatırlayaq ki, onun bütün medianları bir nöqtədə – sentroiddə kəsişirlər – və bu nöqtədə 2:1 nisbətində bölünürlər. Minimal dəyişikliklər ilə tetraedrə üçün bu fikir doğrudur. Tetraedrdə təpələri qarşı üzlərin sentroidləri ilə birləşdirən parçaları medianlar adlandırırlar. Bu dörd parça həmişə M nöqtəsində kəsişirlər və təpələrdən hesablayaraq 3:1 nisbətində bölünürlər (şəkil 5). Elə bu nöqtədən də



Şəkil 5.

bimedianlar da keçir – tetraedrin qarşı tillərinin ortalarını birləşdirən parçalar, həmçinin onlar M nöqtəsində yarıbayarı bölünürlər. Tetraedrin sentroidi, üçbucağın sentroidi kimi təpələrdə yerləşdirilmiş bərabər çoxluqlar mərkəzidir. Həndəsi şəkilində onları aşağıda göstərilmiş çox faydalı bir konstruksiyanın köməyi ilə isbat etmək olar.

Tetraedrin hər tilindən qarşı tilə parallel olan müstəvi keçirək (şəkil 6). Tetraedrin daxilinə çəkilmiş paralelepiped adlanan paralelepipedi məhdudlaşdıran üç cüt parallel müstəvi alacağıq. Bizim tetraedrin tilləri paralelepipedin diaqonallarıdır, onların ortaları isə mərkəzləridir. Buradan nəticəyə



Şəkil 6.

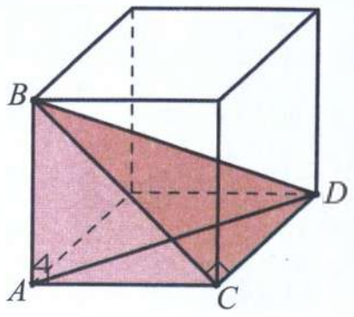
gələ bilərik ki, bütün bimedianlar paralelepipedin O mərkəzindən keçirlər və orada yarıya bölünürlər. Bundan başqa, biz həmçinin qeyd edə bilərik ki, tetraedrin medianları da paralelepipedin üzlərinin diaqonallarında yerləşirlər və onlar da həmçinin O nöqtəsindən keçirlər. Bu konstruksiyanın başqa tətbiqləri ilə biz aşağıda rastlaşacağıq.

ORTOMƏRKƏZLİ VƏ DÜZBUCAQLI TETRAEDRLƏR

Tetraedrin medianları "özlərini nümunəvi aparırlar" – üçbucaqda olduğu kimi onlar eyni nöqtədən keçirlər. Tetraedrin təpələrindən qarşı üzlərə çəkilən perpendikulyarlar ilə – hündürlüklərlə iş bir az başqadır. Üçbucağın hündürlükləri bir nöqtədə kəsişirlər – ortomərkəzdə. Bu bir neçə tetraedr üçün, xüsusilə düzgün üçbucaqlı piramidalar üçün də doğrudur.

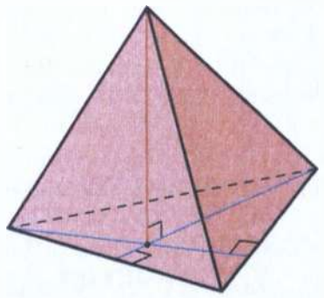
Ortomərkəz həmçinin tetraedrlərin çox böyük sinfinə məxsusdr. Onları elə belə də adlandırırlar – ortomərkəzli tetraedrlər. Onlardan hər birini oturacaq kimi istənilən

seçilmiş üçbucaq götürərək, onun təpələrini müstəvisinə ortomərkəzindən çəkilmiş perpendikulyarda hər hansı bir nöqtə ilə birləşdirərək almaq olar (şəkil 7). Və tərsinə,



Şəkil 7.

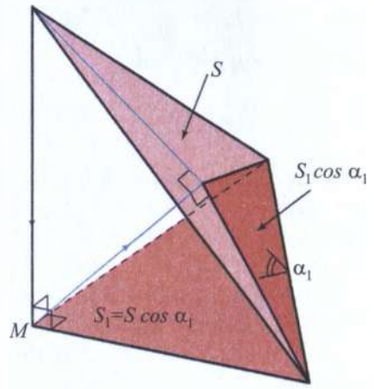
ortomərkəzli tetraedrin bütün hündürlüklərinin oturacaqları – onun üzlərinin ortomərkəzləridir (şəkil 8). Ortomərkəzliyin daha bir neçə meyarını (yəni zəruri və kafi edən şərtlərini) gətirək: tetraedr təkcə o zaman ortomərkəzlidir ki, əgər onun qarşı tilləri perpendikulyardır; ya da bütün altı tilin ortaları bir sferada yerləşirlər; ya da xaricinə çəkilmiş paralelepipedin bütün tilləri bərabərdirlər; ya da qarşı tillərin kvadratları bərabərdirlər.



Şəkil 8.

Ortomərkəz ilə bağlı olan üçbucağın bir neçə xüsusiyyətini, Eyler düz xətti haqqında və müvafiq dəyişilmiş şəkildə doqquz nöqtə çevrəsi haqqında teoremləri ortomərkəzli tetraedrdə də tapmaq olar. Ortomərkəzli tetraedrin sentroidi ortomərkəz H və xaricinə çəkilmiş sferanın mərkəzi O arasında parçada yerləşir və bu parçanı yarıbayarı bölür, HO kəsiyini 1:2 nisbətdə bölən nöqtə isə "12 nöqtə sferasının" mərkəzidir – onun üstündə bütün üzlərin ortomərkəzləri və sentroidləri yerləşir, onlardan başqa isə H nöqtəsindən təpələrə qədər parçaları 1:2 nisbətdə bölən nöqtələr də yerləşirlər. Bu teoremlərin isbatları elə də çətin deyil, amma fəza təsəvvürü tələb edirlər.

Ortomərkəzli tetraedrlərin bir növü – təpəsində üç qarşılıqlı perpendikulyar til kəsişən tetraedr haqqında ayrıca demək lazımdır (şəkil 9). Aydındır ki, bu M təpəsi



Şəkil 9.

elə onun ortomərkəzidir. Belə tetraedr düzbucaqlı adlandırılır. Onun üçün özünəməxsus "Pifaqor teoremi" istifadə olunur, əgər S_1, S_2 və S_3 – onun düzbucaqlı üzlərinin sahələri, ("katetləri"), S isə – dördüncü üzün sahələri ("hipotenuz"), onda

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$$

Həqiqətən, üç "katetin" "hipotenuza" proyeksiyası onu üç üçbucağa bölür. Proyeksiya zamanı fiqurun sahəsi onun müstəvisi və proyeksiya müstəvisi arasındakı bucağın kosinusuna vurulduğuna görə, onda

$$S = S_1 cos\alpha_1 + S_2 cos\alpha_2 + S_3 cos\alpha_3 \quad (*)$$

Burada α_1 – "hipotenuz" və müvafiq "katetin" müstəvilərinin arasındakı bucaqdır. Eyni zamanda "katetlərdən" hər birisi "hipotenuzun" onun müstəvisinə proyeksiyası ilə üst-üstə düşür və ona görə $cos\alpha_1 = S_1 / S$. Sahələr vasitəsilə ifadə olunmuş kosinusun ifadəsini (*) tənliyinə yazmaq qalır.

BƏRABƏRÜZLÜ TETRAEDR

Tetraedrlər haqqında söhbəti başlayanda vəd etdiyimiz sürpriz haqqında yada salmağın vaxtı gəldi. Üçbucağın düzgün və ya bərabərtərəfli olduğunu biz necə təyin edirik ki? Təbii ki, bütün tərəfləri bərabər olan üçbucaq kimi. Tetraedrin "tərəfləri" bəs nə deməkdir? Əgər hesab etsək ki, bu tillərdir, onda oxşar stereometrik tərif bizi düzgün tetraedrə gətirəcək. Amma, ola bilər ki, tetraedrin "tərəfləri" kimi biz onun üzlərini hesab edək? O zaman biz aşağıdakı tərifə gəlirik: bütün üzləri bərabər olan (yəni bərabər üçbucaqlardır) tetraedr bərabərüzlü tetraedr adlandırılır.

İlk baxışda bərabərüzlü tetraedr bu təkcə düzgün tetraedrdir. Əslində isə, bərabərüzlü tetraedrin üzü hər hansı bir itibucaqlı (və təkcə itibucaqlı yox) üçbucaq ola bilər. Bərabərüzlü tetraedrlərin mühüm xüsusiyyətlərini sadalayaq. İlk iki xüsusiyyəti onların quruluşunun ümumi üsuluna işarə edir:

1) Bərabərüzlü tetraedrin xaricinə çəkilmiş paralelepipedi – düzbucaqlı paralelepipeddir (şəkil 10);

2) Tetraedrin bir təpədə qovuşan üç til üzrə kəsilməsi zamanı əmələ gələn açılışı – üçbucaqdır (şəkil 11: bu üçbucaq itibucaqlı olmalıdır, çünki düzbucaqlı və ya körbucaqlı orta xətlər üzrə əyilmə zamanı tetraedrə dönə bilməzlər);

İstənilən bərabərüzlü tetraedrin özünəuyğunlaşmaların yığımı düzgün tetraedrdəki kimi "varlı" deyil;

3) O üç simmetriya oxuna malikdir (qarşı tillərə çəkilmiş ümumi perpendikulyarlardılar, onlar həmçinin bimedianlardır). Amma bu simmetriyalar hər hansı iki qeyd edilmiş üz və ya təpəni uyğunlaşdırmaq üçün kifayət edir, amma tillər üçün yox.

1-3 xüsusiyyətlərdən və tərifdən istifadə edərək asanlıqla deyə bilərik ki, bərabərüzlü tetraedrdə;

4) Bütün üçüzlü bucaqlar bərabərdirlər;

5) Bütün medianlar (tetraedrin) bərabərdirlər;

6) Bütün hündürlüklər (tetraedrin) bərabərdirlər;

7) Daxilinə və xaricinə çəkilmiş kürələrin mərkəzləri və sentroidlər üst-üstə düşürlər;

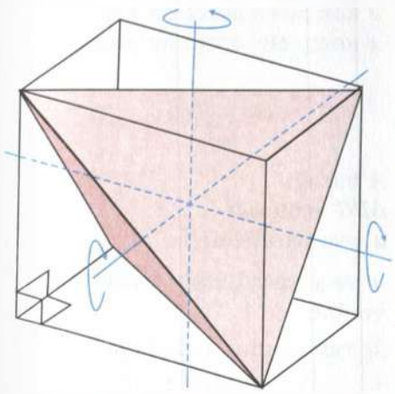
8) Üzlərin xaricinə çəkilmiş çevrələrin radiusları bərabərdirlər;

9) Üzlərin perimetrləri bərabərdirlər;

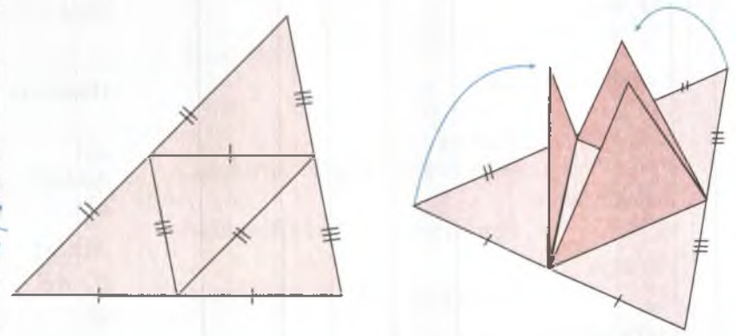
10) Üzlərin sahələri bərabərdirlər.

