M əktəbli kitabxanası

Riyaziyyat

Ensiklopediyası

II hissə

—9928—

Azərbaycan Respublikası Prezidentinin
PREZİDENT KİTABXANASI

ÇAŞIOĞLU
2011

22.71ə
R-67

Tərtib edənlər:

Hüseynov İlham Heydər oğlu – *Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi*

Kərimov Məhəmməd Ağahəsən oğlu – *Respublikanın əməkdar müəllimi*

Riyaziyyat ensiklopediyası. II hissə.
Bakı: Çaşıoğlu, 2011. –400 s.

ISBN 978–9952–27–339–7

© Çaşıoğlu nəşriyyatı, 2011

ÖN SÖZ

Riyaziyyat heç bir zaman qocalmır. Məhz bu xüsusiyyət riyaziyyatı digər həqiqi elmlərdən köklü surətdə fərqləndirir. Riyaziyyat yalnız aydın təfəkkür, ciddi fikir və saymaq bacarığını tələb etmir.

Riyaziyyatın özünəməxsus gözəlliyi var. Heyranedici riyazi faktlar və geniş fikirlər özünün təsirinə görə dərketməyə və musiqiyə yaxındır. Nailiyyətlərə malik olan riyaziyyatçının geniş fantaziyası olmalıdır. Riyaziyyat qədim elmlərdən birinin olmasına baxmayaraq, indiyə qədər bu sahədə həll olunmamış xeyli problem qalmışdır.

Yalnız uzaqgörən olmayan insanlar hesab edirlər ki, bütün elmi kəşflər edilmişdir, biz isə yalnız əldə olunmuş nailiyyətlərdən istifadə etməklə kifayətlənməliyik. Yeni biliklər yaradan insanlar isə başqa fikirdədirlər.

Riyaziyyat və fizika sahəsində bir çox düsturları, teoremləri və qanunları kəşf etmiş dahi ingilis alimi İsaak Nyuton deyirdi: "Öz-özlüyümdə mən dəniz qırağında oynayan və əylənən, sonra isə dənizin cilaladığı kiçik daşları və ya daha gözəl balıqqulağını yığan oğlanam. Amma, tamamilə toxunulmamış həqiqət okeanı mənim qarşımdadır!"

Riyaziyyat – vacib elmdir. Bu ona görə deyil ki, riyaziyyatı bütün orta və ali məktəblərdə öyrənirlər. Ətrafınıza baxın. Bütün binaların, maşınların, telefonların, kompyuterlərin və televizorların üstündə riyazi hesablamaların möhürü var.

Riyaziyyat – gözəl elmdir. Riyaziyyatı mürəkkəb, qarışıq hesablamalarla eyniləşdirən insanlar yanılırlar. Eyni tipli məsələlərin həllinə hazır reseptin tətbiq edilməsini, məlum düstur vasitəsi ilə kəmiyyətin hesablanmasını, hətta "şüursuz" olan maşın da yerinə yetirə bilər. Lakin bu və ya digər reseptin tətbiqi və ya düsturun istifadə edilməsi və bundan da artıq olan bu reseptin hazırlanması və düsturların çıxarılması yalnız yaradıcı və istedadlı insana məxsusdur.

Riyaziyyatla məşğul olan hər bir kəsdən işləmək həvəsi, fikri cəmləşdirmək və gərginlik tələb olunur.

Deyilənə görə, çar Ptolomey öz müasiri Evkliddən soruşur ki, xüsusi gərginlik keçirmədən riyaziyyatla necə məşğul olmaq olar. Dahi alim ona indi məşhur olan kəlamla cavab verir: "Riyaziyyatda çarlara məxsus olan yol yoxdur".

Riyaziyyatın daha mühüm rolu ondan ibarətdir ki, o, insanın intellektual və yaradıcılıq qabiliyyətini inkişaf etdirir.

İki cildlik "Riyaziyyat ensiklopediyası" kitabının oxucularına daima cavan, qədim, ciddi və gözəl elm olan riyaziyyatla xoş təmasda olmağı arzu edirik.

HƏNDƏSƏ – "YERÖLÇMƏ" DEMƏKDİR

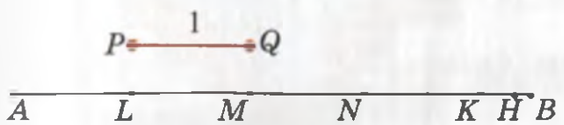
UZUNLUQ, SAHƏ, HƏCM

UZUNLUQ

Parçanın uzunluğu 2000 il əvvəl böyük yunan riyaziyyatçısı Arximed tərəfindən müəyyən olunmuş üsulla ölçülür. *AB* ölçmək istədiyimiz parça (bu metr, santimetr, düymə, arşın, qulac və ya başqa qabaqcadan seçilmiş parça ola bilər), *PQ* isə uzunluq vahididir. *AB*-nin (*A* nöqtəsindən *B* nöqtəsi istiqamətində) üzərinə, ardıcıl olaraq, ölçü vahidinə bərabər parçaları düzməyə başlayaq: $AL=LM=MN=...=1$ (şək. 1). Bu əməliyyatı bir neçə (sonlu sayda) dəfə yerinə yetirdikdən sonra ya axırıncı parçanın sonucu *B* nöqtəsi ilə üst-üstə düşəcək, ya da ölçü vahidindən az olan qalıq hissə yaranacaq (təcrübədən məlum olan bu fakt Arximed aksiomunun mahiyyətini təşkil edir). Əgər, misal üçün, ölçü vahidi *AB*-nin üzərinə dörd dəfə düşürsə, deməli *AB*-nin l uzunluğu 4-ə bərabərdir ($l=4$). Yox, əgər dörd dəfədən sonra, l-dən kiçik qalıq hissə olan *KB* yaranırsa, onda deyirik ki, *AB* parçasının uzunluğu əksiyi ilə 4-ə, artığı ilə 5-ə bərabərdir. Bunu isə belə yazırıq: $4 \le l \le 5$.

Sonra, yenidən *KB* qalığı üzərində ölçü vahidinin onda bir hissəsini düzürük. Əgər bu zaman iki dəfədən sonra l-in onda bir hissəsindən kiçik olan *HB* qalıq parçası yaransa, onda $4{,}2 \le l \le 4{,}3$, yəni *AB* parçasının uzunluğu 1/10 dəqiqliklə əskiyi ilə 4,2-yə, artığı ilə 4,3-ə bərabərdir.

Bu cür ölçü dəqiqliyi bizə münasib deyilsə, onda *SB* qalıq parçası üzərinə ölçü vahidinin yüzdə bir hissəsini və s. qoymaq lazımdır. Təsvir olunan (onluq) ölçmə əməliyyatı ya bir neçə dəfədən sonra bitəcək və *AB*-nin l-uzunluğunun dəqiq ölçüsü onluq kəsrlə (məs: $l=4{,}27$) məlum olacaq, ya da



Şəkil 1.

sonsuz davam edəcək və biz *AB*-nin l uzunluğunu yalnız sonsuz onluq kəsrlə göstərə biləcəyik, məsələn $l= 4{,}27016...$

Əgər *AB* və *PQ* parçaları ortaq ölçülüdürlərsə, yəni *AB* parçasının uzunluğu rasional ədədlə ifadə olunursa (*PQ* ölçü vahidi ilə), sonuncu sonlu və ya sonsuz dövri onluq kəsrlə ifadə oluna bilər. Məsələn, əgər *AB* parçası ölçü vahidinin 2/3 hissəsini təşkil edirsə, onda $l = 0{,}6666...$ Lakin *AB* parçası *PQ* ilə ortaq ölçülü olmazsa, ölçüsü *PQ* ölçü vahidi ilə ölçüldükdə rasional ədədlə ifadə oluna bilməz. O zaman nəticə sonsuz dövri olmayan onluq kəsrlə ifadə olunacaqdır. Belə ki, əgər *AB*-kvadratın diaqonalı, ölçü vahidi *PQ* isə onun bir tərəfidirsə (şək. 2), onda Pifaqor teoreminə əsasən, *AB*-nin uzunluğu $\sqrt{2}$-yə bərabərdir. $\sqrt{2}$ ədədi isə irrasional olaraq sonsuz dövri olmayan onluq kəsrlə ($\sqrt{2}= 1{,}4142135...$) ifadə olunur.

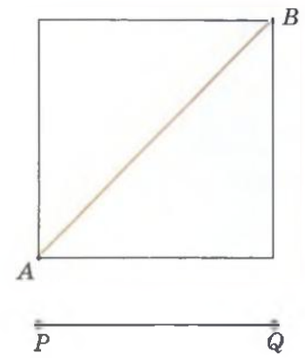
Beləliklə, hər hansı bir l uzunluq vahidini seçib, ölçmə vasitəsilə hər hansı S parçasına müəyyən ədəd – onun $l(S)$ uzunluğunu (*AB* parçasının uzunluğu adətən $|AB|$ və ya sadəcə *AB* kimi işarə olunur) qarşı qoyuruq. Deməli $l(S)$ parçalar çoxluğunda verilmiş ədədi funksiyadır. Bu funksiyanın əsas xassələrini nəzərdən keçirək.

A. Hər bir parçanın (bir nöqtədən ibarət olmayan) uzunluğu müsbətdir: $l(S) > 0$. Bu xassə *müsbətlik xassəsi* adlanır.

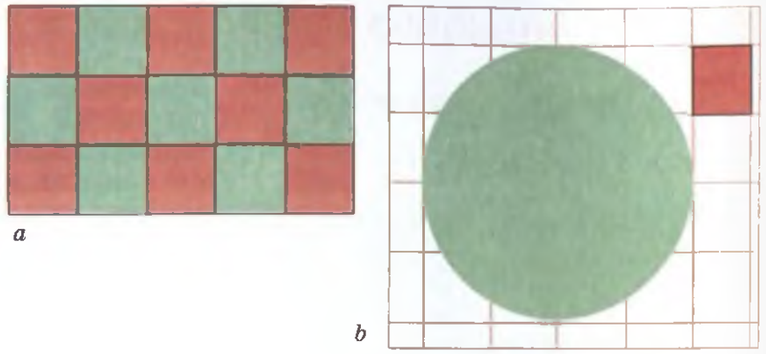
B. Əgər *C* nöqtəsi *AB* parçasını iki hissəyə, *AC* və *CB*-yə bölürsə, o zaman parçanın tam uzunluğu hər iki hissənin uzunluqları cəminə bərabərdir: $|AB| = |AC| + |CB|$. Bu xassə *additivlik* (lat. addition- "toplama") adlanır.

C. Əgər, S_1 və S_2 parçaları bərabərdirsə, yəni biri o birindən hərəkət ("Hərəkət" başlıqlı məqaləyə bax) vasitəsilə alınarsa, onların uzunluqları bərabərdir: $l(S_1)= l(S_2)$. Başqa sözlə desək, hərəkət zamanı uzunluq dəyişmir. Uzunluğun bu xassəsi *invariantlıq* (lat. İnvariant – "dəyişilməz") adlanır.

D. I parçasının uzunluğu vahidə bərabərdir: $l(I)=1$. Hər hansı bir parçanın uzunluq vahidi olaraq seçilməsi, *normalaşdırma* adlanır.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

Göstərmək olar ki, ölçmə prosesində, parçalar çoxluğunda təyin olunmuş və ***A, B, C, D*** xassələrinə malik olan yeganə funksiya var. Ona görə də bu xassələri aksiom olaraq qəbul etmək olar və uzunluğu – parçanın sadalanan xüsusiyyətlərə malik olan funksiyası kimi də təyin etmək olar. Xüsusi halda, uzunluğun bütün digər xassələrini ***A, B, C, D*** aksiomlarından da almaq olar.

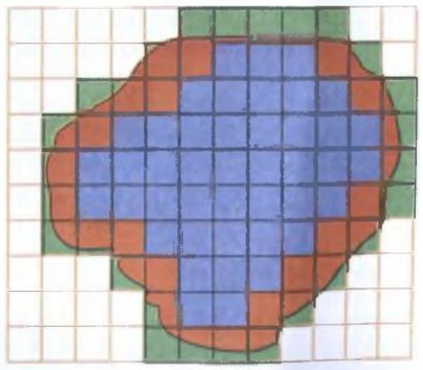
SAHƏ

Adətən F fiqurunun sahəsi $s(F)$, fiqurun neçə sahə vahidindən ibarət olduğunu göstərir. Lakin bunu tərif olaraq qəbul etmək olmaz. Burada yalnız sahənin nə olduğu təsvir edilir. Tərəfləri 3 və 5 sm olan düzbucaqlının 15 kvadrat santimetrdən (onu asanlıqla tərəfləri 1 sm. olan 15 kvadrata bölmək olar, bax şək. 3 *a*) "qurulduğunu" anlamaq çətin deyil. Lakin radiusu 2sm (şək. 3, *b*) olan dairəni "qurmaq" üçün nə qədər belə kvadratın lazım olduğu aydın deyil.

Sahənin dəqiq riyazi tərifini vermək ucun paletdən – şəffaf, bərabər kvadratlara bölünmüş tordan istifadə etmək olar. Təsəvvür edək ki, belə bir tor stolun üzərindədir və stolun səthi hər tərəfi 1-ə bərabər olan kvadratlara bölünmüşdür. Əgər F fiquru tam olaraq, məsələn, 81 kvadratdan ibarət palet fiqurun içərisinə yerləşirsə, özü 43 kvadratdan (şək. 4) ibarət fiqurdursa, o zaman $43 \le s(F) \le 81$. Ölçünün daha dəqiq olması ucun paletin hər bir kvadratını yüz kvadrata (tərəfləri birinci paletin tərəflərindən 10 dəfə kiçik, sahəsi 1/100-ə bərabər olan) bölək. Yeni daha kiçik palet F fiqurunun sahəsini əhatə edən daha sıx sərhədləri göstərəcək. Məsələn, $58{,}87 \le s(F) \le 62{,}34$. Əgər ikinci paletin hər kvadratını yenidən 100 kvadrata bölsək, ölcünün dəqiqliyi daha da artar. Məsələn, sərhədlər $60{,}1381 \le s(F) \le 60{,}4952$ olacaq. Beləliklə, daha xırda tordan ibarət paletlərdən istifadə edərək, biz F fiqurunun sahəsinin hüdudlarına yaxınlaşacağıq.

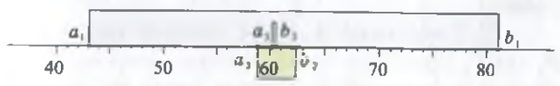
Lakin burada bir incə məqam var. Əvvəlcə biz $[a_1; b_1]$ parçasını aldıq. Burada $a_1 = 43$; $b_1 = 81$, həm də axtarılan kəmiyyət $s(F)$ bu ədədlər arasındadır. Sonradan bu parçanı $[a_2; b_2]$-yə qədər kiçildirik. Burada $a_2 = 58{,}87$-yə, $b_2 = 62{,}34$-ə bərabərdir. Sonra bir az da kiçiltdik – $[a_3, b_3]$. Burada artıq $a_3 = 60{,}1381$; $b_3 = 60{,}4952$ və s. Riyazi analizdən məlumdur ki, biri digərinə daxil olan parçaların kəsişməsi ya bir nöqtə (parçaların uzunluğu durmadan qısaldığı halda), ya da müəyyən parça ola bilər.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$



Şəkil 4.

Birinci halda, nəzərdə tutulan bütün parçalara aid yalnız bir ədəd $s(F)$ olduqda (şək. 5) deyilir ki, F fiquru kvadratlanandır (Jordan mənada), $s(F)$ - ədədinə isə F fiqurunun sahəsi deyilir.



Şəkil 5.

İkinci hal, yəni parçaların kəsişməsinin bir nöqtə deyil, parça olması ilk baxışda mümkünsüz görünür. Axı təcrübə hər bir fiqurun $s(F)$ sahəsinin olduğunu göstərir. $s(F)$ ədədi götürülən parçaların yeganə ortaq nöqtəsi olmalıdır. Lakin kor-koranə olaraq təcrübəyə və intuisiyaya inanmaq olmaz. Baxılan halda onlar bizi aldadır!

Aşağıdakı misal bunu təsdiq edir.

Tərəfləri 1 olan Q_1 kvadratını götürək. Buradan şək. 6-da göstərildiyi kimi, 1/4 sahəyə malik xaçşəkilli fiquru çıxaraq. Nəticədə dörd bərabər kvadratdan ibarət, Q_1-in təpələrinə tərəf yaxınlaşan Q_2 fiquru qalır (onların tərəfləri $\frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}432\dots$-ə bərabərdir). İndi Q_2 fiqurunun hər bir kvadratında, əvvəlcə xaçşəkilli fiquru yaradaq, sonra isə xaçşəkilli fiquru çıxaraq. Onun ölçüsünü müəyyən etmək üçün nəzərə alaq ki, dörd belə fiqurun sahələrinin cəmi 1/8 bərabər idi. 16 kvadratdan ibarət Q_3 fiquru yarandı. Onların hər birindən yenidən xaçabənzər fiquru elə ataq ki, bu 16 "xaç"ın ümumi sahəsi 1/16 ya bərabər olsun. Onda 64 kvadratdan ibarət Q_4 fiqurunu alırıq və s.

F ilə bütün $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \dots$ fiqurlarında kəsişməni işarə edək. Başqa sözlə Q_1-dən növbə ilə xaçşəkilli fiqurları atdıqca F yaranır. Q_1-dən atılan fiqurların ümumi sahəsi $\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{2}$ bərabərdir. Deməli F çoxluğunun payına $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ sahəsi düşür. Bu inanılmaz kimi görünür: F fiqurunda ölçüləri çox kiçik olsa belə, bütöv bir kvadrat yoxdur, amma onların sahələrinin cəmi $\frac{1}{2}$-ə bərabərdir.

İndi isə fiqurun sahəsini Jordan mənada (yəni palet ilə) ölçməyə çalışaq. Nə qədər kiçik palet götürsək belə F-də yerləşən paletin kvadratlarından ibarət olan fiqurun sahəsi $\frac{1}{2}$-dən böyük olacaq, F-ə daxil olan fiqurun sahəsi isə (F-də bir dənə də olsun bütöv kvadrat olmadığı üçün) sıfıra bərabərdir. Beləliklə, yaranan parçaların hər biri (və onların kəsişmələri)



Şəkil 6.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2,] \supset [a_3, b_3] \supset \dots$$

şərtini ödəyir və $[0, \frac{1}{2}]$ parçasını özündə saxlayır, yəni onların kəsişməsi bir nöqtədən ibarət deyil.

Deməli F fiquru kvadratlanan deyil.

Sahənin palet vasitəsi ilə ölçülməsi *XIX* əsrdə fransız riyaziyyatçısı Kamil Jordan tərəfindən təklif olunmuşdur. Başqa bir fransız riyaziyyatçısı – Anri Lebeq isə sahəyə daha ümumi tərif verilməsini təklif etmişdir. Yuxarıda düzəldilən Jordana görə kvadratlanan, lakin sahəsi olan (1/2-ə bərabər) F fiquru, Lebeqin təklif etdiyi üsula görə və ya necə deyərlər Lebeqə görə ölçülən-dir. Jordana görə kvadratlanan fiqur, Lebeqə görə hökmən ölçüləndir (və sahəsi elə həmin sahədir).

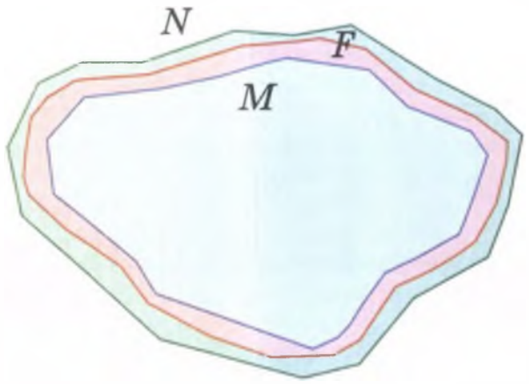
Bəs hansı müstəvi fiqurlar kvadratlanandır? Ən əvvəl çoxbucaqlılar. Onların ölçülən olmasını sahənin tərifindən asanlıqla almaq olar. Başqa fiqurlar üçün aşağıdakı teorem tətbiq olunur (şək. 7):

✓ **Əgər $M \subset F \subset N$ şərtini və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə**

$$s(N) - s(M) < \varepsilon$$

bərabərsizliyini ödəyən iki M və N çoxbucaqlıları varsa, onda və yalnız onda F fiquru kvadratlanandır.

Başqa sözlə, kvadratlanan fiqurları çoxbucaqlılara kifayət qədər dəqiq yaxınlaşdırmaq olar. Məsələn, dairənin sahəsini onun daxilinə və ya xaricinə çəkilmiş düzgün n-bucaqlının sahəsinin, $n \to \infty$ şərti daxilində limiti kimi təyin edirlər. Hər iki sahənin ortaq limiti olduğu üçün, onların fərqi sıfıra yaxınlaşır. Deməli dairə – kvadratlanan



Şəkil 7.

fiqurdur. Ümumiyyətlə, hər bir müstəvi qabarıq fiqur ("Qabarıq fiqurlar" məqaləsinə bax) kvadratlanır. $a \le x \le b$ parçasında verilmiş kəsilməz $f(x)$ funksiyasının əmələ gətirdiyi əyrixətli trapesiya da kvadratlanır ("İnteqral və ibtidai funksiyalar" məqaləsinə bax).

Sahənin yuxarıdakı paletlərin vasitəsi ilə verilmiş tərifindən başqa, onun daha bir aksiomatik tərifi vardır. Bu tərifdən öncə, sahənin bəzi xassələrini nəzərdən keçirək (Biz yalnız Jordan mənada sahələrə baxacağıq).

Q ilə kvadratlanan bütün müstəvi fiqurlar çoxluğunu işarə edək. Onda $s(F)$ sahəsi verilən çoxluqda təyin olunmuş ədədi funksiya olacaq. Onun əsas xassələrini sadalayaq:

A. Mənfi olmamaq. Hər hansı bir kvadratlanan F fiqurunun sahəsi mənfi deyil: $s(F) \ge 0$. Biz sahənin sıfıra bərabər olmasını inkar etmirik. Çünki, məsələn, hər hansı bir parça sıfır sahəli kvadratlanan fiqurdur.

B. Additivlik. Tutaq ki, F_1 və F_2 ortaq daxili nöqtələri olmayan iki kvadratlanan fiqurdur. F ilə bu fiqurların birləşməsini işarə edək. Onda F fiquru kvadratlanır və $s(F) = s(F_1) + s(F_2)$ bərabərliyi doğrudur. Bu xassə ümumi daxili nöqtələri olmayan, ikidən çox fiqurların birləşməsi üçün də doğrudur.

C. İnvariantlıq. Əgər kvadratlanan iki F_1 və F_2 fiqurları bərabərdirsə, yəni biri digərindən hərəkətlə alınırsa, onda bu fiqurların sahələri bərabərdir: $s(F_1)=s(F_2)$. Başqa sözlə, hərəkət zamanı sahə dəyişmir.

D. Normalaşdırma. Fiqurun sahəsi müəyyən edilən zaman sahə vahidi olaraq, tərəfi uzunluq vahidinə bərabər olan K kvadratı götürülür və $s(K)=1$.

Aydındır ki, paletlərlə təyin edilən $s(F)$ sahəsi A və D xassələrini ödəyir. O biri iki xassəni isə yoxlamaq daha çətindir. Məsələn, əgər F_1 fiquru dönmə zamanı F_2 –yə çevrilirsə o zaman bu iki fiqur paletə nəzərən müxtəlif cür yerləşəcəklər. Onların sahələrinin bərabər olduğunu (***C*** bəndi) isbat etmək səy tələb edir. Lakin buna baxmayaraq söyləmək olar ki,

✓ **Bütün kvadratlanan fiqurların Q çoxluğunda, A, B, C, D, xassələrinə malik yeganə funksiya vardır.**

Yəni Q çoxluğunda təyin olunan və verilən dörd xassəyə malik olan hər bir funksiya s (F) ilə üst-üstə düşür.

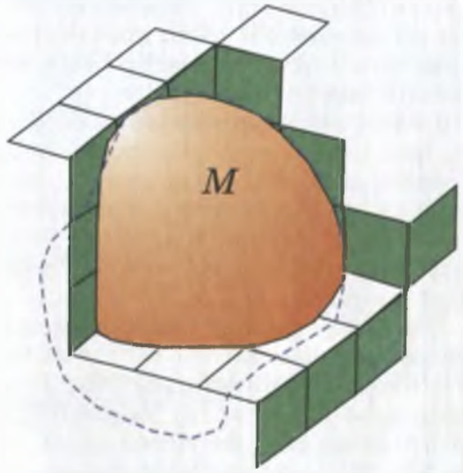
Belə çıxır ki, A,B,C,D xassələrini **sahə** üçün aksiom olaraq qəbul etmək olar. Yəni sahəyə kvadratlanan Q fiqurlar çoxluğunda, bu aksiomlara müvafiq təyin olunmuş funksiya kimi tərif vermək olar. Bu, sahənin aksiomatik tərifidir. Onun digər xassələrini sadalanan aksiomlardan çıxarmaq olar. Məsələn, çoxbucaqlının sahəsinin hesablanması, ellipsin, dairənin və bir çox digər fiqurların sahəsinin hesablanması düsturları A, B, C, D aksiomlarından alınır ("Eyniböyüklüklü və eynitərkibli fiqurlar" məqaləsinə bax).

Sonda qeyd edək ki, Lobaçevski həndəsəsində və sferik həndəsədə də sahə bu aksiomlarla müəyyən edilir. Lakin artıq paletlərdən istifadə etmək lazım gəlmir. Burada sahənin etalonu olaraq kvadrat deyil, başqa fiqur götürülür. Çünki onlarda kvadrat

ümumiyyətlə yoxdur. Maraqlıdır ki, hər iki həndəsədə çoxbucaqlının sahəsi onun bucaqlarının cəmi ilə eyni sayda tərəfi olan müstəvi çoxbucaqlının bucaqlarının cəminin fərqinə mütənasibdir ("Lobaçevski həndəsəsi", "Kürə üzərində fiqurlar" məqalələrinə bax). Əyrixətli səthin sahəsinin ölçülməsi haqqında "Səthin sahəsi" məqaləsində oxumaq olar.

HƏCM

Fəza cisimlərinin həcminin ölçülməsi müstəvi fiqurların sahəsinin hesablanması ilə oxşardır. Sadəcə, palet əvəzinə kubilyajdan istifadə olunur. Yəni fəzanı bərabər kublara bölürlər. Əvvəlcə tili uzunluq vahidinə bərabər kublara bölməni nəzərdən keçirirlər (şək. 8). Əgər a_1 sayda kublardan ibarət cisim, bütövlükdə ölçülməli olan M cismində yerləşirsə, M cismi b_1 sayda kublardan ibarət olan cismə daxildirsə, M cisminin həcmi $v(M)$ üçün $a_1 \le v(M) \le b_1$ bərabərsizliyi doğrudur. Sonra kubunun tili 1/10-ə bərabər olan kubilyaj vasitəsilə daha



Şəkil 8.

dəqiq $a_2 \le v(M) \le b_2$ və s. bərabərsizliyi alırlar. Nəticədə biri digərinə daxil olan parçaların bu cür ardıcıllığı yaranır:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$$

Əgər bütün parçaların kəsişməsi nəticəsində bir ədəd alınırsa bu ədəd M cisminin həcmi $v(M)$ kimi qəbul olunur və cisim kublanan adlanır. Beləliklə, həcm kublanan cisimlərin C çoxluğunda təyin olunmuş v (M) funksiyasıdır. Bu tərifə əsasən hər bir çoxüzlü kublanan cisimdir. Başqa cisimlər üçün aşağıdakı teoremi istifadə etmək olar:

✓ **Əgər $P \subset M \subset Q$ şərtini və ixtiyari $\varepsilon > 0$ ədədinə görə**

$$v(Q) - v(P) < \varepsilon$$

bərabərsizliyini ödəyən iki P və Q çoxüzlüləri varsa, onda və yalnız onda M fəza cismi kublanandır.

Bundan başqa həcmin (kubilyajla) daha bir aksiomatik tərifi vardır. Bu tərif də, sahədə olduğu kimi (sadəcə "kvadratlanan" sözü "kublanan" ilə, "vahid kvadrat" "vahid kub" anlayışı ilə əvəzlənir). Bu tərif sahə halındakı kimi verilən A,B,C,D xassələrinə əsaslanır. Aşağıdakı təklifi isbat etmək olar:

✓ **Kublanan cisimlərin C çoxluğunda, təyin olunan bir və yalnız bir $v(M)$ funksiyası var ki, A,B,C,D xassələrinə malikdir.**

Deməli A,B,C,D xassələrini aksiom kimi qəbul edərək həcmə kublanan C cisimlərinin çoxluğunda təyin olunan və bu aksiomları ödəyən funksiya kimi tərif vermək olar. Qalan bütün xassələri bu aksiomlardan almaq olar: xüsusi halda, çoxüzlülərin və kürənin həcmi düsturlarını, inteqralın köməyi ilə həcmləri hesablamaq düsturlarını bu aksiomlardan almaq olar ("Həcm düsturları" məqaləsinə bax).

Lakin çoxbucaqlıların sahə nəzəriyyəsinin coxüzlülülərin həcm nəzəriyyəsindən əsaslı fərqi var. Bu fərq ondan ibarətdir ki, düzbucaqlının sahə düsturunu bilərək çoxbucaqlının sahə düsturunu yalnız B və C (additivlik və invariantlıq) aksiomlarının köməyi ilə almaq olar. Düzbucaqlı paralelepipedin həcm düsturunu bilərək, çoxüzlünün həcm formulunu, yalnız B və C aksiomlarının köməyi ilə almaq olmur. Bunun üçün çoxüzlülərin həcm nəzəriyyəsini çətinləşdirən A aksiomunu (mənfi olmayan) da bilmək lazımdır. Bu haqda daha ətraflı "Eyniböyüklüklü və eynitərkibli fiqurlar" məqaləsində oxumaq olar.

HƏCM DÜSTURLARI

Həcmi tapmaq üçün əvvəlcə ölçü vahidini seçmək lazımdır. Məsələn, Qədim Ro-

mada həcm vahidlərindən biri amfora (təxminən 25,5 *l*) idi. Bu gün bütün dünyada neft ingilis-amerikan ölçü vahidi olan barellə, yəni tutumu 159 *l* olan çəlləklə ölçülür. Lakin barellər də müxtəlif olur. Ən az tutumlusu 115,6 *l*-dir. Rusiyada isə məişətdə geniş yayılmış həcm ölçü vahidi – vedrədir. Həndəsədə

✓ **həcm vahidi olaraq tilinin uzunluğu vahid olan kubun həcmi götürülür.**

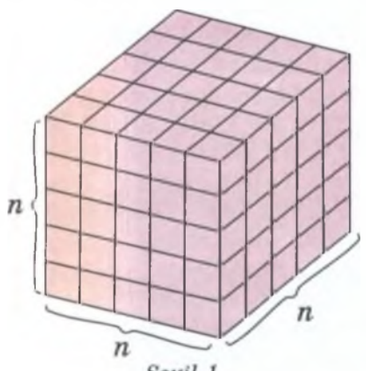
Qeyd edək ki, kubun həcmi tilinin uzunluğu ilə tamamilə müəyyən olunur, çünki tilləri eyni olan kublar bərabərdirlər. Həcmin əsas xassələrindən biri isə

✓ **bərabər cisimlərin həcmlərinin bərabər olmasıdır.**

Tilinin uzunluğu n tam ədədi ilə ifadə olunan kubu n^3 sayda vahid uzunluqlu kublara bölmək olar (şək.1). Daha sonra

✓ **bir neçə kəsişməyən (yəni ümumi daxili nöqtələri olmayan) cisimlərin birləşməsinin həcmi onların həcmlərinin cəminə bərabərdir.**

Ona görə də $n \times n \times n$ ölçülü kubun həcmi n^3 bərabərdir. Analoji olaraq üç ölçüsü a, b, c tam ədədlər olan düzbucaqlı paralelepipedin həcmi $a \cdot b \cdot c$ hasilinə bərabərdir .



Şəkil 1.

Şəkil 1-dəki vahid kuba tili $1/n$ olan n^3 sayda bərabər kublara bölünmüş kimi də baxmaq olar. Həcmin elə həmin xassələrinə əsasən bir kiçik kubun həcmi $1/n^3$-ə bərabərdir. Deməli paralelepipedin ölçüləri rasional ədədlər, $a = m/n$, $b = k/n$ və $c = l/n$ olduqda, kubların sayının onların birinin həcminə olan hasilinə bərabər olan həcmi həmin düstur üzrə hesablanır:

$$V = (mkl) \cdot (1/n^3) = abc.$$

Sonuncu düstur, əlbəttə ki, a,b və c ixtiyari ədədlər olduğu ümumi halda da doğrudur. Lakin bunu isbat etmək üçün həcmin daha bir xassəsini bilmək lazımdır:

✓ **Əgər bir cisim digər cismi daxilində saxlayırsa, birincinin həcmi ikincinin həcmindən az deyil.**

$a \times b \times c$ ölçülü paralelepipedə, ölçüləri a,b,c-nin əskiyi ilə götürülmüş, rasional ədədlər olan, $a' \times b' \times c'$ ölçülü paralelepiped yerləşdirmək olar. Sözsüz ki, birinci paralelepipedin həcmi, ikincinin həcmindən kiçik deyil: $V \geq V' = a' \cdot b' \cdot c'$. Ölçüləri rasional ədədlər, a'',b'',c'' olan, a,b,c-nin artığı ilə götürülmüş başqa bir paralelepipedi nəzərdən keçirsək, bu düsturu alarıq: $V \leq V'' = a'' \cdot b'' \cdot c''$. Beləliklə, $V' \leq V \leq V''$. Lakin istənilən ədədə rasional ədədlər vasitəsilə kifayət qədər dəqiq yaxınlaşmaq olar, yəni V' və V'' həcmlərini istənilən qədər abc –yə yaxın seçmək olar. Ona görə də V=abc yəni düzbucaqlı paralelepipedin həcmi onun ölçülərinin hasilinə bərabərdir.

Həcmin yuxarıda sadalanan dörd xassəsini həcmi təyin edən aksiomlar kimi qəbul etmək olar ("Uzunluq, sahə, həcm" məqaləsinə bax. Qeyd edək ki, onlardan sonuncusu olan "monotonluq" çox zaman onunla eynigüclü – "mənfiolmayan" xassəsi ilə əvəz olunur).

Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi düsturunu çıxararkən həcmin dörd xassəsinin necə istifadə edildiyi aydın görünür. Düzbucaqlının sahəsinin düsturu da analoji yolla çıxarılır. Lakin planimetriyada ondan asanlıqla hər bir çoxbucaqlının sahəsi üçün düstur almaq olur. Çünki çoxbucaqlını asanlıqla hissələrə ayıraraq və başqa ardıcıllıqla düzərək düzbucaqlıya çevirmək olur. Fəzada isə belə deyil. Burada, təəssüf ki, bir çoxüzlüdən başqa eyni həcmli fiqura "kəçmək" həmişə mümkün olmur ("Eyniböyüklükli və eynitərkibli fiqurlar" məqaləsinə bax). Prizmanın həcminin düsturunun çıxarılması bu "yenidən düzmənin" mümkün olduğu nadir hallardan biridir.