Bu xüsusiyyətlərdən bir neçəsi o qədər aydındır ki, heç adının çəkilməsi də lazım deyil. Çox gözəl (və heç də aydın olmayan) bir fakt başqadır: bütün bu xüsusiyyətlər birbiri ilə eynigüclüdürlər və hərəsi ayrılıqda tetraedrin bərabərüzlüyünü təmin edir. Deyəsən, onlardan ən təsirlisi 10-cu xüsusiyyətdir. Fikirləşin: tetraedrin üzlərinin bərabərliyi üçün onların sahələrinin bərabərliyi kifayətdir!

Yekun vuraq. Bizim sadaladığımız on şərt eyni zamanda bərabərüzlü tetraedrin həm xüsusiyyətləridir, həm də əlamətləridir. Başqa sözlə desək, onlardan hər birini bərabərüzlü tetraedrin tərifi kimi təqdim etmək olar. Bəzən, hansısa şərtdən bərabərüzlüyü çıxarmaq üçün bir sıra aralıq şərtlər düzəltmək lazımdır. Bu sırada hər birisi – əvvəlkinin nəticəsidir. Belə bir sıra tapmaq üçün təkcə çalışmaq lazımdır, amma bu məsələni biz maraqlanan oxucuların öhdəsinə buraxırıq.



Şəkil 10.



Şəkil 11.

ƏSAS İŞARƏLƏRİN SİYAHISI

Bəzi riyazi sabitlər

$e = 2{,}7182819\ldots$ natural loqarifmlərin əsası

$\pi = 3{,}141593\ldots$ çevrə uzunluğunun diametrə nisbəti

$C = 0{,}577216\ldots$ Eyler – Maskeroni sabiti

$\varphi = (\sqrt{5}-1)/2 = 0{,}618034\ldots$ qızıl kəsik

Ümumriyazi simvollar

$|a|$ a ədədinin modulu (mütləq qiyməti)

$[a]$ a ədədinin tam hissəsi

$=$ bərabərdir

$\neq$ qeyri-bərabərdir (bərabər deyil)

$\equiv$ eynilklə bərabərdir

$\approx$ təqribən bərabərdir

$>$ böyükdür

$\geq$ böyük və ya bərabərdir

$<$ kiçikdir

$\leq$ kiçik və ya bərabərdir

$\sqrt{\ }$ kvadrat kök

$\sqrt[n]{\ }$ n-ci dərəcəli kök

$\sum$ cəm işarəsi

$\prod$ hasil işarəsi

$\Rightarrow$ "deməli"

$\Leftrightarrow$ eynigüclüdür

$\{$ sistem (tənliklər, bərabərsizliklər) işarəsi

$[$ məcmu (tənliklər, bərabərsizliklər) işarəsi

Kombinatorika

$n!$ n faktorial

P_n n elementdən ibarət yerdəyişmələrin sayı

A_n^m n elementdən m aranjemanların sayı

C_n^m n elementdən m kombinezonların sayı

Çoxluqlar

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ünsürlərindən (elementlərindən) ibarət çoxluq

$\varnothing$ boş çoxluq

$\mathbf{N}$ natural ədədlər

$\mathbf{Z}$ tam ədədlər

$\mathbf{Q}$ rasional ədədlər

$\mathbf{R}$ həqiqi ədədlər

$[a, b]$ parça

(a, b) interval

$a \in A$ a A çoxluğuna daxildir (mənsubdur)

$a \notin A$ a A çoxluğuna daxil deyil

$A \subset B$ A B-nin alt çoxluğudur

$A \not\subset B$ A B-nin alt çoxluğu deyil

$A \cup B$ A və B çoxluqlarının birləşməsi

$A \cap B$ A və B çoxluqlarının kəsişməsi

$A \xrightarrow{f} B$ A çoxluğunun B çoxluğuna f inikası

f^{-1} tərs inikas

$g \circ f$ f və g inikaslarının kompozisiyası

Kompleks ədədlər

i xəyali vahid

$Re\ z$ z kompleks ədədinin həqiqi hissəsi

$Im\ z$ z kompleks ədədinin xəyali hissəsi

$\bar{z}$ z-ə qoşma olan kompleks ədəd

$|z|$ z kompleks ədədinin modulu

$argz$ z kompleks ədədinin arqumenti

Həndəsə

$\angle A$ A bucağı

ΔABC ABC üçbucağı

$a \| b$ a b-yə paraleldir

$A(x;y)$ x və y koordinatlı A nöqtəsi

$\bar{a}$, AB vektor

$|\bar{a}|$ $\bar{a}$ vektorunun uzunluğu

Ardıcıllıqlar və funksiyalar

$\{a_n\}$ ardıcıllıq

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ardıcıllığın limiti

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ x_0 nöqtəsində f funksiyasının limiti

Δf f funksiyasının artımı

df f funksiyasının diferensialı

$f'(x)$ f funksiyasının x nöqtəsində törəməsi

$f''(x)$ $f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində ikinci törəməsi

$\int f(x)dx$ f funksiyasının qeyri-müəyyən inteqralı

$\int_a^b f(x)dx$ f funksiyasının a-dan b-dək müəyyən inteqralı

YUNAN ƏLİFBASI

Αα alfa	Ηη eta	Νν nü	Ττ tau
Ββ beta	Θϑ teta	Ξξ ksi	Υυ ipsilon
Γγ qamma	Ιι yota	Οο omikron	Φφ fi
Δδ delta	Κκ kappa	Ππ pi	Χχ xi
Εε epsilon	Λλ lambda	Ρρ ro	Ψψ psi
Ζζ zeta	Μμ mü	Σσς siqma	Ωω omeqa

BƏZİ ALİMLƏR HAQQINDA QISA MƏLUMAT

Abel Nils Henrik (1802 – 1829), Norveç riyaziyyatçısı, 4-cü dərəcədən yuxarı cəbri tənliklərin ümumi halda radikallarda həll edilmədiyini sübut etmiş, cəbri funksiyaların inteqrallarını öyrənmişdir (abel inteqralları), elliptik funksiyalar nəzəriyyəsinin yaradıcılarından biridir.

Adamar Jak (1865 – 1963), fransız riyaziyyatçısı, La Valle Pussenlə birgə sadə ədədlərin paylanması qanununu əsaslandırmışdır; diferensial tənliklər, funksiyalar nəzəriyyəsi, ədədlər nəzəriyyəsi, mexanika üzrə əsərlərin müəllifidir.

Aleksandrov Pavel Sergeyeviç (1896 – 1982), sovet riyaziyyatçısı, topologiya elmi məktəbinin banisi; eləcə də çoxluqlar nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi sahələrində işləmişdir.

Appoloni, Perqlskiy (e.ə. 260 ətrafı, – 170 ətrafı), qədim yunan riyaziyyatçısı və astronomu, "Konik kəsiklər" əsərində konik kəsiklərin tam təfsirini verib; planetlərin görünən hərəkətini izah edən nəzəriyyənin müəllifi.

Ariabhata (475 ətrafı – ?) hind astronomu və riyaziyyatçısı, "Ariabhatiam" astronomik traktatının müəllifi.

Aristotel (e. ə. 384 – 322), əsərləri o dövrün demək olar ki, bütün bilik sahələrini əhatə edən, xüsusi halda, məntiq üzrə ilk sistemli tədqiqat aparan qədim yunan filosofu.

Arximed (e. ə. təxminən 287 – 212-ci illər), qədim yunan riyaziyyatçısı və filosofu, müxtəlif fiqur və cisimlərin sahələrinin, səthlərinin və həcmlərinin hesablanması metodlarını, eləcə də inteqral və diferensial hesablarının sələfi olan toxunanlar və ekstremumlar metodlarını inkişaf etdirmişdir; riyazi metodları təbiətşünaslıqda və texnikada geniş tətbiq etmişdir.

Ayyui (Hayui) Röne Jüst (1743 – 1822), fransız mineroloq və kristalloqrafı; kristalloqrafiyanın əsas qanunlarından birini kəşf etmişdir.

Barrou İsaak (1630 – 1677), ingilis riyaziyyatçısı, filoloqu, ilahiyyatçısı, Kembric universitetinin professoru, sonsuz kiçilənlərin hesabının işlənib-hazırlanmasında Nyuton və Leybnisin sələflərindən biri.

Beda Dostopoçtenni (622 və ya 623, – 735 ətrafı), anqlosaks salnaməçisi, rahib; Pasxanın günlərinin hesablanmasına həsr olunmuş "Vaxtın hesablanmasına dair" traktatında barmaq hesabı sisteminin təsvirini vermişdir.

Bernulli Daniil (1700–1782), öz dövrü təbiətşünaslığının bütün sahələrinə öz payını vermiş İsveçrə alimi, İ. Bernullinin oğlu, məşhur "Hidrodinamika" (1738) əsərinin müəllifi; riyaziyyatçı kimi sıralar nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi sahələrində işləmiş, riyazi fizikanın ilk qaranquşlarından olmuşdur.

Bernulli İohann (1667 – 1748), İsveçrə riyaziyyatçısı, Y. Bernullinin qardaşı, diferensial və inteqral hesabının yaradıcılarından biri, variasiya hesabının banisi; riyazi analiz metodlarını tətbiq etməklə mexanikaya böyük töhfə vermişdir.

Bernulli Yakob (1654 – 1705), İsveçrə riyaziyyatçısı, Leybnisin sonsuz kiçik kəmiyyətlər hesabı metodlarını inkişaf etdirmiş, ehtimal nəzəriyyəsinin bünövrəsini qoymuş və bu nəzəriyyədə böyük ədədlər qanununun sadə halını isbat etmişdir; variasiya hesabının yaradıcılarından biri.

Boltyanski Vladimir Qriqoryeviç (1925-ci ildə anadan olub), Rusiya riyaziyyatçısı; topologiya və topoloji metodlar, kombinator həndəsə, differensial tənliklər sahəsində böyük uğurlar qazanıb.

Bolsano Bernard (1781 – 1848) çex riyaziyyatçısı və filosofu; *XIX* əsrin əvvəllərində Koşi ilə bir vaxtda limit, diferensial və inteqralın tərifini vermiş, parçada kəsilməz funksiya teoreminin dəqiq riyazi isbatını təklif etmişdir; sonsuz çoxluqların tədqiqində Kantorun sələfi olmuşdur.

Bolyay (Boyai) Farkaş (1775 – 1856), macar riyaziyyatçısı; 1832-ci ildə sübut etmişdir ki, ixtiyari iki eyni böyüklükdə olan çoxbucaqlılar eynitərkiblidir.

Bolyay (Boyai) Yanoş (1802 – 1860), macar riyaziyyatçısı, F. Bolyayın oğlu, Lobaçevski və Qaussdan asılı olmadan qeyri-evklid nəzəriyyəsini yaratmışdır.

Bombelli Rafaelle (1526 ətrafı – 1572) italyan riyaziyyatçısı və mühəndisi; müəllifi olduğu "Cəbr" əsərində riyaziyyata ilk dəfə kompleks ədədlər daxil etmişdir.

Borel Emil (1871 – 1956), fransız riyaziyyatçısı; riyazi analiz, funksiyalar nəzəriyyəsi, riyazi fizika və ehtimal nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Boesi Anisi Maili Severin Torkvat (480 ətrafı – 524), neoplatonik filosof və Roma dövlət xadimi; Pikomaxın "Hesabını" və Evklidin "Başlanğıclar"ının ilk üç kitabını, Aristotel və Porfirinin məntiqi əsərlərini latın dilinə tərcümə etmişdir.

Brave Ogüst (1811 – 1863), fransız kristalloqrafı; kristalların fəza qəfəsləri nəzəriyyəsinin banisi.

Bradvardin Tomas (1290 ətrafı, 1349), ingilis riyaziyyatçısı və ilahiyyatçısı; onun "Nəzəri həndəsə" əsəri daha böyük əhəmiyyət kəsb edirdi ki, burada o, ulduzvari çoxbucaqlılara, izoperimetriya məsələlərinə baxmış, ilk dəfə riyazi mənada "irrasional" terminini işlətmişdir.

Brahmaqunta (Bramaquta, 598 ətrafı – 660), hind elminin riyaziyyatçısı və astronomu; "Braxman elminin təkmilləşdirilməsi" əsərinin müəllifi; bu əsərin əhəmiyyətli hissəsi hesab və cəbrə həsr edilib.

Brianşon Şarl Jülen (1785 – 1864), fransız riyaziyyatçısı; proyektiv həndəsə sahəsində işləmişdir ki, burada da Brianşten teoremi məşhurdur.

Breqq Vilyam Henri (1862 – 1942); ingilis fiziki, rentgenostruktur analizin banilərindən biri, oğlu V.L. Breqqlə birgə bir sıra kristalların atom quruluşunu deşifrə etmişdir.

Breqq Vilyam Lorens (1890 – 1971) ingilis fiziki; V. H. Breqqin oğlu, rentgenostruktur analizin banilərindən biri.

Bul Corc (1815 – 1804) ingilis riyaziyyatçısı; riyazi məntiqin yaradıcılarından biri.

Burbaki Nikola – fransız riyaziyyatçılarının yığma təxəllüsü; onlar 1939-cu ildə bütün riyaziyyatı aksiomatik əsasla qurmaq ideyası ilə çıxış etmişlər.

Bhaskara Anarya (1114 – 1185), hind riyaziyyatçısı və astronomu; "Elm tacı" əsərinin müəllifi, bu əsərə müxtəlif cəbri məsələlərin həlli daxildir.

Bebbic Carlz (1791–1871), ingilis riyaziyyatçısı; ilk hesablama maşınını quraşdırmışdır.

Ber Röne Lui (1874 – 1932), fransız riyaziyyatçısı; kəsilən funksiyaları öyrənmiş, kəsilmə nöqtələrinin təsnifatını vermişdir.

Çebışev Pafnuti Lvoviç (1821 – 1894), rus riyaziyyatçısı; Peterburq elmi məktəbinin banisi; funksiyaların ən yaxşı yaxınlaşması nəzəriyyəsini yaradıb, ehtimal nəzəriyyəsində ümumi halda böyük ədədlər nəzəriyyəsini, ədədlər nəzəriyyəsində isə sadə ədədlərin paylanmasının asimptotik qanununu isbat edib.

D'Alamber Jan Leron (1717 – 1883), fransız riyaziyyatçısı, mexaniki və filosof-maarifçisi; maddi sistemlərin diferensial hərəkət tənliklərinin tərtibi qaydalarını formulə etmişdir, riyazi analiz, diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, cəbrdə sıralar nəzəriyyəsi əsərlərinin müəllifi.

Dedekind Yulius Vilhem Rixard (1831 – 1916), alman riyaziyyatçısı; həqiqi ədədlər nəzəriyyəsinin əsaslandırılmasını vermişdir, cəbri ədədlər nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Dezarq Jerar (1593 – 1662 və ya 1591 – 1661), fransız riyaziyyatçısı, memar, mühəndis, proyektiv həndəsənin banilərindən biri.

Dekart Rene (1596 – 1650), fransız filosofu və riyaziyyatçısı, analitik həndəsənin əsaslarını qoymuşdur, dəyişən kəmiyyətin və funksiya anlayışlarını vermişdir, bir çox riyazi işarələri daxil etmişdir.

Delone Boris Nikolayeviç (1890 – 1980), rus riyaziyyatçısı, həndəsə, ədədlər nəzəriyyəsi, riyazi kristalloqrafiyaya dair əsərlərin müəllifi.

Den Maks (1878 – 1952), alman riyaziyyatçısı; Hilbertin eyni böyüklükdə çoxüzlülər haqqında 3-cü problemini həll edib.

Diofant İskəndəriyyəli (*III* əsr), qədim yunan ruyaziyyatçısı; 13 kitabda "Hesabın" müəllifi (6-sı qədim yunan dilində, 4-ü ərəbcəyə tərcümədə saxlanılıb), ilk dəfə olaraq məchul və onun dərəcələri üçün hərfi işarələr daxil etmişdir, qeyri-müəyyən tənliklər (diofant tənlikləri) haqqında təlimin banisi.

Eyler Leonard (1707 – 1783), riyaziyyatçı, mexanik, fizik və astronom, mənşəcə isveçrəli, Rusiyada və Almaniyada işləyib, riyazi analiz, ədədlər nəzəriyyəsi, diferensial həndəsə, riyazi fizika, səma mexanikası üzrə 800-dən artıq əsəri elmin inkişafına əhəmiyyətli təsir göstərmişdir.

Eynşteyn Albret (1879 – 1955), nəzəriyyəçi-fizik, ümumi və xüsusi nisbilik nəzəriyyələrinin yaradıcısı, işığın kvant nəzəriyyəsinə dair işlərin müəllifi.

Eratosfen Kirenli (e. ə. 276 –194), qədim yunan riyaziyyatçısı və astronomu, riyazi coğrafiyanın əsasını qoyub, ilk dəfə olaraq meridian qövsünü ölçüb. Riyaziyyat, astronomiya, fəlsəfə və musiqiyə aid əsərlərin müəllifi olub.

Ermit Şarl (1822 – 1901), fransız riyaziyyatçısı, 1873-cü ildə ilk dəfə isbat etmişdir ki, *e* ədədi transendentdir, riyazi analiz, ədədlər nəzəriyyəsi və cəbr üzrə əsərlərin müəllifi.

Evklid (e. ə. *IV* əsrin axırı – *III* əsr), qədim yunan riyaziyyatçısı; 13 kitabdan ibarət "Başlanğıcların" müəllifi, həndəsənin, ədədlər nəzəriyyəsinin əsasları, sahələrin və həcmlərin limit elementlərini ehtiva etməklə təyini metodları şərh edildiyi bu əsər riyaziyyatın inkişafına çox böyük təsir göstərmişdir.

Əbu Kamil (850 ətrafı – 930 ətrafı), ərəb riyaziyyatçısı, Misirdəndir, əl-Xarəzminin kvadrat tənliklər nəzəriyyəsini, Diofantın qeyri-müəyyən tənliklər haqqında nəzəriyyəsini inkişaf etdirmişdir; "Əl-cəbr və əl-mükabələ" cəbr kitabının (*IX* əsrin axırı, *X* əsrin əvvəli) müəllifidir.

Əbül-vəfa Məhəmməd ibn Məhəmməd (940 – 998), fars astronomu və riyaziyyatçısı, Diofantın "Hesabının" şərhçisi, kəsrlər nəzəriyyəsinə müfəssəl baxmış, əsas həndəsi qurğuları pərgar və xətkeşin köməyi ilə araşdırmışdır.

Fales Miletli (e. ə. 625 – 547), qədim yunan mütəfəkkiri, antik fəlsəfə və elmin banisi.

Fanyano dey Toski Canfrançesko Oporio (1715–1797), italyan riyaziyyatçısı, 1755-ci ildə sonralar onun adıyla adlandırılmış məsələnin analitik həllini çap etdirmişdir.

Ferma Pyer (1601 – 1665), fransız riyaziyyatçısı, *XVII* əsrin ən böyük riyaziyyatçılarından biri; ədədlər nəzəriyyəsi, həndəsə, cəbr, riyazi analiz (maksimum və minimumların tapılması metodu), ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olmuşdur, Dekartla birgə analitik həndəsənin banisi olmuşdur, ədədlər nəzəriyyəsində onun iki teoremi – böyük və kiçik Ferma teoremləri məxsusi yer tutur.

Ferrari Ludoviko (1522 – 1565), italyan riyaziyyatçısı; 4-cü dərəcəli cəbri tənliklərin həlli üsulunu tapıb.

Fyodorov Yevqraf Stepanoviç (1833 – 1919), rus kristalloqrafı, kristalloqrafiyanın banilərindən biri; 1890-cı ildə "Fiqurların düzgün sisteminin simmetriyası" əsərində ilk dəfə kristalların 230 simmetriya qrupunu çıxarıb.

Fibonaççi bax Leonardo Pizanlı.

Fredholm Erik İvar (1866 – 1927), İsveç riyaziyyatçısı; inteqral tənliklər nəzəriyyəsinin əsas xassələrini və teoremlərini şərh etmişdir, onların bəzi növlərinin həllinin ümumi metodlarını işləyib-hazırlamışdır.

Gelfond Aleksandr Osipoviç (1906 – 1968), sovet riyaziyyatçısı; Şnayderdən asılı olmadan Hilbertin 7-ci problemini həll edib (1934); ədədlər nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Gödel Kurt (1906 – 1978), Avstriya riyaziyyatçısı, 1940-cı ildən ABŞ-da yaşayıb, çoxluqlar nəzəriyyəsi, riyazi məntiq və nisbilik nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Hadinger Huqo (1908-ci ildə doğulub), İsveçrə riyaziyyatçısı; kombinator həndəsəyə dair əsərlərin müəllifi.

Hardi Qotfrid Harold (1877 – 1947), ingilis riyaziyyatçısı; Ramanucanla birgə n ədədinin bütün bölünmələrinin sayının ilk təqribi düsturlarını alıb, ədədlər nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə işlərin müəllifi.

Hamilton Vilyam Rouan (1805 – 1865), irland riyaziyyatçısı; kompleks ədədlərin tam təfsirini vermişdir, qraflar nəzəriyyəsi sahəsində işləmişdir.