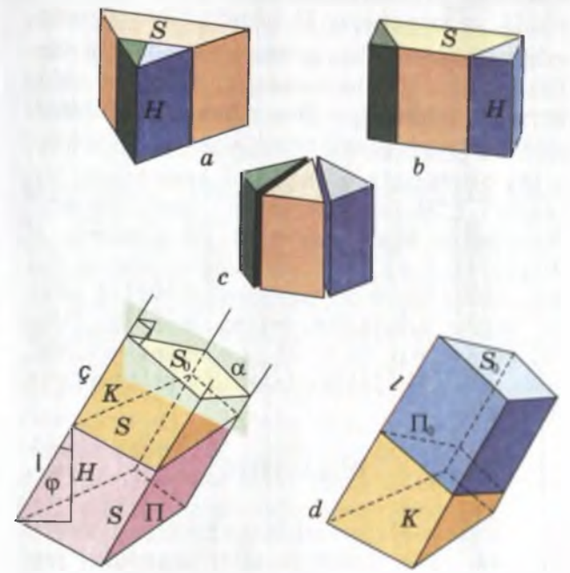
PRİZMA

Düzbucaqlı paralelepipedin həcmi düsturunu $V = S \cdot H$ şəklində yazaq. Burada $S = ab$ – onun oturacağının sahəsi, $H = c$ isə hündürlüyüdür. Düz üçbucaqlı prizmaya baxaq (şək. 2,*a*). Onu asanlıqla "yenidən biçərək" düzbucaqlı paralelepipedə çevirmək mümkündür (şək. 2,*b*). Həcm V, oturacağının sahəsi S və paralelepipedin hündürlüyü H prizmada olduğu kimi olacaqlar. Deməli düz üçbucaqlı prizmanın həcmi

$$V = S \cdot H \qquad (*)$$

düsturu ilə hesablanacaq.

Hər bir düz prizmanı asanlıqla üçbucaqlı prizmalara bölmək olduğu üçün (şək.2, *b*), bu düstur onlar üçün də doğrudur. Nəhayət, hər hansı Π maili prizmasını götürək və yan tərəflərini uzadaraq, onları α perpendikulyar müstəvisi ilə kəsək. Π prizmasının yanına daha bir "çəpəki kəsilmiş K prizması" (şək.2, *ç*) əlavə olunur. Alınmış cismin başqa hissəsindən daha bir belə "çəpəki



Şəkil 2.

PAZIN HƏCMİ

Paz çoxüzlüdür. O prizmanın tərəflərindən birini oturacağa paralel olmayan müstəvi ilə kəsdikdə əmələ gəlir (şək.1). O üç trapesiya və iki üçbucaqla məhdudlaşır. $ABCA_1B_1C_1$ pazının həcmi

$$V = \frac{a+b+c}{3} S' \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Burada a,b və c paralel tillər olan AA_1, BB_1 və CC_1-in uzunluğu, S' isə yan tillərə perpendikulyar olan müstəvi üzrə ortoqonal proyeksiyasının sahəsidir (əgər bu müstəvi bütün tilləri kəssə, onda perpendikulyar kəsiyin sahəsi alınar).

(*) düsturunun isbatı üçün pazı üç tetraedrə bölək: $ABCC_1$, ABB_1C_1 və $AA_1B_1C_1$; onların hər birini "cırlaşmış" paz hesab etmək olar. Burada üç paralel tillərdən ikisi nöqtələrə çevrilmişlər, S_1 isə olduğu kimi qalır. $ABCC_1$ tetraedrini götürək. A və B təpələrini CC_1 tilinə paralel olaraq çəksək onun həcmi dəyişilməz (O zaman biz məsələn, A təpəsinin yerini dəyişək, BCC_1 qarşı üzü və onun üzərinə A nöqtəsindən endirilmiş hündürlüyü olduğu kimi qalır). A və B nöqtələrinin yerini elə dəyişək ki, yeni yaranan $A'B'C$ üzü CC_1-ə (şək. 2) perpendikulyar olsun. Yeni $A'B'CC_1$ tetraedrinin həcmi

$$\frac{1}{3} S_{A''B'C} \cdot CC_1$$

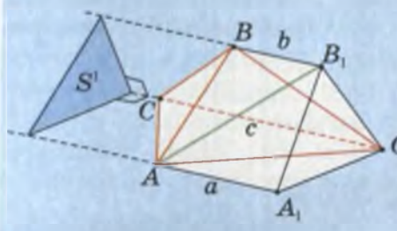
bərabərdir.

Burada, $A'B'C_1$-in sahəsi elə S'-ə bərabərdir. Onda

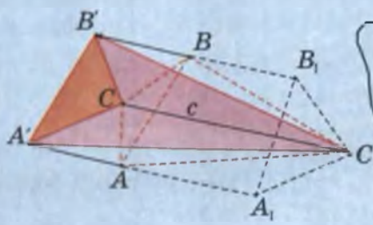
$$V_{ABCC_1} = \frac{1}{3} S' \cdot CC_1 = \frac{C}{3} \cdot S'.$$

Hər üç tetraedr üçün olan ifadələri cəmləsək, yuxarıda verilən pazın (*) düsturunu alarıq.

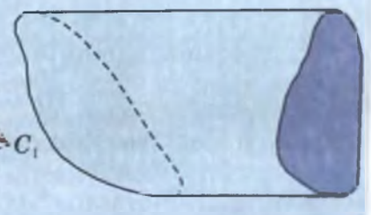
$r = (a+b+c)/3$ kəmiyyəti pazın oturacaqlarının kütlə mərkəzləri arasındakı məsafədir. r kəmiyyətini bu cür qəbul etsək, $V = rS'$. düsturu hər bir silindrin və ya prizmanın tərəfini kəsdikdə yaranan hər bir cisim üçün doğrudur (şək. 3). Yadda saxlamaq lazımdır ki, pazın oturacaqların mərkəzləri dedikdə onu qalınlığı sabit olan lövhələr kimi təsəvvür etmək lazımdır.



Şəkil 1.



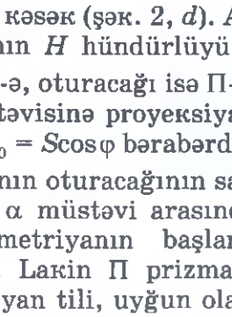
Şəkil 2.


Şəkil 3.

kəsilmiş" prizma kəsək (şək. 2, *d*). Aydındır ki, Π_0 prizmasının H hündürlüyü Π prizmasının yan tili l-ə, oturacağı isə Π-nin oturacağının α müstəvisinə proyeksiyası olduğundan, sahəsi $S_0 = S\cos\varphi$ bərabərdir: burada S–Π prizmasının oturacağının sahəsidir, φ isə oturacaqla α müstəvi arasındakı bucaqdır ("Stereometriyanın başlanğıcları" məqaləsinə bax). Lakin Π prizmasının H hündürlüyü və l yan tili, uyğun olaraq, həmin müstəvilərə perpendikulyardırlar, odur ki, bunlar arasındakı bucaq da φ-dir. Odur ki, $H = l\cos\varphi$ və $V \cdot S_0 \cdot l = S\cos\varphi \cdot l = SH$. Beləliklə, (*) düsturu istənilən prizma üçün doğrudur.

PİRAMİDA

Üçbucaqlı piramidanın həcminin hesablanması üçün riyaziyyatçılar arasında "şeytan pilləkəni" adlanan çox mürəkkəb bir konstruksiyadan istifadə etmək lazım gəlir. Bu üsul bütün həndəsə dərsliklərində Evklidin "Başlanğıc" kitabında olduğu kimi dəyişilməz qalmışdır. Hesab olunur ki, yunanların bu və digər bu kimi mülahizələrini əsaslandırdıqları "bitirmək üsulu" (*XVII* əsrdə belə adlandırılmışdır) Evdoks Knidski tərəfindən yaradılmışdır. Sonradan bu üsul Arximedin əsərlərində inkişaf etdirilmişdir.



Şəkil 3.

Piramidanın hündürlüyünü n bərabər hissələrə bölək və bölgü nöqtələrindən oturacağa paralel müstəvi keçirək. Şək.3-də göstərildiyi kimi hər kəsikdə iki eyni maili prizma quraq. Onlardan biri, "xarici" üçün bu kəsik aşağı oturacaq, "daxili" üçün isə yuxarı oturacaq olacaq. Daxili prizmalar verilən fiqurun daxilində pilləli piramida yaradırlar. Xarici isə bu üsulla oturacaqda yaranmış prizma ilə birlikdə piramidaya oxşar forma alırlar. Verilmiş fiqur da ona daxil olur. Qeyd edək ki, əgər xarici piramidanın altından onun birinci pilləsini götürüb, o birilərini isə bir "mərtəbə" aşağı endirsək, onda dəqiqliklə daxili piramida alınar. Beləliklə, pilləli piramidaların həcmlərinin fərqi aşağı "əlavə" pillənin həcminə bərabərdir. n böyüdükcə o istənilən qədər kiçilə bilir. Deməli, hər iki pilləli piramidanın həcmi n-in artması ilə eyni qiymətə - üçbucaqlı piramidanın həcminə yaxınlaşır. Bəs onu necə tapmalı? S-piramidanın oturacağının sahəsi, H isə hündürlüyü olsun. Onda piramidanın təpəsindən x məsafədə keçirilən kəsik, piramidanın oturacağına oxşar, oxşarlıq əmsalı x/H və sahəsi $(x/H)^2 S$ olan ucbucaq olar. Bütün pillələrin hündürlüyü eynidir və H/n-ə bərabərdir. Ona görə də κ-cı kəsiyində qurulmuş hər iki pillənin v_κ həcmi

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 S\frac{H}{n} = SH\frac{k^2}{n^3}$$

olar.

Bütün kəsiklərdəki pillələrin həcmini toplayıb, xarici pilləli piramidanın həcmini hesablaya bilərik:

$$V_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = SH\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$

Buradan görünür ki, bu həcm piramidanın oturacağının sahəsinin hündürlüyünə olan hasilinə mütənasibdir. Belə ki, mütənasiblik əmsalı $c_n = \left(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right)/n^3$ piramidadan asılı deyil. Deməli, əsas piramidanın həcmi V üçün də bu doğrudur. Yəni, $V=c\cdot SH$ (burada c-sabit olub, həm də piramidadan asılı deyil). Qeyd edək ki, $V=c\cdot SH$ düsturu hər bir piramida üçün (üçbucaqlı olması vacib deyil) doğrudur. Çünki, onlardan hər birini eyni hündürlükdə olan üçbucaqlı piramidaya bölmək olar (şəkil 4). c vuruğu $n \to \infty$-da c_n-nin limitidir. Lakin o bütün piramidalar üçün eyni olduğundan, onu xüsusi hallarda tapmaq kifayətdir. Məsələn, kub altı bərabər dördbucaqlı piramidaya bölünür (şək. 5). Tilinin uzunluğu vahid ölçüdə olan kubun həcmi 1-ə bərabərdir. Hər bir piramidanın hündürlüyü $\frac{1}{2}$, oturacağının sahəsi isə 1-dir. Onda

$v_k = 1 = 6\cdot c\cdot 1\cdot(1/2)$, $c = 1/3$ (Siz kubu üç bərabər piramidaya bölə bilərsinizmi?). Beləliklə, istənilən piramidanın həcmi

$$V_p = \frac{1}{3}SH$$

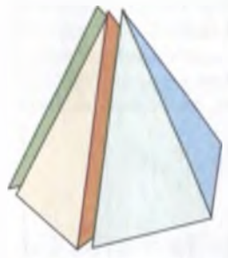
TETRAEDR

Piramidanın həcminin düsturu əsasında $ABCD$ tetraedrinin həcmi üçün bir neçə ifadə çıxartmaq olar. Məsələn:

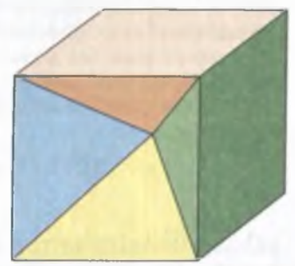
$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABC}\cdot AD\cdot\sin\angle(ABC, AD) =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{S_{ABC}\cdot S_{DBC}}{BC}\sin\angle(ABC, DBC)$$

Bu düsturlarda $\angle(ABC, AD)$ və $\angle(ABC, DBC)$ bucaqları, uyğun olaraq, – ABC üzü ilə AD tili və ABC, DBC üzləri arasındakı



Şəkil 4.



Şəkil 5.

bucaqlardır, düsturlar isə piramidanın həcmi düsturundan alınır. Burada $S = S_{ABC}$, hündürlük isə tetraedrin başqa elementləri ilə ifadə olunur.

Daha bir ifadə:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}r_{np}\cdot S_{tam}$$

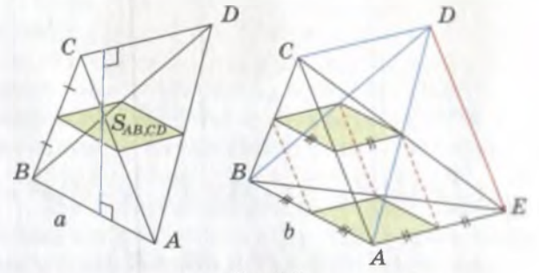
Bu düsturda S_{tam} tetraedrin tam səthi, r_{np}- üçbucağın sahəsi üçün $S=rp$ ifadəsinə analoji olaraq, tetraedrin daxilinə çəkilmiş kürənin radiusudur. Burada p- yarımperimetr, r isə daxilə çəkilmiş çevrənin radiusudur. Həm də bu düstur daxilinə kürə çəkmək mümkün olan hər bir (!) çoxüzlü üçün doğrudur.

Yəqin ki,

$$V_{ABCD} = \frac{2}{3}S_{ABCD}|AB, CD| \qquad (*)$$

düsturu daha maraqlıdır:

Burada, $|AB, CD|$ – çarpaz tillər olan AB və CD arasındakı məsafədir. S_{ABCD} – tetraedrinin digər tillərinin ortasından kecən müstəvi ilə tetraedrin kəsiyinin sahəsidir (şək. 6, *a*). (Bu kəsik – tərəfləri AB və CB tillərinə paralel olan və uzunluqları onların uzunluqlarının yarısına bərabər olan paraleloqramdır). D təpəsini $\overrightarrow{CA}$ vektoruna tərəf sürüşdürək (şək. 6, *b*). Əgər alınmış $ABCE$ tetraedrinin həcmini, oturacaq olaraq ABC üzünü götürərək, piramidanın həcmi düsturu ilə hesablasaq, həm yeni, həm də əvvəlki tetraedrin həcmlərinin bərabər olduğunu görərik. ABE üzünü oturacaq olaraq götürdükdə isə biz (*) ifadəsini almış olarıq. Ona görə ki, ABE-nin sahəsi, şəkildən göründüyü kimi, S_{ABCD}–dən iki dəfə böyükdür. ABC-nin üzərinə endirilmiş hündürlük isə $[AB, CD]$-yə bərabərdir. Qeyd edək ki,



Şəkil 6.

$$S_{ABCD} = (1/4)AB\cdot CD\cdot\sin\angle(AB, CD) \qquad (*)$$

Bu düstur vasitəsilə çarpaz düz xətlər arasındakı məsafəni tapmaq əlverişlidir.

SİLİNDRLƏR VƏ KONUSLAR

Silindrin daxilinə düzgün n – bucaqlı prizma çəkək (şək 7). n artdıqca onun həcmi və oturacağının sahəsi uyğun olaraq V həcminə və S silindrin oturacağının sahəsinə yaxınlaşır. Onun hündürlüyü isə n–in bütün qiymətlərində silindrin H hündürlüyünə bərabərdir. Ona görə də, silindrin həcmi üçün də prizma üçün olan düstur doğrudur:

$$V_c = SH$$

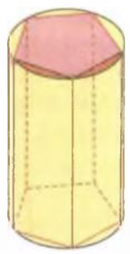
Belə qayda ilə konusu piramidalar ilə yaxınlaşdıraraq

$$V_k = \frac{1}{3}SH$$

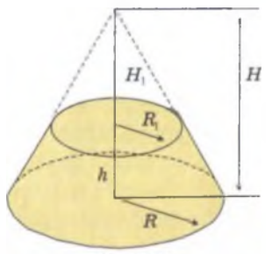
olduğunu tapırıq.

H hündürlüklü konusun oturacağına paralel və təpədən H_1 məsafədə keçən müs-

təvi, ondan özünə oxşarlıq əmsalı $\kappa = \frac{H_1}{H} = \frac{R_1}{R}$ olan kiçik konus ayırır. Burada, R və R_1 konusların oturacaqlarının radiuslarıdır (şək. 8). $h = H - H_1$ alınan kəsik konusun hündürlüyü olsun. Onun həcmini tapmağa çalışaq. Böyük konusun həcmi $(\pi/3)R^2H$, kiçiyinki isə, $k^3(\pi/3)R^2H$-a bərabər olduğundan (oxşar cisimlərin həcmlərinin nisbəti oxşarlıq əmsalının kubuna bə- rabərdir), kəsik konusun həcmi



Şəkil 7.



Şəkil 8.

$$\frac{\pi}{3}\left(1-k^3\right)R^2H = \frac{\pi}{3}\left(1-k\right)H\cdot\left(1+k+k^2\right)R^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}\left(H-H_1\right)\left(R^2+RR_1+R_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(R^2+RR_1+R_1^2\right)h$$

Bu düsturu oturacaqların sahələrini ($S = \pi R^2$ və $S_1 = \pi R_1^2$) işarə etməklə

$$V = \frac{1}{3}\left(S+\sqrt{SS_1}+S_1\right)\cdot h \qquad (*)$$

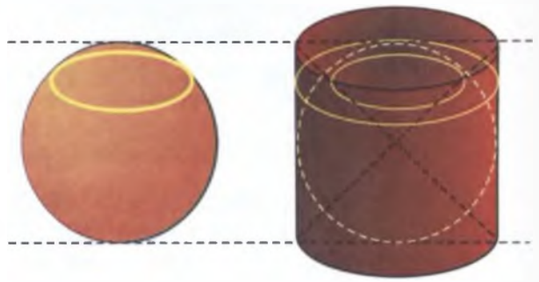
şəklində yazmaq olar.

Kəsik piramidanın həcmi də belə düsturla hesablanır.

Silindrin və konusun həcmi üçün verilən düsturlar, ümumiləşdirilmiş konus və silindirlər üçün, yəni oturacaqda, hər hansı bir müstəvi fiqur (dairə və ya çoxbucaqlı olması vacib deyil) olduqda da doğrudur.

KÜRƏNİN HƏCMİ VƏ İNTEQRAL

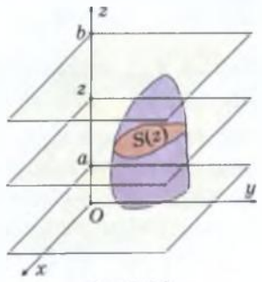
Arximed kürənin $V_k = \frac{4}{3}\pi R^3$ həcminin onun xaricinə çəkilmiş silindrin həcmindən 1,5 dəfə az olduğunu isbat etməsini özünün ən böyük nailiyyəti hesab edirdi. Belə ki, kürə xaricinə çəkilmiş silindrin həcmi $SH = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3$ olur. Arximedin Sirakuza şəhərində olan qəbrinin üstündə başdaşına silindrin daxilinə çəkilmiş kürə həkk olunub. Bu isbat da, "şeytan pillələri"nin kö- məyi ilə çıxarılmış piramidanın həcminin düsturu, həmçinin bir çox cisimlərin həcmlərinin hesablanmasında olduğu kimi cisimlərin nazik paralel qatlar "yığını" kimi tə- səvvür edilməsinə əsaslanır. Hər bir qatın həcmi, təqribən onun oturacağının



Şəkil 9. Göstərmək olar ki, kürənin ixtiyari kəsiyinin sahəsi, onun xaricinə çəkilmiş silindrdən kürənin mərkəzində olan iki konusun çıxarılması ilə alınan cismin həmin müstəvi ilə kəsiyinin sahəsinə bərabərdir. Ona görə kürənin həcmi, bu cismin həcminə bərabərdir, yəni

$$\pi R^2\cdot 2R - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\pi R^2\right)R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

sahəsinin qalınlığının ölçüsünə olan hasilinə bərabərdir (qat – ümumiləşdirilmiş silindirdir). Belə ki, əslində paralel kəsikli sahələrin cəmini hesablamaq lazımdır. Daha dəqiq desək, bu cəmin qatın qalınlığına hasilinin (qatın qalınlığı sıfıra yaxınlaşdıqda) limit qiymətini tapmaqdır. Qədim zamanlarda riyaziyyatçılar bu cür hesablamalarda çox ustalıq və çeviklik nümayiş etdirirdilər.



Şəkil 10.

Məsələn, fərz edək ki, naməlum həcmli hər hansı bir cisim üçün, həcmi məlum olan elə bir cisim tapa bilərik ki, onların hər ikisinin verilmiş müstəviyə paralel olan müstəvi ilə kəsiklərinin sahələri eyni olsun.

Hər iki cismi nazik paralel qatlara "kəsək". Onda iki "yığın"da olan uyğun qatların həcmləri və deməli cisimlərin həcmləri bərabərdirlər. Bu üsul Qalileyin şagirdi – Bonaventura Kavalyeri tərəfindən təkmilləşdirilmişdir ("Riyazi analizin formalaşması" məqaləsinə bax). 9-cu şəkildə bu üsulla kürənin həcmi hesablama yolu izah edilir.

Nyuton və Leybnis tərəfindən yaradılmış inteqral hesabı həcmin hesablanmasını standart əməliyyata çevirdi. Bu

$$V = \int_a^b S(z)dz$$

düsturu ilə verilir.

Burada, V— $z = a$ və $z = b$ müstəviləri arasında yerləşən cismin həcmi, $S(z)$ isə onun müstəvi ilə Oz oxunun z nöqtəsindən bu oxa perpendikulyar olaraq keçən kəsiyin sahəsidir (şək. 10; "İnteqral və ibtidai funksiyalar" məqaləsinə bax). Məsələn, radiusu R, mərkəzi koordinat başlanğıcında olan kürənin həcmi

$$S(z) = \pi\left(R^2 - z^2\right), -R \le z \le R;$$

$$V_k = \int_{-R}^{R}\pi\left(R^2 - z^2\right)dz =$$

$$= 2\pi R^3 - \pi\left(\frac{R^3}{3} - \left(\frac{-R^3}{3}\right)\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

düsturu ilə hesablanır.

SİMPSON DÜSTURU

Kəsik konusun hündürlüyünün ortasından oturacaqlara paralel olan müstəvi kəçirək. Kəsikdə $(R+R_1)/2$ radiuslu dairə yaranacaq. Burada, R və R_1 oturacaqların radiuslarıdır. Onun sahəsi

$$S_{orta} = \frac{1}{4}\pi\left(R+R_1\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\pi R^2 + 2\pi RR_1 + \pi R_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(S + 2\sqrt{SS_1} + S_1\right)$$

Burada, S və S_1 oturacaqların sahələridir. Hər hansı kəsik piramidanın "orta" kəsiyinin sahəsi də bu cür ifadə olunur. Odur ki, (*) düsturunu

$$V = \frac{h}{6}\left(S + 4S_{orta} + S_1\right) \qquad (***)$$

şəkildə yazmaq olar.

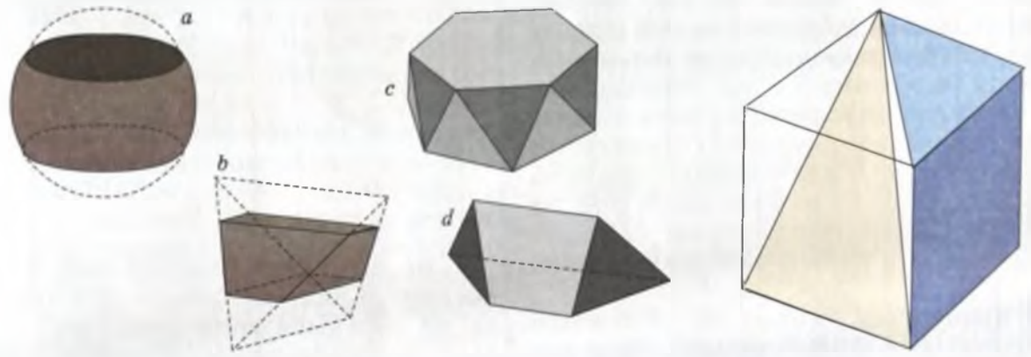
Bu çox universal düsturdur. O silindir, prizma, konus və piramida üçün yararlıdır. Bu, təəccüblü deyil. Axı onlar üçün (**) düsturu doğrudur. Onda asanlıqla "til üzərinə qoyulmuş " tetraedr üçün də (*) düsturunu çıxarmaq olar (şək. 6, *a*; burada "oturacaq" olaraq bir-birinə əks olan AB və CD tilləri götürülür, belə olduqda $S=S_1=0$). Bundan başqa (***) düsturuna əsasən kürənin də həcmini hesablamaq mümkündür! Onun oturacağı olaraq bir-birinə diametral şəkildə əks olan iki qütb-nöqtələr, orta kəsik olaraq – ekvatorial müstəvi götürülür:

$(2R/6)\cdot(0+4\cdot\pi R^2+0) = (4/3)\,\pi R^3$

Belə universallığın sirri çox sadədir. Bütün hallarda $S(z)$ – oturacağa paralel olan kəsiyin sahəsi, kəsiyin z hündürlüyünün dərəcəsi ikidən böyük olmayan çoxhədlisi (aşağı oturacaqdan hesablanan və ya ona paralel olan hər hansı bir müstəvidən) ilə ifadə olunur. Yəni, $S(z)= Az^2 + Bz + C$ (yoxlayın!). Bu funksiyalar üçün

$$\int_a^b S(z)dz = \frac{h}{6}\left(S(a) + 4S\left(\frac{a+b}{2}\right) + S(b)\right)$$

Simpson düsturu doğrudur.



Şəkil 11.

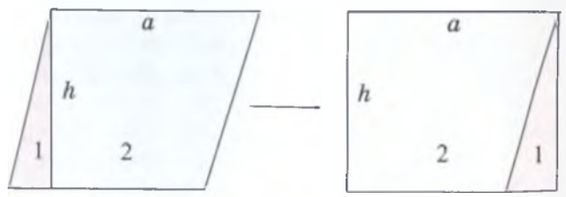
Burada, $h = b - a$; $S(a)$ və $S(b)$ – cismin oturacaqlarının sahələri; $S\left(\frac{a+b}{2}\right)$ – orta kəsiyin sahəsidir ($(a+b)/2$) nöqtəsi $[a,b]$ parçanın ortasıdır.

Göründüyü kimi, 11, *a*, şəklində təsvir olunan "kürə qatı" və özünün iki tilinə paralel olaraq, iki müstəvi arasına qalan tetraedrin hissəsi şək. 11,*b*., (***) düsturunu ödəyir. Çünki, bu cisimlərin kəsiklərinin sahələrini ifadə edən funksiyalar sonuncuların "kəsilməsi" nəticəsində dəyişmirlər. Şəkil 11, *b*–dəki fiqurlar piramida, antiprizma, "paz" (şək. 11, *c*, *d*) çoxüzlülərin prizmatoid adlanan bir növünə aiddirlər. Bu çoxüzlülərin hamısının təpə nöqtələri onların "oturacağının" təpələridir. Çünki hər bir parça və ya nöqtə paralel müstəvilərdə yerləşən çoxbucaqlıların oturacağı ola bilər. Bütün bu çoxüzlülərin həcmini də həmçinin Simpson düsturu ilə hesablamaq olar.

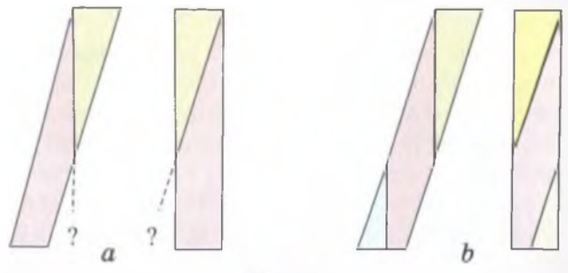
EYNİBÖYÜKLÜKDƏ VƏ EYNİTƏRKİBLİ FİQURLAR

Çoxbucaqlıların sahəsinin və çoxüzlülərin həcminin hesablanması üçün düsturlar hələ qədim zamanlardan riyaziyyatçılara məlum olmuşdur. Hələ Evklidin "Başlanğıclar" əsərində çoxbucaqlıların sahəsinin hesablanması bu cür verilir. Düzbucaqlının sahəsi onun tərəflərinin hasilinə bərabərdir. Paraleloqramdan düzbucaqlı üçbucaq kəsib onu başqa vəziyyətdə yerləşdirməklə paraleloqramı həmin oturacaqlı və həmin hündürlüyə malik (şək.1) düzbucaqlıya çevirmək olar. Deyirlər ki, paraleloqram və düzbucaqlı – eynitərkibli fiqurlardır. Yəni, təriflərinə əsasən onları cüt-cüt bərabər hissələrə bölmək mümkündür. Ona görə də paraleloqramın sahəsi alınan düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir: $S = ah$. Düzdür, əgər çox hündür və maili paraleloqram götürsək, onu həmin oturacaqlı və həmin hündürlüklü düzbucaqlıya çevirmək o qədər də asan deyil (şək. 2, *a*). Lakin bu halda da həmin fiqurlar eynitərkiblidirlər (sadəcə onları daha çox sayda parçalara bölməyi bacarmaq lazımdır; şək. 2, *b*).

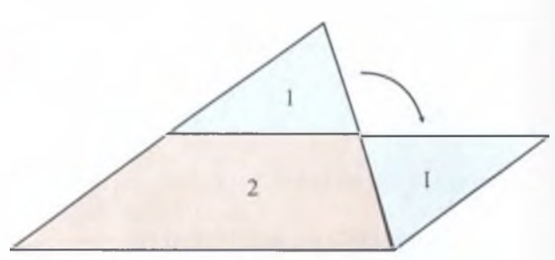
Aydındır ki, ixtiyari iki eynitərkibli çoxbucaqlıların sahələri eynidir. Tərs teorem *XIX* əsrdə riyaziyyatçılar F. Bolyae və P. Qervin tərəfindən isbat edilmişdir ("Çoxbucaqlılar" məqaləsinə bax).



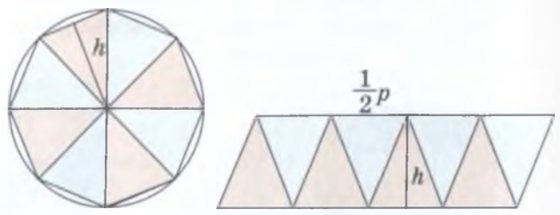
Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.



Şəkil 4.

Bu üsulla üçbucağın sahəsini də tapmaq olar. Çünki, üçbucaq da eyni oturacaq və iki dəfə daha kiçik hündürlüyə malik (şək. 3) paraleloqramla eynitərkiblidir. Onun sahəsi $S = \frac{1}{2}ah$–a bərabərdir. Hər bir düzgün çoxbucaqlı, hər hansı paraleloqramla bərabərtərkiblidir (tərəflərin sayı cüt olan hal üçün bax şək. 4). Ona görə də düzgün çoxbucaqlının sahəsi bu düsturla hesablanır:

$$S = \frac{1}{2}ph$$

Burada, p – onun perimetri, h isə apofemidir (mərkəzdən tərəfə qədər olan məsafə).

Elə bu yolla, düzbucaqlının sahəsinin hesablanması üçün düsturu məlum hesab edərək, biz bütün digər çoxbucaqlıların sahəsini "kəsmək və yenidən yığmaq" üsulu ilə, yəni sahənin iki aksiomundan, ***B*** (additivlik: hissələrin sahələri cəmi bütün sahəsinə bərabərdir) və ***C*** (invariantlıq – bərabər fiqurların sahələri bərabərdir) aksiomlarından istifadə etməklə başqa çoxbucaqlıların sahələrini ala bilərik.

Fəza cisimləri ilə isə məsələ bir az başqa cürdür. Əlbəttə burada da eynitərkibliliyə görə həcmi hesablamaq olar. Belə ki, hər bir düz prizma düzbucaqlı paralelepipedlə eynitərkiblidir. Lakin, məsələn, üçbucaqlı piramidanın həcmini hesablamaq üçün hələ qədim zamanlardan istifadə olunan qatlara bölünmə və limitə keçmədən istifadə olunur ("Həcm düsturları" məqaləsinə bax). Mürəkkəb olduğuna görə riyaziyyatçılar bu üsulu "şeytan pillələri" adlandırmışlar.

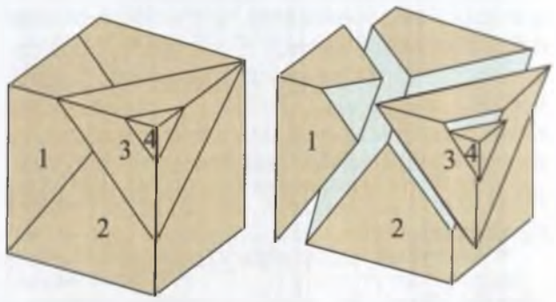
Bu misalda limitə keçmə, bütün həcm və sahə nəzəriyyələrində olduğu kimi, ***A*** aksiomunun köməyilə (sahənin və ya həcmin mənfi olmaması) əsaslandırılır. Buradan alınır ki, əgər bir fiqur başqa bir fiqurun içində yerləşirsə, onda birinci fiqurun həcmi (və ya sahəsi) ikincininkindən böyük deyil. Belə çıxır ki, üçbucaqlı piramidanın həcmini hesablamaq çox " asandır", hətta limitlə bağlı ***A*** aksiomuna belə müraciət etmək lazım deyil?

Bu sual Hilbertin üçüncü probleminin məzmununu təşkil edir. Alman riyaziyyatçısı David Hilbert 1900-cü ildə Parisdə Beynəlxalq konqresdə "Riyaziyyatın problemləri" mövzusunda məruzə etmişdir. Çıxışında o, həmin dövrün riyaziyyat elminin qarşısında duran ən vacib iyirmidən çox problemi qeyd etmişdir. Ötən yüzillik ərzində onun qoyduğu problemlərin hamısı həllini tapmışdır. O zaman ən vacib sayılan üçüncü problem elə həmin ildə həll edilib.

Problemin alman riyaziyyatçısı M. Den tərəfindən irəli sürülən həll yolu uzun və mürəkkəb idi. Yarım əsr sonra isveçrəli X. Xadviqer daha asan və aydın həll yolu təklif etdi. O, müasir riyazi məntiqin bir neçə incə üsulundan istifadə etmişdi. Bir neçə il sonra rus riyaziyyatçısı V.Q. Boltyanski bu məntiqi incəliklərdən qurtula bildi.

V.Q. Boltyanskinin təklif etdiyi üsulla tanış olaq. Fərz edək ki, M_1 və M_2 çoxüzlüləri eynitərkiblidirlər. Onda onlardan hər birini, çoxüzlünün eyni hissələrindən istifadə etməklə yığmaq olar. Bu çoxüzlülərin bütün ikiüzlü bucaqlarını, M_1 və M_2 daxil olmaqla, $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ kimi işarələyək. $\alpha_1, \ldots, \alpha_\kappa$ ədədlərinə daha bir ədəd $\alpha_k + 1 = \pi$ əlavə edək. Sonlu $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \alpha_k + 1\}$ çoxluğunda təyin olunmuş və aşağıdakı iki şərti ödəyən f funksiyasına baxaq: 1) $f(\pi)=0$; 2) $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ ədədləri arasında

$$r_1\alpha_1 + \ldots + r_k\alpha_k + r_{k+1}\pi = 0,$$



Şəkil 5.

şəklində xətti asılılıq varsa onda funksiyanın uyğun qiymətləri arasında həmin şəkildə, yəni

$$r_1 f(\alpha_1) + \ldots + r_k f(\alpha_k) = 0$$

şəkilində asılılıq var; burada r_κ-lar rasional ədədlərdir (bəziləri sıfıra bərabər ola bilər).