Herbert Oriaklı (940 ətrafı – 1003, 999-cu ildən Roma Papası II Silvestr); fransız riyaziyyatçısı, "Abak qaydaları haqqında" traktatın müəllifi.

Heron İskəndəriyyəli (*I* əsr ətrafı), qədim yunan riyaziyyatçısı və mexaniki; riyaziyyat və mexanikada antik dövrün əsas uğurlarının sistematik şərhini verib.

Hilbert David (1862 – 1943), alman riyaziyyatçısı; *XX* əsrdə riyaziyyatın inkişafına böyük təsir göstərmişdir, invariantlar nəzəriyyəsi, cəbri ədədlər nəzəriyyəsi, riyaziyyatın əsasları, variasiya hesabı, riyazi məntiq, riyazi fizika, ədədlər nəzəriyyəsi və s. üzrə əsərlərin müəllifi, *II* Beynəlxalq riyaziyyat konqresində (1900) riyaziyyat qarşısında duran 23 problemi ifadə etmişdir.

Hippokrat Hioslu (e. ə. *V* əsr) qədim yunan həndəsəçisi; həndəsə sahəsində ilk sistemli əsərin müəllifi, üç ayparanın kvadraturasını tapmışdır (hippokrat ayparası adlanan ayparalar).

Hüqo Sen-Viktorlu (1096 ətrafı – 1141), filosof-sxolast, Sen-viktor məktəbinin başçısı; praktiki həndəsəyə dair traktatın müəllifi.

Hyügens Xristian (1629 – 1695), holland riyaziyyatçısı, fiziki, mexaniki və astronomu; kəfkirli saatları icad etmiş, onların nəzəriyyəsini yaratmış, fiziki rəqqasın rəqs qanunlarını müəyyənləşdirmiş, işığın dalğa nəzəriyyəsini yaratmışdır.

Xarəzmi (əl-Xarəzmi) Məhəmməd bin Musa (787 – 850 ətrafı), Orta Asiya alimi; hesab, cəbr, astronomiya coğrafiya üzrə işlərin müəllifi.

İbn-əl-Bənna (1256 – 1321), Mərakeş alimi; riyaziyyatda, xüsusi halda triqonometriyada bir sıra müstəqil kəşflər etmiş, dost ədədlər (17296 və 18486) cütünü aşkar etmişdir, "Hesabi əməllərin qısa şərhi" kitabının müəllifidir.

İbn Kürrə (Sabit İbn Kürrə, 836 – 901), ərəb riyaziyyatçısı və astronomu; Evklidin "Başlanşıclarını", Arximedin "Kürə və silindr haqqında", Apolloninin "Konik kəsiklər" əsərini, ərəb dilinə tərcümə etmişdir, öz "Parabolik adlanan konik kəsiyin ölçülməsi haqqında kitab"ında parabolik seqmentin inteqral cəmlərinin köməyi ilə kvadraturasını göstərmişdir.

Jirar Alber (1595 – 1632), holland riyaziyyatçısı; ilk dəfə olaraq birməchullu cəbri tənliyin köklərinin mövcudluğu haqqında cəbrin əsas teoremini söyləmişdir.

Jordan Mari Enmon Kamil (1838 – 1922), fransız riyaziyyatçısı; cəbr, funksiyalar nəzəriyyəsi, topologiya və kristalloqrafiya üzrə əsərlərin müəllifi.

Kavalyeri Bonoventura (1598 – 1647), italyan riyaziyyatçısı; fiqurların sahələrini və həcmlərini hesablamaq üçün "bölünməzlər" metodunu yaratmışdır, metod inteqral hesabın yaranmasına təkan verdi.

Kantor Georq (1845 – 1918), alman riyaziyyatçısı, çoxluqlar nəzəriyyəsinin banisi; həqiqi ədədlər nəzəriyyəsinin əsaslandırılmasını vermişdir.

Kardano Cerolamo (1501 – 1576) italyan riyaziyatçısı, filosofu və həkimi; kub tənliyin həll düsturunu onun adıyla bağlayırlar.

Kassini Covanni Domeniko (1625 – 1712), fransız astronomu, onun Yerin orbitini təyin etməyə cəhd edərkən baxdığı 4-cü tərtib müstəvi cəbri əyri onun adıyla adlanıb.

Kataldi Pyetro Antonio (1552 – 1626), italyan riyaziyyatçısı; "Ədədlərdən kvadrat kökalmanın ən qısa üsulu haqqında traktat"ında ilk dəfə kəsilməz kəsrlərin köməyi ilə kvadrat kökalma üsulu vermişdir.

Kaşi (əl-Kaşi) Cəmşid ibn Məsud (? – 1436 və ya 1437), Orta Asiya riyaziyyatçısı və astronomu; "Hesabın açarı", "Çevrə haqqında traktat", "Vətər və sinus haqqında" əsərlərinin müəllifi, onluq kəsrləri ilk dəfə daxil etmiş, kökalma üsullarını şərh etmişdir.

Kepler İohann (1571 – 1630), alman astronomu və riyaziyyatçısı; planetlərin hərəkəti qanunlarını kəşf etmişdir, "Şərab çəlləklərinin yeni steoremetriyası" əsərində fırlanma cisimlərinin həcmini təyin etməyin maraqlı üsulunu təklif etmişdir, 1624-cü ildə loqarifmlər cədvəlini çap etdirmişdir.

Kleyn Feliks (1849 – 1925), alman riyaziyyatçısı; həndəsə, cəbr və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Kovalevskaya Sofya Vasilyevna (1858 – 1891), rus riyaziyyatçısı və ədəbyyatçısı; Peterburq Elmlər Akademiyasının ilk qadın müxbir üzvü, riyazi analiz, mexanika və astronomiya üzrə əsərlərin müəllifi.

Kolmoqorov Andrey Nikolayeviç (1903 – 1987), sovet riyaziyyatçısı; ehtimal nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə məktəblərin banisi; funksiyalar nəzəriyyəsi, riyazi məntiq, topologiya, diferensial tənliklər, funksional analiz ehtimal nəzəriyyəsi və informasiya nəzəriyyəsi üzrə fundamental əsərlərin müəllifi.

Koşi Ogüsten Lui (1789 – 1857), fransız riyaziyyatçısı; riyazi analizin limit anlayışının sistematik tətbiqinə əsaslanmış klassik kurslarının müəllifi; analitik funksiyalar nəzəriyyəsinin banilərindən biri, diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, riyazi fizika, ədədlər nəzəriyyəsi, həndəsə üzrə əsərlərin müəllifi.

Kroneker Leopold (1823 – 1891), alman riyaziyyatçısı; cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Kummer Ernst Eduard (1810 – 1893); alman riyaziyyatçısı; cəbri ədədlər nəzəriyyəsi, həndəsə, riyazi analiz, nəzəri mexanika sahəsində əsərlərin müəllifi.

Kuratovski Kazimey (1896 – 1980), polyak riyaziyyatçısı; topologiya və funkjsiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Qaliley Qalileo (1564 – 1642), italyan fiziki, mexaniki, astronom və riyaziyyatçısı,

dəqiq təbiətşünaslığın yaradıcılarından biri; mahiyyətcə inteqral hesabı metodu tətbiq edərək sürətə görə yol qanununu çıxarmışdır, onun əsərlərində ehtimal nəzəriyyəsi ünsürlərinə rast gəlinir.

Qalua Evarist (1811 – 1832), fransız riyaziyyatçısı; onun cəbri tənliklər üzrə əsərləri müasir cəbrin əsasını qoymuşdur, cəbrin qruplar kimi ən mühüm anlayışları Qaluanın ideyaları ilə bağıldır.

Qauss Karl Fridrix (1777 – 1855), alman riyaziyyatçısı; onun əsərləri cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi diferensial həndəsə, riyazi fizika, geodeziya, astronomiyanın inkişafına çox böyük təsir göstərmişdir.

Qoldbax Xristian (1690 – 1764), riyaziyyatçı, mənşəcə alman, Rusiyada yaşayıb; ədədlər nəzəriyyəsi və riyazi analiz üzrə əsərlərin müəllifi.

Qrandi Qvido (1671 – 1742), italyan həndəsəçisi; ləçəkli əyrilər adlanan əyrilərə baxıb.

Qurvis Adolf (1859 – 1919), alman riyaziyyatçısı; əsas işləri riyazi analiz, funksiyalar nəzəriyyəsi və ədədlər nəzəriyyəsinə aiddir.

La Vale Pussen Şarl Jan (1866 – 1962), Belçika riyaziyyatçısı; Adamarla birlikdə sadə ədədlərin paylanması qanununu əsaslandırmışdır, ədədlər nəzəriyyəsi, funksiyalar nəzəriyyəsi, riyazi fizika sahəsində əsərlərin müəllifi.

Laqranj Jozef Lui (1736 – 1813), fransız riyaziyyatçısı və mexaniki, variasiya hesabının əsas anlayışlarını və metodlarını işləyib-hazırlamışdır; riyazi analiz, ədədlər nəzəriyyəsi, cəbr, diferensial tənliklər üzrə əsərlərin müəllifi.

Lambert İohan Henri (1728 – 1777), alman riyaziyyatçısı, astronomu, fiziki; riyaziyyat sahəsində π ədədinin irrasionallığını ciddi isbat etmişdir (1766), cəbr, həndəsə, sferik triqonometriya sahəsində əsərlərin müəllifi; astronimiyada kometlərin orbitlərini, Kainatın quruluşunu araşdırmışdır, işarələrin universal dili ideyasının müəllifi.

Lame Qabriel (1795 – 1870), fransız riyaziyyatçısı və mühəndisi; riyazi fizika, elastiklik nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi, əyrixətli koordinatlar nəzəriyyəsini işləyib-hazırlamışdır.

Laplas Pyer Simon (1749 – 1827), fransız astronomu, riyaziyyatçısı, fiziki; ehtimal nəzəriyyəsi və səma mexanikası üzrə klassik işlərin, "Analitik ehtimal nəzəriyyəsi", "Səma mexanikası haqqında traktat" (5 cilddə: 1798 – 1825) və s. əsərlərin müəllifi.

Lebeq Anri (1875 – 1941), fransız riyaziyyatçısı; həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin yaradıcılarından biri; ölçü nəzəriyyəsi əsasında inteqralın kifayət qədər ümumi tərifini vermişdir.

Lejandr Adrien Mari (1752 – 1833), fransız riyaziyyatçısı; ədədlər nəzəriyyəsi, elliptik inteqrallar və s. üzrə işlərin müəllifi.

Leybnis Qotfrid Vilhelm (1646 – 1716), alman filosofu, riyaziyyatçısı, fiziki; diferensial və inteqral hesabının yaradıcılarından biri.

Leonardo Pizalı (Fibonaççi) (1180 – 1240), italyan riyaziyyatçısı; özünün baş əsəri olan "Abak kitabında" (1202) ilk dəfə olaraq sistemli və son dərəcədə orijinal şəkildə ərəb riyaziyyatının uğurlarını şərh etmiş, Fibonaççi ədədləri adlanan ilk qayıtma ardıcıllığını təqdim etmişdir.

Lilio Luici (1520 – 1576), italyan həkimi və riyaziyyatçısı; onun yaratdığı təqvim layihəsi Roma Papası Qriqorinin islahatları nəticəsində qəbul edilmişdi.

Lindeman Karl Ferdinand (1852 – 1939), alman riyaziyyatçısı; 1882-ci ildə π ədədinin transendent olduğunu göstərmişdir.

Liuvil Jozef (1809 – 1882), fransız riyaziyyatçısı; funksiyalar nəzəriyyəsi, diferensial tənliklər və mexanika sahəsində işlərin müəllifi.

Lobaçevski Nikolay İvanoviç (1792 – 1856), rus riyaziyyatşısı; qeyri-evklid həndəsənin yaradıcılarından biri, cəbr, riyazi analiz, ehtimal nəzəriyyəsi, mexanika, fizika və astronomiya sahəsində əsərlərin müəllifi.

Lopital Giyom Fransua Antuan (1661 – 1704), fransız riyaziyyatçısı; diferensial hesabı üzrə ilk nəşr olunmuş kitabın müəllifi.

Lyu Xuey (*III* əsr), Çin riyaziyyatçısı, müəllifi olduğu "Dəniz adası haqqında traktat"da əlçatmaz əşyalara qədər olan məsafənin təyin olunması haqqında məsələlər var.

Lyapunov Aleksandr Mixayloviç (1857 – 1918), rus riyaziyyatçısı; yeni elmin – hərəkətin dayanıqlığı nəzəriyyəsinin yaradıcısı.

Mandelbrot Benua (1924 –cü ildə anadan olub), amerikan riyaziyyatçısı; Varşavada doğulub, fraktal həndəsənin yaradıcısı.

Markov Andrey Andreyeviç (1856 – 1922), rus riyaziyyatçısı; ehtimal nəzəriyyəsi, ədədlər nəzəriyyəsi və riyazi analiz sahələrində işləri var.

Matiyaseviç Yuri Vladimiroviç (1947-ci ildə doğulub), Rusiya riyaziyyatçısı; əsas işləri riyazi məntiqdəndir. 1970-ci ildə Hilbertin 10-cu probleminin alqoritmik həlledilməzliyini müəyyən etmişdir.

Meziriak Klod Qaspar Başe de (1581 – 1638), fransız riyaziyyatçısı və şairi; "Xoş və əyləncəli məsələlər" toplusunu (1612), eləcə də Diofantın "Hesab"ını (1621) yunan və latın dillərində öz şərhləriylə çap etdirib, birinci tərtib qeyri-müəyyən tənliklərin həllini verib.

Menelay İskəndəriyyəli (*I – II* əsrlər), qədim yunan riyazziyyatçısı və astronomu; sferik həndəsə və triqonometriyaya dair "Sferika" (5 kitabda) əsərinin müəllifi.

Menexm (e. ə. *IV* əsr), qədim yunan riyaziyyatçısı; konik kəsiklərin əsas xassələrini öyrənib və onlardan kubun ikiləşməsi məsələsinin həllində istifadə edib.

Merkator (Kaufman) Nikolaus (1620 ətrafı – 1687), alman riyaziyyatçısı, astronomu, mühəndisi; Kopenhagen, London və Parisdə işləyib, öz "Loqarifmotexnika" kitabında (1668) ilk dəfə olaraq $\ln(1+x)$ funksiyasının sonsuz qüvvət sırasına ayrılışını göstərib.

Mersenn Maren (1588 – 1648), fransız alimi, rahib; Parisdə elmi dərnək yaradaraq onu Paris akademiyası adlandırmışdır, öz geniş məktublaşması və səyahətləri sayəsində bütün dünya alimlərinin məlumat mübadiləsində geniş şəbəkəsini yaratmışdır.

Minkovski German (1864 – 1909), alman riyaziyyatçısı və fiziki; həndəsə, ədədlər nəzəriyyəsində həndəsi metodlar, riyazi fizika, hidrodinamika sahəsində əsərlərin müəllifi, xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi kinematikasının həndəsi interpretasiyasını vermişdir (Minkovski fəzası).

Mopertyüi Pyer Lui Moro de (1698 – 1759), fransız alimi; 1736 – 1737-ci illərdə dərəcə ölçmələri üçün lapland ekspedisiyası adlanan ekspedisiyaya rəhbərlik etmişdir, ən kiçik təsir prinsipini formulə etmişdir (1740).

Muavr Abraham de (1667 – 1754), ingilis riyaziyyatçısı, mənşəcə fransız; kompleks ədədi qüvvətə yüksəltmək qaydasını tapmışdır (Muavr formulu), ehtimal nəzəriyyəsi sahəsində işləmişdir.

Neyman (fon Neyman) Con (Yanoş; 1903 – 1957), amerikan riyaziyyatçısı, Budapeştdə doğulub, riyaziyyatın müxtəlif sahələrində işləmişdir, çoxluqlar nəzəriyyəsinin aksiomatikasına və hilbert isbat nəzəriyyəsinə baxmışdır; onun "Kvant mexanikasının riyazi əsasları" kitabı bu elmin və onun riyazi aparatının inkişafına əhəmiyyətli təsir göstərmişdir, ömrünün axır illərində oyunlar nəzəriyyəsi, hesablama maşınları nəzəriyyəsi, avtomatlar nəzəriyyəsi sahələrində işləmişdir.

Neper Con (1550 – 1617), şotland riyaziyyatçısı; loqarifmləri icad etmişdir.

Nikolay Kuzanlı (1401 – 1464), teoloq və riyaziyyatçı; kardinal; riyazi traktatlar müəllifi; Kopernikin kosmologiyasılnın sələflərindən biri.

Nikomed İskəndəriyyəli (e. ə. *III – II* əsrlər), qədim yunan həndəsəçisi; sonralar konxoid adlandırılan əyrinin müəllifi kimi məşhurdur.

Nilakanta (1444 – 1501 ətrafı), hind riyaziyyatçısı; "Elmi toplunun" və Ariabhatanın yazdığı "Ariabhatiam" traktatına şərhlərin müəllifi.

Nyuton İsaak (1643 – 1727), ingilis riyaziyyatçısı, mexaniki, astronomu və fiziki; "Natural fəlsəfənin riyazi əsasları" fundamental əsərinin (1687) müəllifi; Leybnisdən asılı olmadan diferensial və inteqral hesabını işləyib-hazırlamış, qüvvət sıralarını elmə daxil etmiş və onlardan sistematik olaraq funksiyaların verilməsi üçün istifadə etmişdir; Nyutonun təbiətşünaslığın müxtəlif sahələrindəki işləri öz zəmanəsini xeyli qabaqlamışdı.

Orem Nikola (1323 ətrafı – 1382), fransız riyaziyyatçısı, fiziki və iqtisadçısı; kəsr üstlü qüvvətləri daxil etmişdir, ilk düzxətli koordinat sistemlərinin yaradılmasını onun adı ilə bağlayırlar. "Sfera haqqında" kitabın müəllifidir.

Ostroqradski Mixail Vasilyeviç (1801 – 1861), rus riyaziyyatçısı və mexaniki; riyazi analiz, riyazi fizika, analitik və səma mexanikası sahəsində əsərlərin müəllifi.

Ömər Xəyyam (1048 ətrafı – 1122-dən sonra), fars şairi, riyaziyyatçısı və filosofu; riyaziyyatda konik kəsiklərin köməyi ilə 3-cü tərtib də daxil olmaqla tənliklərin həllini vermişdir.

Papp İskəndəriyyəli (*III* əsrin ikinci yarısı), qədim yunan riyaziyyatçısı; "Riyazi toplu" əsərində (8 cild) daha əvvəlki qədim yunan

müəlliflərinin ən mühüm nəticələrini şərh etmişdir.

Paskal Blez (1623 – 1662), fransız riyaziyyatçısı, fiziki, filosof və yazıçısı; hesab, cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi; proyektiv həndəsənin ən əsas teoremlərindən birini almışdır; 1641 və ya 1642-ci ildə cəmləyici maşın quraşdırmışdır.

Paskal Etyen (1588 – 1651), fransız riyaziyyatçısı, B. Paskalın atası; onun baxdığı 4-cü tərtib əlamətdar əyri sonralar onun adıyla Paskal ilbizi adlandırılmışdır.

Paçoli Luka (1445 – 1514 ətrafı), italyan riyaziyyatçısı; hesab əməlləri qaydalarını, bir sıra cəbri tənliklərin həllini, həndəsi tənasüblər nəzəriyyəsini şərh etmişdir, "Hesab, həndəsə, nisbətlər və mütənasiblik üzrə biliklər məcmusu" dərsliyinin müəllifi.

Paş Moris (1843 – 1930), alman riyaziyyatçısı; həndəsənin aksiomatik əsaslarını birincilər sırasında araşdırmışdır; nizam aksiomları qrupu işləyib-hazırlamışdır, sonralar onun adıyla adlanan aksiom formulə etmişdir.

Peano Cüzeppe (1858 – 1932), italyan riyaziyyatçısı; riyaziyyatın əsaslandırılması, riyazi analiz üzrə işləri var; natural ədədlər sırasının aksiomatikasını yaradıb.

Pifaqor (e. ə. *VI* əsr), qədim yunan filosofu və riyaziyyatçısı, pifaqor məktəbinin banisi; riyaziyyatı formullar və reseptlər yığnağından mücərrəd deduktiv elmə çevirmişdir; tam ədəd və tənasüblərin xassələrini öyrənməyi, düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri arasında münasibətin isbatını ona aid edirlər.

Platon (e. ə. 428 və ya 427 – 348 və ya 347), qədim yunan filosofu, Afinada öz məktəbini – Akademiyanı yaradıb, riyaziyyatı tədris olunan fənlər siyahısına daxil edib; əksini fərz etməklə mühakimə yürütmək məntiqi metodunun banilərindən biridir.

Poisele Jan Viktor (1788 – 1867), fransız riyaziyyatçısı və mexaniki; proyektiv həndəsənin əsaslarını qoyub.

Pontryagin Lev Semyonoviç (1908 – 1988), Rusiya riyaziyyatçısı; yeni elmin – optimal idarəetmənin banisi.

Ptolomey Klavdi (90 ətrafı – 160 ətrafı), qədim yunan astronom və riyaziyyatçısı; tərpənməz Yer ətrafında planetlərin hərəkətinin riyazi nəzəriyyəsini yaratmışdır, onun əsas əsəri "Almagestdə" ("Məcəsti") qədimlərin astronomik bilikləri ümumiləşdirilmişdir və eləcə də düzxətli və sferik trigonometriya haqqında məlumatlar gətirilmişdir.

Puankare Jül Anri (1854 – 1912), fransız riyaziyyatçısı, fiziki və filosofu; riyazi analiz, topologiya, riyazi fizika, səma mexanikası üzrə əsərlərin müəllifi; 1881 – 1883-cü illərdə qeyri-evklid həndəsəsinin özünün izahını vermişdir.