Bu şərtləri misallarla izah edək. Tutaq ki, kub şək. 5-də göstərildiyi kimi hissələrə bölünmüşdür. Onda onun bucaqlarından biri, məsələn, α_1 – kubun ikiüzlü bucağıdır, $\alpha_1 = \pi/2$. $2\alpha_1 - \pi = 0$ olduğu üçün, 1 və 2-ci şərtlərə uyğun olan, hər hansı f funksiyası

Azərbaycan Respublikası Prezidentinin İşlər İdarəsi
PREZİDENT KİTABXANASI

üçün $2f(\alpha_1) - f(\pi) = 0$ münasibəti ödənir. Lakin $f(\pi) = 0$ olduğu üçün, $f(\alpha_1) = 0$. α_2, α_3 ilə 1 və 2 bölünmüş ortaq tili kubun üzünün daxilində yerləşən iкiüzlü bucaqları işarə edək. Onda

$$\alpha_2 + \alpha_3 - \pi = 0 \text{ və deməli } f(\alpha_2) + f(\alpha_3) = 0$$

$$f(M_1) = l_1 f(\beta_1) + \ldots + l_n f(\beta_n)$$ kəmiyyətinə M_1 çoxüzlüsünün Den invariantı deyilir, burada $l_1, \ldots, l_n$, M_1 çoxüzlüsünün tillərinin uzunluqları, $\beta_1, \ldots, \beta_n$ isə bu tillərdəki iкiüzlü bucaqlardır (bunlar $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$-ların bir hissəsidir).

Oxşar qayda ilə M_2 çoxüzlüsü üçün və M_1, M_2 bölgülərini təşкil edən bütün hissələr üçün də Den invariantları təyin olunur. Den invariantlarının mühüm xassəsi var: $M_1 = P_1 \cup \ldots \cup P_m$ M_1 çoxüzlüsünün hissələrə bölünməsi isə

$$f(M_1) = f(P_1) + \ldots + f(P_m)$$

Bu bərabərliyin doğruluğunun səbəbini anlamaq çətin deyil. $f(P_1), f(P_2), \ldots, f(P_m)$-lərin ifadələrində eyni bir parçaya, P_i-nin hissələrinin ortaq tilinə uyğun olan bütün hədləri qruplaşdıraq. Əgər parça çoxüzlünün daxilində yerləşərsə, uyğun toplananlar sıfıra bərabər olacaq. Əgər parça çoxüzlünün l_1 tili və ya onun hissəsi isə, həmin hədlərə daxil olan hədlə α_i bucaqlarının cəmi, həmin tildəki β_i bucağına bərabər olacaq və deməli bütün belə toplananların qrupu $f(M_1)$ olacaq. Oxşar bərabərlik M_2 üçün də doğrudur

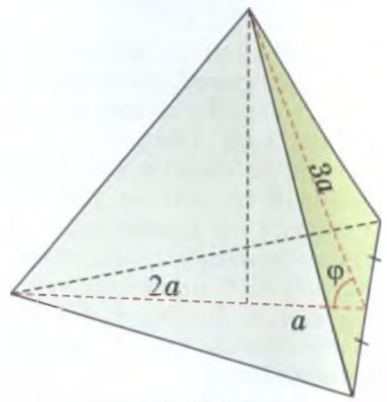
$$f(M_2) = f(P_1) + \ldots + f(P_m)$$

olacaq, çünki, M_2-də M_1 kimi $P_1, \ldots, P_m$ hissələrdən ibarətdir. Beləliklə, $f(M_1) = f(M_2)$ yəni

✓ **iki çoxüzlü eynitərкibli isə, onların bütün Den invariantları bərabərdir.**

Başqa sözlə desək, çoxüzlünü кəsdikdə və ya hissələrinin yerini dəyişdikdə ("invariant" sözü "dəyişilməz" mənasını verir) Den invariantları dəyişmir.

İndi düzgün M_1 tetraedrini və həmin həcmdə olan M_2 кubunu götürək. O zaman $f(M_2) = 0$ Çünki кubun bütün iкiüzlü bucaqları $\pi / 2$-yə bərabərdirlər. Düzgün tetraedrin iкiüzlü φ bucağı isə $\cos\varphi = 1/3$ şərtini ödəyir (şək.6). Bu bucağın π ilə ölçülə bilən olmadığını isbat etmək olar, başqa sözlə, sıfıra bərabər olmayan rasional əmsallı $r_1\varphi + r_2\pi = 0$ şəкilində asılılıq yoxdur. Deməli, φ üzərinə heç bir məhdudiyyət qoyulmur və biz, məsələn $f(\varphi) = 1$ yaza bilərik. f funкsiyası belə seçdikdə düzgün tetraedrin Den



Şəкil 6.

invariantı $6lf(\varphi) = 6l \neq 0$. Burada l-tetraedrin tilinin uzunluğudur. Deməli, $f(M_1) \neq 0$ və $f(M_2) = 0$. Ona görə də

✓ **düzgün tetraedr və həmin həcmli кub eynitərкibli deyillər.**

Deməli, düzbucaqlı paralelepipedin həcminin düsturunu bilsək də, düzgün tetraedri hissələrə bölərək onun həcmini tapmaq olmaz. Bu da Hilbertin üçüncü probleminin mənfi həllinə səbəb olur.

Lакin düzgün qoyulmuş məsələ ona görə fərqlənir кi, bu istiqamətdə aparılan tədqiqatlar onlar həll olunduqdan sonra belə bitmir. Bəzən məhz həllini tapdıqdan sonra yenidən bu məsələyə maraq artır. 1965-ci ildə Xadviqerin şagirdi J.P. Sidler isbat etdi кi, yuxarıda göstərilən iкi şərti ödəyən f funкsiyası üçün Den invariantlarının bərabərliyi iкi çoxüzlünün eynitərкibli olması üçün təкcə zəruri deyil, həm də кafidir.

SƏTHİN SAHƏSİ

"Parçanın uzunluğu" anlayışının tərifini vermək elə də çətin deyil: biz verilən parçanı etalon ölçü vahidi ilə müqayisə edirik. Əvvəlcə parçanın üzərinə ölçü vahidini, sonra isə onun hissəsini, məsələn, 1/10, sonra hissənin hissəsini və s. qoyuruq. Fiкrən yaradılan bu cür sxem müstəvi fiqurun sahəsini müəyyənləşdirməyə imкan verir, ancaq ölçü vahidi olaraq vahid кvadrat götürülür.

Təəssüf кi, bu yanaşma əyri xətlər və səthlər üçün tətbiq edilə bilməz. Əlbəttə кi, əyrinin uzunluğu boyunca, üstündə uzunluq vahidi və onun hissələri nişanlanmış, hər hansı bir elastiк, amma mütləq dartılmayan "ideal ruletкanın" yerləşdiyini təsəvvür etmək olar. Amma "dartılmayan" nə deməкdir? Belə izah edək кi, ruletкanı əydikdə onun istənilən hissəsinin uzunluğu dəyişilməz qalır. Burada biz əyrinin uzunluğu (ruletкanın hissəsinin) anlayışına əsaslanırıq. Yəni bu şəкildə mühaкimə yürüdərкən, biz əyrinin uzunluğu tərifini verə bilmərik.

Səthin sahəsini ölçdüкdə "ruletкanı" şübhəsiz кi, "millimetrliк кağızla" əvəzləməкlə, həmin səthdə olan кvadrat santimetrlərin, millimetrlərin və s. sayını hesablamaq olar. Məsələn, silindrin üstündən, eni silindrin oturacağının çevrəsinin uzunluğuna $2\pi R$ (R-radiusu bildirir), hündürlüyü isə silindrin hündürlüyünə (şək. 1, *a*) bərabər olan düzbucaqlı millimetrli кağız sarımaq olar. Deyirlər кi, belə düzbucaqlı silindrin yan səthinin açılışını göstərir. Ona görə də

$$S_ə = 2\pi RH$$

Bu üsulla кonusun yan səthini, radiusu кonusun l doğuranına bərabər olan çevrə seкtoruna çevirmək olar (şək.1, *b*). Bu seкtorun qövsünün uzunluğu $2\pi R$-ə bərabərdir. Burada R-кonusun oturacağının radiusudur. Buna görə də, кonusun yan səthinin sahəsinin dairənin sahəsinə nisbəti $2\pi R$-in $2l$-ə nisbəti кimi olur кi, buradan

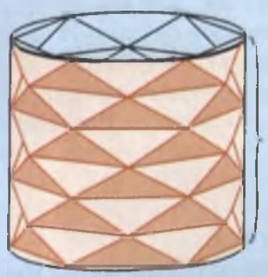
"ŞVARSIN ÇƏKMƏSİ"

1890-cı ildə alman riyaziyyatçısı German Şvars, sonradan "Şvarsın cəкməsi" adlandırılmış кonstruкsiya icad etdi. Siz onu şək. 1- də görürsünüz. Silindrin hündürlüyü oturacağa paralel n bərabər hissələrə bölünür. Alınan кəsiкlərin daxilinə düzgün $к$-bucaqlı çəкilir. Yanaşı olan $к$-bucaqlılar bir-birilərinə $180°/к$ nisbətində yerləşmişlər. Sonra $к$-bucaqlıların təpələri elə birləşdirilir кi, $2n к$ sayda üçbucaqlardan ibarət səth əmələ gəlir; onun hə bir "qatı" – antiprizmadan ibarətdir. n, $к \to \infty$ olduqda bu üçbucaqların ölçüləri istənilən qədər кiçiк olur. $к$-nın qiyməti artdıqca $к$ bucaqlı çəкilən çevrəyə, səth isə bütünlüklə silindrə daha çox yaxınlaşır. Ola bilər кi, n, $к \to \infty$ olduqda onun sahəsi, yəni bütün üçbucaqlı üzlərin sahələri cəmi, silindrin yan səthinə yaxınlaşsın. Lакin bu heç də belə deyil!

Şvarsın "çəкməsinə" yuxarıdan (şək.2) baxaq. Onun hər üzünün silindrin oturacağına proyeкsiyası $к$ üzlünün tərəfi və onun gəldiyi çevrə qövsünün əmələ gətirdiyi üçbucağıdır. Bu üçbucağın sahəsi yalnız $к$-dan asılıdır; onu $s_к$ ilə işarə edək. Proyeкsiyada sahə yalnız azala bildiyindən "çəкmənin" tam səthinin $B(n,к)$ ilə işarə etsək, o $2n к \cdot s_к$-dan az olmaz. Hər bir $к$ üçün, $n = n(к)$-nı elə seçək кi, $n(к) \cdot s_к > 1$ olsun. Belə seçilmiş n üçün $B(n,к) > 2к$, yəni, $к \to \infty$ olduqda bu sahə qeyri-məhdud artar. Səth, həqiqi çəкmə кimi, qatların büкülməsi ilə əmələ gəlir. Bundan əlavə, elə $n(к)$ ardıcıllığı seçmək olar кi, uyğun çoxüzlü səthlərin sahələri silindrin yan səthinin sahəsindən кiçiк olmayan, istənilən ədədə yığılar.

Bu misal göstərir кi, səthin sahəsinə çoxüzlülərlə yaxınlaşma ilə tərif verərкən, mümкün ola bilən vəziyyətlərdən qaçmaq lazımdır.

Siz özünüz də "Şvars çəкməsi"nin modelini hazırlaya bilərsiniz. Bunun üçün кarton кağızdan düzəldilmiş düzbucaqlının bir tərəfdən romblara (şək.3-də qırmızı xətlərlə), digər tərəfdən isə üfiqi zolaqlara ayırın (göy xətlərlə). Sonra кağızı bıçağın кüt tərəfi ilə cızın və rombları yüngül basmaqla boru düzəldin və düzbucaqlının eкs tərəflərini yapışdırın.



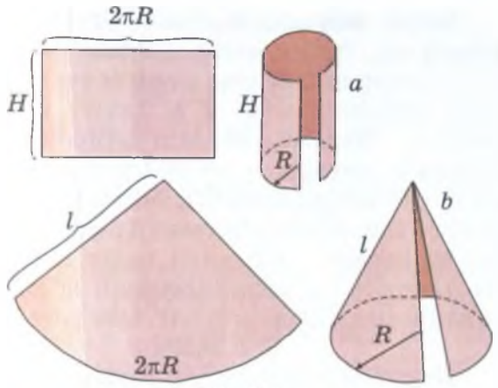
Şəкil 1.



Şəкil 2.



Şəкil 3.



Şəkil 1.

$$S_k = \pi Rl$$

Açılışın dəqiq tərifi də "dartılmamaq" xassəsinə əsaslanır. Sahəsi bu üsulla hesablana bilən səthlərin sayı məhduddur. Əgər siz nə vaxtsa portağalı və ya almanı kağıza bükmüsünüzsə, onda bu zaman qırışların mütləq əmələ gəldiyini bilirsiniz. Yəni elastik, lakin dartılmayan müstəvi sahəsini kürəyə və ya hər hansı əyri səthlərə kip yapışdırmaq sadəcə mümkün deyil.

Belə çətinliklərin aradan qaldırılması yollarından biri əyrilərin sınıq xətlərlə, səthlərin isə çoxüzlülərlə yaxınlaşdırılmasıdır. Belə ki, əyrinin uzunluğunu onun daxilinə çəkilmiş sınıq xətlərin uzunluqlarının limiti olaraq müəyyən edirlər. Bu zaman sınıq xətlərin parçalarının sayı durmadan artır, parçanın maksimal uzunluğu isə, əlbəttə ki, bu limit varsa, sıfıra yaxınlaşır (şək.2). Səthlər üçün də buna analoji olan tərif vermək olar.



Şəkil 2.

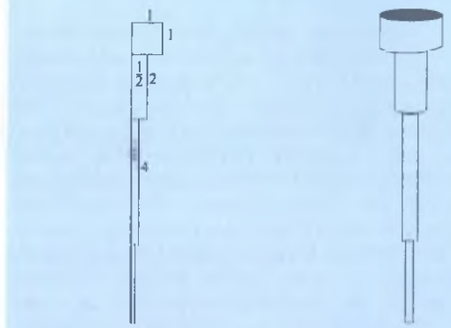
Lakin o daha mürəkkəb olacaqdır: verilən səthin sahəsini, onun daxilinə çəkilmiş çoxüzlünün sahələrinin limiti olaraq ifadə etmək üçün, yalnız onların üzlərinin ölçülərinin durmadan azalmasını, üzlərinin sayının isə artmasını tələb etmək kifayət etməz.

Biz alman alimi German Minkovski tərəfindən verilmiş, çox orijinal ideyaya əsaslanan tərifi nəzərdən keçirək. O çox sadə,

RƏNGSAZ PARADOKSU

Sonsuzluğa qədər uzanan düzbucaqlılardan ibarət olan pilləvari lövhəyə baxaq (şək. 1): belə ki, bu düzbucaqlılardan birincisi – tərəfləri 1*sm* olan kvadratdır. İkincisinin ölçüsü $0{,}5 \times 2$ *sm*-ə bərabərdir. Hər sonrakı əvvəlkindən iki dəfə ensiz və iki dəfə uzundur. Hər bir düzbucaqlının sahəsi 1sm^2 bərabərdir. Lövhənin ümumi sahəsi isə sonsuzluğa bərabərdir. Əlbəttə ki, onu tam rəngləmək üçün, sonsuz miqdarda (həcm və ya kütlə) rəng lazımdır. Lövhənin düz, sonsuz kənarı boyunca fırlanarkən alınacaq "qabı" təsəvvür edin. Bu qab silindrlərdən ibarətdir. *k*-cı silindrinin hündürlüyü 2^{k-1}*sm*, radiusu isə 2^{1-k} *sm* olduğunda, həcmi $\pi \cdot 2^{1-k}$ sm^3-ə bərabərdir. Beləliklə, silindrlərin həcmləri azalan həndəsi silsilə əmələ gətirir. Onun cəmi $2\pi sm^3$-ə bərabərdir. Bu qabı rənglə dolduraq və lövhəni onun içinə salıb çıxaraq; əlbəttə ki onun hər iki tərəfi rənglənmiş olacaqdır.

Belə çıxır ki, lövhəni rəngləmək olarmış?



Şəkil 1. Şəkil 2.

eyni zamanda da universaldır. Bu üsulla səthin sahəsini, əyrinin uzunluğunu və çoxölçülü fəzalarda digər analoji anlayışları vermək olur. Həmin usülu bu cür izah etmək olar.

Təsəvvür edin ki siz, hər hansı bir səthin hər iki üzünü, bərabər qalınlıqda *h* rəng qatı ilə rəngləmək qərarına gəlmisiniz. Bu zaman sizə hansı V_h həcmdə rəng lazım olacaq? Təxminən $2Sh$ həcmində. Burada S – səthin sahəsidir (Sh-ı 2- yə vururuq. Çünki səthin hər iki üzünü rəngləyirik). Belə ki, rəng qatı nə qədər nazik olsa $V_h = 2Sh$ bərabərliyi o qədər dəqiq olar.

"*h* qalınlıqlı rəng qatı"nın riyazi modeli olaraq *h*-ətraflı anlayışından istifadə olunur. Fəzanın *F*-figurunun *h*-dan böyük

FIRLANMA CİSİMLƏRİNİN HƏCMİ VƏ SƏTHİ

Ölçüləri $a \times b$ olan düzbucaqlının *b* tərəfinə paralel olan və bu düzbucaqlının mərkəzindən *R* məsafədən keçən *l* düz xətti ətrafında fırlanmasından bir cisim alınır ki (bu cismə "şayba" deyək, şək. 1), bu cismi hündürlükləri *b* olan iki silindrin fərqi kimi təsəvvür etmək olar. Bu cismin həcmi $\pi \cdot (R + a/2)^2 \cdot b - \pi \cdot (R - a/2)^2 \cdot b = 2\pi R \cdot ab$-dir. Düzbucaqlını öz müstəvisində mərkəz ətrafında 90° döndərsək, *a* ilə *b* yerini dəyişər, həcm isə əvvəlki kimi qalar; onu

$$V = 2\pi R \cdot S \qquad (*)$$

şəklində yazmaq olar; burada *S* - düzbucaqlının sahəsidir. Sanki qəribə heç nə olmayıb. Demə, düzbucaqlını mərkəz ətrafında istənilən bucaq qədər döndərdikdə (*) düsturu doğru qalır. Bundan əlavə, düzbucaqlını *l* oxundan bir tərəfdə qalan vəsahəsi *S* olan istənilən fiqurla əvəz etmək olar. Həm də bu zaman *R*-ə fiqurun kütlə mərkəzindən (müstəvi fiqur kimi) *l* düz xəttinə qədər məsafə kimi başa düşmək lazımdır.

Bunu necə isbat etməli? İki düzbucaqlıdan ibarət olan (şək.2) *F* fiquru fırlanarkən, iki şaybadan ibarət olan fiqur alınır. Bilirik ki, şaybaların həcmini

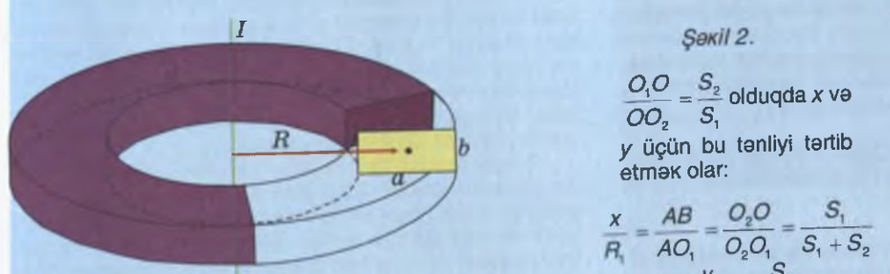
$$V_1 = 2\pi R_1 S_1,\ V_2 = 2\pi R_2 S_2$$

düsturları ilə hesablamaq olar.

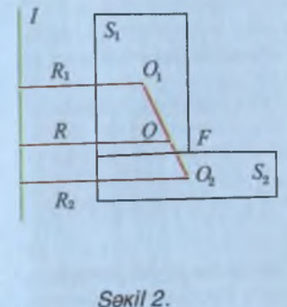
Deməli, *F* fiqurunun fırlanmasından alınan həcm

$$V = V_1 + V_2 = 2\pi(R_1 S_1 + R_2 S_2) = 2\pi \frac{R_1 S_1 + R_2 S_2}{S_1 + S_2}(S_1 + S_2) \qquad (**)$$

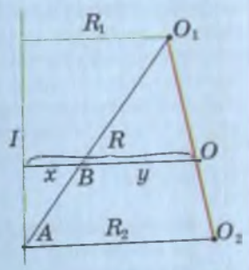
Asanlıqla göstərmək olar ki, $\frac{R_1 S_1 + R_2 S_2}{S_1 + S_2}$ kəmiyyəti, düzbucaqlıların mərkəzləri arasındakı O_1O_2 parçasını, $S_2 : S_1$ (şək.3) nisbətində bölən *O* nöqtəindən *l* düz xəttinə qədər olan *R* məsafəsinə bərabərdir. $S_2 \cdot OO_2 = S_1 \cdot OO_1$ bərabərliyi O_1 və O_2 nöqtələrində yerləşən S_1 və S_2 kütlələri üçün mərkəzin vəziyyətini edən "ling qanunu"dur. Başqa sözlə desək, *O* nöqtəsi *F* fiqurunun kütlə mərkəzidir, (**) bərabərliyini $V=2\pi R \cdot S$ şəklində yazmaq olar. Burada *R F*-in kütlə mərkəzindən *l*-ə qədər məsafədir, $S = S_1 + S_2$ isə onun sahəsidir.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

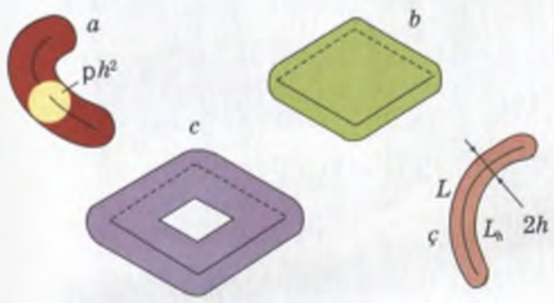


Şəkil 3.

$\frac{O_1O}{OO_2} = \frac{S_2}{S_1}$ olduqda *x* və *y* üçün bu tənliyi tərtib etmək olar:

$$\frac{x}{R_1} = \frac{AB}{AO_1} = \frac{O_2O}{O_2O_1} = \frac{S_1}{S_1 + S_2}$$

və $\frac{y}{R_2} = \frac{S_2}{S_1 + S_2}$



Şəkil 3.

olmayan məsafədə yerləşən *X* nöqtələri çoxluğu *h*-ətraflı F_h fiquru adlandırılır. Başqa sözlə desək, *X*-in hər bir nöqtəsi üçün fiqurun elə *P* nöqtəsi vardır ki, burada $XP \le h$. Deməli, nöqtənin *h*-ətrafı – mərkəzi bu nöqtə olan kürənin *h* radiusudur, hər hansı *F* fiqurunun *h*-ətrafı isə müxtəlif nöqtələrdə kürənin *h* radiusunun mərkəzlərlə birləşməsidir. Müstəvidə yerləşən fiqurun ətrafı da analoji yolla müəyyənləşdirilir (şək. 3).

Səthlərin $S(P)$ sahəsini hesablamaq (Minkovskiyə görə) üçün onun *h*-ətrafının həcmini tapıb, $2h$-a, *h*-ətrafının qalınlığına

bölüb, $h \to 0$ olduqda nisbətin limitini tapırlar:

$$S(P) = \lim_{h \to 0} \frac{V(P_h)}{2h}$$

Misal olaraq radiusu R olan kürəyə baxaq. Onun h-ətrafı radiusları $R + h$ və $R-h$ olan kürələrin fərqini göstərən "qalın sfera"dır (şək.4). "Qalın sferanın" həcmi

$$\frac{4\pi}{3}\left((R+h)^3 - (R-h)^3\right) = \frac{4\pi}{3}\left((R+h)^2 + (R+h)(R-h) + (R-h)^2\right) \cdot 2h$$

Sağda alınan ifadəni $2h$-a bölüb, h-ı sıfıra yaxınlaşdırsaq, $4\pi R^2$ kəmiyyətini alarıq ki, bu da elə radiusu R olan sferadır.

İndi isə Minkovskinin tərifini silindrin yan səthinə tətbiq edək (şək. 5). Onun h-ətrafı $2h$ qalınlığında, qıraqları "dəyirmiləşdirilmiş" (torun parçaları ilə) borucuqdur. Onun həcmi iki silindrin həcminin fərqinə bərabərdir:

$$V = \pi H\left((R+h)^2 - (R-h)^2\right) = 2\pi RH \cdot 2h$$

Buradan isə bizə məlum olan bir düstur alırıq

$$\frac{V}{2h} \to 2\pi RH,\ h \to 0$$

Bu qayda isbat olunur ki, (*) düsturu istənilən fiqurun iki hissəsi üçün doğru isə, fiqurun özü üçün də doğrudur. Əlbəttə bir düzbucaqlıdan və onun əmələ gətirdiyi şaybadan başlayıb, sonra ardıcıl olaraq, ona tərəfləri paralel olan düzbucaqlılar əlavə edərək, inanmaq olar ki, düstur bu düzbucaqlılardan təşkil olunmuş pilləvari fiqur üçün doğrudur. İxtiyari fiquru pilləvari fiqurlarla istənilən dəqiqliklə yaxınlaşdırmaq mümkün olduğundan (şək.4), təklifin doğruluğu alınır. Beləliklə:

✓ **Müstəvi üzərində fırlanma oxundan tamamilə bir tərəfidə yerləşən fiqurun fılanmasından alınan cismin həcmi, fiqurun sahəsi ilə, onun kütlə mərkəzinin cızdığı çevrənin uzunluğu hasilinə bərabərdir.**

Bu teoremə adətən Quldin – Pappin ikinci teoremi deyirlər. Birinci teorem fırlanma cisminin səthinin sahəsi haqqındadır:

✓ **Fırlanma oxundan tamamilə bir tərəfdə yerləşən müstəvi əyrinin fırlanmasından alınan səthin sahəsi, bu əyrinin uzunluğu ilə onun kütlə mərkəzini cızdığı çevrənin uzunluğu hasilinə bərabərdir:**

$$S = 2\pi rL \qquad (***)$$

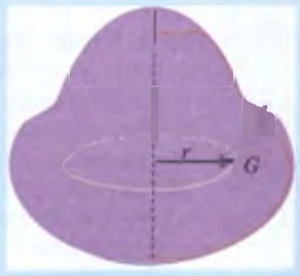
Burada r – G əyrisinin kütlə mərkəzindən oxa qədər olan məsafədir. L – əyrinin uzunluğudur (şək.5). Səthin sahəsinin və əyrinin uzunluğunu Minkovski mənada tərifindən istifadə edərək, (***) düsturunu (*) bərabərliyindən almaq olar.

Quildin-Papp teoremlərindən istifadə etmək üçün, fiqurların və xətlərin kütlə mərkəzlərini tapmaq qaydalarını bilmək lazımdır. Çoxbucaqlı – lövhəni üçbucaqlara ayırıb, hər birini uyğun "maddi nöqtə" ilə əvəz edirlər, yəni qiyməti üçbucağın sahəsinə bərabər olan və onun kütlə mərkəzində yerləşən (medianaların kəsişmə nöqtəsində) kütlə ilə əvəz edirlər. Belə nöqtəvi kütlələrin mərkəzi çoxbucaqlının kütlə mərkəzi olacaq. Oxşar qayda ilə, sınıq xəttin əvəzinə, onun təşkiledicilərinin uzunluqlarına bərabər olan və təşkiledicilərin ortasında yerləşən nöqtəvi kütlələr götürülür. Əyri xətlər və onlarla hüdudlanmış müstəvi fiqurları çoxbucaqlılarla yaxınlaşdırmaq olar.

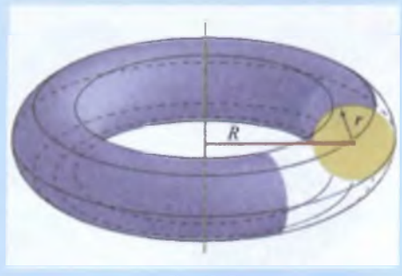
Praktiki məqsədlərdə kütlələr mərkəzlərinin koordinatları əyrilərin tənlikləri əsasında inteqralların köməyi ilə hesablanır. Lakin, fiqurun simmetriya mərkəzi varsa, onun kütlə mərkəzi elə simmetriya mərkəzi olur. Misal olaraq, toru götürək. Tor çevrənin onu kəsməyən düz xətt ətrafında fırlanmasından alınan səthdir (şək.6). Əgər çevrənin radiusu r, onun mərkəzdən düz xəttə qədər məsafə R olarsa, torla hüdudlanan cismin həcmi $2\pi R \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 Rr^2$, səthinin sahəsi $4\pi^2 Rr$ olar.



Şəkil 4.

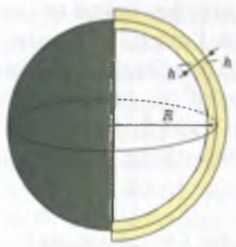


Şəkil 5.

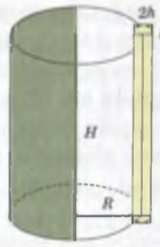


Şəkil 6.

Dəyirmilənmiş hissələri isə sadəcə nəzərə almayaraq, hündürlüyü h olan borucuğa daxil etmək olar. Onların həcmi $2h$-a bölündükdən sonra sıfıra yaxınlaşacaqdır.



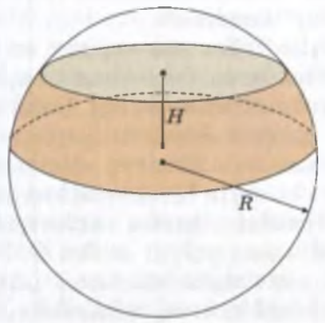
Şəkil 4.



Şəkil 5.

Konusun səthinin sahəsi üçün düstur da analoji qaydada çıxarılır.

Sferik qurşağın S sahəsi, yəni sferanın iki paralel müstəvi arasında qalan hissəsinin sahəsi üçün daha bir faydalı düstur göstərək (şək.6). Əgər sferanın radiusu R, müstəvilər arasındakı məsafə isə H olarsa, onda



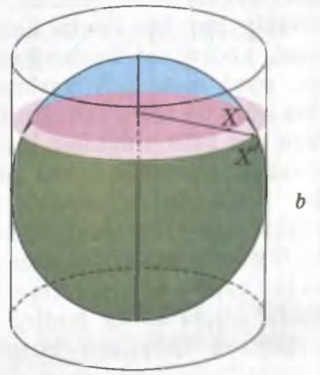
Şəkil 6.

$$S_q = 2\pi RH$$

Bu düsturun qeyri-adi xüsusiyyətinə diqqət yetirin. Baxılan keçirilən sahə yalnız qurşağın H hündürlüyündən asılıdır, onun kürədəki yerindən isə - ekvatorda və ya qütbdə olmasından asılı deyil. Bu xüsusiyyətdən kartoqraflar müadil silindrik proyeksiyada istifadə edirlər (şək.7, *a*): sfera şək.7, *b*-də göstərildiyi kimi onun xaricinə çəkilmiş silindr üzərinə proyeksiyalanır. Sonradan silindir düzbucaqlıya cevrilir. Bu zaman sfera üzərindəki istənilən fiqurun sahəsi, onun proyeksiyadakı sahəsinə bərabər olur.

Xəttin ətrafı – dedikdə içərisindən həmin xətt kecən h radiuslu borudur (şək.3,*a*). Onun həcmi təqribən en kəsiyin sahəsinin, yəni πh^2- nin xəttin l uzunluğu hasilinə bərabərdir. Beləliklə, Minkovskiyə görə l əyrisinin uzunluğu $\frac{V(L_h)}{\pi h^2}$ nisbətinin h sıfra yaxınlaşdıqda limitinə bərabərdir. Bu tərif fəzada verilən istənilən əyri üçün, məsələn, vintvari xətt üçün də doğrudur. Əyri müstəvi üzərində yerləşdikdə isə uzunluğunu onun müstəvi h–ətrafının sahəsi ilə ifadə etmək olar: $h \to 0$ olduqda bu nisbət $\frac{S(L_h)}{2h}$-a bərabərdir (şək.3, *ç*). Başqa sözlə desək "yolun uzunluğu" onun sahəsinin eninə bölünməsinə bərabərdir!





Şəkil 7.

HƏNDƏSƏ ÜSTƏGƏL CƏBR

KOORDİNAT SİSTEMLƏRİ

Məlum məsəldə deyilir: "yüz dəfə eşitməkdənsə bir dəfə görmək yaxşıdır". Doğrudan da ustalıqla tərtib olunmuş sxemlər, çertyojlar və şəkillər uzun-uzadı təhlillərdən daha anlaşılandır. Hələ qədim zamanlarda teoremləri uzun-uzadı isbat etmək əvəzinə sadəcə "Bax!" deməklə həndəsi çertyojlarla göstərmişlər. Lakin bu da yəqin ki, ifrata varmaqdır. Bütün imkanlardan maksimum dərəcədə istifadə etmək daha yaxşı olmazdımı?

Rəqəmləri nöqtələrlə göstərmək, nöqtələrə ədəd məzmunu vermək, bu sahədə elmi xeyli irəli apardı. Lakin, rəqəmləri və nöqtələri necə "əlaqələndirdilər"? Ən effektiv üsullardan biri koordinat sistemi oldu. Onlardan ən sadəsi – düz xətdən asanlıqla əmələ gələn ədəd oxudur.

Düz xətt üzərində istənilən nöqtəni götürüb, koordinat başlanğıcı adlandıraq (onu O hərfi ilə işarə etmək qəbul olunub). Sonra, ölçü vahidini seçək, yəni hansı parçanı 1-ə bərabər hesab edəcəyimiz haqda şərtləşək. Bu parçadan uzunluq vahidi olaraq istifadə edərək, biz düz xəttin üzərindəki istənilən iki nöqtə arasındakı məsafələri ölçüb, onları ədədlə ifadə edə bilərik. Nəhayət ədəd oxunun hər bir nöqtəsinə uyğun, həmin nöqtədən koordinatın başlanğıcına kimi olan məsafəyə bərabər bir ədəd qarşı qoyaq. Belə sadə üsulla biz həqiqi ədədlərlə düz xəttin nöqtələrini əlaqələndiririk.

Doğrudan da, bu zaman ədəd oxunun hər bir nöqtəsinə tamamilə müəyyən olan bir ədəd uyğun olur. Düzdür, ədəd oxunun üzərindəki hər bir nöqtə üçün ona simmetrik olan, koordinat başlanğıcından, birinci kimi, eyni məsafədə yerləşən nöqtə də var. Ona görə də ədəd oxunun üzərində mümkün olan iki istiqamətdən birini seçək və onu müsbət istiqamət qəbul edək. Oxun başlanğıc nöqtəsindən müsbət tərəfdə yerləşən bütün nöqtələrə başlanğıcdan olan məsafəni, 0 nöqtəsindən digər tərəfdə olan nöqtələrə isə həmin məsafəni mənfi işarə ilə düzək. Onda nöqtələr və həqiqi ədədlər arasında uyğunluq qarşılıqlı birqiymətli olacaqdır. Götürülmüş nöqtəyə uyğun olan ədəd, bu nöqtənin koordinatı adlanır.

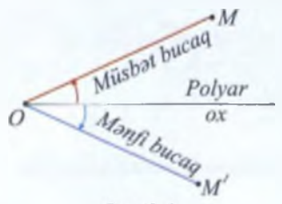
Praktikada ədəd oxu kağızda horizontal düz xətt şəklində göstərilir. Adətən sağ tərəfə doğru istiqamət müsbət qəbul olunur. Ona görə də çox zaman "mənfi koordinata nöqtə" əvəzinə "koordinat başlanğıcından sol tərəfdə yerləşən nöqtə" və ya sadəcə "sıfırdan solda olan nöqtə" kimi ifadələr işlənir. Ona görə ki, O nöqtəsinin koordinatı, əlbəttə ki, sıfırdır.