Puanso Lui (1777 – 1859)), fransız riyaziyyatçısı, mexanik və fiziki; mexaniki sistemlərin həndəsi metodlarla tədqiqini işləyib-hazırlamışdır, cüt qüvvə nəzəriyyəsi əsasında həndəsi statikanı qurmuş, qüvvələr mövcud olmadıqda bərk cismin fırlanması haqqında teoremi çıxarmışdır.

Puasson Simeon Deni (1780 – 1840), fransız riyaziyyatçısı, mexaniki və fiziki.

Ramanucan Srinivasa (1887 – 1920), hind riyaziyyatçısı; Hardi ilə birlikdə ilk dəfə olaraq n ədədinin bütün bölünmələrinin təqribi düsturlarını almışdır.

Rassel Bertran Artur Uilyam (1872 – 1970), ingilis riyaziyyatçısı, məntiqçisi, filosofu; riyazi məntiq və riyaziyyatın əsaslandırılması üzrə əsərlərin müəllifi; çoxluqlar nəzəriyyəsinin paradokslarından birini (Rassel paradoksu) ifadə etmişdir.

Rize Adam (1489 – 1559), alman riyaziyyatçısı və pedaqoqu; öz dərsliklərində vurmanın müasir üsulunu daxil etmiş, "+" və "–" işarələrindən istifadə etmişdir.

Riman Bernhard (1826 – 1866) alman riyaziyyatçısı; kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyəsində həndəsi istiqamətin əsaslarını qoymuşdur; həndəsəyə ixtiyari bircins obyektlərin kəsilməz məcmuları haqqında təlim kimi baxmışdır; kəsilən funksiyaları öyrənmişdir; riyaziyyata riman fəzaları adlanan fəzaları daxil etmiş və onların nəzəriyyəsini (riman həndəsəsini) işləmişdir; diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, triqonometrik sıralar, inteqral hesabı sahələrində işləmişdir.

Roberval Jil (1602 – 1675), fransız riyazityyatçısı; "bölünməyənlər" metodunun yaradıcılarından biri, sikloidin kvadraturasını tapıb.

Romen (van Romen) Adrien (1561 – 1615), holland riyaziyyatçısı, həndəsə və triqonometriya sahəsində işləmiş və π ədədinin 17 onluq işarəsini təyin etmişdir.

Ruffini Paolo (1765 – 1822), italyan riyaziyyatçısı; 5-ci dərəcəli cəbri tənliyin radikallarda həlledilməzliyi barədə ilk (o qədər də əsaslandırılmamış) isbat vermişdir.

Sakkeri Covanni Cerolamo (1667 – 1733), italyan riyaziyyatçısı və məntiqşünası; öz tədqiqatları ilə qeyri-evklid həndəsəsinin kəşfini hazırlayan riyaziyyatçılardan biri; Evklidin beşinci postulatını (paralel düz xətlər haqqında) əksini fərz etməklə isbat etməyə çalışmışdı.

Stevin Simon (1548 – 1620), holland riyaziyyatçısı və mühəndisi; onluq kəsrləri (Avropada) və tənliklərin mənfi köklərini istifadəyə daxil etmişdi.

Stensen Nils (Steno Nikolaus, 1638 – 1686), Danimarka təbiətşünası, rahib-riyaziyyatçı, kristalloqrafiyanın öz adı ilə adlandırılmış bir qanununu müəyyən etmişdir.

Stirlinq Ceyms (1692 – 1770), şotland riyaziyyatçısı, faktorialları hesablamaq üçün sonralar onun adıyla adlandırılan təqribi düstur almışdır.

Sun-szı (*III* əsr), Çin riyaziyyatçısı, "Riyazi traktatın" müəllifi, hesab lövhəsində hesabi əməllərin qaydasını vermiş, bir dərəcəli tənliklərin tam ədədlərdə həlli üsullarını şərh etmişdir.

Suslin Mixail Yakovleviç (1894 – 1919), rus riyaziyyatçısı, Luzinin tələbəsi; Moskva universitetinin tələbəsi ikən A-çoxluqlar adlanan yeni tip çoxluqları kəşf etmişdi.

Seylen (van Seylen) Ludolf (1540 – 1610), holland riyaziyyatçısı; 1615-ci ildə π ədədinin 32 onluq işarəli hesablamasını çap etdirib.

Şyonflis Artur (1853 – 1928), alman riyaziyyatçısı; 1890 – 1891-ci illərdə qruplar nəzəriyyəsinin köməyi ilə bütün kristallik fəza qəfəslərinin təsnifatı məsələsini həll etmişdir.

Şnayder Teodor (1911-ci ildə doğulub), alman riyaziyyatçısı, Gelfonddan asılı olmadan 1934-cü ildə Hilbertin 7-ci problemini həll etmişdir.

Şteyner Yakob (1796 – 1863), isveçrə riyaziyyatçısı; proyektiv həndəsənin yaradıcılarından biri.

Ştifel Mixel (1487 – 1567), alman riyaziyyatçısı və missioneri; "Tam hesab" kitabının müəllifi, bu kitaba o dövrə qədər olan hesabi əməliyyatların və qüvvətləri ilə birgə məchulların işarələrindəki bütün dəyişikliklər daxil olmuşdu, kvadrat kök üçün simvol daxil etmiş, ədədi silsilələri mənfi ədədlər oblastına qədər davam etdirmiş, həndəsi silsilələrdə isə qüvvətin mənfi üstlərini daxil etmişdi.

Şur Fridrix (1856 – 1932), alman riyaziyyatçısı; əsas işləri həndəsə, çevirmə qruplarına aiddir, sabit əyrilikli riman fəzaları haqqında əsərlərin müəllifi.

Şyuke Nikola (? – 1500), fransız riyaziyyatçısı, ilk dəfə olaraq məchulun qüvvətlərinin işarələnməsi üçün üstlərdən istifadə etmişdir.

Tartalya Nikkolo (1499 ətrafı – 1557), italyan alimi; kub tənliklərin həlli üsullarını tapmışdır.

Teetet Afinalı (e. ə. 410 – 369), qədim yunan riyaziyyatçısı, Kirenli Feodorun və Platonun tələbəsi; irrasioanallıqlar nəzəriyyəsini qurmuş, dodekaedr, ikosaedr və oktaedri kəşf etmişdir.

Torriçelli Evancelista (1608 – 1647), italyan fizik və riyaziyyatçısı; toxunanlar haqqında məsələnin həllində bölünməyənlər metodunu təkmilləşdirmiş və geniş tətbiq etmişdir. Rasional üst halında parabolanın kvadraturası qaydasını ümumiləşdirmişdir, Robervaldan asılı olmadan sikloidin kvadraturasını təyin etmişdir. Dekartdan asılı olmadan loqarifmik spiralın qövsünün uzunluğunu təyin etmişdir.

Tusi Nəsirəddin (1201 – 1274) – Azərbaycanın böyük alimi, filosofu, astronom və riyaziyyatçısıdır. O, 1248-ci ildə həndəsəyə aid 15 hissədən ibarət "Təhrir Öqlidis" (Öqlidisin yazılışı) əsərini yazmışdır. Bu əsər həndəsə sahəsində *XVIII* əsrə kimi yazılmış bütün əsərləri kölgədə qoymuşdur. 1657-ci ildə latın dilinə tərcümə olunaraq Londonda nəşr edilmiş və İngiltərənin Oksford universitetində Con Vallis (1616 – 1703) ondan mühazirə oxumuşdur. Bununla da N. Tusi İngiltərədə bir azərbaycanlı kimi şöhrət tapmışdı. N. Tusi, "Təhrir Öqlidis" kitabını yazarkən Evklidin həndəsə ilə hesabını yenidən işləmiş və məzmununa toxunmadan ona əlavələr etmişdir. O, həm də bu kitabında Pifaqor teoreminin 48 variantda isbatını vermişdir. N. Tusi ədəd anlayışının inkişafında böyük inqilab yaratmışdı. O, ilk dəfə vahidə ədəd kimi baxmış və ona tərif vermişdi: Ədəd – vahidlərin yığınından əmələ gəlmiş miqdardır. Ədəd say sırasında duran hər hansı

bir şey olduğu üçün vahidin özünün də ədəd olduğunu mən deyirəm, N. Tusi eyni zamanda iki ədədin nisbətindən alınan qismətə də ədəd kimi baxmış və onu riyazi əsaslandırmışdır. N. Tusinin riyaziyyat sahəsindəki nailiyyətlərini akademik İ. Xəlilov yüksək qiymətləndirmişdir: Nəsirəddinin kəsilməz kəmiyyətlər nəzəriyyəsinə və ədəd haqqındakı nəzəriyyəyə aid olan fikirləri riyaziyyatın sonrakı inkişafına çox böyük təsir göstərmiş və müasir riyazi analizin əsaslandırılmasında lazım olan dəyişən kəmiyyətlərin kəşfi, diferensial və inteqral hesabının kəşfi və kəsilməzliyin ciddi tərifi kimi mühüm kəşflərin hazırlanmasında əhəmiyyətli rol oynamışdır. N. Tusi 1259-cu ildə Marağa şəhərinin şərqində uzunluğu 350 metr, eni 150 metrə yaxın olan bir təpənin üstündə rəsədxana tikdirmiş və buraya körkəmli alimləri cəlb edərək, astronomiyanın inkişafı üçün qiymətli kəşflər etmişdir. O, eyni zamanda triqonometriyanı ümumiləşdirmiş və müstəqil elm şəklinə salmışdır. Xüsusilə sferik triqonometriyanı daha çox inkişaf etdirmişdir. Bu sahədə atılmış ilk elmi addımlar N. Tusiyə məxsusdur. N. Tusi yüzdən çox əsər yazmışdır. Onlardan "İşarələrin şərhi", "Həndəsə qaydaları", "Kürə və silindr haqqında", Apolloninin "Konus kəsikləri, Arximedin "Dairənin kvadraturası", Menelayın "Sferika" əsəri, "Astronomiya haqqında", "Astronomiya xatirələri", "Təqvim haqqında", "Kainatın əbədiliyi və sonsuzluğu haqqında", Ptolomeyin "Almagesti", "Əxlaqi Nasiri", "Cavahirnamə", "Maliyyət barəsində", "Təcrid", "Otuz fəsil" və s. əsərlərini göstərmək olar.

Vallis Con (1616 – 1703), ingilis riyaziyyatçısı; onun "Sonsuzluq hesabı" əsəri (1665) sonsuz kiçik kəmiyyətlərin hesablanmasının yaradılmasında mühüm rol oynayıb.

Van-der-varden Bartel Landert (1903 – 1996), riyaziyyatçı, milliyətcə holland, Almaniyada işləyib; cəbr, cəbri həndəsə, riyaziyyat tarixi üzrə əsərlərin müəllifi.

Vansel Pyer Loran (1814 – 1848), fransız riyaziyyatçısı; ilk dəfə pərgarın və xətkeşin köməyi ilə bucağın triseksiyasını həyata keçirməyin və kubu ikiləşdirməyin mümkün olmadığını isbat etmişdir.