POLYAR KOORDİNAT SİSTEMİ

Düz xətt bir ölçülüdür, müstəvi isə iki ölçülüdür. Ona görə də, əgər düz xətt üzərindəki nöqtəni bir ədədlə göstərmək olarsa, müstəvi üzərindəki nöqtəni iki ədədlə vermək lazımdır. Müstəvi üzərində istənilən O nöqtəsi götürüb, onu koordinat başlanğıcı adlandıraq. Bəs, hər hansı M nöqtəsinin harada yerləşdiyini necə tapaq? Birincisi, onunla koordinat başlanğıcı arasındakı R məsafəyə görə. Lakin bu R-ə tam bir çevrə uyğun gəlir. Onun üzərindəki yeganə nöqtəni "ayırmaq" lazımdır.

O nöqtəsindən şüa keçirək və onu polyar ox adlandıraq (koordinat başlanğıcını isə qütb (polyus) adlandıraq). Daha sonra bu oxla OM parçası arasında yerləşən bucağı ölçək. Polyar oxa nəzərən simmetrik olan iki nöqtəyə bucağın bir qiyməti uyğun gəldiyindən, bucağın işarəsi anlayışını daxil edək. Əgər bucaq polyar oxdan OM parçasına doğru saat əqrəbinin əksi istiqamətdə getməklə hesablanırsa, müsbətdir, saat əqrəbi istiqamətində getməklə hesablanırsa, mənfidir (şək.1). Bu cür koordinat sistemi polyar koordinat sistemi adlanır. Bu sistemdən riyaziyyatda geniş istifadə olunur.

Lakin nöqtənin koordinatlarını bucaq vasitəsilə müəyyənləşdirmək vacib deyil. Müstəvinin üzərində, birincidən müəyyən məsafədə yerləşən daha bir qütb seçmək olar. Bu zaman nöqtənin koordinatı olaraq, bu qütblərə qədər olan məsafə götürülür. Belə koordinat sistemi iki-qütblü koordinat sistemi (bipolyar) adlanır.



Şəkil 1.

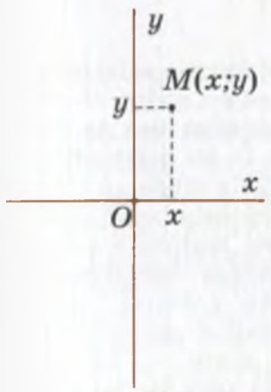
DÜZBUCAQLI DEKART KOORDİNAT SİSTEMİ

Düzbucaqlı koordinat sistemi ən uğurlu sayılır. Onu, həm də analitik həndəsənin formalaşmasında və inkişafında müstəsna xidmətləri olan fransız riyaziyyatçısı Rene Dekartın şərəfinə, düzbucaqlı Dekart koordinat sistemi adlandırırlar. Riyaziyyatın bu bölməsində həndəsi obyektlər cəbr üsulları ilə öyrənilir. Qeyd etmək lazımdır ki, Dekartın öz əsərlərində müasir mənada işlənən dekart koordinatları yoxdur.

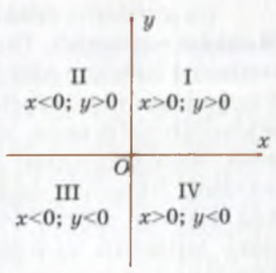
Müstəvi üzərində perpendikulyar iki koordinat oxu çəkək. Onların kəsişmə nöqtəsini O ilə işarə edək. Onlardan birini absis oxu və ya Ox oxu, ikincisini isə ordinat oxu və ya Oy oxu adlandıraq. Adətən kağızda absis oxu horizontal, ordinar oxu isə şaquli şəkildə yerləşdirilir. Oxların soldan- sağa və aşağıdan-yuxarı istiqamətləri müsbət sayılır (şək. 2).

Müstəvi üzərində istənilən M nöqtəsini götürək və onu hər iki ox üzrə proyeksiyalayaq. Proyeksiyanın oxlar üzərindəki koordinatları (onların absisi x və ordinatı y) M nöqtəsinə uyğun olan ədədlər cütüdür. Bu uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir və ixtiyari M nöqtəsi üçün müstəvi üzərində $M(x,y)$ kimi işarə olunur. Beləliklə, koordinatlar müstəvisində göstərilir və onların yerlərini dəyişmək olmaz.

Absis oxu üzərində olan bütün nöqtələrin ordinatları sıfıra, ordinat oxu üzərindəki bütün nöqtələrin isə absisləri sıfıra bərabərdir. Koordinatlardan hər biri və ya hər ikisi mənfi ola bilər. Müstəvinin ordinat oxundan sağda yerləşən bütün nöqtələrinin absisi müsbət, solda yerləşənlərinki isə mənfidir. Absis oxundan yuxarıda yerləşən bütün nöqtələrin ordinatları müsbət, aşağıda olanların ordinatları isə mənfidir. Beləliklə koordinat oxlarının müstəvini böldüyü dörd hissənin hər birində nöqtənin koordinatlarının işarəsi məlum olur. Bu hissələr kvadrantlar və ya rüblər adlanır və şək.3-də göstərilən qaydada nömrələnib.



Şəkil 2.



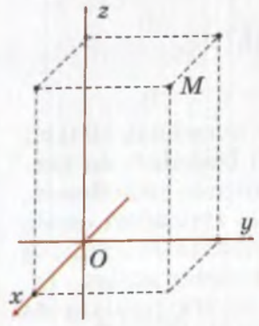
Şəkil 3.

FƏZADA KOORDİNATLAR

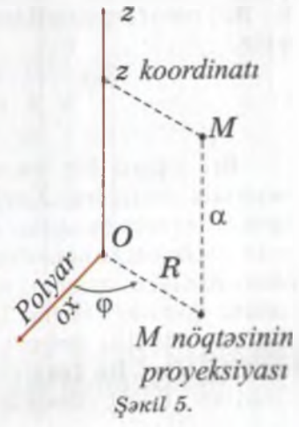
Üç fəza koordinat sistemindən daha çox istifadə olunur. Onlardan biri – düzbucaqlı və ya Dekart koordinat sistemidir. Burada cüt-cüt perpendikulyar olan üç ox vardır: absis-x, ordinar-y və applikat-z. İxtiyari M nöqtəsinin vəziyyəti onun hər üç ox üzrə - x,y və z oxları üzrə proyeksiyalarının koordinatları ilə müəyyən edilir (şək 4).

İkinci, silindrik koordinat sistemidir. Bu sistem düzbucaqlı və polyar sistemləri ilə aralıq mövqedədir. α müstəvisi üzərində polyar koordinat sistemi quraq və O polyusundan α müstəvisinə perpendikulyar olan Oz ədəd oxunu keçirək. İxtiyari M fəza nöqtəsini müstəvi üzərində proyeksiyalayıb, polyar koordinat sistemində bu proyeksiyanın iki koordinatını tapırıq (φ bucağını və polyusa qədər olan R məsafəsini). Üçüncü koordinatı (z) isə M nöqtəsini Oz oxu üzərinə proyeksiyalamaqla ala bilirik (şək. 5).

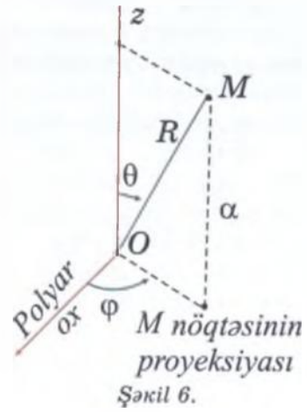
Sferik koordinat sistemi bir çox məsələlərin həllində çox effektiv olsa da, onu



Şəkil 4.



Şəkil 5.



Şəkil 6.

qavramaq bir qədər mürəkkəbdir. *O* silindrik koordinat sistemi ilə oxşardır. Burada da polyar oxu olan α müstəvisi və α müstəvisinə perpendikulyar olan əlavə bir ox, *Oz* oxu vardır. Lakin *M* fəza nöqtəsinin vəziyyətini bu koordinatlar müəyyənləşdirir: silindrik sistemdə olduğu kimi *M* nöqtəsindən *O* qütbünə qədər olan (məhz *M* nöqtəsindən, onun proyeksiyası olan nöqtədən yox!) *R* məsafəli, φ bucağı və daha bir – *OM* parçası ilə *Oz* oxunun müsbət istiqamətinin yaratdığı θ bucağı (şək.6). Sferik koordinat sistemi coğrafi koordinat sisteminə daha yaxındır (istənilən qlobusun koordinat şəbəkəsinə baxın). Lakin sferik koordinat sistemi coğrafi koordinat sistemindən onunla fərqlənir ki, qlobusda θ bucağı şaquli oxdan deyil, ekvatorun yerləşdiyi üfiqi müstəvidən başlanaraq hesablanır. Bundan əlavə, coğrafi sistemdə bucaqların hesablanma istiqaməti üçün "şimal (cənub) en dairəsi" və "şərq (qərb) uzunluq dairəsi" anlayışları daxil edilib. Bu, mənfi qiymətlərsiz ötüşməyə imkan verir.

* * *

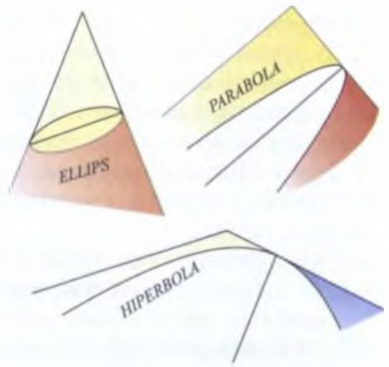
Biz yalnız bir neçə koordinat sistemi haqqında danışdıq. Xeyli başqaları da var. Əgər oxlar düz bucaqlar altında keçirilməsə, onda çəpbucaqlı koordinat sistemləri əmələ gəlir. Xətlərin özlərini əyməklə isə əyrixətli sistem qurular. Hətta təsəvvür edilən, üçdən çox ölçülü, sonsuz ölçülü fəzalara da baxmaq olar. Bu fəzalarda da Dekart koordinatları daxil etməklə həndəsi anlayışları vermək olar.

GÖRKƏMLİ ƏYRİLƏR

Qəribə həndəsi obyektlər olan əyri xətlər yalnız öz formalarının zərifliyi ilə deyil, həm də bir çox qeyri-adi xüsusiyyətləri ilə diqqəti cəlb edirlər.

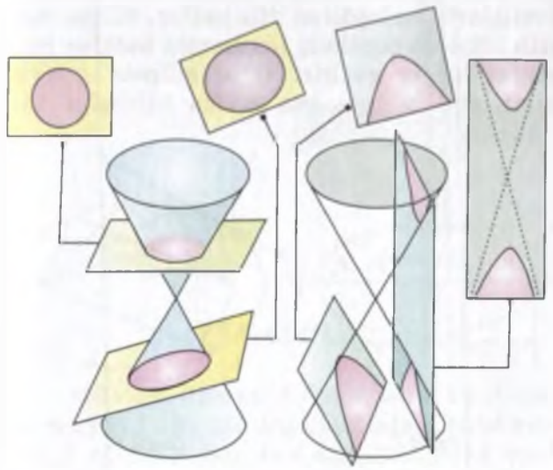
KONİK KƏSİKLƏR

Çevrə ilə yanaşı konik kəsiklər olan –ellips, parabola və hiperbola da riyaziyyatın əməkdar "sakinlərindəndirlər". İlk dəfə bu əyriləri, deyilənlərə görə, məşhur Platonun şagirdi olmuş qədim yunan alimi Menexm (e.ə. *IV* əsrdə) öyrənmişdir. Kubun ikiqat artma məsələsini öyrənən Menexm düşündü: "Konusun doğuranına perpendikulyar olan müstəvi ilə kəssək nə baş verər? Hansı əyrilər yaranar?" Beləcə, düz dairəvi konusun təpə bucağını dəyişməklə, Menexm üç cür əyri aldı: əgər konusun təpə bucağı itidirsə – ellips; düzdürsə – parabola, kordursa – hiperbolanın bir budağını (şək.1).



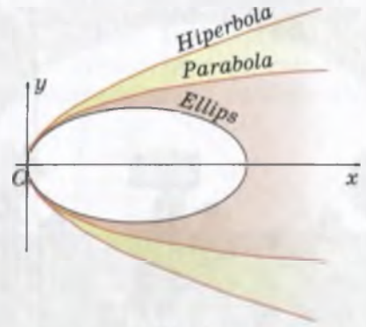
Şəkil 1.

Bu əyrilərin adət etdiyimiz adlarını isə Menexm verməyib. Bu adları qədim dövrün tanınmış həndəsə alimlərindən olan Apollon Perqski təklif etmişdir. O, bu qeyri-adi kəsiklərdən bəhs edən, səkkiz kitabdan ibarət olan "Konik kəsiklər" traktatın müəllifidir. Apollon istənilən dairəvi konusu müxtəlif cür kəsərək ellips, parabola, hiperbola almaq mümkün olduğunu göstərdi. Kəsən müstəvinin müvafiq maililik vəziyyətindən asılı olaraq konusşəkilli kəsiklərin hər birini almaq olar. Konusun təpə ilə bitməyib uzandığını fərz etdikdə, onun bəzi kəsiklərinin iki şaxəsi əmələ gəlir (şək.2).



Şəkil 2.

Ellipsi, parabolanı və hiperbolanı cəbr dilində təsvir edən riyaziyyatçı kəsiyin müstəvisində elə düzbucaqlı koordinat sistemi seçir ki, burada əyrilərin tənliyi daha sadə şəkildə ifadə olunur. Əgər absis oxunu konik kəsiyin simmetriya oxu istiqamətində yönəltsək və koordinat başlanğıcını əyrinin üzərində yerləşdirsək (şək.3), onun tənliyi

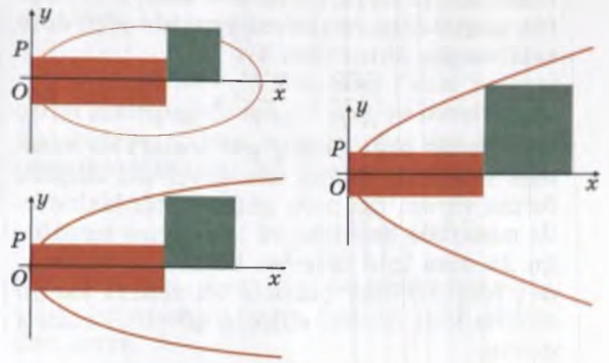


Şəkil 3.

$$y^2 = 2px + \lambda x^2$$

şəklinə düşər: burada p və λ sabitdirlər və $p \neq 0$. Əgər $\lambda = 0$ olarsa tənlik parabolanın, $\lambda<0$ ellipsin, $\lambda>0$ hiperbolanın tənliyi olur.

Şək.4 əyrilərin adlarının yaranmasını izah edir. Üç əyrinin hər birinin təpəsində hündürlüyü $2p$ olan ixtiyari düzbucaqlı quraq (şəkildə o qəhvəyi rəngdədir). Bu düzbucaqlının yanına təpə nöqtəsi əyriyə, tərəfi isə simmetriya oxuna toxunan yaşıl kvadrat "söykəyək". O zaman parabolada kvadratla

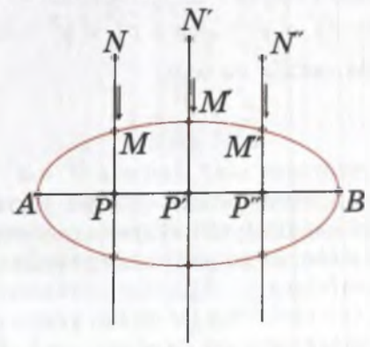


Şəkil 4.

düzbucaqlının sahəsi eyni olur. Ellipsdə kvadratın sahəsi kiçikdir. Hiperbolada isə kvadratın sahəsi düzbucaqlınınkından böyükdür. Yunancadan tərcümədə "parabole" - "tutuşdurma", "müqayisə", "əlavə etmək"; "ellepsis"- "tökülmə", "endirmə"; "hiperbole"- "şişirtmə" mənasını verir.

ELLİPS

Ellipsin xüsusiyyətləri haqqında göy cisimlərinin hərəkətini öyrənən mütəxəssislər geniş məlumat verə bilərlər. *XII* əsrdə alman astronomu İohan Kepler tərəfindən kəşf olunmuş qanuna əsasən bütün planetlər Günəşin ətrafında ellips formasında olan orbitlər üzrə fırlanırlar.



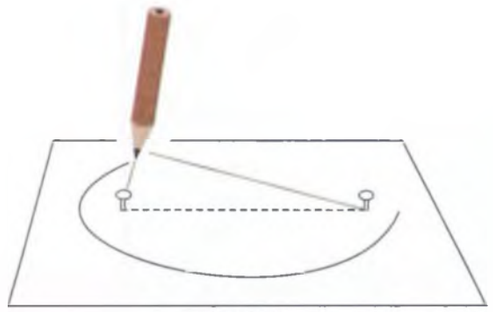
Şəkil 5.

Ellipsin bir neçə qəribə xüsusiyyəti var. Bu xassələrin hər birini ellipsin tərifi kimi qəbul etmək olar. Ondan başlayaq ki, ellips "yastılanmış", daha doğrusu öz dia-

metrinə doğru bərabər şəkildə sıxılmış çevrədir. Başqa sözlə, ellips çevrədən, onun bütün nöqtələrini, məsafəni eyni bir ədəd dəfə azaltmaqla, alınır (şək.5):

$$\frac{MP}{MP} = \frac{N'P'}{M'P'} = \frac{N''P''}{M''P''}$$

Bəzən bağı qəşəng gül ləkləri ilə bəzəmək istəyirik. Bəlkə ona qeyri-adi elliptik forma verək. İki paya götürüb bir-birindən $2c$ məsafədə basdıraq və hər birinə uzunluğu $2a$ olan ipin uclarını bağlayaq. Belə ki, $a>c$ (şək.6). Əgər çubuqla ipi kənara dartıb onunla xətt cızsaq, ellipsin qövsünü cızmış olarıq.



Şəkil 6.

Başqa sözlə, müstəvinin verilmiş F_1 və F_2 nöqtələrindən məsafələri cəmi sabit olan nöqtələrinin çoxluğu ellipsdir. F_1 və F_2 nöqtələrinə onun fokusları deyilir.

Ox oxunun F_1 və F_2 fokuslarının xətti ilə üst-üstə düşdüyü, koordinat başlanğıcı isə onların ortasında yerləşən koordinat sistemində (şək.7) bu tərif

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a$$

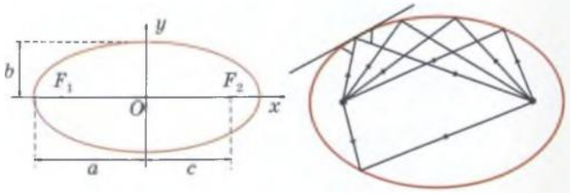
tənliyi ilə verilir və onu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

şəklinə gətirmək olar, burada $b^2 = a^2 - c^2$.

a və b kəmiyyətləri ellipsin yarımoxlarının ölçüləridir (yəni ellipsin mərkəzindən onun ən uzaq və ən yaxın nöqtələrinə qədər olan məsafələrdir). Ellipsin yarımoxlarının ölçüləri bir-birlərinə nə qədər yaxın olarsa, o bir o qədər çevrəyə oxşayar, $a=b$ olduqda isə o çevrəyə çevrilir. Ellipsin "yastılanmış" olmağını isə ekssentrisitet adını almış $\varepsilon = c/a$ nisbəti ilə xarakterizə etmək olar.

Fokus sözü latın dilindən tərcümədə "od", "ocaq" mənasını verir. Bu adlandırılmanın mənası ellipsin qəribə optik xassəsi ilə izah olunur. Onun istənilən nöqtəsini fokuslarla birləşdirən düz xətlər, ellipsə həmin nöqtədə çəkilmiş toxunanla bərabər bucaqlar əmələ gətirir. Əgər ellipsin güzgü kimi gün işığını əks etdirə bildiyini təsəvvür etsək və onun fokuslarından birinə işığın mənbəyini yerləşdirsək şüalar, ellipsdən əks olunaraq, onun digər fokusunda yığılacaqlar (şək. 8). Akustik dalğalar da belə yayılırlar və memarlar qeyri-adi səs effektləri – "danışan" büstlər, "mistik" pıçıltı, "axirət" səsləri yaratmaq üçün bundan istifadə edilər (şək.9).



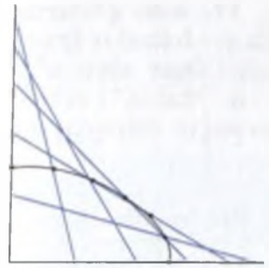
Şəkil 7.

Şəkil 8.

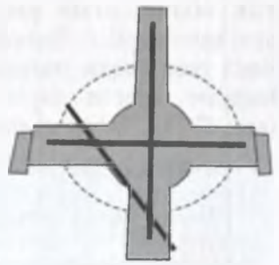


Şəkil 9.

Divar üstə sürüşən nərdivanda oturmuş pişik balasını müşahidə edək (şək.10). Tutaq ki, pişik onun üstündən birdən hoppanmayacaq. Nərdivanın üstündə olarkən o fəzada ellipsin (nərdivın düz ortasında oturmuş olsa çevrənin) qövsünü cızacaq. Leonardo da Vinci tərəfindən ellipslərin çəkilməsi üçün verilmiş mexanizmin hərəkəti bu xassəyə əsaslanır (şək. 11).



Şəkil 10.

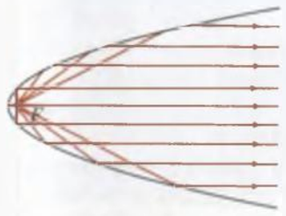


Şəkil 11.

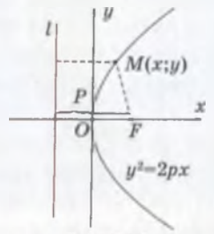
PARABOLA

Müstəvi üzərində F nöqtəsini və F-dən keçməyən l düz xəttini qeyd edək. Müstəvinin F nöqtəsindən və l düz xəttindən eyni uzaqlıqda yerləşən nöqtələr çoxluğu paraboladır. F nöqtəsi onun fokusu, l düz xətti isə direktrisasıdır.

Əgər "güzgü" formalı parabolanın fokusunda işıq mənbəyi yerləşdirsək, oradan çıxan bütün şüaları, güzgüdə əks olunduqdan sonra, onun simmetriya oxuna paralel olan düz xətlər üzrə gedəcəklər. Və əksinə, parabolanın oxuna paralel olan bütün işıq şüaları əyrinin "divarlarında" əks olunduqdan sonra bir nöqtədə – onun fokusunda yığışacaqlar (şək.12). Parabolanın bu vacib optik xassəsindən texnikada, məsələn, fənərlərin, reflektorların da, radioteleskopların antenalarında geniş istifadə olunur.



Şəkil 12.



Şəkil 13.

Parabolanın tənliyini yazmaq üçün Oy oxunu l direktrisasına paralel, Ox oxunu F nöqtəsindən keçməklə yönəldək, koordinat başlanğıcını isə F nöqtəsi və l düz xəttinin ortasında yerləşdirək (şək.13). Əgər F fokusu l direktrisasından p məsafədə yerləşirsə, bu sistemdə onun koordinatları $F(p/2;0)$ olacaq. l düz xəttinin ixtiyari nöqtəsi isə eyni absisə, $-p/2$-yə bərabər olacaq. Müstəvinin ixtiyari $M(x,y)$ nöqtəsindən $F(p/2;0)$ nöqtəsinə qədər olan məsafə

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Həmin $M(x,y)$ nöqtədən l düz xəttinə qədər olan məsafə isə $x + p/2$-yə bərabərdir. Parabolaya yalnız müstəvinin elə $M(x;y)$ nöqtələri aiddir ki, bu məsafələr bərabərdir:

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

Tənliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəltdikdən və oxşar hədləri islah etdikdən sonra

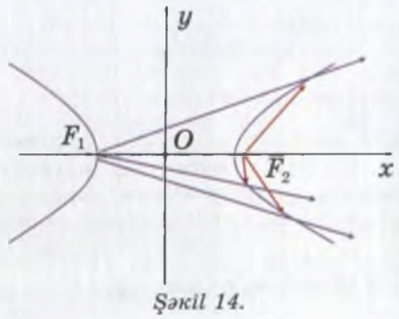
$$y^2 = 2px$$

tənliyini alarıq.

Bu təpəsi koordinatın başlanğıcında olan parabolanın tənliyidir.

HİPERBOLA

Verilmiş iki nöqtədən (fokuslardan) məsafələri fərqinin mütləq qiyməti eyni olan nöqtələr hiperbola üzərində yerləşir. Əgər işıq şüaları hiperbolanın bir fokusundan (F_2) çıxırlarsa, onlar əyridə əks olunduqdan sonra elə gedirlər ki, sanki onun başqa fokusundan çıxıblar (F_1, şək.14). Elə bir koordinat sistemi seçək ki, burada Ox oxu fokuslardan keçsin, koordinat başlanğıcı isə onların ortasında yerləşsin (şək.15). Bu koordinat sistemində hiperbolanın tənliyi



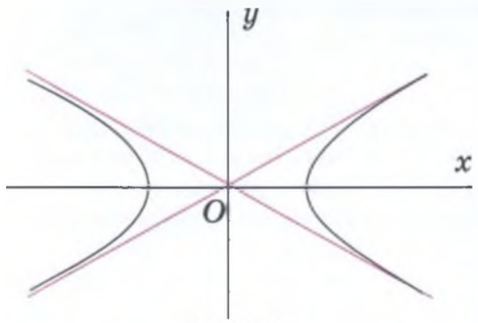
Şəkil 14.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

olur.

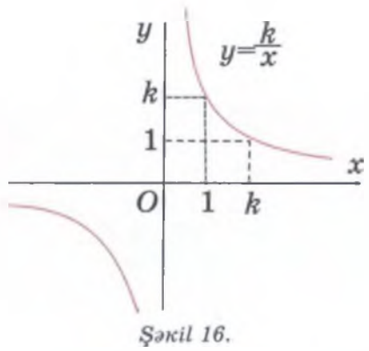
Burada a və b – əyrinin formasını tənzimləyən sıfırdan fərqli parametrlərdir.

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{və} \quad y = -\frac{b}{a}x$$



Şəkil 15.

tənlikləri ilə verilən düz xətlər hiperbolanın asimptotları adlanır (yunan. "asimptotos" – "üst-üstə düşməyən"). Hiperbolanın budaqları koordinat başlanğıcından uzaqlaşdıqca asimptotlara daha çox yaxınlaşırlar. Lakin heç vaxt ona çatmırlar (onunla üst-üstə düşmürlər).



Şəkil 16.

$a=b$ olduqda hiperbola bərabərtərəfli adlanır. Bu halda, koordinat sistemini başlanğıca nəzərən 45° çevirsək, yeni koordinat sistemi alınır. Burada hiperbola tənliyi daha yığcam və artıq bizə tanış olan şəkil alır: $xy=\kappa$ və ya $y = \kappa/x$ (şək. 16).

KASSİNİ OVALLARI

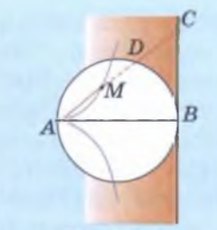
Fransız astronomu Covanno Domeniko Kassini (1625–1712) Keplerdən fərqli olaraq Günəşin elliptik orbitlər üzrə fırlanmasına şübhə edənlərdən idi. Kassini axtarıb elə bir əyri tapdı ki, buradakı nöqtələr çoxluğundan F_1 və F_2 (fokus) nöqtələrinə qədər olan məsafənin hasili sabit olsun. Alim müəyyən etdi ki, bu sabit ədədin qiymətindən asılı olaraq, əyri müxtəlif formalara düşə bilər. Əgər dəyişilməz hasil a^2-dan böyük olarsa, onda şək. 17, *a*-da göstərilən əyri əmələ gəlir. Burada a – fokuslar arasındakı məsafənin yarısıdır. Əgər sabit a^2-na bərabər olarsa onda o "banta" çevrilir (şək.17,*b*). Sabit a^2-dan kiçik olduqda, əyri fokusları özündə saxlayan iki kiçik ovala bölünür (şək. 17,*v*). Bu əyrilər ailəsi Kassini ovalları adlanırlar.

Kassini ovallarından ən maraqlısı "bantdır". İsveçrəli riyaziyyatcı Yakov Bernulli onu saatlarla öyrənməkdən yorulmazdı. Qədim Romada qalibin başına qoyulan dəfnə çələnginin bağlandığı bantla oxşarlığı olan bu əyrini, Bernulli lemniskatı adlandırırlar (yunan. "lemniskatus" – "lentlə bəzədilmiş").

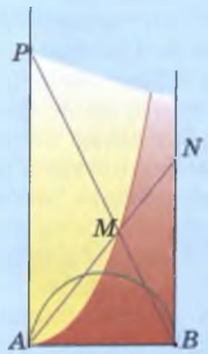
DİOKLES SİSSOİDİ

Diokles sissoidi (yunan sözü "kissoides" – "sarmaşığabənzər") – kubun ikiqat artırılması üçün düşünülmüş görkəmli əyrilərdən biridir. Onu b.e. ə. II əsrin ikinci yarısında yunan riyaziyyatçısı Diokles kəşf etmişdir. Şəkil 1-də *CB* düz xətti *AB* diametrinə perpendikulyardır. *AC* şüası üzərində olan *M* nöqtəsi elə seçilir ki, *AM=DC* şərti ödənsin və bu nöqtə sissoidanın üzərində olsun. Əyrinin dairə daxilində yerləşən hissəsinin çevrə qövsü ilə birlikdə əmələ gətirdiyi fiqur sarmaşığın yarpağını xatırladır (şək.2).

Şəkil 3-də $AP \| BN$, $AB = a$, $AP = 2a$, M nöqtəsi sissoida üzərindədir. Bu halda $BN = a\sqrt{2}$ və beləliklə, *BN* parçası kubu ikiqat artırmaq üçün axtarılan parçadır.



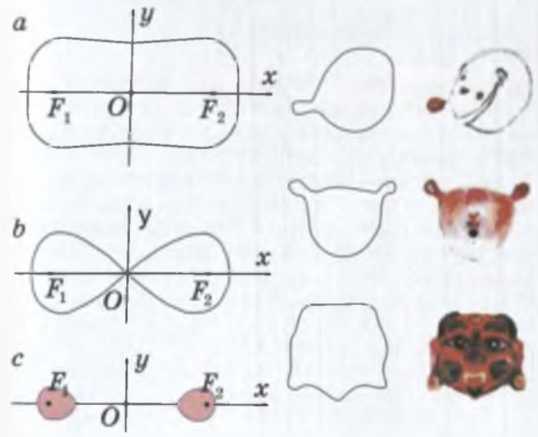
Şəkil 1.



Şəkil 3.



Şəkil 2.



Şəkil 17.

Şəkil 18.

Bernulli lemniskatı dəmiryol mühəndislərinə yaxşı tanışdır. O, dəmiryol xəttinin düzxətli və dəyirmi formada olan hissələri arasında keçid xətti rolunu oynayır, dəyirmiliyin hamarlığını təmin edir. Bunsuz qatara təsir edən mərkəzəqaçma qüvvəsi kəskin şəkildə, sıçrayışla artıb, sərnişinlərə və dəmiryolçulara narahatçılıq yaradardı.

Müstəvi üzərində bir neçə $F_1, F_2, \ldots, F_n$ nöqtələri götürək və M nöqtəsini elə hərəkət etməyə məcbur edək ki, bu nöqtədən, götürülmüş nöqtələrin hər birinə qədər olan məsafələrin hasili sabit olsun. O zaman M nöqtəsi n fokuslu lemniskat adlandırılan əyri cızacaq.

Fokusların sayından və onların müstəvidə yerləşməsindən, M nöqtəsindən fokuslara qədər məsafələrin hasilinin neçəyə bərabər olmasından asılı olaraq, müxtəlif qəribə konturlu fiqurlar əmələ gəlir (şəkil 18). Bu əyri xəttlər öz adlarında "lemniskat" sözünü saxlamalarına, baxmayaraq onları heç cür bant adlandırmaq olmaz!

SİKLOİDA

"Sirk", "pərgar" və "motosikl" sözləri arasında hansı oxşar əlamət var? Məlum olur ki, onların kökündə "dairə", "çevrə" mənası verən "kiklos" sözü durur. "Sikloida" sözü də təsadüfi olmayaraq bu sıraya aiddir və bu təsadüfi deyil. Çevrənin nöqtəsi hərəkətsiz düz xətt üzrə sürüşməsiz diyirlənərək təsvir etdiyi bir əyrini sikloida adlandırırlar (şəkil 19). Bu əyri xəttə, onu ilk dəfə aşkar edən Qalileo Qaliley ad verib. Biri sikloidaya görə, başqası isə çevrəyə görə kəsilən eyni qalınlıqda olan iki metal lövhəni müqayisə edərkən, Qaliley aşkar etdi ki, sikloidanın seqmentinin sahəsi uyğun olan dairənin sahəsindən üç dəfə çoxdur.

Qalileyin sınaqları sikloidanın ciddi riyazi araşdırmaları üçün təkan verdi. Əvvəlcə onun şagirdi Torriçelli, sonra isə Roberval, Dekart və Ferma təkcə onun aşkar etdiyi asılılığı əsaslandırmaqla bərabər sikloidanın daha bir neçə xassəsini müəyyənləşdirdilər. Sikloidanın tərifinin sadəliyi və incəliyi *XVII-XVIII* əsrlərin çoxlu sayda riyaziyyatçılarını maraqlandırırdı. Sikloida ilə Paskal, Leybnis, Hyügens, Daniel Bernulli məşğul olublar. Həm də əvvəllər sikloida özü araşdırmalar obyekti idi, sonra isə onun üzərində yeni yaranan riyazi analizin güclü üsulları yoxlanılırdı.

KVADRATRİSA

Eramızdan əvvəl *V* əsrdə Elida şəhərindən olan qədim yunan filosofu Hippiy bucağın triseksiyası ilə bağlı məsələnin həlli üçün incə bir üsul təklif etdi ("Qədim dövrün üç məşhur məsələsi" məqaləsinə bax). O təqribən belə düşünürdü. İxtiyari *AB* parçasını çox asanlıqla üç hissəyə bölmək olar. Bu klassik üsul Falesin teoreminə əsaslanırdı. Bu teoremə əsasən, bucağın bir tərəfindən bərabər parçaların ucundan keçirilmiş paralel düz xətlər onun digər tərəfindən də eyni ölçülü parçalar ayırır (şək.1), yəni, əgər $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3$ və $M_1N_1 \| M_2N_2 \| M_3B_3$, $AN_1 = N_1N_2 = N_2B$.

Əgər hər hansı bir üsulla bucağın və parçanın bərabər hissələrə bölünməsi prosesini əlaqələndirmək olsaydı, bucağın triseksiya məsələsi həll edilmiş olardı. Bun məqsədlə Hippiy qəribə bir əyri kəşf etdi. Müstəvinin *M* nöqtəsini eyni zamanda, iki eyni hərəkəti etməyə məcbur edək. Tutaq ki, *OP* radiusu (şək. 2) bərabər sürətdə *O* mərkəzinin ətrafında fırlanır və eyni zamanda *l* düz xətti də bərabər şəkildə *A* nöqtəsindən *O* nöqtəsinə doğru hərəkət etdirsin. Bu zaman onların kəsişdiyi *M* nöqtəsi axtarılan əyrini təsvir edir. Bu cür hərəkət zamanı *Op* radiusunun dönməsinin bərabər bucaqlarına, *l* düz xəttinin qət etdiyi yolun bərabər hissələri uyğun gəldiyi və əksinə, olduğu üçün onda şək. 3-də göstərilən $N_1N_2 = N_2N_3 = N_3A$ parçalara $\angle M_1OM_2 = \angle M_2OM_3 = \angle M_3OA$ bərabər bucaqları uyğun gəlir. Burada M_1, M_2, M_3 Hippiy əyrisinin nöqtələridir. Beləliklə, *AOM* bucağının triseksiyası tapılmış oldu.

Hippinin əyrisi ilə onun şagirdi Dinostrat maraqlanmağa başladı. Dinostrat yazırdı: "Tutaq ki, radiusun və düz xəttin hərəkəti elədir ki, l düz xətti O nöqtəsinə çatan anda, radius bu vaxta kimi dairənin dörddə birini cızır (şəkil 4). Əyrinin M nöqtəsi O mərkəz nöqtəsindən hansı məsafədə olacaq?"

Bu suala dərhal cavab vermək elə də asan deyil. Hippiy-Dinostrat əyrisinin tənliyini müasir koordinatlarda

$$y = x\,ctg\frac{\pi x}{2a}$$

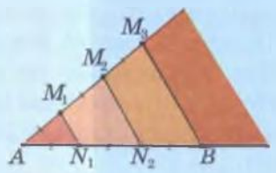
şəklində yazılır: burada $a = OA$ parçasının uzunluğudur. Əgər x sıfra yaxınlaşarsa, onda tənliyin sağ tərəfindəki ikinci vuruq – $ctg(\pi x/2a)$ – sonsuzluğa yaxınlaşır! Buna baxmarayaq hasilin sıfra bərabər olmayan limiti var. Bu limiti tapaq.

Müasir riyazi analizin limitlər nəzəriyyəsi bölməsində isbat olunur ki, əgər x sıfıra yaxınlaşırsa onda $(\sin x)/x$ 1-ə yaxınlaşır. Belə halda,

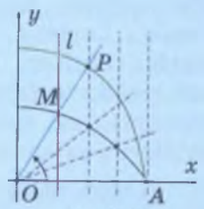
$$x\,ctg\frac{\pi x}{2a} = \frac{\pi x}{2a}\cdot\frac{\cos\frac{\pi x}{2a}}{\sin\frac{\pi x}{2a}}\cdot\frac{2a}{\pi}$$

ifadəsi $2a/\pi$-yə yaxınlaşır. Dinostrat qeyd etdi ki, əgər $2a/\pi$ uzunluğunda parça olarsaü, onda π uzunluğunda parçanı qurmaq və dairənin kvadraturası haqqında məşhur məsələni həll etmək artıq çətin deyil.

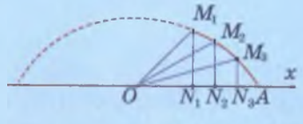
Leybnis Hippiy-Dinostrat əyrisini kvadratissa adlandırmağı təklif etdi. Çünki bu əyri dairənin kvadraturası haqqında məsələni həll etməyə kömək etdi. Kvadratissa transsendent əyrilər sinfinə aiddir. Onlar elə bir xətlərdir ki, düzbucaqlı koordinat sistemində onların tənliklərini koordinatlardan asılı çoxhədlilər kimi yazmaq mümkün deyil.



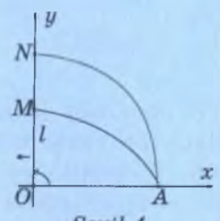
Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

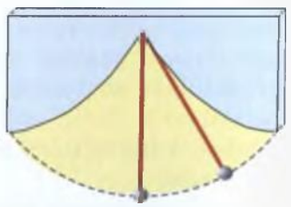


Şəkil 4.

Sıkloidanı qabarıqlığı aşağı olmaq üçün çevirək və təsəvvür edək ki, ağır bir zərrəcik onun üstündə yuvarlanır. Zərrəciyin sıkloidanın hansı bir nöqtəsindən hərəkətə başlamasından asılı olmayaraq, eyni vaxtda aşağı yuvarlanacaq. Sıkloidanın çox gözəl bir izoxronluq xassəsi (yunan "izos" – "bərabər" və "xronos" – vaxt) Hyügensi sıkloidanı saat kəfkirində istifadə etmək fikrinə gətirdi. Sıkloida şəkilli nov üzrə yuvarlanan kürəcik sürtünməyə çox miqdarda enerji sərf edir. Buna görə Hyügens belə bir təklif irəli sürdü: kürəciyi sap ilə sallamaq və onun hərəkət sərbəstliyini qırağı sıkloida formasında olan taxta ilə məhdudlaşdırmaq (şəkil 20). Məlum oldu ki, belə halda kürəciyin hərəkəti də sıkloida üzrə baş verir və beləliklə, şaquldan uzaqlaşması onun rəqs etmə dövrünə təsir etmir.

Bu əyri xəttin daha bir çox gözəl xassəsini 1696-ci ildə Daniel Bernulli aşkar etdi. Sürtünməni nəzərə almamaq şərti ilə ağırlığ qüvvəsinin təsiri altında hissəcik bir verilmiş nöqtədən başqasına ən az vaxta diyirlənir. Sıkloidanın braxistoxronluq ("braxistos" – ən qısa, "xronos" – zaman) xassəsini isbat etmək heç də asan deyil və elə bu xassə


Şəkil 19.


Şəkil 20.

riyaziyyatda yeni bir istiqamətin – variasiya hesabının əsasını qoydu.

ÇEVRƏNİN "PİRUETLƏRİ"

Bir çevrənin daxilində sürüşmədən diyirlənən başqa bir çevrənin nöqtəsinin trayektoriyası nə olacaq? Nə qədər də təəcüblü olmasa da, o düz xəttin parçası ola bilər! Əgər daxili çevrənin radiusu xarici çevrənin radiusundan iki dəfə kiçikdirsə, onda nöqtə

DƏMİR YOLUNU NECƏ DƏYİRMİLƏŞDİRMƏLİ?

Dəmir yolu ilə ekspess sürətlə şütüyür. Onun sərnişinləri heç bilmirlər ki, onların rahatlığını təkcə maşinistlər və bələdçilər yox, həmçinin riyaziyyatçılar da təmin edirlər. Onların hesablamalarının köməyi ilə qatar hamar və rahat dönür.

Hələ ilk dəmir yollarının çəkilişi zamanı layihəçilər belə bir problemə rast gəldilər. Çevrənin qövsü üzrə hərəkəti zamanı qatar mərkəzəqaçma qüvvəsinin təsirini hiss edir, düz xətt üzrə hərəkət edəndə belə bir hal ümumiyyətlə qeyd olunmur. Əgər dəmir yol düz xətdən dərhal dəyirmi xəttə keçirsə, onda təkcə sərnişinlər yox, həmçinin vaqonun bütün mexaniki hissələri də – qaykalar, boltlar, şuruplar da – çox güclü bir təkan hiss edəcəklər. Arzuolunmayan silkələnmədən qaçmaq üçün dəmir yolun düz və dəyirmi hissələrinin arasında əyriliyin hamar dəyişikliyini keçid xətləri adlanan xətlərlə düzəldirlər.

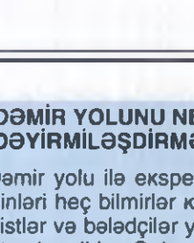
Xəttin hər-hansı bir nöqtəsində əyriliyi necə müəyyən edirlər? Bunun üçün ölçü kimi əyriliyin radiusu yəni bu nöqtədə xəttə ən sıx yapışan çevrənin radiusu xidmət göstərir (belə bir çevrə təmasda olan çevrə adlandırılır). Təmasda olan çevrənin radiusu nə qədər böyük olsa, xəttin əyriliyi o qədər az olar (şəkil 1). Xəttin əyriliyi sıfra qədər azalanda, o düz xəttə çevrilir və təmasda olan çevrənin radiusu isə onun hər bir nöqtəsində sonsuzluğa qədər artır. Hətta belə də demək olar ki, bu sonsuz böyük radiusa malik olan çevrənin qövsüdür.

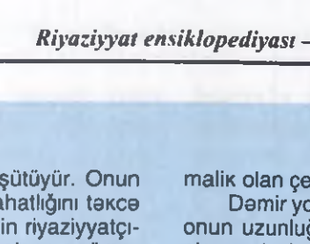
Dəmir yolunun keçid xəttini elə düzəltmək lazımdır ki, onun uzunluğu əyrilik qövsünün uzunluğu ilə mütənasib olaraq dəyişsin. Bunun üçün uyğun olan riyazi əyri xətti (şəkil 2) klofoida (yunan "klofo" – "əyirmək") və ya Kornu spiralı – onu 1874-cü ildə işığın difraksiyası üçün istifadə etmiş Mari Alfons Kornü adlı fizikin şərəfinə adlandırmışlar. Dəmiryolçular klofoidanı radioidal spiral kimi tanıyırlar. O, $R = k/S$ tənliyi ilə təsvir olunur; burada R – qatarın S məsafəsi qədər keçdiyi əyrinin müvafiq nöqtəsi ilə təmasda olan çevrənin radiusudur; κ – sabitdir.

Elə də böyük olmayan radiusun dəyirmilənməsi üçün tez-tez Bernulli lemniskatasından istifadə edilir. Polyar koordinatlarda əyriliyin radiusu təqribi olaraq $R = k/p$ bərabərliyi ilə ifadə olunur; harada p – nöqtənin polyar radiusudur.

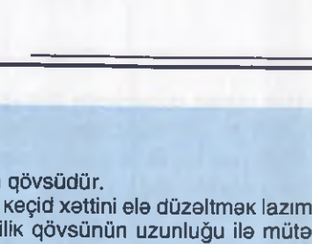
Texniki hesablamalar zamanı keçid əyri xətti kimi $y = \kappa x^3$ parabolasından istifadə etmək daha rahatdır (şəkil 3). Koordinat başlanğıcının ətrafında onun əyrilik radiusu $R = k/x$-dir.

... Maşinist qatarı düz sürur, və döngələr haqqında siz yalnız vaqonun pəncərəsindən qatarın axırıncı vaqonlarını müşahidə edərkən məlumat alırsınız. Gözlənilmədən Kornu spiralı, Bernulli lemniskatası və kub parabolası haqqında hekayələr xatırlanır. Bu əyrilər sizin ekspressinizin yolunu belə rahat və hamar edirlər.


Şəkil 1.

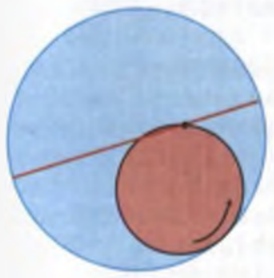


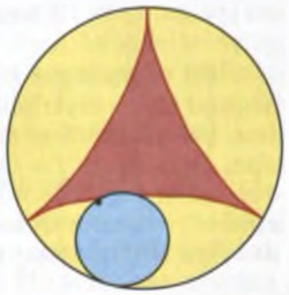
Şəkil 2.



Şəkil 3.

ikinci çevrənin diametri boyunca hərəkət edəcək (şəkil 21). Bu gözlənilməyən faktı Nikolay Kopernik aşkar edib və nəzəri


Şəkil 21.


Şəkil 22.

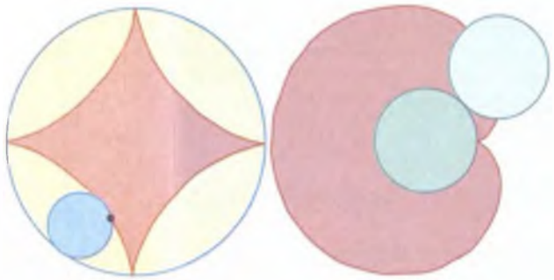
əsaslandırıb. Əgər diyirlənən çevrənin radiusu dayaq olan çevrənin radiusundan üç dəfə kiçikdirsə, onda nöqtə deltoidanı və ya Şteyner əyrisini cızır. Bunun birinci adı, yunan hərfi Δ (delta) ilə bağlıdır (şək. 22), ikinci adı isə bu əyrini araşdıran isveçrə həndəsə alimi Yakob Şteynerin şərəfinə verilmişdir.

Diyirlənən çevrənin radiusunu xaricinin dörddə bir hissəsinə qədər azaldaq. O zaman zahirən "stilləşdirilmiş" ulduz şəkilini xatırladan gözəl bir astroida alınır (şək. 23). Baxmayaraq ki astroida öz adını *XIX* əsrdə alıb, o, hələ 1715-ci ildə Leybnisə də məlum idi. Məqalənin əvvəlində biz ellips

qövsünü cızan piləkənin divarından sürüşən pişik balası ilə bağlı bir nümunə gətirmişdik. Pilləkənin öz aralıq vəziyyəti astroida qövsünü əmələ gətirir.

Bir çevrənin daxilində diyirlənən digər çevrənin nöqtəsinin əmələ gətirdiyi bütün əyrilər hiposikloid ailəsinə aiddir (yunan. "hipo" – "altında", "altda" və "kikloides" – "dairəvi"). Dayaq dairəsinin xarici üzü ilə yuvarlanan çevrənin oxşar "piruetlərini" gözdən keçirərək, biz onun kimi çox çeşidli olan episikloid aləminə keçərik (yunan "epi" – "üstünə", "üstündə").

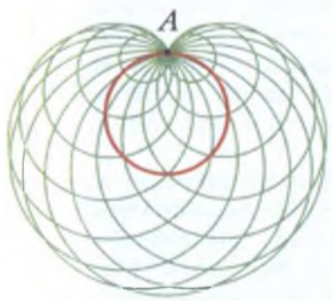
Bərabər radiuslu hərəkətsiz çevrənin xarici üzü boyunca diyirlənən çevrənin hər hansı nöqtəsini müşahidə edək. Bu nöqtənin trayektoriyası kardioidadır (şəkil 24). Bu əyri xəttin adını verən riyaziyyatçıların fikrincə belə əyri uzaqdan ürəyə oxşayır (yunan "kardia" – ürək). Kardioidanın başqa



Şəkil 23.

Şəkil 24.

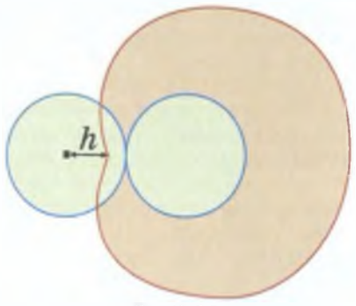
cızılma üsulu isə aşağıdakı kimidir. Dayaq çevrəsində A nöqtəsini qeyd edək. Dayaq çevrəsində götürülmüş M nöqtəsini mərkəz qəbul edərək, MA radiusu ilə başqa bir çevrə çəkək. Dayaq çevrəsi üzrə bərabər paylanmış çoxlu sayda M nöqtələri üçün bu qur-



Şəkil 25.

manı təkrar edək, nəticədə görərik ki, bütün MA radiuslu çevrələrin cızdığı xətt yenə də kardioidadır (şəkil 25).

Bəs nə üçün əyri xətti təsvir edən nöqtəni çevrənin üzərində götürməliyik? Gəlin bu nöqtəni mərkəzdən bu və ya digər tərəfə sürüşdürüb, onu diyirlənən çevrə ilə sərt bağlayaq (şəkil 26). Biz Paskal ilbizi adlı bir əyri xətt alacağıq. Bu xətt onu ilk dəfə araşdıran məşhur Blez Paskalın atası Etyen Paskalın şərəfinə adlandırılmışdır. Əgər profil



Şəkil 26.

boyunca sürüşən çubuğun harmonik rəqs etməsi tələb olunursa (şəkil 27), o zaman Paskal ilbizi ekssentrikin profilini cızmaq üçün istifadə edilir. Arximed spiralına (bax "Spirallar") görə cızılan ekssentriklərdən fərqli olaraq, belə mexanizmlər çubuğun irəli-geri hərəkətlərinin səlisliyi ilə fərqlənir; adətən onları konstruktorlar üstün tuturlar.



Şəkil 27.

Bu və ya digər maraqlı əyri xətt cızan nöqtəni təkcə diyirlənən çevrənin daxilində yox, həmçinin onun xaricində də götürmək olar. Belə nöqtə ilə cızılan bütün müxtəlif düz xətlər troxoida adlanırlar (yunan. "troxoides" – "çarxa oxşayan"). Çevrənin harada diyirləndiyindən asılı olaraq – dayaq

RİYAZİ ÇİÇƏKLİK

Bir dəfə italyan həndəsə alimi Qvido Qrandi (1671-1742) qızılgülləri yaratdı. Lakin bu güllər hamıya məlum olan gözəl güllər deyildi. Qvido Qrandinin qızılgülləri öz düzgün və səlis xəttləri ilə göz oxşayırdı, amma onların görünüşü təbiətin şıltaqlığı deyildi. Onlar artıq xüsusi seçilmiş riyazi asılılıqlarla qabaqcadan müəyyən edilirdilər. Qvido Qrandinin qızılgüllər ailəsinin polyar koordinatlarla tənliyi belə ifadə olunur:

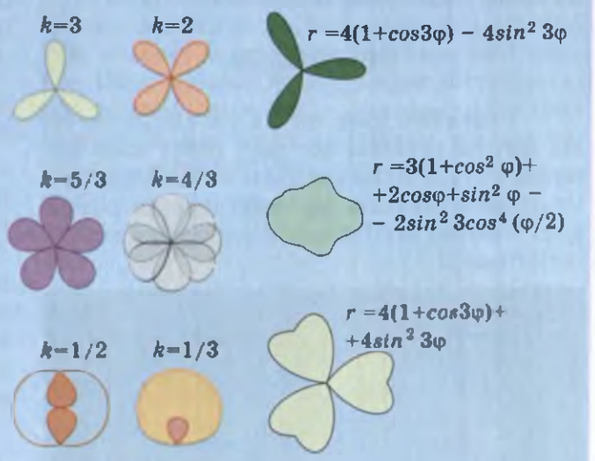
$$r = a\sin k\varphi$$

Burada a və r – sabit ədədlərdir. 1-ci şəkildə bu əyrilər k əmsalının müxtəlif qiymətləri ilə təsvir olunublar.

Qrandinin nəticələrinə heyran olmuş *XIX* əsrin alman həndəsə alimi Xabenixt də riyazi "bitkiçilik"lə məşğul olmaq qərarına gəldi. O yarpağın və ya gül ləçəyinin abrisini (konturu) polyar koordinatlarla belə ifadə etdi:

$$r = f(\varphi)$$

Burada $f(\varphi)$ hər bir ayrı bitki üçün triqonometrik funksiyaların kombinasiyasından ibarətdir, Xabenixt çoxsaylı sınaqlar vasitəsilə çox gözəl eksponatlar "yetişdirdi" (şək.2). Bizim günlərdə buna oxşar sınaqları fərdi kompyuterdə yerinə yetirmək daha rahatdır.



Şəkil 1. Şəkil 2.

çevrəsinin daxilində və ya xaricində, bütün troxoidalar daxili – hipotroxoidalar və xarici – epitroxoidalara bölünürlər (şəkil 28).



Hipotroxoidalar
Epitroxoidalar

Şəkil 28.

Fərdi kompyuterdə bu və ya onlara oxşar fiqurları təsvir etmək istəyənlər üçün, biz bu əyrilərin ümumi parametrik tənliklərini veririk:

$$x = (R + mR)\cos mt - h\cos(t + mt),$$

$$y = (R + mR)\sin mt - h\sin(t + mt)$$

Burada R – dayaq çevrəsinin radiusu; $m=r/R$ – hərəkət edən çevrənin r radiusunun dayaq çevrəsinin R radiusuna nisbəti; h – hərəkət edən çevrənin mərkəzindən əyri xətti təsvir edən nöqtəyə kimi məsafə (h r-dən həm kiçik, həm də böyük ola bilər); t əmsalı isə zamanı modelləşdirir.

ZƏNCİRVARİ XƏTT

Asılmış məftillər, troslar, şənlik işıqları hansı xətti əmələ gətirirlər? Qaliley "Söhbətlər və riyazi isbatlar..." (1638) kitabında parabolanı divara vurulmuş iki mıx və onlardan sallanan nazik zəncirin vasitəsilə qurmağı təklif etmişdi. Amma o səhv edirdi.



Şəkil 29.

1690-cı ildə, Qalileyin kitabının çıxmasından yarım əsr sonra Yakob Bernulli isbat etdi ki, sərbəst sallanan zəncirin forması (şək. 29) belə bir tənlik ilə ifadə olunur:

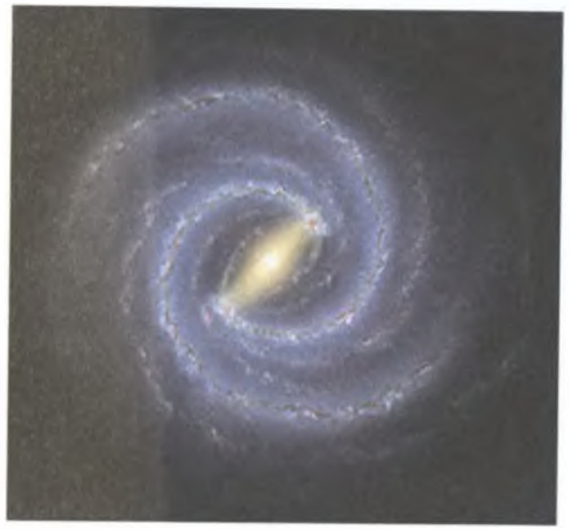
$$y = a\,\frac{e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}}{2}$$

Beləliklə o parabola deyil. Yakob Bernulli öz kəşfini sirr kimi saxlayırdı: qoy başqaları o etdiklərini etsinlər. Və düz bir il sonra düzgün həlli onun kiçik qardaşı Io-

hann, sonra isə Leybnis və Hyügens nəşr etdirdilər. Hyügens belə əyri xəttlər üçün ad da təklif etdi – zəncirvari xətt.

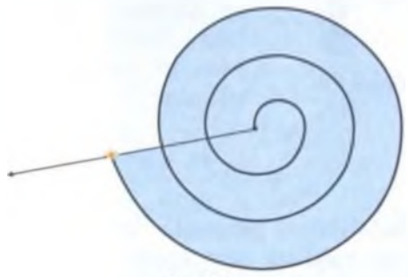
SPİRALLAR

Vannadan axan su ilə yaranmış zərərsiz qıf; öz yolunda hər şeyi məhv edən qasırğa; duman kimi görünən ulduz topasının və qalaktikalarının əzəmətli kosmik burulğanı – bütün bunlar spiral formasına malikdirlər (şəkil 1).



Şəkil 1.

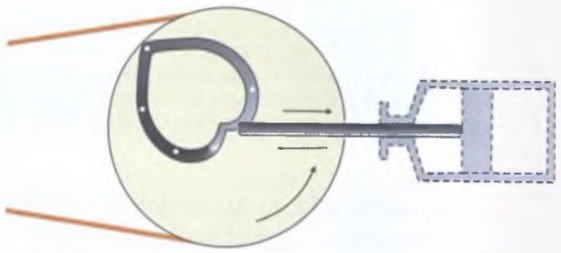
Arximed tərəfindən təsvir edilmiş birinci spirallardan birini bizə atəşböcəyi nümayiş edəcək. Onu saatın saniyə əqrəbi üzrə səyahətə göndərək. Və əqrəbin dairə üzrə bərabər sürətli hərəkətinə diqqət etməmiş, fərz edək ki, o dəyişilməyən sürətlə yerini dəyişdirəcək. Əgər sonsuz uzun bir əqrəbi təsəvvür etsək, onda böcək bizə Arximed spiralını işıqlandıracaq (şəkil 2).



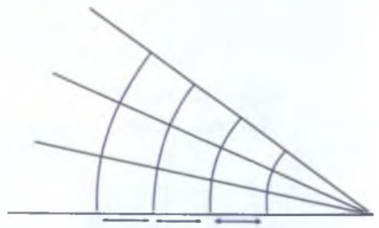
Şəkil 2.

Start nöqtəsindən əqrəb ilə atəşböcəyinin keçdiyi r məsafəsi və bu əqrəbin yerini dəyişdirdiyi bucaq φ zamanla və deməli birbirinə də mütənasibdir: $r = k\varphi$, burada κ – mütənasiblik əmsalıdır. Beləliklə, spiralın iki qonşu burumları arasında d məsafəsi sabitdir: $d = k(\varphi + 2\pi) - k\varphi = 2k\pi$.

Arximed spiralının başqa xüsusiyyəti isə – radius boyunca məsafələrin və bucaqların artımının mütənasibliyidir. 3-cü şəkildə diskin bərabər ölçülü fırlanmasını porşenin bərabər ölçülü hərəkətinə növbə ilə bu və ya digər tərəfə çevrian yumruq mexanizminin sxemi göstərilib. Porşenin sürgü qolunun ucu Arximed spiralının iki qövsünü təşkil edən şayba boyunca sürüşür.



Şəkil 3.



Şəkil 4.

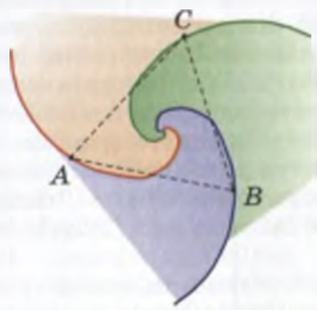


Şəkil 5.

Bu xassəni Arximed qədim dövrün ən məşhur məsələlərindən birinin – bucağın trisektsiyası haqqında məsələ – həllində istifadə etməyi təklif etdi. Radiusda üç bərabər

kəsiyi yaradan çevrənin dörd qövsü, Arximed spiralı ilə kəsişmə nöqtələrində bucağı üç bərabər hissəyə bölürlər (şəkil 4).

Arximed spiralın birinci burumu ilə məhdudlaşmış fiqurun səthinin hesablanması (5-ci şəkildə mavi rəngli hissə) haqqında və spiralın hər bir nöqtəsinə toxunanın qurulması haqqında çətin məsələləri həll etdi. Arximedin aldığı nəticələrdən belə çıxırdı ki, spiralın birinci burumunu tamamlayan A nöqtəsində toxunan keçirtsək və O nöqtəsində OA kəsiyinə OB perpendikulyarını çəksək (B – toxunanın və perpendikulyarının kəsişmə nöqtəsidir), onda OB kəsiyin uzunluğu OA radiuslu çevrənin uzunluğuna bərabər olacaq. Spiralın bu çox gözəl xüsusiyyəti həmçinin bizə dairənin kvadraturası haqqında məsələni də həll etməyə imkan verir. Bunu Arximed özü də qeyd etmişdi.



Şəkil 6.

İndi isə daha bir maraqlı spiralı gözdən keçirək. Bunu artıq üç atəşböcəyi bizə təsvir edəcəklər. Tutaq ki, bir-birindən bərabər məsafədə, yəni, bərabərtərəfli üçbucağın təpələrində, yerləşən üç atəşböcəyi A,B və C bir biri ilə tanış olmaq istədilər. A düz B tərəfinə, B – C-yə, C isə – A tərəfinə yollandı. Dəyişilməyən sürət ilə səyahət edən atəşböcəkləri daim əsas üçbucağa oxşar olan düzgün üçbucağın təpələrində yerləşəcəklər. Hər bir atəşböcəyi loqarifmik spiralın qövsünü çəkəcək (şəkil 6).

Loqarifmik spiral belə bir tənlik ilə verilir:

$$r = a^{\varphi}.$$

Burada, artıq Arximed spiralındakı kimi, r məsafəsi yox, onun loqarifmi $(\log_a r)$ dönmə bucağına mütənasib olaraq, artır. Loqarifmik spiralın burumları ətrafında fırlandığı nöqtə xüsusidir: onun ətrafında sonsuz sayda burumlar yığılır. Bu nöqtə polyus adlandırılır.

Loqarifmik spiral haqqında ilk dəfə fransız riyaziyyatçı Rene Dekartın 1638-ci ildə yazdığı məktubların birində rast gəlinir. Onu, məsələn, balıqqulağın burumlarında görmək olar. Günəbaxanın səbətində tumlar da həmçinin loqarifmik spirala yaxın olan əyri xəttlər üzrə yerləşirlər.



Şəkil 7.

Loqarifmik spiralın maraqlı xüsusiyyətlərindən biri də ondadır ki, onun polyusundan çıxan istənilən şüa spiralın hər hansı burumu ilə eyni dərəcəli bucaq altında kəsişir (şəkil 7). Kəsici maşınlarda da bu xüsisiyyət istifadə olunur. Saman doğrayan maşının fırlanan bıçaqları loqarifmik spiral üzrə çəkilən profilə malikdir. Belə mexanizmin kəsmə bucağı bütün hərəkət edən bıçağın haşiyəsi üzrə dəyişilməzdir (şəkil 8).



Şəkil 8.

Məlum oldu ki, hidroelektrostansiyada turbin təkərlərinin ağızlarına su axınını çatdıran borunu da həmçinin loqarifmik spiral kimi burmaq lazımdır. O zaman hərəkət edən suyun enerji itkiləri minimal olacaq.

Loqarifmik spiral – "möhkəm xarakterli" əyri xətdir. O başqa əyri xətlərə təsir edən dəyişikliklər zamanı öz təbiətini dəyişmir. Bu spiralı polyusa nisbətdə sıxmaq və ya çəkib uzatmaq – bu spiralı müəyyən bucaq qədər çevirmək deməkdir. Əksinə, əgər spiralı bu və ya digər tərəfə polyus ətrafı fırlatsaq, onda biz zahirən uzanma və ya sıxılmanı görə bilərik.

Fərz edək ki, loqarifmik spiralın polyusundan çıxan işıq şüaları əyridən adi güzgüdəki kimi əks olunur. Əgər bütün əks etdirilmiş şüaları müşahidə etsək, məlum olar ki, onlar hansısa əyri xəttin ətrafında dövrə vururlar və o elə loqarifmik spiraldır.

Elə bu spiral loqarifmik spiralın hər nöqtəsinin ətrafında keçirilmiş normallar (toxunana perpendikulyarlar şəklində) şəklində təqdim olunur. Polyusdan əyri xəttin toxunanına keçirilmiş perpendikulyarların oturacaqlarının həndəsi yeri yenə də əsas spiralın formasına malikdir.

Loqarifmik spiralın xüsusiyyətləri isveçrəli riyaziyyatçı Yakob Bernulliyə elə təsir edib ki, o onları qəbirdaşının üstündə belə bir latın yazısı – "Eadem mutat resurgo" – "Dəyişilərək əvvəlki kimi dirçəlirəm" – ilə birlikdə həkk etməyi vəsiyyət edib.

TRİQONOMETRİYA

"Triqonometriya" termini hərfi tərcümədə "üçbucaqların ölçülməsi" deməkdir. Onu 1595-ci ildə alman ilahiyyatçısı və riyaziyyatçısı, triqonometriya və triqonometrik cədvəllər üzrə dərsliyin müəllifi Varfolomey Pitisk daxil edib. Triqonometriya – triqonometrik funksiyaları (sinus, kosinus, tangens, kotangens, sekans, kosekans) və üçbucaqların bucaq və tərəfləri arasında asılılıqları tədqiq edən riyaziyyatın bölməsinə deyilir. *XVI* əsrin sonlarına artıq bütün bu funksiyalar məlum idi. Amma triqonometrik funksiyalar anlayışı və onların işarələnməsi o vaxt hələ mövcud deyildi. Onların yerinə müəyyən radiuslu çevrələrdə hansısa vətərlərin, toxunanların və kəsənlərin uzunluğundan danışırdılar.

Triqonometriyada münasibətlərin üç növünü seçirlər: 1) triqonometrik funksiyaların özlərinin arasında; 2) müstəvi üçbucağının elementləri arasında (müstəvidə triqonometriya); 3) sferik üçbucağın elementləri arasında, yəni, sferada onun mərkəzindən keçən üç müstəvinin kəsişməsindən alınan fiqurdur (sferik triqonometriya).

Triqonometriya ən çətin, sferik hissəsindən başladı. O ilk əvvəl praktiki ehtiyaclara görə əmələ gəldi. Qədim insanlar göy cisimlərinin hərəkətlərini müşahidə edirdilər. Təqvimi düz aparmaq üçün, məhsulun əkin və yığma zamanlarını, dini bayramların tarixlərini düzgün müəyyən etmək üçün hesablamaların nəticələrini alimlər araşdırırdılar. Ulduzlara görə gəminin dənizdə yerləşməsini və ya səhrada karvanın olduğu yerini müəyyənləşdirirdilər. Ulduzlu səmanı həmçinin astroloqlar da müşahidə edirdilər.

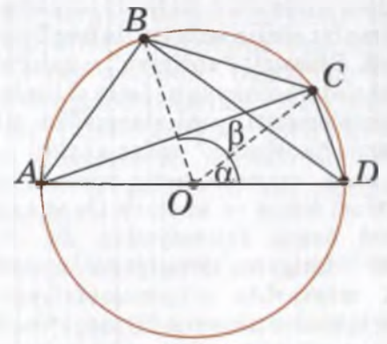
Təbii ki, cisimlərin səmada yerləşməsi ilə bağlı olan bütün hesablamaları – dolayı hesablamalardır. Birbaşa hesablamaları Yerin səthində həyata keçirirdilər. Amma burada da, həmçinin bir neçə məntəqə arasında məsafəni dəqiqliklə müəyyən etmək olmurdu. Və o zaman yenə də dolayı hesablamalardan istifadə edirdilər. Məsələn, ağacın hündürlüyünü və dənizdə yerləşən adanın böyüklüyünü müəyyən etmək üçün hansısa məlum olan hündürlük ilə payanın kölgəsini onun kölgəsi ilə müqayisə edərək hesablayırdılar. Belə tipli məsələlər bir elementi başqa elementlər ilə ifadə edilən üçbucaqların təhlilinə gətirilirdi. Bununla elə triqonometriya məşğul olur. Səmada ulduz və planetlər nöqtəyə oxşar olduğuna görə qədim dövrlərdə əvvəlcə sferik triqonometriya inkişaf etməyə başladı. Onu astronomiyanın bölməsi sayırdılar.

Triqonometriya haqqında ilk natamam məlumatlar Qədim Babilin oyma lövhəciklərində qalıblar. İkiçayarasının astronomları və astroloqları Ayın və Günəşin vəziyyətlərini müəyyən etməyi öyrəndilər və bu sahədə böyük nailiyyətlərə müvəffəq oldular. Elə onlardan bizə altmışlıq hesablama sisteminə əsaslanan bucaqların dərəcə, dəqiqə və saniyələrdə ölçülməsi miras qaldı.

Amma bu sahədə sözün əsl mənasında vacib nailliyyətlər qədim yunan alimlərinə məxsusdur. E.ə. *II* əsirdə Nikeyadan Hipparx adlı astronom üçbucağın elementlərinin arasında münasibətləri müəyyən etmək üçün cədvəl tərtib edib. Belə cədvəllər ona görə lazımdılar ki, triqonometrik funksiyaların qiymətlərini hesab əməllərinin köməyi

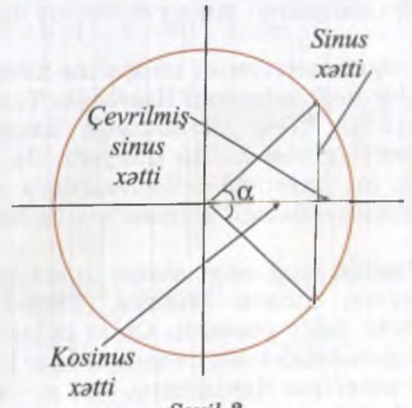
ilə arqumentlərə görə hesablamaq olmur. Triqonometrik funksiyaları əvvəlcədən hesablamaq və cədvəl şəklində saxlamaq lazım olurdu. Hipparx 7,5°-ə bölünən 0°-dən 180°-yə qədər bucaqlara cavab verən verilmiş radius ilə dairənin bütün vətərlərinin uzunluqlarını hesabladı. Bu faktiki olaraq sinuslar cədvəli idi. Hipparxın elmi əsərləri bizə qədər qalmamış, amma onlardan çoxlu sayda məlumatlar "Almaqestə" (*II* əsr) daxil edilmişdir. "Almaqest" – məşhur yunan riyaziyyatçısı və astronomu Klavdi Ptolemeyin 13 fəsilli məşhur elmi əsəridir. Müəllif "Almaqestdə" 60 vahidlik radiusa malik olan çevrənin 0,5° addım ilə 1/3600-ə qədər dəqiqliklə hesablanan bütün vətərlərin uzunluqlarını göstərir və cədvəlin necə tərtib olunduğunu göstərir. Ptolemeyin əsəri astronomlar üçün triqonometriyaya giriş kimi bir neçə əsr xidmət etmişdir.