Veber Henrix (1842 – 1913), alman riyaziyyatçısı; cəbri ədədlər, cəbri funksiyalar nəzəriyyələri, cəbri həndəsə və riyazi fizika üzrə əsərlərin müəllifi, 1898-ci ildə qrupların aksiomatik tərifini ifadə etmişdir.

Veyerştrass Karl Teodor Vilhelm (1815 – 1897), alman riyaziyyatçısı, riyazi analiz, funksiyalar nəzəriyyəsi, variasiya hesabı, diferensial həndəsə və xətti cəbrə dair əsərlərin müəllifi, riyazi analizin məntiqi əsaslandırılması sxemini işləyib-hazırlamışdır.

Veyl German (1885 – 1955), alman riyaziyyatçısı, 1933-cü ildən ABŞ-da işləyib; funksiyalar nəzəriyyəsi, ədədlər nəzəriyyəsi, qruplar nəzəriyyəsinə dair əsərlərin müəllifidir, həndəsənin vektor aksiomatikasını işləyib-hazırlamşdır.

Vessel Kaspar (1745 – 1818), Danimarka alimi, ilk dəfə olaraq kompleks ədədlərin həndəsi təsvirini vermişdir.

Viyet Fransua (1540 – 1603), fransız riyaziyyatçısı, demək olar ki, bütün elementar cəbri işləyib-hazırlamışdır, cəbrə hərfi işarələr daxil etmiş və ilk hərfi hesablama qurmuşdur; ona qədər riyaziyyatda düstur olmamışdı.

Viner Norbert (1894 – 1964), amerikan alimi; "Kibernetika" əsərinin müəllifi, burada o, bu elmin əsas müddəalarını ifadə etmişdir, eləcə də riyazi analiz və ehtimal nəzəriyyəsi sahələrində işləmişdir.

Vinoqradov İvan Matveyeviç (1891 – 1983), sovet riyaziyyatçısı; ədədlərin analitik nəzəriyyəsi sahəsində fundamental əsərlərin müəllifi.

Vulf Yuri Viktoroviç (Georq) (1863 – 1925) rus kristalloqrafı, 1913-cü ildə U.L. Breqdən asılı olmadan rentgen şüalarının difraksiya şərtini vermişdir.

Veyls Endryü (1952-ci ildə doğulub), ingilis riyaziyyatçısı; 1995-ci ildə böyük Ferma teoreminin tam isbatını vermişdir.

Yeqorov Dmitri Fyodoroviç (1869 – 1931), rus riyaziyyatçısı; diferensial həndəsə, inteqral tənliklər, funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Zenon Eleyalı (e. ə. 490 ətrafı – 430 ətrafı); qədim yunan filosofu; "Dixotomiya", "Axilles və tısbağa", "Ox" və s. paradoksları (aporiyaları) ilə məşhurdur ki, bunlar da hərəkətin, əşyalar çoxluğunun mümkünsüzlüyünü isbat edir.

MÜNDƏRİCAT

Ön söz.....3

ƏDƏDLƏRİN QƏDİM YAZILMA SİSTEMLƏRİ

Qədim misirlilərin Heroqlif sistemi 5
Roma rəqəmləri 6
Saylar bizə nə danışa bilər 8
Digər Heroqlif sistemləri 8
Əlifba sistemləri 8
Altmışlıq (Babilistan) sistemi.....9
Maya hindularının hesab və rəqəmləri....9
Rəqəmlərin tarixindən 10
Mövqeli onluq sistemi 11

QƏDİM ŞƏRQ RİYAZİYYATI

Qədim Misir 12
İlk dərsliklər 12
Hesablama üsulları.....13
Piramidalar ölkəsinin həndəsəsi 13
Çayarası.....15
Babilistanda hansı məsələləri
həll edirdilər 16
Qədim Çin 18
Hesab 18
Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi 18
Həndəsə 19

ANTİK DÖVRÜN RİYAZİYYATI

Fales və ilkin sübutlar 21
Pifaqor və onun məktəbi 22
Hesab 23
Həndəsə 23
Astronomiya və harmoniya 24
İrrasionallığın kəşfi 24
Həndəsi cəbr və sonsuzluq anlayışı 25
Sonsuzluğun dərk edilməsi 26
Ellinizm dövrü və antik dövrün
qürubu 27
Antik riyaziyyatın son yüksəlişi 30
Evklidin "Başlanğıclar" əsəri 32
Arximed 33
Diofantın "Hesabı" 36

ORTA ƏSRLƏR VƏ İNTİBAH DÖVRÜ

Orta əsrlər Hindistanı 38
Hindistan sayı 39
Cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi 39
Həndəsə 40
Triqonometriya 41
Ərəb Şərqinin ölkələri 41
Orta əsrlər Avropası 44
Erkən orta əsrlər traktatları 44
"*XII* əsr renessansı" və həndəsə 45
Abakda riyaziyyat 46
Hərəkət haqqında elm və riyaziyyat 47
Leonardo Pizalın və onun dövrü 49
İntibah dövrü: şərəfli ixtiralar 51
Məxfi düsturlar 52
Xəyali ədədlərin meydana gəlməsi 54
Hərfi simvolikanın yaranması 55
Məchul kəmiyyət üçün simvollar 55
Orta əsrlər Avropa riyaziyyatçılarının
cəbri simvolikası 56
İlk hərfi hesablama 57
Nəsirəddin Tusinin cəbr, hesab və
həndəsə irsi 58

YENİ DÖVR

Riyazi təhlilin təşəkkülü 60
Analitik həndəsə 60
Loqarifmlərin icadı 60
Sahələrin hesablanması 61
Funksiyaların sferalara ayrılışı 62
Əyriyə toxunanın keçirilməsi
haqqında məsələ 62
Diferensial və inteqral hesabının
yaradılması. Nyuton və Leybnis 63
İdeal riyaziyyatçı – Leonard Eyler 66
XIX əsr: Abstraktın mənimsənilməsi.
Qauss, Abel və Qaluanın kəşfləri 68
Həndəsənin "Fərziyələr"i 70
Kleynin "Erlangen" proqramı 72
Nikola İvanoviç Lobaçevskiy 73
XX əsr. Əsrlərin qovşağında 74
Riyazi məktəblər 75
XX əsr riyaziyyatında elmi
istiqamətlər 76

Riyaziyyat və fizika 78
Riyaziyyat və hərbi-sənaye kompleksi 79
Riyaziyyat və elmi dünyagörüşü 79
Bəzi riyazi problemlər və onların həlli 80

HESAB ƏLİFBASI

Mövqeli say sistemləri 82
İkilik say sistemi 82
İxtiyari əsası olan mövqeli sistemlər ...83
Böyük ədədlərin adları 83
Hesabın dörd əməli.
Toplama və çıxma 84
Vurma 86
Vurma və toplama qanunları 86
Bölmə 87
Ədədi çoxluğun genişlənmə mərhələləri 89
Hesab əməlləri 89
Cəbri əməllər 92
Həqiqi ədədlər çoxluğunun alınması 93
Bu isə həqiqi ədədlər çoxluğunun alınmasının yeni üsulu 95
İnteqral və törəmə anlayışına yeni baxış 100
Kəsr ölçülü fəzalar 101
Həqiqi ədədlər çoxluğunun alınması ..102
Sıfır ölçülü çoxluq 104
Kəsr ölçülü fəzalar 104
Bölünür, ya bölünmür 105
Qədim Şərq pritçası 106
Mənfi ədədlər 108
Mənfi ədədlərin toplanması və vurulması qaydaları 109
Faizlər 109
Qüvvətə yüksəltmə və kökalma 110
Qüvvətə yüksəltmə düsturları 111
Kök işarəsi necə meydana gəldi 112
Orta qiymətlər 112
Orta qiymətləri necə qurmalı 114

TAM ƏDƏDLƏR

Sadə ədədlər 116
Əkizlər 116
Sadə, yoxsa mürəkkəb 116
Sadə ədədlər ovu 117
İlk 320 sadə ədəd və onların arasındakı əkizlər 118
Sadə ədədlərin paylanması qanunu 118
Mükəmməl və dost ədədlər.
Mükəmməlliyin ciddi qanunları 119
Altı yüz altmış altı 120
Ədədlər aləmində dostluq telləri 120
Natural və tam ədədlər çoxluğu 121
Qalıqlı bölmə 122
Say sistemləri 123
Bölünmə əlamətləri 125
Çıxıqlar haqqında 125
Sadə və mürəkkəb ədədlər 127
Bəzi xüsusi hallarda ədədin sadə və mürəkkəb olmasının araşdırılması 129
Fermanın kiçik teoremi 129
Ortaq bölən. Qarşılıqlı sadə ədədlər.
Eyler funksiyası 130
Ən böyük ortaq bölən. Ən kiçik ortaq bölünən 133
Fibonaççi ədədləri 134
Fibonaççi ədədlərinin bölünmə xassələri 139
Fibonaççi ədədləri həndəsədə 145
Fibonaççi ədədləri və kəsilməz kəsrlər 149
Mersen ədədləri: yanılmalar və rekordlar 152
Mersen ədədləri. Rekordlar cədvəli ...153
Ferma ədədləri 153
Hesabın əsas teoremi 153
n ədədinin neçə böləni var? 154
İlk 150 ədədin kanonik ayrılışı 155
n ədədinin bölənləri cəmi nəyə bərabərdir? 155
Leonard Eyler 155
n-i aşmayan neçə natural ədəd *n*-lə qarşılıqlı sadədir? 156
Qalıqlar hesabı və müqayisələr nəzəriyyəsi 156
Ədədi təqvimin düsturu 156
"Sinfi təbəqələşmə" 157
Modula görə müqayisələr və onların xassələri 158
Turnirin cədvəlini necə tərtib etməli 159
Qeyri-müəyyən tənliklər 159
Birdərəcəli tənlikləri necə həll etməli? 160
İkidərəcəli tənliklər 160
Elementlərin uzunluqları tam ədədlər olan fiqurlar 161
Böyük Ferma teoremi
Əsrarəngiz hökm 162
Sonsuz enmə metodu 163
Kiçik Ferma teoremi 163
n=4 üçün böyük Ferma teoremi 164

n=3 halında böyük Ferma teoremi:
Eyler cəhdi 164
n=3 halında böyük Ferma teoreminin isbatının ideyası 165
Böyük teorem və cəbri ədədlər nəzəriyyəsi 165
Böyük Ferma teoreminə "Axırıncı hücum" 166
Hər halda o sübut edildi 167