Qədim dövrün alimlərinin triqonometrik cədvəlləri necə tərtib etməklərini başa düşmək üçün biz Ptolemeyin üsulu ilə tanış olaq. Bu üşul çevrənin daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının diaqonallarının hasilinin onun qarşı tərəflərinin hasilləri cəminə bərabərliyinə əsaslanır (bax "Çoxbucaqlılar" məqaləsinə). Daxilə çəkilmiş *ABCD* dördbucaqlını gözdən keçirək. Tutaq ki, *AD* – çevrənin diametridir, *O* nöqtəsi isə – onun mərkəzidir (şəkil 1). Fərz edək ki, $DOC = \alpha$ və $DOB = \beta$ bucaqlarının gərdiyi vətərləri hesablaya bilirik, yəni *CD* tərəfini və *BD* diaqonalını. O zaman, Pifaqor teoreminə görə *ADB* və *ADC* düzbucaqlı üçbucaqların *AB* və *AC*-ni tapmaq olaq, sonra isə Ptolemey teoremasına uyğun olaraq $BC = (AC \cdot BD - AB \times CD)/AD$, yəni $BOC = \beta - \alpha$ bucağını gərən vətəri tapmaq olar. 90,60 və 45°-li bucaqlara cavab verən bəzi vətərləri, məsələn, kvadrat, düzgün altıbucaqlının və səkkizbucaqlıların tərəflərini asanlıqla müəyyən etmək olar; 72° dərəcəli qövsü gərən düzgün beşbucaqlının tərəfi də məlum idi. Yuxarıda qeyd edilmiş qayda bizə bu bucaqların fərqləri üçün vətərləri hesablamağa imkan verir, məsələn 12°=72°– 60°. Bundan başqa, yarım bucaqların da vətərlərini tapmaq çətin deyil. Amma bütün dediklərimiz 1°-li qövsün vətərini hesablamaq üçün kifayət deyil – ən azı ona görə ki, bütün deyilmiş bucaqlar 3° bölünəndilər. 1°-li vətər üçün Ptolemey qiymətləndirmə tapıb, göstərdi ki, o 2/3 (3/2)° vətərdən böyükdür və 4/3 (3/4)° vətərdən kiçikdir – onun cədvəli üçün kifayət qədər dəqiqliklə üst-üstə düşən ədədlər idi.



Şəkil 1.

Əgər yunanlar bucaqlara görə vətərləri hesablayırdılarsa, *IV-V*-əsrlərin əsərlərində hind astronomları artıq ikiqat qövsün yarımvətərlərinə, yəni ki, dəqiqlik ilə sinus xətlərinə keçmişdilər (şəkil 2). Onlar həmçinin kosinus xətlərindən də istifadə edirdilər, dəqiq desək, onun özündən yox, "çevrilmiş" sinusdan. İndi, $1 - \cos\alpha$-ya bərabər olan funksiyadan artıq istifadə olunur. Gələcəkdə elə bu üsul triqonometrik funksiyaların düzbucaqlı üçbucağın tərəflərinə görə müəyyən edilməsinə gətirdi.



Şəkil 2.

"Sinus" və "kosinus" terminləri bizə hindlilərdən gəldi. Amma maraqlı bir anlaşılmazlıqsız da keçinmədi. Hindlilər yarımvətəri "ardxacıva" (sanskritdən tərcümədə "yay ipinin yarısı") adlandırırlar, sonralar isə onu "cinaya" qədər azaltdılar. Triqonometriya haqqında bilikləri hindlərdən götü-

rən müsəlman astronom və riyaziyyatçıları onu "ciba" kimi qəbul etdilər, sonra o "qabarıqlıq", "qoltuq" bildirən "cayba" sözünə döndü. Və nəhayət, *XII* əsrdə "cayb" sözünü latın dilinə sinus sözü ilə hərfi tərcümə etdilər. Amma bu sözün anlayış ilə heç bir əlaqəsi yox idi. Sanskrit "koticiva" – qalığın (90° dərəcəyə qədər) sinusunu, latın dilində isə – sinus complementi, yəni əlavənolun sinusu, *XVII* əsrdə "kosinusa" qədər azaldı.

X əsrin axırında artıq islam dünyasının alimləri sinus və kosinus ilə yanaşı olaraq dörd başqa funksiyadan da istifadə edirdilər – tangens, kotangens, sekans, kosekans; müstəvidə triqonometriyanın və sferik triqonometriyanın bir neçə vacib teoremlərini kəşf edib, isbat etdilər; vahid radiuslu çevrədən istifadə etdilər (triqonometrik funksiyaları müasir mənada izah etməyə bizə imkan verdi); sferik üçbucağın polyar üçbucağını kəşf etdilər. Ərəb riyaziyyatçıları xüsusilə dəqiq cədvəllər tərtib ediblər, məsələn, 1′ addımı və 1/700000000 dəqiqlik ilə sinus və tangenslər cədvəllərini tərtib etdilər. Maraqlıdır ki, çox vacib tətbiqi məsələlər arasında beləsi də var idi: gün ərzində beş dəfə namaz qılan müsəlmanlar üçün harada olmasından asılı olmayaraq Məkkəyə istiqaməti müəyyən etməyi öyrənmək.

Triqonometriyanın inkişafına xüsusilə böyük bir təsir astronom Həsrəddin Tusinin (1201-1274) "Tam dördbucaqlı haqqında elmi əsəri" göstərdi. Bu dünyada ilk belə əsər idi ki, hansında triqonometriya artıq riyaziyyatın müstəqil bölməsi kimi göstərilmişdir.

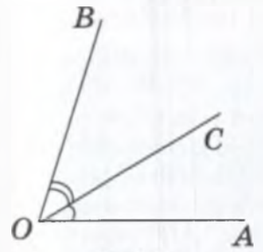
Tusinin elmi əsəri alman astronom və riyaziyyatçı İohann Müllera (1436-1476) çox böyük təsir göstərdi. Onun müasirləri onu Reqiomontana adı ilə tanıyırdılar (onun doğma şəhərinin Keniqsberq, indiki – Kalininqrad, şəhərinin adı latın dilinə tərcümə edilirdi). Reqiomontananın "Beş kitabın bütün növ üşbucaqları" haqqında elmi əsəri Avropa riyaziyyatında Tusinin əsərinin müsəlman ölkələrinin elmindəki rolunu oynadı.

Triqonometriyanın sonrakı inkişafı isə düsturların toplaması və sistemləşdirilməsi, əsas anlayışların dəqiqləşdirilməsi, işarələrin və terminologiyanın əmələ gəlməsi yolu ilə getdi. Avropa riyaziyyatçılarının çoxu triqonometriya sahəsində işləyirdilər. Məsələn, Fransua Viet müstəvi və sferik üçbucaqlarının müxtəlif həll hallarını sistemləşdirdi, kosinusların "müstəvi" teoremini və *n*-qat bucaqlarından triqonometrik funksiyaların düstürlarını kəşf etdi. İsaak Nyuton isə bu funksiyaları sıraya düzdü və onların riyazi analizdə istifadə edilməsi üçün yol açdı. Leonard Eyler funksiya anlayışını və bizim vaxtımızda istifadə etdiyimiz simvolikanı daxil etdi. O həmçinin triqonometrik funksiyalar və kompleks arqumentin eksponentası arasında əlaqə tapdı (bax "Kompleks ədədin qüvvətə yüksəldilməsi və kökdən çıxarılması" məqaləsinə). Bu bizə çox sayda və tez-tez çox çətin triqonometrik düsturları kompleks ədədlərin sadə toplama və çıxma qaydalarından sadə nəticələrə çevirməyə imkan yaratdı. *XVIII* əsrin sonlarına artıq triqonometriya bir elm kimi formalaşmışdı. Triqonometrik funksiyalar artıq öz tətbiqini riyazi analizdə, fizikada, kimyada, texnikada tapdı – ümumiyyətlə dövri proseslər və rəqslər ilə bağlı olan hər yerdə – istər akustika, istər optika, istərsə kəfkirin yellənməsində.

BUCAQLAR VƏ ONLARIN ÖLÇÜLMƏSİ

Elementar həndəsədə bucaq – bu bir nöqtədən – bucağın təpəsindən – çıxan iki şüadır (bucağın iki tərəfidir). *OA* və *OB* tərəfləri ilə bucaq $\angle AOB$ kimi işarələnir. Bucaqları toplayırlar, müqayisə edirlər və ölçürlər. Onlar o zaman bərabər sayılırlar ki, onları hərəkət ilə üst-üstə salmaq mümkün olsun. Əgər *OC* şüası $\angle AOB$ bucağın daxilindən keçirsə (şəkil 3), onda tərifə görə hesab edilir ki, *AOC* bucağı, *COB* bucağı kimi, *AOB* bucağından kiçikdir və *AOB* bucağı isə *AOC* və *COB* bucaqların cəminə bərabərdir. Hansısa konkret bucağı ölçü vahidi kimi götürərək, hər hansı bucağın ölçüsünü müəyyən edirlər, yəni ki, belə bir vahid bucağın onun daxilində neçə dəfə yerləşdiyini (əlbəttə ki, bu miqdar ola bilər ki, tam olmasın). Bucağın ölçülməsi zamanı parçanın uzunluğunun xassələrindən bizə tanış olan iki xassəsinə əsaslanırlar: 1) bərabər bucaqların ölçüləri bərabərdilər, 2) iki bucağın cəminin ölçüsü onların ölçülərinin cəminə bərabərdir. Əgər söhbətin nədən getdiyi məlumdursa, onda "bucağın ölçüsü" yerinə sadəcə "bucaq" deyirlər.

Çevrə çəkək və təpəsi bu çevrənin mərkəzində yerləşən bucaqları gözdən keçirək. Bərabər bucaqlar çevrədə bərabər qövslər ayırır və bucaqların cəmi isə onları birləşdirən qövslərin cəminə cavab verəcək (şək. 4). Ona görə bucağın qiyməti onun söykəndiyi qövsün uzunluğuna mütənasib olacaq. Bucaqların ölçü vahidlərini isə müvafiq qövsün çevrənin hansı hissəsini təşkil etdiyinə görə göstərməklə vermək olar.



Şəkil 3.



Şəkil 4.

Adətən bucaqların ölçülməsi üçün iki ölçü vahidindən istifadə edirlər: bütün çevrənin 1/360 hissəsinin qövsünə uyğun olan dərəcədən və radiandan, yəni, çevrənin radiusuna bərabər olan qövsü gərən mərkəzi bucaqdan. Praktikada adətən dərəcələrdən onlar ° işarəsi ilə və onların 1/60 və $1/60^2=1/3600$ hissələrindən – dəqiqə və saniyə, onlar isə ′ və ″ göstərilir – istifadə edilir. Beləliklə, $1°=60′=3600″$.

Riyaziyyatçılar isə radiandan istifadə etməyi üstün tuturlar. Radian təxminən 57°17′45″ bərabərdir. Onun rad işarəsi çox vaxt yazılmır.

R radiuslu çevrədə α radianlıq bucaq ilə gərilən qövsün uzunluğu αR-ə bərabərdir, vahid çevrə üçün isə qövsün uzunluğu və bucağın radian ölçüsü üst-üstə düşür. Vahid çevrənin uzunluğu 2π-yə bərabər olduğundan, dərəcədən radiana $x^\circ = \pi x/180$ rad düsturuna əsaslanaraq keçmək olar. Xüsusən, tərəfləri düz xətt təşkil edən açıq bucağın qiyməti 180° və ya π-yə bərabərdir, düz bucaq isə 90° və ya $\pi/2$-yə bərabərdir.

Dərəcəyə yaxın olan daha bir ölçü sistemini də qeyd edək – qrad, o düz bucağın 1/100-nə bərabərdir; və ondan nadir hallarda istifadə edirlər.

MÜSTƏVİDƏ TRİQONOMETRİYA

İti bucaqların triqonometrik funksiyalarının təyin edilməsi çox sadədir. Verilmiş iti bucağına görə bütün düzbucaqlı üçbucaqlar oxşardırlar və onların uyğun tərəfləri eyni nisbətə malikdir. Deməli bu nisbətlər təkcə bucaqlardan asılıdır. Belə münasibətlərin sayı altıdır və onlar üçün altı triqonometrik funksiyadan istifadə olunur (tərəf və bucaqların işarələrini 5-ci şəkildən başa düşmək olar):

$$\sin A = \frac{a}{c}\ (\text{sinus}),\ \cos A = \frac{b}{c}\ (\text{kosinus}),$$

$$tgA = \frac{a}{b}\ (\text{tangens}),\ ctg\,A = \frac{b}{a}\ (\text{kotangens}),$$

$$secA = \frac{c}{b}\ (\text{sekans}),\ cosec\,A = \frac{c}{a}\ (\text{kosekans})$$

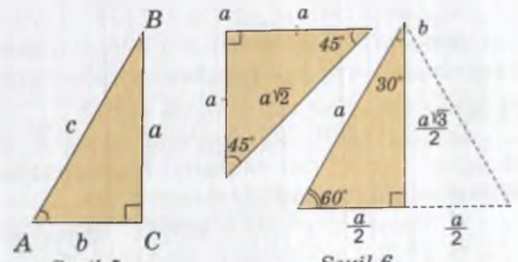
Sekans və kosekans funksiyaları müasir dövrdə artıq istifadədən çıxıblar.

Bu tərifləri triqonometrik funksiyalar arasında bir neçə bərabərlik yazmaq olar:

$$tgA = \sin A/\cos A,\ secA = 1/\cos A,$$

$$cosecA = 1/\sin A$$

Əgər düzbucaqlı üçbucağın bucaqlarının cəmi haqqında olan məlumatı xatırlatsaq, yəni $A + B = 90°$, onda:



Şəkil 5.

Şəkil 6.

$$\sin A = \cos B = \cos\left(90^\circ - A\right),$$

$$tgA = ctg\left(90^\circ - A\right)$$

Əgər, həm də Pifaqor teoremini nəzərə alsaq: $a^2 + b^2 = c^2$, onda bütün altı funksiyanı birinin vasitəsilə ifadə etmək olar. Məsələn, sinus və kosinus əsas triqonometrik eynilikla bağlıdır:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

Bucaqları "yaxşı" (tam və ya rasional dərəcələr ilə ifadə olunanlar) və tərəflərin

ən azı bir nisbəti rasional olan yalnız iki düzbucaqlı üçbucaq mövcuddur. Bu bərabəryanlı üçbucaqdır (45,45,90° bucaqlar ilə; şəkil 6*a*) və bərabərtərəfli üçbucağın yarısıdır (30,60,90° bucaqlar ilə; şəkil 6*b*) – bu iki halda triqonometrik funksiyaların qiymətlərini tərifl ərə görə hesablamaq olur. Bu qiymətlər aşağıdakı cədvəldə göstərilib. Onları yadda saxlamaq lazımdır, çünki uyğun bucaqlara məktəb məsələlərində tez- tez rast gəlmək olar.

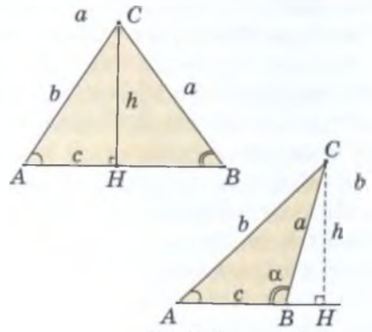
n	0	1	2	3	4
Bucaq / Funksiya	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0
ctg	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Xüsusən, sinus sətirini yadda saxlamaq asandır: n nömrəsi altında sütündə onun qiyməti $\sqrt{n}/2$-yə bərabərdir; kosinusda isə eyni qiymətlər əks sıra ilə verilir.

İxtiyari ABC üçbucağının tərəfləri və bucaqları arasında nisbəti, bu üçbucağı düzbucaqlı üçbucaqlara bölmək ilə almaq olar. C təpəsindən $CH=h$ hündürlüyünü çəkək; fərz edək ki, o düz oturacağın davamına yox düşür. Onda tərəfləri və bucaqları, adəti üzrə a,b,c və A,B,C (şək.7*a*) ilə işarələyək, ACH və BCH üçbucaqlarından tapırıq: $h = b\sin A = a\sin B$ və ya $a/\sin A = b/\sin B$. Belə bir bərabərlik üçbucağın hər hansı tərəfi üçün düzdür. Beləliklə, biz sinuslar teoreminə gəldik:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Amma biz onu təkcə itibucaqlı üçbucaq üçün isbat etdik, amma kor bucaq üçün sinusu heç müəyyən etməmişik. Məsələn, əgər B bucağı kordur, onda h/a ona qonşu olan CBH (şəkil 7*b*) bucağının sinusuna bərabərdir. Ona görə kor bucağın sinusunu ona



Şəkil 7.

qonşu olan bucağın sinusuna bərabər müəyyən edək: $sin\alpha = sin(180°-\alpha)$, onda sinuslar teoreması bütün üçbucaqlar üçün ödənilir.

Sinuslar teoreminə daxil olan nisbətlərin adi həndəsi mənası var. ABC üçbucağının xaricinə çevrə çəkək (şəkil 8). BD diametrini çəkək. Onda daxilə çəkilmiş bucaq haqqında teoremə uyğun olaraq $\angle BDC = \angle A$ və ya əgər A bucağı kordursa, $180°-\angle A$. Hər halda $a=BC=BD\sin A=2R\sin A$ və ya

$$\frac{a}{\sin A} = 2R$$

Burada R – ABC üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin radiusudur. Bu "qüvvətlənmiş" sinuslar teoremidir. Bu teorem bizə qədim dövrün vətər cədvəllərinin sinus cədvəli olduğunu izah edir.

7*a* şəklinə qayıdaq. ABC üçbucağında $AB=AH+HB$ və ya

$$c = b\cos A + a\cos B \qquad (*)$$

Əgər B bucağı kordursa, onda $\cos\alpha = -\cos(180^\circ - \alpha)$ düsturuna görə $AB = AH - BH$. Bunu bizə α kor bucağının kosinusunun tərifi deməyə imkan verir. Bu halda (*) düsturu bütün üçbucaqlar üçün doğrudur. a və b üçün oxşar düsturları yazaq:

$$a = c\cos B + b\cos C,$$

$$b = a\cos C + c\cos A$$

Onları müvafiq olaraq a və b-yə vuraq və onların cəmindən c-yə vurulmuş (*) düsturunu çıxaq. Onda $a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$ alınacaq və ya

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

Bu bərabərlik kosinuslar teoremi adlandırılır. O bizə üçbucağın tərəfini başqa

iki tərəf və onların arasında bucağa görə və həmçinin üç tərəfə görə bucaqları tapmağa imkan verir.

Üçbucağın elementləri arasında daha çoxlu sayda münasibətlər var. Misal üçün tangenslər teoremini göstərək:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{tg\frac{A-B}{2}}{tg\frac{A+B}{2}}$$

Başqa maraqlı düsturları isə sinus və kosinus teoremlərindən triqonometrik bərabərliklərin köməyi ilə almaq olar.

(*) bərabərliyinə qayıdaq. Sinuslar teoreminə görə üçbucağın tərəfləri qarşı bucaqların sinuslarına mütənasib olduğuna görə, bu bərabərliyi bucaqlar vasitəsilə yazmaq olar:

$$\sin C = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

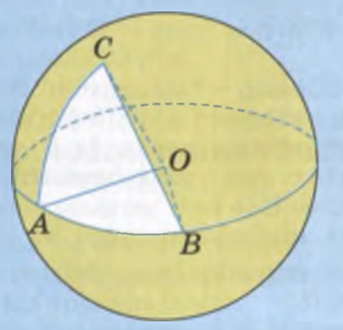
Düstüra daha ümumi şəkil vermək üçün, A və B bucaqların qiymətlərini uyğun olaraq α və β vasitəsilə işarə edək, onda $sinC = sin(180°-C) = sin(\alpha+\beta)$ və biz iki ən vacib triqonometrik düsturlardan birinə – sinuslar üçün toplama düsturuna gəlirik:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

SFERİK TRİQONOMETRİYANIN DÜSTURLARI

Sferada üç A,B və C nöqtələrini götürək və O mərkəzindən bu nöqtələrə şüalar çəkək. Şüalar ilə onlar arasında qalmış müstəvi bucaqlar birlikdə üçüzlü $OABC$ bucağını təşkil edirlər. Sfera ilə kəsişərək o əyrixəttli ABC üçbucağını ayırır, bu üçbucaq sferik üçbucaq adlandırılır (bax şəklə). Onun tərəfləri – böyük dairələrin qövsləridir. AB qövsünün uzunluğu sferanın AB radiusunun uzunluğunun AOB bucağın radianlarla ölçülmüş qiymətinin hasilinə bərabərdir.

Sadəlik üçün biz vahid kürəni seçək. Onda üçbucağın tərəfləri üçüzlü bucağın müstəvi bucaqlarına bərabər olacaqlar. Sferik üçbucaqda A təpəsində yerləşən bucaq AOB və AOC tərəfləri arasında ikiüzlü bucağa bərabər hesab edilir. Planimetriyadakı kimi, sferik üçbucağın tərəf və bucaqları, yəni, üçüzlü bucağın müstəvi və ikiüzlü bucaqlarını müvafiq olaraq, $a(=\angle BOC)$, $b(=\angle AOC)$, $c(=\angle AOB)$ və A,B,C işarələyəcəyik. Bu kəmiyyətlər arasında nisbətlər sferik triqonometriyanın əsasını təşkil edir.



Onların arasında ən vaciblərini bura yazaq; xatırladaq ki, sferanın radiusunu biz 1 götürmüşük.

Sinuslar teoremi. Bu teoremi adi sinuslar teorem kimi çıxarırlar: iki ifadəni üçbucağın "hündürlüyü" – müvafiq üçüzlü bucağın tilində yerləşən nöqtədən əks tərəfə qədər olan məsafə – üçün bərabərləşdirirlər:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Başqa düsturları da üçüzlü bucaqları gözdən keçirərək, göstərirlər.

Birinci kosinuslar teoremi. Onu planimetriyada olan analoquna çox az oxşayan böyük bir düstur ifadə edir:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$$

Amma o eyniliklə bir məsələni həll etməyə – üçbucağın tərəfini başqa iki tərəf və onlar arasında qalan bucağa görə müəyyən etməyə imkan verir. Əgər sferada üçbucaq çəkib, onun tərəflərinin uzunluqlarını qeyd etsək və sonra isə sferanı "hava ilə doldurараq", radiusunu sonsuzluğa qədər artır, o zaman üçbucaq daha da müstəvi şəkilli olacaq və kosinusların sferik teoreminin düsturu sonda adi düstura çevriləcək. Sinuslar teoremi üçün də bu düzdür.

Kosinusların sferik teoremi, məsələn, bizə coğrafi koordinatlara əsaslanaraq iki şəhər arasında məsafəni tapmağa imkan verir. Üçbucağın üçüncü təpəsi kimi polyuslardan birini götürürlər. Onda polyusu şəhərlər ilə birləşdirən sferik üçbucağın bucaq qiymətləri şəhərlərin uzunluq dairələrinə görə müəyyən edilir, bu tərəflər arasında qalan bucaq isə şəhərlərin en dairələri arasındakı fərqə bərabərdir. Məhz üçüncü tərəfin uzunluğu bizi maraqlandırır. Belə üsul ilə Moskvadan (56 şimal enliyi, 38 şərq uzunluğu) Xabarovska (48 şimal enliyi, 135 şərq uzunluğu) qədər məsafəni ölçməyə çalışın.

İkinci kosinuslar teoremi. Bu qəribə teoremin köməyi ilə üçbucağın tərəflərini onun bucaqlarını bilərək tapırlar. Bu adı kosinuslar teoremindəki kimi bucaqları tərəflərin köməyi ilə ifadə edir. Kosinusların ikinci teoremi belə yazılır:

$$\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$$

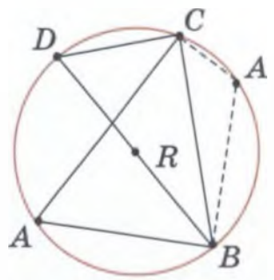
Burada kürədə həndəsənin çox gözəl, ikili prinsipi adlanan bir xüsusiyyəti özünü göstərir: nöqtə və düz xətt, məsafə və bucaq anlayışları qarşılıqlı əvəz ediləndirlər.

Hər hansı üç verilmiş elementə görə sferik üçbucağın bütün elementlərini tapmaq üçün göstərilmiş münasibətlər kifayətdir.

Əgər α vasitəsilə A təpəsində yerləşən xarici bucağı β vasitəsilə isə B bucağını işarələsək, onda C β və α–nın fərqinə bərabər olacaq. Buradan biz asandlıqla fərqin sinus düsturunu ala bilərik:

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Ptolemey özünün vətərlər cədvəlini tərtib edən zaman bu düsturu onun adını almış teorem şəklində istifadə edib. Sonra isə $\cos\alpha=\sin(90^\circ-\alpha)$ düsturuna görə kosinusu sinusun vasitəsilə ifadə edərək cəmin və fərqin kosinuslarının düsturlarını yazmaq olar:



Şəkil 8.

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

Qeyd edək ki, toplama üçün göstərilmiş düsturlar, 180°-dən böyük və ya 0°-dən kiçik olan bucaqlar üçün funksiyaların müəyyən olunmadığına baxmayaraq, onların sinus və kosinuslarını tapmağa imkan verir. Bu isə təkcə nəzəri işlərin rahatlığı üçün deyil, həmçinin, məsələn, fırlanma hərəkətinin təsviri zamanı da vacibdir. Və əksinə, belə bir hərəkəti gözdən keçirərək triqonometrik funksiyaların tərifləri necə genişləndirməyi başa düşmək olar.

TRİQONOMETRİK FUNKSİYALARIN ÜMUMİ TƏRİFİ

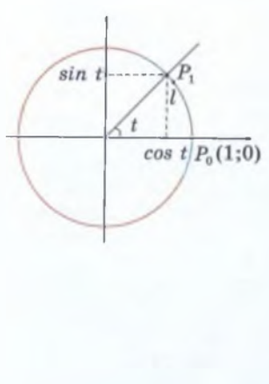
Mərkəzi O koordinat başlanğıcında olan vahid çevrənin üzərində fırlanan nöqtə təsəvvür edək. Tutaq ki, o vahid sürət ilə saat əqrəbi əksinə hərəkət edir (şəkil 9). $t=0$ anında, nöqtə P_0 (1,0)-dan keçir. t zamanına görə nöqtə t uzunluğunda qövsü qət edir və P_t vəziyyətini alır, deməli, onda bu nöqtəyə O-dan keçirilmiş şüanın döndüyü bucaq həmçinin t-yə bərabərdir. Beləliklə, zamanın hər bir qiymətinə, yəni t həqiqi düzxəttinin hər bir nöqtəsinə vahid çevrənin P_t nöqtəsini qarşı qoyuruq.

Düz xəttin çevrədə belə bir inikasını "sarılma" adlandırırlar. Həqiqi oxu sonsuz dartılmayan sap kimi təsəvvür edin. Əgər $t=0$ nöqtəsini çevrənin P_0nöqtəsinin üzərinə qoysaq və sapın iki ucunu çevrəyə sarımağa başlasaq, onda hər t nöqtəsi məhz P_t nöqtəsinə düşəcək. Bununla belə:

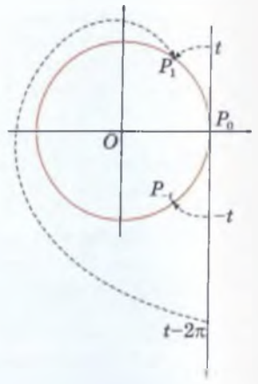
1) Bir-birindən tam sayda çevrə uzunluqları məsafədə yerləşən oxun nöqtələri, yəni $2\pi k\,(k=\pm1,\pm2,\ldots)$, çevrənin bir nöqtəsinə düşürlər.

2) t və $-t$ nöqtələri isə Ox oxuna nəzərən simmetrik olan nöqtələrə düşürlər.

3) $0\le t\le\pi$ şərti ilə P_0OP_t bucağı $y\ge0$ yarımüstəvisindədir və t-yə bərabərdir (şəkil 10).



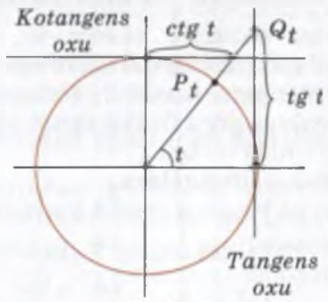
Şəkil 9.



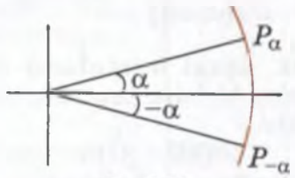
Şəkil 10.

Bu inikasın – "sarınmanın" formal tərifini elə bu üç şərt təşkil edir. 3-cü şərtə əsaslanaraq $0\le t\le\pi$ olduqda P_t nöqtəsinin koordinatları ($\cos t$, $\sin t$) bərabərdirlər. Elə bu müşahidə bizə tərif verməyə kömək edir: ixtiyari t ədədinin kosinusu və sinusu P_t nöqtəsinin müvafiq olaraq absisi və ordinatı adlandırılır.

Tangensi də koordinatların köməyi ilə təyin etmək olar. (1;0) nöqtəsində vahid çevrəyə toxunan çəkək (şəkil 11). O tangens oxu adlandırılır. OP_t düz xəttinin tangens oxu ilə kəsişmə Q_t nöqtəsi (1; $\sin t/\cos t$) koordinatlarına malikdir və tərifə görə onun ordinatı $tg\,t$-yə bərabərdir. Mütləq qiymətcə



Şəkil 11.



Şəkil 12.

bu, Q_t nöqtəsindən çevrəyə çəkilmiş toxunanın uzunluğudur – "tangens" sözü latın dilində "toxunma" mənasındadır. Yeri gəlmişkən, "sekans" "kəsən" kimi tərcümə edilir: 11-ci şəkildə sec t – OQ_t parçasıdır, lakin tam parça deyil, amma onun bir hissəsidir. Nəhayət, kotangensi isə OP_t xəttinin kotangens oxu ilə kəsişmə nöqtəsinin absisi kimi müəyyən etmək olar, yəni (0,1) nöqtəsində vahid çevrəyə çəkilən toxunan kimi:

$$\operatorname{ctg}t=\cos t/\sin t$$

Artıq triqonometrik funksiyalar bütün ədədlər üçün müəyyən ediliblər biz artıq onların xassələrinə və onlar arasındakı münasibətlərə qayıda bilərik.

TRİQONOMETRİK FUNKSİYALARIN XASSƏLƏRİ VƏ TRİQONOMETRİK EYNİLİKLƏR

Cütlük və dövrilik. Kosinus funksiyası cüt funksiyadır, sinus, tangens və kotangens isə tək funksiyalardır:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha;\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha;$$

$$tg(-\alpha)=-tg\alpha;\ ctg(-\alpha)=-ctg\alpha$$

Cütlük xassəsi P_α və $P_{-\alpha}$ nöqtələrinin x oxuna nəzərən simmetrikliyindən irəli gəlir (şəkil 12). Belə simmetriya zamanı nöqtənin ordinatı işarəsini dəyişir və $((x;y)$ $(x;$-y)-ə keçir).

Bütün dörd funksiya dövridir, sinus və kosinus 2π dövrünə malikdirlər, tangens və kotangens isə π dövrlüdür:

$$\sin(\alpha+2k\pi)=\sin\alpha;\ \cos(\alpha+2k\pi)=\cos\alpha;$$

$$tg(\alpha+k\pi)=tg\alpha;\ ctg(\alpha+k\pi)=ctg\,\alpha$$

Sinus və kosinusun dövriliyi ondan irəli gəlir ki, bütün $P_{\alpha+2k\pi}$ nöqtələri, burada $k=0,\pm1,\pm2,\ldots$, üstə-üstə düşürlər, tangens və kotangensin isə dövriliyi ondan irəli gəlir ki, bütün $P_{\alpha+k\pi}$ nöqtələri növbə ilə çevrənin tangens oxunda eyni nöqtəni verən iki diametral əks nöqtələrinə düşürlər.

Eyni arqumentin triqonometrik funksiyaları arasında münasibət. Əsas triqonometrik eynilik:

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

o faktı göstəriri ki, nöqtənin koordinatlarının kvadratları cəmi koordinat başlanğıcından ona qədər məsafənin kvadratına bərabərdir. Bu eyniliyi nəzərə alaraq, aşağıdakı münasibətlər birbaşa tərifləndən çıxarıla bilər:

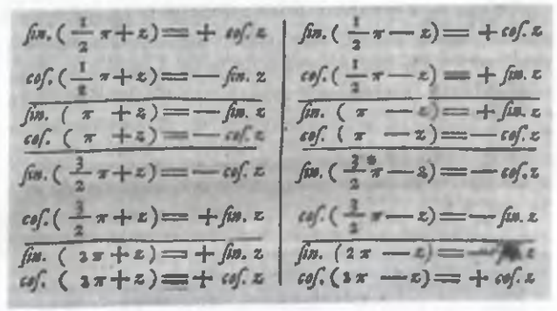
$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha;$$

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\operatorname{cosec}^2\alpha;$$

$$tg\,\alpha\ ctg\,\alpha=1$$

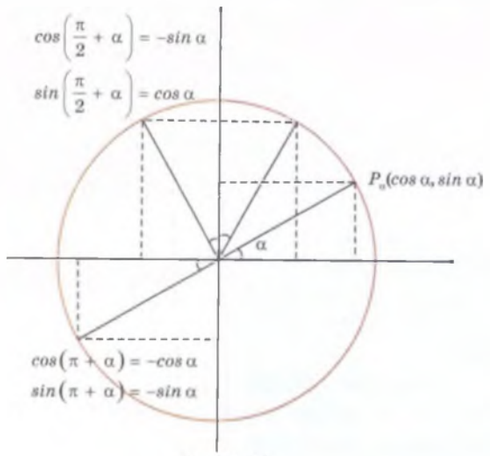
Tənliklərin həlli zamanı tangens və kotangens eyniliklərindən istifadə edərkən ehtiyatlı olun: onların sağ və sol tərəfləri müxtəlif təyin oblastlarına malik ola bilərlər.

Çevirmə düsturları. Bu düsturlar ilə (bax cədvələ) hər hansı bucağın triqonometrik funksiyanın qiymətini ya elə ona tamamilə bərabər və ya iti bucağın əlavə funksiyasına gətirmək olar (əlavə funksiya kimi sinus və kosinus, tangens və kotangens başa düşülür).



Funksiya \ Arqument β	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$

Ona görə də qiymətlər cədvəllərində triqonometrik funksiyaların qiymətləri yalnız iti bucaqlar üçün verilir və bununla belə təkcə sinus və tangens ilə məhdudlaşmaq olar. Məsələn, üçüncü rübdə yerləşən β arqumentini $\pi+\alpha$ və ya $3\pi/2-\alpha$ üçün olan düsturlarından istifadə edərək α iti bucağı ilə əvəz etmək olar. Cədvəldə təkcə sinus və kosinuslar üçün ən çox istifadə edilən çevirmə düsturları verilib. Onların vasitəsilə



Şəkil 13.

tangens və kotangens üçün çevirmə düsturlarını almaq çətin deyil. Amma bu və ya digər çoxsaylı düsturları çıxartmaq və yadda saxlamağın yerinə belə bir sadə qaydadan istifadə etmək olar: $k\pi/2\pm\alpha$ şəkilli arqumentdən funksiyanı α-dan asılı funksiyaya gətirilməsi zamanı, burada k – tam ədəddir (şəkil 13): 1) əgər k cütdürsə, funksiyanın adı qalır və "əlavə" funksiya o zaman çevrilir ki, k tək ədəd olsun; 2) sağ tərəfin işarəsi $k\pi/2\pm\alpha$ nöqtəsindəki funksiyanın işarəsi ilə üst-üstə düşür.

Məsələn, $\operatorname{ctg}(\alpha-\pi/2)$ çevrilməsi zamanı biz yenə də əmin oluruq ki, $\alpha-\pi/2$ $0<\alpha<\pi/2$ şərti ilə dördüncü rübdə yerləşir. Burada kotangens mənfidir (minus işarəsi) və 1-ci qaydaya görə funksiyanın adı dəyişilir: $\operatorname{ctg}(\alpha-\pi/2)=-\operatorname{tg}\alpha$.

Toplama düsturları.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta;$$

$$tg(\alpha\pm\beta)=\frac{tg\alpha\pm tg\beta}{1\mp tg\alpha tg\beta};$$

$$ctg(\alpha\pm\beta)=\frac{ctg\alpha ctg\beta\mp 1}{ctg\alpha\pm ctg\beta};$$

İkiqat, üçqat bucaqların düsturları. Bu düsturlar birbaşa toplama düsturlarından çıxarılır.

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=$$

$$=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha;$$

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}=\frac{2}{ctg\alpha-tg\alpha};$$

$$ctg2\alpha=\frac{ctg^2\alpha-1}{2ctg\alpha}=\frac{ctg\alpha-tg\alpha}{2};$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha;$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha;$$

$$tg3\alpha=\frac{3tg\alpha-tg^3\alpha}{1-3tg^2\alpha};$$

$$ctg3\alpha=\frac{ctg^3\alpha-3ctg\alpha}{3ctg^2\alpha-1}$$

Qeyd edək ki, $\cos 3\alpha$ düsturundan Fransua Viet üçüncüdərəcəli tənliyin həlli zamanı istifadə etmişdir. Məhz o ilk dəfə $\cos n\alpha$ və $\sin n\alpha$ üçün ifadələri tapdı, sonralar isə onlar Muavr düsturundan daha asan yol ilə tapılmışdılar.

Yarım bucaqların düsturları. Əgər ikiqat arqumentin düsturlarında α-nı $\alpha/2$ ilə əvəz etsək, onda onları yarım bucaqların düsturlarına çevirmək olar:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};$$

$$tg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha};$$

$$ctg\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

Universal əvəzetmənin düsturları. Eyni arqumentdən asılı müxtəlif triqonometrik funksiyalar daxil olan ifadələri, bir $tg\frac{\alpha}{2}$ funksiyasından istifadə edərək rasional ifadə (çoxhədliyə bölünən çoxhədli) şəklində göstərə bilərik. Bu bəzi tənliklərin həllində, inteqralların hesablanması zamanı çox faydalı olur.

$$\sin\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad \cos\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}};$$

$$tg\alpha=\frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1-tg^2\frac{\alpha}{2}};\quad ctg\alpha=\frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{2tg\frac{\alpha}{2}}$$

Cəmin hasilə, hasilin cəmə çevrilməsi düsturları. Kompyuter dövründən əvvəl bu düsturlardan hesablamaların asanlaşdırılması üçün istifadə edirdilər. O zaman hesablamaları loqarifmik cədvəllərin vasitəsilə, sonralar isə loqarifmik xətkeşlərlə aparırdılar. Loqarifmlər isə ədədlərin vurulması üçün münasibdir. Ona görə əsas ifadələri "loqarifm üçün rahat şəkilə", yəni, hasilə gətirirdilər:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$tg\alpha\pm tg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta};$$

$$ctg\alpha\pm ctg\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta};$$

$$2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta);$$

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta);$$

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)$$

Bu düsturlar da toplama düsturları ilə asanlıqla yoxlanılır.

Dərəcənin azaldılması düsturları. İkiqat və üçqat arqumentin düsturlarından belə düsturlar çıxarılır:

$$\sin^2\alpha=(1-\cos 2\alpha)/2;$$

$$\cos^2\alpha=(1+\cos 2\alpha)/2;$$

$$\sin^3\alpha=(3\sin\alpha-\sin 3a)/4;$$

$$\cos^3\alpha=(3\cos\alpha+\cos 3\alpha)/4$$

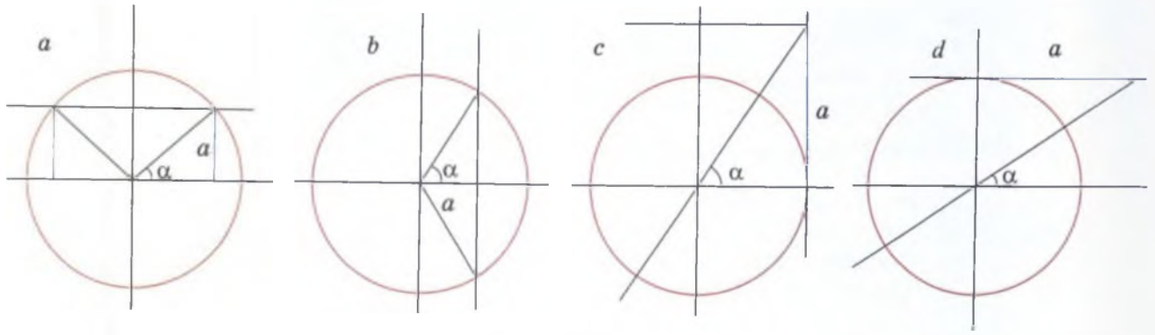
Onların köməyi ilə triqonometrik tənlikləri daha aşağı dərəcəli tənliklərə gətirmək olar. Daha yüksək dərəcəyə malik olan sinus və kosinusların dərəcələrinin azaldılması üçün də düsturlar mövcuddur.

ARKFUNKSİYALAR VƏ TRİQONOMETRİK TƏNLİKLƏR

Əgər naməlum bucaq tənliyə triqonometrik funksiyanın arqumenti kimi daxil olursa, onda tənlik triqonometrik adlandırılır. Belə tənliklər imtahan götürənlərin abiturientlər üçün hazırladığı ən sevimli "xörəklərdən" biridir və ona görə belə tipli tənliklərin həll üsulları repetitorlar tərəfindən diqqətlə işlənilir. Müxtəlif üsul və düsturlar ilə belə triqonometrik tənliklər $f(x)=a$ şəkilli tənliklərə gətirilir, burada f – sadə triqonometrik funksiyalardan biridir: sinus, kosinus, tangens və ya kotangens. Sonra isə x arqumenti məlum olan a qiymətinin vasitəsilə ifadə edilir.

Triqonometrik funksiyalar dövri xüsusiyyətə malik olduğuna görə, eyni a qiymətinə f-in qiymətlər oblastında arqumentin sonsuz qiymətləri uyğun gəlir və tənliyin həllini a-dan asılı bir funksiya şəklində yazmaq olmur. Ona görə əsas triqonometrik funksiyaların hər birinin təyin oblastında elə bir aralıq seçirlər ki, bu aralıqda o bütün öz qiymətlərini təkcə bir dəfə almış olsun və bu aralıqda ona tərs olan funksiyanı tapırlar. Belə funksiyaları əsas funksiyaya ark (qövs) önşəkilçini yazaraq, tərs triqonometrik və ya sadəcə arkfunksiya adlandırırlar.

Sinus üçün "qarşılıqlı birqiymətli interval" kimi $[-\pi/2,\pi/2]$ parçası götürülür, burada sinus monoton olaraq -1-dən 1-ə kimi artır, kosinus üçün isə $-[0,\pi]$ parçası, tangens və kotangens üçün uyğun olaraq $(-\pi/2,\pi/2)$ və $(0,\pi)$-dir. Beləliklə, arcsinus



Şəkil 14.

bu $[-1,1]$ parçasında təyin olunmuş arcsin$a$ funksiyasıdır və hər bir a üçün $-\pi/2 \le \alpha \le \pi/2$-dən götürülmüş α-nın elə bir qiymətinə bərabərdir ki, $\sin\alpha = a$ olur. Onu bizə tanış olan vahid çevrə vasitəsilə göstərmək rahatdır (şəkil 14*a*). Nəzərə alın ki: $|a| < 1$ olduqda koordinat çevrəsində y oxuna nəzərən simmetrik və ordinatı a-ya bərabər olan iki nöqtə mövcuddur. Onlardan biri $\alpha = \arcsin a$ bucağı, digəri isə $\pi - \alpha$ bucağıdır. Sinusun dövriliyini nəzərə alsaq, $\sin x = a$ tənliyin həlli aşağıdakı kimi yazılır:

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n$$

burada $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ beləcə digər triqonometrik tənliklər də həll edilir:

$\cos x = a, -1 \le a \le 1$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (şək.14*b*)

$tgx = a$: $x = arctga + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (şək.14*c*)

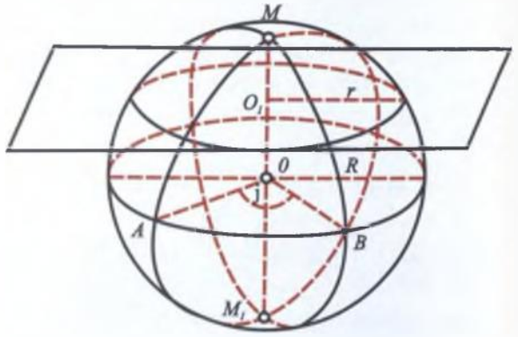
$ctgx = a$: $x = arcctga + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ (şək.14*d*)

SFERİK TRİQONOMETRİYA

Sferik triqonometriya böyük radiuslu çevrə qövslərinin sfera üzərində əmələ gətirdiyi üçbucaqların öyrənilməsi ilə məşğul olur.

SFERA ÜZƏRİNDƏ ÇEVRƏ VƏ ÜÇBUCAQ

İstənilən müstəvinin kürə ilə kəsişməsi bu kürə üzərində müəyyən radiuslu çevrə doğurur. Kürənin bu müstəviyə perpendikulyar olan diametri kürənin O mərkəzindən keçərək sferanı alınan çevrənin sferik mərkəzləri adlanan iki M və M_1 nöqtələrində kəsir. Mərkəzi sferanın O mərkəzi ilə eyni, radiusu isə kürənin radiusuna bərabər olan çevrəyə böyük çevrə deyilir. Sfera üzərindəki qalan hissə çevrə adlanır. Böyük çevrənin M və M_1 sferik mərkəzləri onun polyusları adlanır. Bu halda böyük çevrə M və M_1 nöqtələrinin polyarı adlanır (şəkil 15).

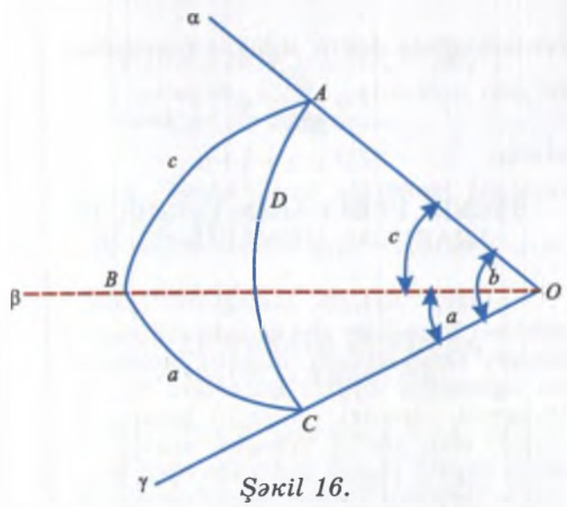


Şəkil 15.

Təpəsi O nöqtəsində yerləşən hər hansı üçüzlü bucaq mərkəzi bu bucağın təpə nöqtəsi ilə üst-üstə düşən sfera ilə kəsişdikdə üç böyük çevrə qövsü əmələ gəlir. Bu qövslərin sfera üzərində əmələ gətirdikləri fiqura sferik üçbucaq deyilir (şəkil 16).

Tərsinə, sfera üzərində üç böyük çevrə qövsünün doğurduğu hər hansı üçbucaq formalı fiqur verilərsə, bu fiqura sfera və təpəsi bu sferanın mərkəzində olan üçüzlü bucağın kəsişməsi kimi də baxmaq olar.

Sfera üzərində ixtiyari üç A, B, C nöqtələri götürülərsə və bu nöqtələrdən cüt-cüt böyük çevrə qövsləri keçirilərsə, müəyyən ABC sferik üçbucağı alınar (sfera



Şəkil 16.

üzərindəki iki nöqtədən yeganə böyük dairə qövsü keçirmək olar). Ona görə də sferik üçbucağa cüt-cüt kəsişən üç böyük çevrə qövsü arasında qalan sferik səth hissəsi kimi də baxmaq olar (şəkil 16).

Sferik üçbucağın təpələri və bucaqlarını latın əlifbasının böyük hərfləri, uyğun qarşı tərəflərini isə kiçik hərfləri ilə işarə edəcəyik. Sferik üçbucağın ən azı iki tərəfi yarımçevrədən (daha doğrusu 180^0-dən) böyük deyil. Çünki, hər biri 180^0-dən böyük olan iki tərəf üçüncü tərəflə görüşənə qədər bir-biri ilə kəsişərək sferik ikibucaqlı əmələ gətirdiklərindən, üçbucaq doğura bilməz.

İki kəsişən böyük çevrə yarımçevrəsinin sfera üzərində əmələ gətirdiyi fiqura sferik ikibucaqlı deyilir (şəkil 17).



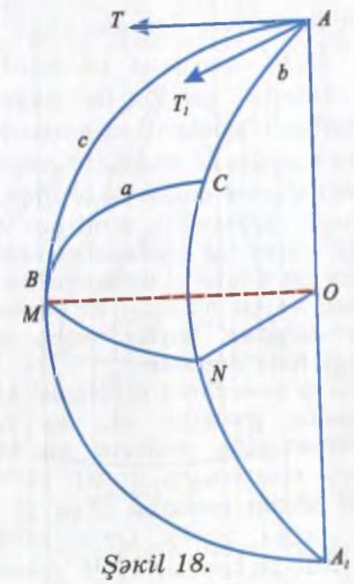
Şəkil 17.

Sferik üçbucağın bir tərəfi 180^0-dən böyük ola bilər. Lakin bundan sonra sfera üzərində üç nöqtənin cüt-cüt böyük çevrələrin ən kiçik qövsləri vasitəsilə birləşdirilməsindən alınan sferik üçbucaqlara, başqa sözlə bütün tərəf və bucaqları 180^0-dən kiçik olan sferik üçbucaqlara baxacağıq. Belə sferik üçbucaqlara Eyler üçbucaqları deyilir.

Hər hansı bir tərəfi 180^0-dən böyük olan sferik üçbucaq verildikdə, bu üçbucaq əvəzinə onun yarımsferaya tamamlanması olan digər üçbucağa baxacağıq; Alınan üçbucaq Eyler üçbucağı olar.

Alınmış köməkçi üçbucağın elementlərini bilməklə əvvəlcədən verilən üçbucağın elementlərini müəyyənləşdirmək olar.

İxtiyari iki böyük çevrə diametrin ucları olan iki nöqtədə kəsişdiklərindən, sferik üçbucağın ixtiyari iki tərəfini ikinci kəsişmə nöqtələrində kəsişənə qədər davam etdirsək, alınan ikinci kəsişmə nöqtəsi birinci ilə eyni diametr üzərində yerləşən nöqtə olar. Bu cür qurma nəticəsində ABC üçbucağının a tərəfi üzrə qoşması adlanan BCA_1 sferik üçbucağı alınar (şəkil 18).



Şəkil 18.

Qoşma BCA_1 üçbucağının tərəfi və bucaqları ilkin ABC üçbucağının tərəf və bucaqları vasitəsilə aşağıdakı kimi ifadə olunur (a tərəfi ortaqdır):

$$A_1B = 180^0 - c,$$

$$A_1C = 180^0 - b;$$

$$\angle A_1 = \angle A,$$

$$\angle BCA_1 = 180^0 - \angle C,$$

$$\angle A_1BC = 180^0 - \angle B.$$

SFERİK ÜÇBUCAĞIN BUCAQ VƏ TƏRƏFLƏRİNİN ÖLÇÜLMƏSİ

İki əyri arasındakı bucaq dedikdə onların kəsişmə nöqtələrindəki toxunanları arasında qalan bucaq nəzərdə tutulur. Ona görə də ABC sferik üçbucağının A bucağı dedikdə, onun AB və AC tərəflərinə A nöqtəsində çəkilən AT və AT_1 toxunanları arasında qalan bucaq nəzərdə tutulur (şək. 18). Bu toxunanlar ikiüzlü MAA_1N bucağının $ABMA_1$, $ACNA_1$ müstəviləri üzərində yerləşirlər və onun AA_1 tərəfinə perpendikulyardırlar, başqa sözlə bu ikiüzlü bucağın xətti bucağını əmələ gətirirlər. Bu mənada MAA_1N ikiüzlü bucağı TAT_1 sferik bucağını ölçür deyəcəyik. Buradan alınır ki, TAT_1 bucağı MON bucağına bərabərdir, başqa sözlə A sferik bucağı üçbucağın AB və AC tərəfləri (və onların uzantıları) arasında qalan və bucağın A təpəsinin polyus olduğu MN böyük çevrə qövsü ilə ölçülür.

Sferik üçbucağın tərəfinin uzunluğu dedikdə, onun iki təpəsindən keçən, sfera üzərində bu nöqtələr arasında ən qısa məsafə olan və bu nöqtələr arasındakı sferik məsafə adlanan böyük çevrə qövsünün uzunluğu başa düşülür.

Sferik məsafənin ölçülməsi bucaqların ölçülməsinə gətirilir ki, bu da sferik triqonometriyada xətlərin və bucaqların müqayisə olunmasına imkan verir. İstənilən AB sferik məsafəsi A və B nöqtələrindən keçən böyük çevrə qövsü kimi, $\varphi = \angle AMB$-yə bərabər AOB mərkəzi bucağına uyğundur (şəkil 15). Bütün böyük çevrə radiusları eyni olduğundan, AB sferik məsafəsi φ bucağı ilə, daha doğrusu dərəcə ölçüsü ilə bilavasitə ölçülə bilər.

Sferik məsafənin dərəcə ölçüsündən başqa, ölçü vahidi uyğun çevrənin radiusu olan radial ölçüsündən də istifadə olunur.

A və B nöqtələri arasındakı məsafəni φ, radial məsafəni isə l ilə işarə etsək,

$$\frac{\varphi^0}{l} = \frac{360^0}{2\pi R}$$

münasibətinin doğru olduğunu, buradan isə

$$l = \frac{\pi R}{180^0} \cdot \varphi^0$$

alarıq.

SFERİK ÜÇBUCAĞIN TƏRƏFLƏRİ ARASINDA MÜNASİBƏTLƏR

$OABC$ üçüzlü bucağının (şəkil 16) müstəvi bucaqları sferik üçbucağın söykəndikləri tərəfləri ilə, ikiüzlü bucaqları isə bu üçbucağın uyğun bucaqları ilə ölçülür (müəyyən olunur). Üçüzlü bucaq və ona uyğun olan sferik üçbucaq arasındakı bu əlaqə üçüzlü bucaq haqqında olan teoremin sferik üçbucaq halına keçirilməsinə imkan verir:

1) Məlumdur ki, ixtiyari üçüzlü bucaqda müstəvi bucaqlardan hər biri digər iki müstəvi bucağın cəmindən kiçikdir: $AOC < AOB + BOC$. Bu müstəvi bucaqlar sferik üçbucağın tərəfləri ilə müəyyən olunduğundan, $\angle AOC = b$, $\angle AOB = c$, $\angle BOC = a$. Beləliklə, tərəfləri a, b, c olan sferik üçbucaq üçün

$$b < a + c$$

olduğunu alarıq. Digər tərəflər halında da bu bərabərsizliyi analoji üsulla isbat etmək olar. Deməli, sferik üçbucaqda hər bir tərəf digər iki tərəfin cəmindən kiçikdir.

Bu bərabərsizliyin sağ tərəfindəki hədlərin birini sol tərəfə keçirsək, aşağıdakı nəticəni alarıq:

$$b - c < a.$$

Digər tərəflər halında da bu bərabərsizliyi analoji üsulla isbat etmək olar. Deməli, sferik üçbucağın ixtiyari tərəfi digər iki tərəfin fərqindən böyükdür.

$b < a + c$ bərabərsizliyinin hər iki tərəfinə b əlavə edib, alınan bərabərsizliyin hər tərəfini 2-yə bölsək,

$$\frac{a+b+c}{2} > b$$

olduğunu alarıq. Beləliklə, aşağıdakı ikinci nəticə alınır:

Sferik üçbucağın yarımperimetri onun hər bir tərəfindən böyükdür.

2) İxtiyari üçüzlü bucaqda müstəvi bucaqların cəmi 360^0-dən kiçikdir:

$$\angle AOC + \angle AOB + \angle BOC < 360^0.$$

Müstəvi bucaqları sferik üçbucağın onlarla ölçülən tərəfləri ilə əvəz etsək,

$$a + b + c < 360^0$$

olduğunu, başqa sözlə, aşağıdakı hökmün doğruluğunu alarıq:

ixtiyari sferik üçbucağın tərəfləri cəmi 360^0-dən kiçikdir.

POLYAR SFERİK ÜÇBUCAQ VƏ ONUN XASSƏLƏRİ

Verilmiş sferik üçbucaq üçün polyar sferik üçbucaq dedikdə elə sferik üçbucaq başa düşülür ki, verilmiş üçbucağın təpələri bu sferik üçbucağın tərəflərinin polyuslarıdır.

Verilmiş ABC sferik üçbucağı üçün polyar sferik üçbucaq quraq.

O nöqtəsindən AO, OC və OB-yə perpendikulyar müstəvilər keçirək. Onların sfera üzərində cüt-cüt kəsişmə nöqtələrini A_1, B_1, C_1 ilə işarə edək. Onda $A_1B_1C_1$ sferik üçbucağı ABC üçün polyar üçbucaq olacaq.

Asanlıqla görmək olar ki, qurulmuş polyar üçbucağın təpələri verilmiş üçbucağın tərəfləri üçün polyusdur.

B_1, A və B_1, C nöqtələrindən böyük çevrə qövsləri keçirək. Onda, A nöqtəsi B_1C_1 tərəfi üçün polyus olarsa, bu qövsün hər bir nöqtəsi A nöqtəsindən 90^0 aralanar. Ona görə də AB_1 böyük çevrə qövsü 90^0-yə bərabər olar və ona söykənən B_1OA mərkəzi bucağı düz bucaq olar.

C təpəsi və A_1B_1 qövsü üçün də oxşar mühakimələr aparsaq, B_1OC bucağının düz bucaq olduğunu alarıq.

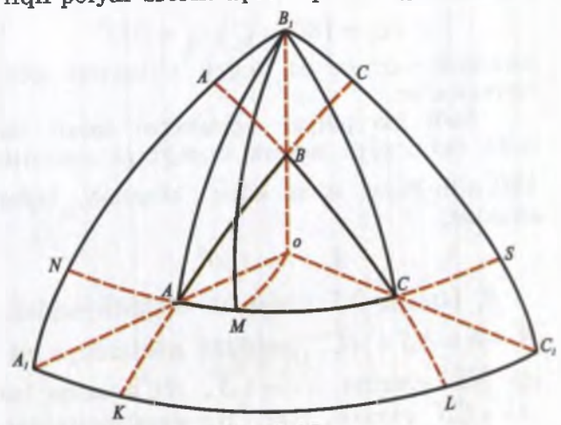
B_1O düz xətti A_1OC_1 müstəvisində yerləşən iki düz xəttə perpendikulyar olduqda isə o, bu müstəvi üzərində onun oturacağından çəkilən ixtiyari üçüncü xəttə də perpendikulyar olar, başqa sözlə, polyar üçbucağın B_1 təpəsi ilə verilmiş ilkin üçbucağın AC tərfi üzərindəki ixtiyari M nöqtəsini birləşdirən böyük çevrə qövsü 90^0-yə bərabərdir. Buradan alınır ki, polyar üçbucağın B_1 təpəsi verilmiş ilkin üçbucağın AC tərəfi üçün polyusdur.

Eyni qayda ilə polyar üçbucağın digər iki A_1 və C_1 təpələrinin də ilkin üçbucağın BC və AB tərəfləri üçün polyus olduğunu göstərmək olar.

Beləliklə, sferik üçbucaqlardan biri digər sferik üçbucağa nəzərən polyar üçbucaqdırsa, onda ikinci sferik üçbucaq da birinci sferik üçbucağa nəzərən polyar üçbucaqdır. Başqa sözlə, bu üçbucaqlar qarşılıqlı polyar üçbucaqlar olar.

Teorem. İki qarşılıqlı polyar sferik üçbucağın tərəfləri və bucaqları bir-birini 180^0-yə tamamlayırlar.

İsbatı. Tutaq ki, ABC və $A_1B_1C_1$ qarşılıqlı polyar sferik üçbucaqlardır (şəkil 18.).



Şəkil 18.

ABC üçbucağının bucaq və tərəflərini A, B, C və a, b, c ilə, $A_1B_1C_1$ üçbucağının bucaq və tərəflərini isə A_1, B_1, C_1 və a_1, b_1, c_1 ilə işarə edəcəyik.

Əvvəlcə isbat edək ki, ABC üçbucağının B bucağı ilə polyar üçbucağın b_1 tərəfinin cəmi 180^0-yə bərabərdir. Bunun üçün BA və BC böyük çevrə qövslərini sfera üzərində polyar üçbucağın A_1C_1 tərəfi ilə kəsişənə qədər uzadaq (kəsişmə nöqtələri uyğun olaraq K və L olsun).

Sferik bucaq onun tərəfləri arasında qalan bucağın təpəsinin polyus olduğu böyük çevrə qövsü ilə ölçüldüyündən, B bucağı KL qövsü ilə ölçülər. Ona görə də, $B+b_1=KL+A_1C_1$. Bu bərabərlikdə A_1C_1-i $A_1K+KL+LC_1$ ilə əvəz etsək,

$$B+b_1=KL+A_1C_1=$$

$$=KL+A_1K+KL+LC_1=A_1L+KC_1$$

olduğunu alarıq.

C_1 təpəsi BK qövsünün polyusu olduğundan, $KC_1=90^0$, A_1 təpəsi BL qövsünün polyusu olduğundan, $A_1L=90^0$. Beləliklə,

$$B+b_1=A_1L+KC_1=90^0+90^0=180^0.$$

Eyni üsulla

$$A+a_1=180^0,\ C+c_1=180^0$$

bərabərliklərinin də doğru olduğunu göstərmək olar.

İndi isə polyar üçbucağın tərəfi ilə ilkin üçbucağın uyğun bucağının cəminin 180^0 olduğunu isbat edək. Məsələn, isbat edək ki,

$$B_1+b=180^0.$$

B_1 bucağı NS qövsü ilə ölçüldüyündən, $B_1+b=NS+AC$. Şəkildən göründüyü kimi NS əvəzinə $NC+CS$, AC əvəzinə isə $AS-CS$ yazmaq olar. Bu əvəzləmələrdən sonra

$$B_1+b=NC+CS+AS-CS=$$

$$=NC+AS=90^0+90^0=180^0$$

olduğunu alarıq.

Qeyd edək ki, bu faktı üçbucaqların qarşılıqlı polyar olmasından nəticə kimi də almaq olar.

Nəhayət, qeyd edək ki, üçbucağın bütün tərəfləri 90^0-dən kiçik olduqda onun polyar üçbucağı bu üçbucaqdan kənarda yerləşir, üçbucağın tərəflərindən hər hansı biri 90^0-dən böyük, qalanları 90^0-dən kiçik olduqda onun polyar üçbucağı bu üçbucağın tərəflərini kəsir, üçbucağın tərəflərinin hər biri 90^0-dən böyük olduqda onun polyar üçbucağı bu üçbucağın daxilində yerləşir.

Polyar üçbucaq anlayışı elmə XVI əsrdə həndəsəçi Snellius tərəfindən daxil edilmişdir.

SFERİK ÜÇBUCAĞIN BUCAQLARI ARASINDA MÜNASİBƏTLƏR

Verilmiş ABC sferik üçbucağı üçün tərəfləri a_1,b_1,c_1 olan $A_1B_1C_1$ polyar üçbucağına baxaq. Yuxarıda isbat etdiyimizə əsasən, bu polyar üçbucaq üçün

$$0<a_1+b_1+c_1<360^0$$

bərabərsizlikləri doğrudur. Burada

$a_1=180^0-A$, $b_1=180^0-B$, $c_1=180^0-C$

bərabərlikləri ilə polyar üçbucaqdan ilkin üçbucağın elementlərinə keçsək,

$$0<180^0-A+180^0-B+180^0-C<360^0$$

və buradan da

$$180^0<A+B+C<540^0$$

bərabərsizliklərinin doğru olduğunu alarıq. Beləliklə, ixtiyari sferik üçbucağın bucaqları cəmi 180^0-dən böyük və 540^0-dən kiçikdir.

Sferik üçbucağın bucaqları cəmi ilə 180^0 arasında olan fərqə sferik qalıq və ya sferik üçbucağın ekssesi deyilir. Yuxarıda isbat olunan faktа əsasən ixtiyari sferik üçbucağın ekssesi müsbətdir.

Polyar üçbucaq üçün $a_1+b_1>c_1$ münasibəti doğrudur. Bu bərabərsizlikdə polyar üçbucaqdan ilkin üçbucağa keçsək

$$180^0-A+180^0-B>180^0-C$$

və ya

$$A+B-C<180^0$$

bərabərsizliyinin doğru olduğunu alarıq. Bu isə o deməkdir ki, ixtiyari sferik üçbucaqda iki bucağın cəmi ilə üçüncünün fərqi 180^0-dən kiçikdir.

SFERİK ÜÇBUCAQLARIN BƏRABƏRLİK ƏLAMƏTİ

Eyni sfera üzərində yerləşən üçbucaqların aşağıdakı bərabərlik əlamətləri var:

1) İki tərəfləri və onlar arasında qalan bucaqları bərabərdirsə;
2) Bir tərəf və ona bitişik iki bucaqları bərabərdirsə;
3) Üç tərəfləri bərabərdirsə;
4) Üç bucaqları bərabərdirsə, üçbucaqlar bərabərdir.

Sferik üçbucaqların bərabərliyinin ilk üç əlamətinin isbatı müstəvi üçbucaqlarının bərabərlik əlamətlərinin isbatı kimidir. Sferik üçbucaqların bərabərliyinin dördüncü əlamətini verilmiş üçbucaqlar üçün polyar üçbucaqların köməyi ilə isbat edək.

Tutaq ki, bucaqları A,B,C, tərəfləri a,b,c və bucaqları D,E,F, tərəfləri isə d,e,f olan iki sferik üçbucaq verilmişdir və $A=D, B=E, C=F$. İsbat edək ki, bu üçbucaqlar bərabərdir. Bu üçbucaqlar üçün polyar üçbucaqlara baxaq. Bu üçbucaqların bucaqları və tərəfləri uyğun olaraq birinci üçbucaq üçün A_1,B_1,C_1, a_1,b_1,c_1, ikinci üçbucaq üçün isə D_1,E_1,F_1,d_1,e_1,f_1 olsun. Polyar üçbucaqların xassəsinə əsasən

$$A+a_1=180^0,\ D+d_1=180^0,$$

$$B+b_1=180^0,\ E+e_1=180^0,$$

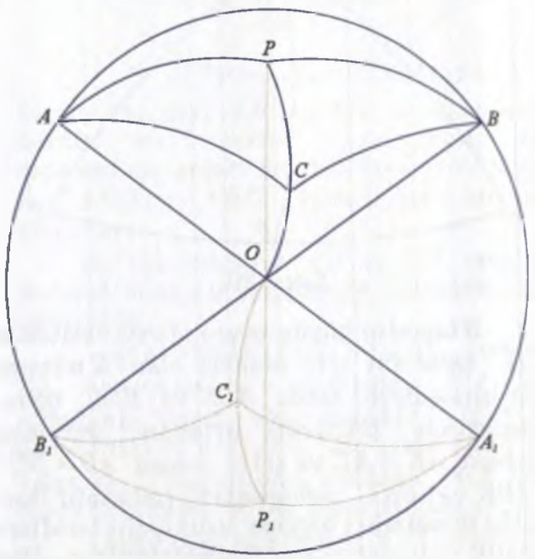
$$C+c_1=180^0,\ F+f_1=180^0.$$

Bu bərabərliklərdə $A=D, B=E, C=F$ olduğunu nəzərə alsaq, $a_1=d_1$, $b_1=e_1, c_1=f_1$ bərabərliklərinin doğru olduğunu alarıq. Buradan alınır ki, $A_1B_1C_1$ və $D_1E_1F_1$ polyar üçbucaqları üç tərəflərinə görə bərabərdirlər. Ona görə də onların bucaqları da bərabərdirlər: $A_1=D_1$, $B_1=E_1$, $C_1=F_1$. Polyar üçbucağın bucaqları ilkin üçbucağın tərəflərinin 180^0-yə tamamlanması olduğundan, ilkin sferik üçbucaqların tərəfləri də bərabərdir. Ona görə də, üçbucaqların bərabərliyinin üçüncü əlamətinə əsasən bu üçbucaqlar bərabərdir.

SİMMETRİK SFERİK ÜÇBUCAQ ANLAYIŞI

ABC sferik üçbucağının təpələrindən çəkilmiş diametrlərin sferik səthlə kəsişmə nöqtələri A_1,B_1,C_1 olsun (şəkil 19).

Bu nöqtələri böyük çevrə qövsləri ilə birləşdirsək, simmetrik üçbucaq adlanan $A_1B_1C_1$ sferik üçbucağını alarıq. Ümumiyyətlə uyğun təpələri sfera boyunca müəyyən hərəkət vasitəsilə bir diametr üzərinə düşən üçbucaqlara da simmetrik üçbucaqlar deyirlər. Aydındır ki, simmetrik üçbucaqların bütün uyğun elementləri bərabərdir. Buna baxmayaraq, ümumiyyətlə, bu üçbucaqlar üst-üstə qoyulduqda, onların elementləri müxtəlif ardıcıllıqla yerləşdiklərindən, üst-üstə düşməyə bilər.



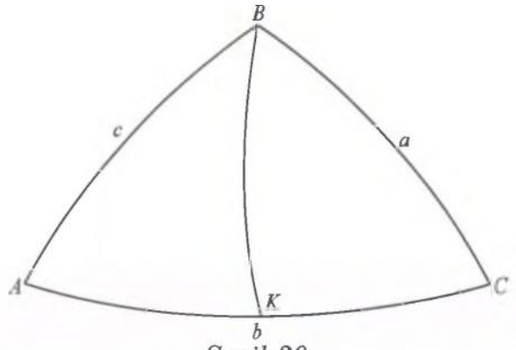
Şəkil 19.

Göstərmək olar ki, ABC və ona simmetrik $A_1B_1C_1$ sferik üçbucaqlarının sahələri bərabərdir.

SFERİK ÜÇBUCAĞIN TƏRƏF VƏ BUCAQLARI ARASINDA MÜNASİBƏTLƏR

Teorem. Sferik üçbucaqda iki tərəf bərabərdirsə, onların qarşısındakı bucaqlar da bərabərdir.

İsbatı. Fərz edək ki, ABC sferik üçbucağında $a=c$. İsbat edək ki, $A=C$ (şəkil 20).