HƏQİQİ ƏDƏDLƏR

Rasional ədədlər 168
Kəsrlərlə əməliyyat qaydaları 168
Alikvot kəsrlər 168
Altmışlıq və onikilik kəsrlər 169
Rasional ədəd anlayışı 169
Onluq kəsrlər 170
Sonlu və dövri onluq kəsrlər 171
İrrasional ədədlər 171
"Ağılsız" ədədlərin tarixi 171
Pifaqorçuların kəşflərinin izi ilə 172
Rasional, yoxsa irrasionaldır 172
İrrasional ədədlərin rasionallarla yaxınlaşması 173
Rasional+irrasional 173
Zəncirvari kəsrlər 174
Kanonik zəncirvari kəsrlər 175
Zəncirvari kəsrin qiymətini necə təyin etməli 175
Münasib kəsrlər 177
Ümumiləşmiş zəncirvari kəsrlər 177
Zəncirvari kəsrlər və təqvim 178
Həqiqi ədədlərin aksiomatikası haqqında 179
Bəzi nəticələr. İrrasional ədədlərin kəsilməz kəsrlər vasitəsi ilə göstərilişi 187
Evklid alqoritm 188
Transsendent ədədlər 191
Dairə magiyasının aşılması 191
Saysız-hesabsız qoşun 192
π ədədi 192
π ədədinin ilk rəqəmlərini necə yadda saxlamalı 193
Ecazkar kamillik düsturu 194
Sadə ədədlər və π 194
e ədədi 195
Sələmçi haqqında məsələ 196
e ədədinin irrasionallağının isbatı 196
Gözəl ittifaq 197

KOMPLEKS ƏDƏDLƏR

Yeni ədədlər nəyə lazımdır? 198
Kub tənliklərin çevrilə bilməyən halı..198
Həqiqi+xəyali=kompleks 199
Kompleks ədədlərin xassələri 199
Kvadrat tənlik haqqında 200
Toplama, çıxma, vurma 200
Qoşma kompleks ədədlər 201
Kompleks ədədlərin bölünməsi 201
Kompleks müstəvisi və iki ox 202
Kompleks ədədi vektor kimi 202
Kompleks ədədin arqumenti 203
Kompleks ədədin triqonometrik şəkli 204
Kompleks ədədlərin qüvvətə yüksəldilməsi və kökünün alınması 205
Muav düsturu və triqonometriya 206
Eyler düsturunu necə əldə etmək olar? 206

TƏNLİKLƏR VƏ BƏRABƏRSİZLİKLƏR

Hesabdan cəbrə qədər.
Sirlər açıqlanır 208
Rəqəmlər yerinə hərflər 209
Həmişə düz olan bərabərsizliklər 209
Yeni sehrbazlığa başlayanlara bir neçə məsləhət və ya tənliyi necə həll etməli 211
Tənliyi həll etmək nə deməkdir? 211
Tənliyi necə sadələşdirməli 211
Kimsə itirir, kimsə tapır 212
Cəbri "sıralar" 213
Kvadrat tənliklər 213
Viet düsturu 214
Kvadrat tənliyin diskriminantı 215
Viet teoremi 215
Babilistan cədvəlində məsələ 215
Ən böyük torpaq sahəsini necə hasarlamaq olar? 216
İmtahan məsələsi 217
Çevrilməmiş tənlik 217
Kvadrat tənliklərə gətirilən tənliklər .217
Kub tənliklər 218
Sadələşdirmədən başlayaq 218
Kardano düsturu 219
Tənlikləri həll edirik 219
Kub tənliklər və kompleks ədədlər 221
Dördüncü dərəcəli tənliklər 222
Yüksək dərəcəli tənliklər.
Radikalda həll etmə 223
Həll edilən tənliklər 224

Cəbri tənliklər Qalua qrupları 224
Cəbrin əsas teoremi.....227
Həqiqi əmsallı çoxhədlinin kökləri 228
Funksional tənliklər.....228
İlkin anlayışlar.....228
Sadə funksional tənliklər.....231
Kəsilməzlik və funksional tənliklər....232
Tərpənməz nöqtələr. İnversiyalar
və funksional tənliklər 237
Cəbrin əsas teoreminin tətbiqləri 242
Diofant tənlikləri 243
Ən böyük ortaq bölən haqqında
tənlik.....243
Natural köklər. Silvester teoremi.....244
Birdərəcəli diofant tənlikləri.....245
Tənliklər sistemi 248
Xətti tənliklər sistemi.....249
Sistem tənliklərin həllinin ümumi
sistemi.....251
Bərabərsizliklərin həlli.....253
Bircins simmetrik çoxhədlilər və
bərabərsizliklər 257
Simmetrik çoxhədlilər və onların
bərabərsizliklərin araşdırılmasına
tətbiqləri.....266
Törəmə anlayışının funksiyanın
monotonluğunun araşdırılmasına
tətbiqi.....269
Yunq bərabərsizliyi və nəticələr.....270
Hölder və Minkovski
bərabərsizlikləri 271
Mürəkkəb funksiyaların törəməsinin
tapılması və araşdırılması 272
s-ci ortalar və onlar arasında
münasibət.....272
Qabarıq və çökük funksiyalar
nəzəriyyəsinin bərabərsizliklərin
araşdırılmasına tətbiqi 275
Qabarıq və çökük funksiyalar.....275
Funksiyanın qabarıq və ya
çöküklüyünün araşdırılması üçün
kriteriyalar.....276
Kriteriyaların tətbiqləri.....278
Xətti bərabərsizliklər sistemi 281
İlkin məlumatlar 281
İkidəyişənli və üçdəyişənli xətti
bərabərsizliklər sistemlərinin
müstəvidə və fəzada təyin etdikləri
çoxluqlar.....285
Nöqtələr sisteminin qabarıq örtüyü 287
Qabarıq çoxüzlü konus 287
Xətti proqramlaşdırma məsələləri 292

VARİANTLARIN SEÇİLMƏSİ

Kombinator məsələlərin
"xüsusi əlaməti".....299
Yerdəyişmələr (permutasiyalar) 299
Kvartet haqqında məsələnin həlli.....300
Təkrarlı yerdəyişmələr 300
Yerləşdirmə (aranjeman).....301
Sıfır faktorial 301
Təkrarlı yerləşmə 301
Pasport haqqında məsələnin həlli 302
Birləşmələr (kombinezonlar).....302
Konpozisiyalar 302
Lotto-milyon haqqında məsələ 303
Təkrarlı kombinezonlar 303
Nyuton binomu 304
Binominal əmsallar və
kombinezonlar.....305
Paskal üçbucağı 305
Üçbucaqlı xəlbir 306
Kombinatorika məsələləri 306
Müstəvinin düz xətlər ilə bölünməsi
haqqında məsələ 306
Fəzanın müstəvilər ilə bölünməsi
məsələsi 307
Melanxoliya və sehrli kvadrat 308
Ümumiləşmiş faktorial və katalan
ədədləri.....308
Qraflar.....309
Königsberq körpüləri haqqında
məsələ.....310
Müstəvi və izomorf qraflar 310
Göbələklər və tanışlıqlar.....311
Oyunlar qrafı.....313
Köçəri tacirlər və dəmir yollar 314
Dörd rəng haqqında məsələ 315
İstiqamətləndirilmiş qraflar 316
"Tələb olunur. Tələb olunur.
Tələb olunur."....317

MÜSTƏVİ ÜZƏRİNDƏ HƏNDƏSƏ

Sadə və tükənməz üçbucaq.....319
Üçbucağın elementləri 319
Üçbucaqların növləri.....319
Bərabəryanlı üçbucaq 320
Üçbucaqların bərabərlik əlaməti.....321
Üçbucaqların bucaqlarının cəmi.....321
Oxşarlıq əlamətləri 322
Görkəmli nöqtələr, düz xətlər və
çevrələr.....323
Pifaqor teoremi 327

Üçbucaq bərabərsizliyi. Klassik ekstremal
məsələlər.....328
Üçbucaqda metrik münasibətlər.....329
Pifaqor teoreminin dörd isbatı.....330
Çoxbucaqlılar.....331
Çoxbucaqlıların növləri 331
Dörbucaqlının həndəsəsindən.....332
Çoxbucaqlının bucaqlarının cəmi
haqqında teorem.....333
Çoxbucaqlının sahəsini necə
tapmaq olar?.....334
Çoxbucaqlıların eynitərkibliliyi.
Bolay-Qervin teoremi 335
Pik düsturu 336
Parketlər-müstəvinin çoxbucaqlılar
ilə döşənilməsi 337
Çevrə və dairə anlayışı və sadə
xassələri.....339
Çevrənin simmetriyası.....339
Toxunanlar haqqında teorem 340
Çevrənin uzunluğu və dairənin
sahəsi 341
Çevrənin daxilinə çəkilmiş bucaq
haqqında teorem.....342
Yapon məbədlərindən məsələ 343
Ptolomey teoremi 344
Çevrəyə nəzərən nöqtənin dərəcəsi 345
Apolloniy çevrəsi.....345
Hər şey və ya heç nə 346
Həndəsi qurmalar 346
Radikal ox və radikal mərkəz.....347
Ən asan məsələlər 347
Evklidin "Başlanğıc"ından "qəribə"
bir cümlə.....348
Qurma məsələlərini necə həll etməli?..349
Qurma məsələlərinin həllinin
mümkünlüyü 351
Qurma məsələlərində cəbr 351
Dairənin bölünməsi haqqında məsələ ..352
Alətlər ilə eksperimentlər 352
Qədimin üç məşhur məsələsi.....354
Kubun ikiqat artırılması.....354
Eratosfenin mezolyabiyi 355
Bucağın trisektrisiyası 356
Dairənin kvadraturası 357

FƏZADA HƏNDƏSƏ

Stereometriyanın əsasları.....359
Stereometriyanın aksiomaları 359
Düz xətlər. Müstəvilər. Paralellik.....360
Fəza fiqurlarının təsviri 361
Perpendikulyarlıq. Bucaqlar.
Məsafələr 363
İkiüzlü və çoxüzlü bucaqlar 366
Cisimlər 367
Fəza təsəvvürünə, təsvirə və...
düşünməyə bir neçə məsələ 368
368-ci səhifədəki məsələlərə cavab 369
Çoxüzlülər.....370
Platon və Arximed cisimləri.....372
Eyler düsturu 375
Təriflərə qayıdış.....376
Koşi teoremi və çoxüzlülərin
əyilməsi 377
Tetraedrin həndəsəsi.....378
Tetraedr və sferalar.....378
Şteffen fleksorunu necə hazırlamaq
olar 379
Heronun düsturundan çoxüzlünün
həcminə qədər.....380
Tetraedrin medianları 381
Ortomərkəzli və düzbucaqlı
tetraedrlər.....381
Bərabərüzlü tetraedr.....382
Əsas işarələrin siyahısı.....384
Bəzi alimlər haqqında qısa məlumat ...386
Mündəricat.....395

Tərtib edənlər:

Hüseynov İlham Heydər oğlu – *Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi*

Kərimov Məhəmməd Ağahəsən oğlu – *Respublikanın əməkdar müəllimi*

RİYAZİYYAT ENSİKLOPEDİYASI

I hissə

Nəşriyyatın direktoru
Eldar Əliyev

Mətbəənin direktoru
Səhraf Mustafayev

Texniki redaktor
Mehri Xanbabayeva

Dizayn
Süsən Zərbaliyeva
Aydan Əliməmmədova

Korrektor
Fəridə Ələsgərli

Çapa imzalanıb 28.11.2011.
Formatı 60×90 1/8.
Ofset çapı. F.ç.v. 50. *Tiraj* 35000.

"Çaşıoğlu" mətbəəsi.
Bakı şəhəri, M.Müşfiq küçəsi 2E, *Tel.:* 447-49-71.

400