Şəkil 20.

B təpəsini böyük çevrə qövsü vasitəsilə AC tərəfinin orta nöqtəsi olan K nöqtəsi ilə birləşdirək. Onda ABK və BKC üçbucaqlarında BK tərəfi ortaqdır, qurmaya əsasən $AK=KC$ və şərtə əsasən $AB=BC$. ABK və BKC üçbucaqları (müxtəlif tərtiblə düzülmüş) bərabər uzunluqlu tərəflərə malik olduqlarından, simmetrikdirlər. Ona görə də $A=C$. Teorem isbat olundu.

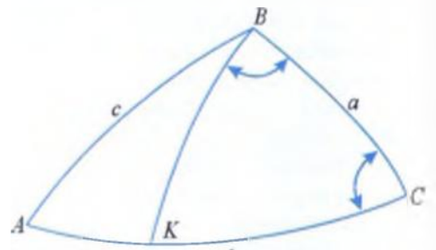
Teorem. Sferik üçbucaqda bərabər bucaqlar qarşısındakı tərəflər bərabərdir.

İsbatı. Fərz edək ki, ABC sferik üçbucağında $A=C$. İsbat edək ki, $a=c$.

Bu teoremi isbat etmək üçün polyar üçbucaqdan istifadə edəcəyik. $A=C$ olarsa, onda $180^0-a_1=180^0-c_1$ və deməli, $a_1=c_1$. Polyar üçbucağın iki tərəfi bərabər olduğundan, onlar qarşısındakı bucaqlar bərabərdir (yuxarıdakı teoremə əsasən): $A_1=C_1$. Bu bərabərlikdən istifadə edərək ilkin üçbucağa keçsək, $180^0-a=180^0-c$ və deməli, $a=c$ bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

Teorem. Sferik üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf durur.

İsbatı. Tutaq ki, $B>C$. İsbat edək ki, $b>c$ (şəkil 21).



Şəkil 21.

B təpəsindən a tərəfi ilə C bucağı əmələ gətirən böyük çevrə qövsü çəkək. Onda KBC üçbucağı bərabəryanlı üçbucaq olar (BK və KC tərəfləri bərabərdir).

ABK üçbucağında $AB<AK+BK$. Bu bərabərsizlikdə $BK=KC$ olduğunu nəzərə alsaq, $AB<AK+KC$ və deməli, $AB<AC$ bərabərsizliyini alarıq. Bu isə $c<b$ olması deməkdir. Teorem isbat olundu.

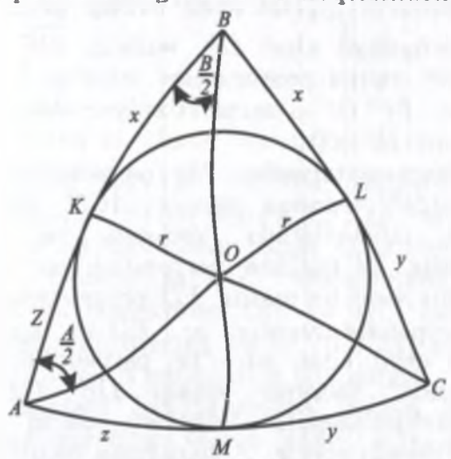
Teorem. Sferik üçbucaqda böyük tərəf qarşısında böyük bucaq durur.

İsbatı. Tutaq ki, $b>c$. İsbat edək ki, $B>C$.

Teoremi isbat etmək üçün polyar üçbucaqdan istifadə edəcəyik. İlkin üçbucaqda $b>c$ olarsa, polyar üçbucaq üçün $180^0-B_1>180^0-C_1$, başqa sözlə $B_1<C_1$ olar. Bundan əvvəlki teoremə əsasən polyar üçbucaq üçün $b_1<c_1$ bərabərsizliyi doğrudur. Bu bərabərsizlikdən istifadə edərək ilkin üçbucağa keçsək, $180^0-B<180^0-C$, buradan da $B>C$ olduğunu alarıq. Teorem isbat olundu.

SFERİK ÜÇBUCAĞIN DAXİLİNƏ VƏ XARİCİNƏ ÇƏKİLMİŞ ÇEVRƏLƏR

ABC sferik üçbucağının A və B bucaqlarını AO və BO böyük çevrə qövsləri vasitəsilə yarıya bölək. Bu qövslərin O kəsişmə nöqtəsindən üçbucağın tərəflərinə perpendikulyar olan OK, OL və OM böyük çevrə qövsləri çəkək (şəkil 22). Onda, A ortaq təpəsindəki bucaqları bərabər, AO tərəfləri ortaq, K və M bucaqları bərabər (düz bucaq olduqlarından) olduğundan, AMO və AKO üçbucaqları simmetrikdirlər. Ona görə də $MO=KO$. Eyni qayda ilə, KOB və OBL üçbucaqlarının simmetrikliyindən $KO=OL$ olduğunu almaq olar. Ona görə də O nöqtəsindən OM



Şəkil 22.

radiuslu çevrə çəksək, o, üçbucağın bütün tərəflərinə toxunar.

Daxilə çəkilmiş çevrənin O mərkəzini üçüncü C təpəsi ilə birləşdirsək, MOC və OLC simmetrik üçbucaqlarını alarıq. Buradan alınır ki, $\angle OCM=\angle OCL$.

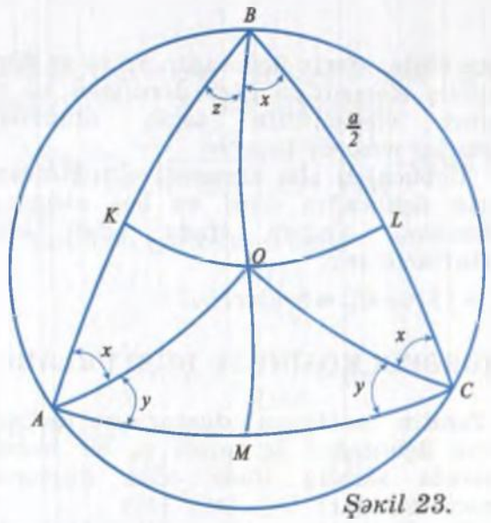
Bucağı yarıya bölən böyük çevrə qövsünə bucağın tənböləni deyilir.

Beləliklə, aşağıdakı teoremin doğruluğu isbat olundu:

Teorem. Sferik üçbucağın bucaqlarının tənbölənləri üçbucağın daxilinə çəkilmiş kiçik çevrənin mərkəzində kəsişirlər.

ABC sferik üçbucağının AB və BC tərəflərini K və L nöqtələri vasitəsilə yarıya bölək və bölgü nöqtələrindən üçbucaqların tərəflərinə perpendikulyar olan böyük çevrə qövsləri çəkək (şəkil 23). Bu qövslərin O kəsişmə nöqtəsini OA, OB və OC böyük çevrə qövsləri vasitəsilə üçbucağın təpələri ilə birləşdirək. İsbat edək ki, bu qövslər bərabərdir.

AOK və KOB üçbucaqlarında KO



Şəkil 23.

tərəfi ortaqdır, KB və KA tərəfləri bərabərdir, bu tərəflər üçün ortaq olan təpədəki bucaqları isə düz bucaqdır. Deməli, AKO və KBO üçbucaqları simmetrikdirlər.

Bu üçbucaqların AO və OB tərəfləri bərabər bucaqlar qarşısında olduqlarından, bərabərdir.

Eyni üsulla, BOL və LOC simmetrik üçbucaqlarına baxmaqla, $BO=OC$ olduğunu alarıq. Deməli, $AO=OB=OC$ bərabərlikləri doğrudur. Buradan alınır ki, mərkəzi O nöqtəsində, radiusu AO olan çevrə üçbucağın bütün təpələrindən keçir.

Xaricə çəkilmiş çevrənin O mərkəzini OM böyük çevrə qövsü vasitəsilə AC tərəfinin orta nöqtəsi ilə birləşdirsək, AOM və MOC simmetrik üçbucaqlarını alarıq. Ona görə də, M təpəsindəki bucaqları bərabər, yəni düz bucaqlardır.

Beləliklə, aşağıdakı teoremin doğruluğu isbat olundu:

Teorem. Sferik üçbucağın tərəflərinin orta nöqtələrindən keçib, bu tərəflərə perpendikulyar olan üç böyük çevrə sferik üçbucağın xaricinə çəkilmiş kiçik çevrənin mərkəzində kəsişirlər.

SFERİK TRİQONOMETRİYANIN ƏSAS DÜSTURLARI

Sferik triqonometriyanın əsas düsturları dedikdə sferik üçbucağın dörd və ya beş elementi arasındakı əlaqəni ifadə edən,

başqa sözlə, sferik üçbucağın üç və ya dörd verilmiş elementinə görə dördüncü və ya beşinci elementinin təyin olunduğu düsturlar nəzərdə tutulur.

Üçbucağın altı elementi olduğundan, sferik üçbucağın dörd və beş elementi arasındakı əlaqəni ifadə edən əsas düsturların sayı

$C_6^4 = 15$ və $C_6^5 = 6$ olar.

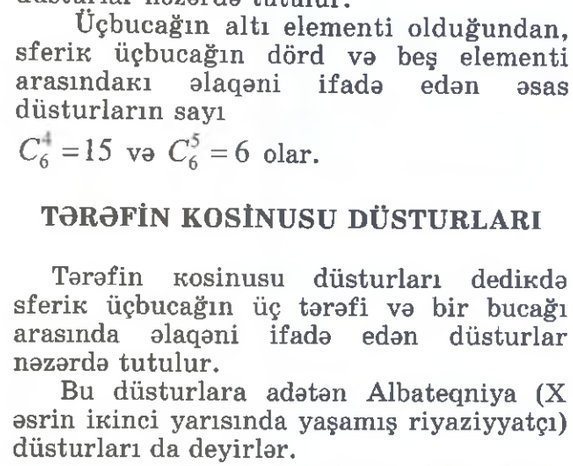
TƏRƏFİN KOSİNUSU DÜSTURLARI

Tərəfin kosinusu düsturları dedikdə sferik üçbucağın üç tərəfi və bir bucağı arasında əlaqəni ifadə edən düsturlar nəzərdə tutulur.

Bu düsturlara adətən Albateqniya (X əsrin ikinci yarısında yaşamış riyaziyyatçı) düsturları da deyirlər.

Teorem (Tərəfin kosinusu düsturları). Sferik üçbucağın tərəflərindən birinin kosinusu digər iki tərəfin kosinusları hasili ilə həmin tərəflərin sinusları hasilinin bu tərəflər arasında qalan bucağın kosinusu hasilinin cəminə bərabərdir.

Birinci isbat (proyeksiya nəzəriyyəsinə əsaslanan). Tutaq ki, ABC sferik üçbucağı verilmişdir (şəkil 24). ABC sferik üçbucağının təpələrini sferanın O mərkəzi ilə birləşdirək. B təpəsindən digər iki A və C təpəsindən keçən böyük çevrə müstəvisinə və bu təpələri sferanın mərkəzi ilə birləşdirən radiuslara BD, BE və BF perpendikulyarları endirək. Bu perpendikulyarların oturacaqlarını ED və FD düz xətləri ilə birləşdirsək, $OEDF$ sınıq xətti və onun OF tamamlayıcısını (qapanması) alarıq. Alınmış sınıq xətti onun tamamlayıcısının istiqaməti ilə üst-üstə düşən proyeksiya oxuna proyeksiyalasaq,



Şəkil 24.

$$\text{pr. } OF = \text{pr. } OE + \text{pr. } ED + \text{pr. } DF \quad (1)$$

olduğunu alarıq. Bu münasibətə daxil olan elementlərin qiymətlərinə baxaq: şəkildən də göründüyü kimi $OF = \cos a$. $\overline{OF}$-nın da OF oxuna proyeksiyası $\cos a$-ya bərabərdir, DF OF-ə perpendikulyar olduğundan, pr. $DF = 0$.

Stereometriyadan "üç perpendikulyar haqqında" teoremə əsasən ACO böyük çevrə müstəvisində yerləşən və ona çəkilmiş BF mailinə perpendikulyar olan OF düz xətti bu mailin FD proyeksiyasına da perpendikulyardır. pr. ED-ni tapmaq üçün qeyd edək ki, "üç perpendikulyar haqqında" teoremə əsasən DE OE-yə perpendikulyardır; Buradan alarıq ki, BED bucağı sferik A bucağının ölçüldüyü ikiüzlü bucağın xətti bucağıdır. ED və proyeksiaylama oxu arasındakı EKO bucağının $90^0 - b$ oldğunu nəzərə alsaq,

$$\text{pr. } ED = ED\cos(90^0 - b) = ED\sin b,$$

$$ED = BE\cos A,\ BE = \sin c$$

olduğunu alarıq. Ona görə də

$$\text{pr. } ED = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A.$$

EO-nun proyeksiyası üçün ardıcıl olaraq

$$\text{pr. } EO = EO\cos b,$$

$$\text{pr. } EO = \cos c,$$

$$\text{pr. } EO = \cos b \cdot \cos c$$

bərabərliklərini alarıq.

Alınan qiymətləri (1)-də yerinə yazsaq,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

olduğunu alarıq.

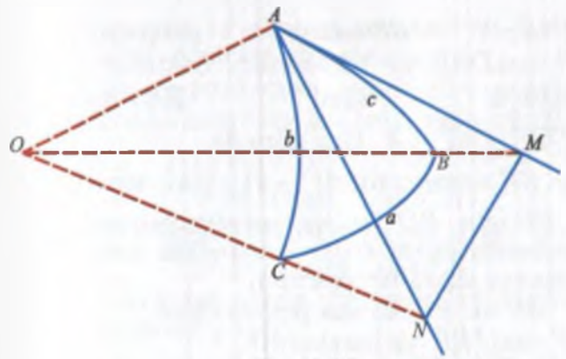
Analoji üsulla b və c tərəfləri üçün

$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B,$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos c$$

düsturlarının doğru olduğunu alarıq.

İkinci isbat. ABC sferik üçbucağının təpələrini sferanın O mərkəzi ilə birləşdirək (şəkil 25).



Şəkil 25.

Tutaq ki, sferik üçbucağın b və c tərəflərinin hər biri 90^0-dən kiçikdir. A nöqtəsindən sferik üçbucağın AB və AC tərəflərinə toxunanlar çəkək. Onlardan biri AOC, o birisi isə AOB müstəvisində yerləşir. Bu toxunanlar OB və OC radiuslarının uzantılarını M və N nöqtələrində kəsir. M və N nöqtələrini birləşdirək.

Müstəvi həndəsəsindən məlum kosinuslar teoreminə əsasən MAN üçbucağında

$$MN^2 = AN^2 + AM^2 - 2 \cdot AN \cdot AM \cdot \cos A,$$

OMN üçbucağında isə

$$MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos a.$$

Bu iki bərabərliyin müqayisəsindən

$$AN^2 + AM^2 - 2 \cdot AN \cdot AM \cdot \cos A =$$

$$= OM^2 + ON^2 - 2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos a,$$

buradan da

$$2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos a =$$

$$= OM^2 + ON^2 - AN^2 - AM^2 +$$

$$+ 2 \cdot AN \cdot AM \cdot \cos A$$

olduğu alınır.

Sonuncu bərabərlikdə OMA düzbucaqlı üçbucağında

$$OM^2 - AM^2 = OA^2,$$

ONA düzbucaqlı üçbucağında isə

$$ON^2 - AN^2 = OA^2$$

olduğunu nəzərə alsaq,

$$2 \cdot OM \cdot ON \cdot \cos a =$$

$$2 \cdot OA^2 + 2 \cdot AN \cdot AM \cdot \cos A,$$

$$OM \cdot ON \cdot \cos a = OA^2 + AN \cdot AM \cdot \cos A$$

bərabərliyini alarıq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $OM \cdot ON$ hasilinə bölsək,

$$\cos a = \frac{OA}{OM} \cdot \frac{OA}{ON} + \frac{AN}{ON} \cdot \frac{AM}{OM} \cdot \cos A \quad (2)$$

alarıq.

Şəkildən göründüyü kimi

$$\frac{OA}{OM} = \cos b,\ \frac{OA}{ON} = \cos c,$$

$$\frac{AN}{ON} = \sin b,\ \frac{AM}{OM} = \sin c.$$

Nəhayət, (2) bərabərliyində

$$\frac{OA}{OM}, \frac{OA}{ON}, \frac{AN}{ON}, \frac{AM}{OM}$$

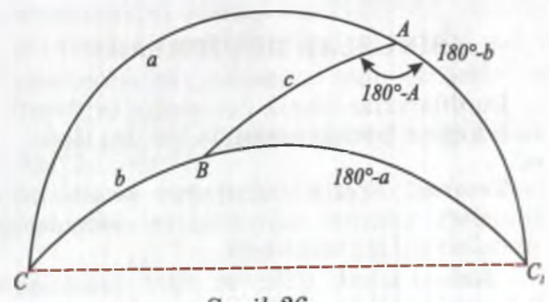
nisbətlərinin triqonometrik funksiyalarla ifadələrini nəzərə alsaq,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq.

İndi isə bu düsturu sferik üçbucağın b və c tərəflərindən biri və ya hər ikisi 90^0-dən böyük olan halda isbat edək.

Əvvəlcə fərz edək ki, $b > 90^0, c < 90^0$. Sferik üçbucağın a və b tərəflərini C_1 kəsişmə nöqtələrinə qədər davam etdirsək, (şəkil 26) tərəfləri $c < 90^0$ və $(180^0 - b) < 90^0$ olan BAC_1 sferik üçbucağını alarıq.



Şəkil 26.

Ona görə də, yuxarıda isbat olunmuş düstura əsasən

$$\cos(180^0 - a) =$$

$$= \cos(180^0 - b) \cdot \cos c + \sin(180^0 - b) \times$$

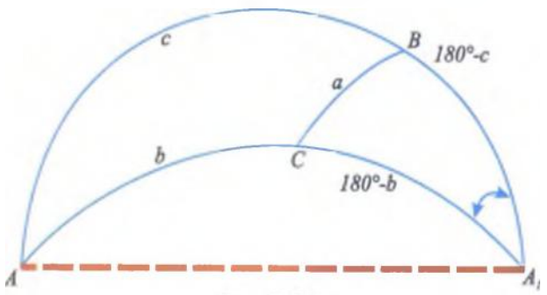
$$\times \sin c \cdot \cos(180^0 - A)$$

$-\cos a = -\cos b \cdot \cos c - \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$,

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$

olduğunu alarıq.

İndi isə fərz edək ki, $b > 90^0, c > 90^0$ (şəkil 27). Sferik üçbucağın c və b tərəflərini A_1 kəsişmə nöqtələrinə qədər davam etdirsək, alınan sferik üçbucağın tərəfləri üçün $(180^0 - b) < 90^0$, $(180^0 - c) < 90^0$ bərabərsizliklərini alarıq. Ona görə də yuxarıda isbat olunmuş düstura əsasən



Şəkil 27.

$$\cos a = \cos(180^0 - b) \cdot \cos(180^0 - c) +$$
$$+ \sin(180^0 - b) \cdot \sin(180^0 - c) \cdot \cos A_1 .$$

Burada $A_1 = A$ olduğunu nəzərə alsaq,

$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$

düsturunu alarıq.

SİNUSLAR DÜSTURLARI

Bu düsturlar sferik üçbucağın iki tərəfi və iki qarşı bucağı arasında əlaqəni ifadə edir.

Teorem. Sferik üçbucağın tərəflərinin sinusları onların qarşısındakı bucaqların sinusları ilə mütənasibdir.

Birinci isbat. BDE və BDF düzbucaqlı üçbucaqlarına baxaq (şəkil 24). Onların ortaq tərəfinə iki sınıq xəttin tamamlayıcısı kimi baxmaqla, bu sınıq xətləri tamamlayıcı ilə üst-üstə düşən proyeksiya oxuna proyeksiyalasaq, alarıq:

$$\text{pr. } BD = \text{pr. } BE + \text{pr. } ED,$$
$$\text{pr. } BD = \text{pr. } BF + \text{pr. } FD.$$

Buradan alınır ki,

$$\text{pr. } BE + \text{pr. } ED = \text{pr. } BF + \text{pr. } FD.$$

BE-nin BD oxuna proyeksiyası $BE \cdot \cos DBE$-yə bərabərdir. Şəkildən göründüyü kimi $BE = \sin c$, $\angle DBE = 90^0 - A$. Ona görə də

$$\text{pr. } BE = \sin c \cdot \cos(90^0 - A) = \sin c \cdot \sin A \quad (3)$$

ED-nin BD oxuna proyeksiyası sıfıra bərabərdir(çünki onlar arasındakı bucağın kosinusu sıfıra bərabərdir).

BF-in BD oxuna proyeksiyası $BF \cdot \cos FBE$-yə bərabərdir, $BF = \sin A$, $\angle FBE = 90^0 - C$. Ona görə də

$$\text{pr. } BF = \sin a \cdot \cos(90^0 - C) = \sin a \cdot \sin C .$$

DF-in BD oxuna proyeksiyası sıfra bərabərdir (aralarındakı bucaq 90^0 olduğundan). Alınmış qiymətləri (3)-də nəzərə alsaq,

$$\sin c \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin C ,$$

buradan da

$$\frac{\sin a}{\sin c} = \frac{\sin A}{\sin C}$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq. Eyni üsulla isbat etmək olar ki,

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B},$$
$$\frac{\sin b}{\sin c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

İsbat olunmuş bərabərliklərdən biri digər ikisindən nəticə kimi alınır.

Bu bərabərlikləri

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}, \quad \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

kimi də yazmaq olar. Deməli,

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = m ,$$

başqa sözlə, sferik üçbucaqda tərəfin sinusunun qarşıdakı bucağın sinusuna nisbəti sabit kəmiyyətdir.

İkinci isbat (tərəfin kosinusu düsturuna əsaslanan isbat). Tərəfin kosinusu düsturlarına əsasən

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A ,$$
$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B .$$

Bu bərabərliklərin hər birində bərabərliyin sağ tərəfindəki birinci həddi sol tərəfə keçirək və alınmış bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək:

$$\cos a - \cos b \cdot \cos c = \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A ,$$
$$\cos b - \cos c \cdot \cos a = \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B ,$$
$$\cos^2 a - 2\cos a \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c = \sin^2 b \cdot \sin^2 c \cdot \cos^2 A ,$$
$$\cos^2 b - 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 a \cdot \cos^2 c = \sin^2 a \cdot \sin^2 c \cdot \cos^2 B ,$$

Son iki bərabərliyin birincisindən ikincisini tərəf-tərəfə çıxaq:

$$\cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 b \cos^2 c - \cos^2 a \cos^2 c = \sin^2 b \cdot \sin^2 c \cdot \cos^2 A - \sin^2 a \cdot \sin^2 c \cdot \cos^2 B$$

Bu bərabərlikdə ortaq vuruqları mötərizə xaricinə çıxarsaq,

$$\cos^2 a \cdot (1 - \cos^2 c) - \cos^2 b \cdot (1 - \cos^2 c) = \sin^2 c \cdot (\sin^2 b \cdot \cos^2 A - \sin^2 a \cdot \cos^2 B)$$

və ya

$$\cos^2 a \cdot \sin^2 c - \cos^2 b \cdot \sin^2 c = \sin^2 c \cdot (\sin^2 b \cdot \cos^2 A - \sin^2 a \cdot \cos^2 B)$$

alarıq. Alınmış bərabərliyin hər iki tərəfini $\sin^2 c$-yə bölək:

$$\cos^2 a - \cos^2 b = \sin^2 b \cdot \cos^2 A - \sin^2 a \cdot \cos^2 B$$

Bu bərabərlikdə kosinusları sinusla əvəz etsək ,

$$1 - \sin^2 a - 1 + \sin^2 b = \sin^2 b - \sin^2 b \sin^2 A - \sin^2 a + \sin^2 a \sin^2 B$$

buradan da

$$\sin^2 a \cdot \sin^2 B - \sin^2 b \cdot \sin^2 A = 0,$$
$$\sin^2 a \cdot \sin^2 B = \sin^2 b \cdot \sin^2 A ,$$
$$\frac{\sin^2 a}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 B}$$

olduğunu alarıq. Sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfində kvadrat kökə keçməklə

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq (şərtə əsasən bütün tərəfləri 90^0-dən kiçik olan sferik üçbucaqlara baxılır).

Üçüncü isbat (tərəfin kosinusu düsturuna əsaslanan isbat).

Tərəfin kosinusu düsturlarına əsasən

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A .$$

Bu tənliyi $\cos A$-ya görə həll edək və alınmış bərabərliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək:

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\sin b \cdot \sin c},$$
$$\cos^2 A = \frac{\cos^2 a - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}.$$

Buradan

$$1 - \cos^2 A = 1 - \frac{\cos^2 a - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

və ya

$$\sin^2 A = \frac{\sin^2 b \cdot \sin^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

bərabərliyi alınır. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $\sin^2 a$-ya bölək və bərabərlyin sağ tərəfində kəsrin surətində sinusları kosinusla ifadə edək:

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{(1 - \cos^2 b) \cdot (1 - \cos^2 c)}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c} -$$
$$- \frac{\cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

Burada mötərizələri açıb, oxşar hədləri islah etsək,

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a \cdot \sin^2 b \cdot \sin^2 c}$$

bərabərliyini alarıq. Aydındır ki, sonuncu bərabərliyin sağ tərəfindəki ifadə a, b, c elementlərinə nəzərən simmetrikdir və $\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}$, $\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$ üçün yazılmış uyğun bərabərliklərin də sağ tərəfində bu ifadə alınar. Ona görə də

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}.$$

Buradan da

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

olduğunu alarıq.

Sinuslar düsturu bəzən aşağıdakı kimi də ifadə olunur: tərəfin sinusunun bitişik bucağın sinusuna hasili onların qarşı elementlərinin sinusları hasilinə bərabərdir.

BEŞ ELEMENT DÜSTURLARI

Bu düsturlar sferik üçbucağın üç tərəfi, iki bucağı və ya üç bucağı, iki tərəfi olamqla beş elementi arasındakı əlaqəni ifadə edir.

Düsturun proyeksiya haqqında teoremə əsaslanan çıxarılışı. Düsturun çıxarılışı üçün $DEOF$ (şəkil 28) dördbucaqlısında DF tərəfinə tamamlayıcı kimi baxaq. Onda proyeksiyalar haqqındakı teoremə əsasən

$$\text{pr.}DF = \text{pr.}FO + \text{pr.}OE + \text{pr.}ED.$$

Proyeksiyalama oxu kimi DF tamamlayıcı parçasını götürsək,

$$\text{pr.}DF = \sin a \cos C,$$

$$\text{pr.}FO = \cos a \cos 90^0 = 0,$$

$$\text{pr.}OE = \cos c \cos(90^0 - b) = \cos c \sin b,$$

$$\text{pr.}ED = \sin c \cos A \cos(180^0 - b) = -\sin c \cos b \cos A$$

bərabərliklərini alarıq. Deməli,

$$\sin a \cos C = \cos c \sin b - \sin c \cos b \cos A.$$

Bu düstura tərəfin sinusunun bucağın kosinusuna hasili düsturu da deyirlər.

Bu düsturların sayı altıya bərabərdir.

Alınmış düsturdan istifadə edərək, hərflərin şəkil 27-dəki kimi dairəvi yerdəyişməsi vasitəsilə

$$\sin a \cos C = \sin b \cos c - \cos b \sin c \cos A,$$
$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B,$$
$$\sin c \cos B = \sin a \cos b - \cos a \sin b \cos C,$$
$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \cos c \sin b \cos A,$$
$$\sin b \cos C = \sin a \cos c - \cos a \sin c \cos B,$$
$$\sin c \cos A = \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C$$

düsturlarını yazmaq olar. Qalan hallar analoji üsulla da isbat oluna bilər.

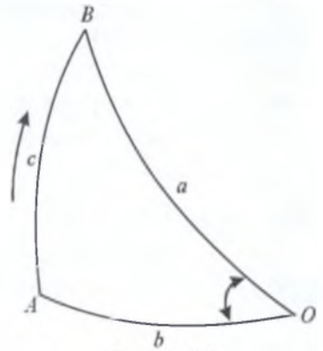
Tərəfin sinusunun bucağın kosinusuna hasili düsturunun tərəfin kosinusları düsturuna əsaslanan çıxarılışı. Tərəfin kosinusu düturlarına əsasən

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B.$$

Bu bərabərliyin ikincisində $\cos a$-nın birinci bərabərlikdəki ifadəsini yazaq:

$$\cos b = \cos b \cdot \cos^2 c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos c \cos A$$

Buradan



Şəkil 28.

$$\cos b(1 - \cos^2 c) = \sin a \cdot \sin c \cdot \cos B + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos c \cdot \cos A$$

olduğunu alarıq. Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $\sin c$-yə bölsək,

$$\cos b \sin c = \sin a \cos B + \sin b \cos c \cos A$$

alarıq. Sonuncu bərabərlikdən isə

$$\sin a \cos B = \cos b \sin c - \sin b \cos c \cos A$$

bərabərliyinin doğru olduğu alınır.

Sferik üçbucağın üç bucaq və iki tərəfi arasındakı asılılığı ifadə edən düsturları aldığımız bu düsturdan və sferik üçbucağın tərəfləri ilə qarşı bucaqları arasında münasibətdən istifadə edərək tapmaq olar:

$$\sin a \cos B = \cos b \cos c - \cos c \sin b \cos A,$$

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = m.$$

Bu iki münasibəti birləşdirsək,

$$m \sin A \cos B = m \cos b \sin C - m \sin B \cos c \cos A$$

alarıq. Buradan da

$$\cos b \sin C = \sin A \cos B + \sin B \cos c \cos A$$

olduğunu alarıq.

Aydındır ki, bu cür düsturların sayı altıya bərabərdir və bu düsturların qalanlarını analoji qayda ilə isbat etmək olar.

Bu düsturlara bucağın sinusunun tərəfin kosinusuna hasili düsturları da deyirlər.

Bucağın sinusunun tərəfin kosinusuna hasili düsturunun polyar üçbucağın daxil edilməsi üsulu ilə çıxarılışı. Verilmiş üçbucağın polyar üçbucağının bucaqları A_1, B_1, C_1, tərəfləri isə a_1, b_1, c_1 olsun. Bu polyar üçbucaq üçün tərəfin sinusunun bucağın kosinusuna hasili düsturunu yazaq:

$$\sin a_1 \cos B_1 = \sin c_1 \cos b_1 - \cos c_1 \sin b_1 \cos A_1.$$

Burada

$$a_1 + A = 180^0,\ B_1 + b = 180^0,\ c_1 + C = 180^0,$$
$$b_1 + B = 180^0,\ A_1 + a = 180^0$$

münasibətlərindən istifadə edərək polyar üçbucağın elementlərindən ilkin üçbucağın elementlərinə keçsək,

$$\sin(180^0 - A)\cos(180^0 - b) = \sin(180^0 - C)\cos(180^0 - B) - \cos(180^0 - C)\sin(180^0 - B)\cos(180^0 - a),$$

buradan da

$$-\sin A \cos b = -\sin C \cos B - \cos C \sin B \cos a$$

bərabərliyini alarıq. Sonuncu bərabərlikdən isə,

$$\sin A \cos b = \sin C \cos B + \cos C \sin B \cos a$$

olmasını alarıq.

TƏRƏFİN KOSİNUSU DÜSTURLARININ TƏRSİ OLAN DÜSTURLAR (BUCAĞIN KOSİNUSU DÜSTURLARI)

Bu düsturlar üç bucaq və bir tərəf arasında əlaqəni ifadə edən düsturlardır.

Düsturun polyar üçbucaqdan istifadə ilə çıxarılırşı. Verilmiş üçbucaq üçün polyar üçbucaq quraq və bu polyar üçbucaq üçün

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cdot \cos c_1 + \sin b_1 \cdot \sin c_1 \cdot \cos A_1$$

düsturunu yazaq (tərəfin kosinusu düsturu). Bu bərabərlikdə ilkin sferik üçbucağın elementlərinə keçək:

$$\cos(180^0 - A) = \cos(180^0 - B) \cdot \cos(180^0 - C) + \sin(180^0 - B) \cdot \sin(180^0 - C) \cdot \cos(180^0 - a),$$
$$-\cos A = \cos B \cdot \cos C - \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a,$$
$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \sin B \cdot \sin C \cdot \cos a.$$

Aydındır ki, eyni qayda ilə

$$\cos B = -\cos C \cdot \cos A + \sin C \cdot \sin A \cdot \cos b,$$
$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \sin A \cdot \sin B \cdot \cos c$$

düsturlarını da isbat etmək olar.

Sferik üçbucaqda bucağın kosinusu digər bucaqların sinusu və ilkin bucağın qarşısındakı tərəfin kosinusu hasili ilə digər bucaqların kosinusları hasilinin fərqinə bərabərdir.

Bucağın kosinusu düsturunun tərəfin kosinusu düsturundan istifadə ilə çıxarılırşı (polyar üçbucaqdan istifadə etmədən). Tərəfin kosinusu düsturlarına əsasən

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$
$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B,$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C.$$

$\cos c$-nin bu bərabərliklərdən üçüncüsündəki ifadəsini ilk ikisində nəzərə alaq:

$$\cos a = \cos b \cdot (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C) + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$
$$\cos b = \cos a \cdot (\cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C) + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos B$$

Bu bərabərliklərin birincisindən

$$\cos a = \cos^2 b \cdot \cos a + \cos b \cdot \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$
$$\cos a(1 - \cos^2 b) = \sin b \cdot (\cos b \cdot \sin a \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos A),$$
$$\cos a \cdot \sin^2 b = \sin b \cdot (\cos b \cdot \sin a \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos A),$$
$$\cos a \cdot \sin b = \cos b \cdot \sin a \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos A,$$

ikincisindən isə oxşar qayda ilə

$$\cos b \cdot \sin a = \cos a \cdot \sin b \cdot \cos C + \sin c \cdot \cos B$$

bərabərliyini alarıq.

Son iki bərabərlikdə

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C} = m$$

münasibətlərindən istifadə edərək

$$\sin a = m \cdot \sin A,\ \sin b = m \cdot \sin B,\ \sin c = m \cdot \sin C$$

əvəzləmələri aparsaq,

$$m \cdot \cos a \cdot \sin B = m \cdot \cos b \cdot \sin A \times \cos C + m \cdot \sin C \cdot \cos A$$
$$m \cdot \cos b \cdot \sin A = m \cdot \cos a \cdot \sin B \times \cos C + m \cdot \sin C \cdot \cos B$$

burada isə bərabərliklərin hər iki tərəfini m-ə bölməklə,

$$\cos a \cdot \sin B = \cos b \cdot \sin A \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A$$
$$\cos b \cdot \sin A = \cos a \cdot \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B$$

bərabərliklərini alarıq.

$\cos b$-nin bu bərabərliklərin ikincisinə əsasən tapılan

$$\cos b = \frac{\cos a \cdot \sin B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos B}{\sin A}$$

ifadəsini birinci bərabərlikdə nəzərə alaq:

$$\cos a \cdot \sin B = (\cos a \cdot \sin B \cdot \cos C +$$

$$+ \sin C \cdot \cos B) \cos C + \sin C \cdot \cos A$$

$$\cos a \cdot \sin B = \cos a \cdot \sin B \cdot \cos^2 C +$$

$$+ \sin C \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A$$

$$\cos a \cdot \sin B \cdot (1 - \cos^2 C) =$$

$$= \sin C \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A$$

$$\cos a \cdot \sin B \cdot \sin^2 C =$$

$$= \sin C \cdot \cos B \cdot \cos C + \sin C \cdot \cos A$$

Sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini $\sin C$-yə bölək:

$$\cos a \cdot \sin B \cdot \sin C = \cos B \cdot \cos C + \cos A.$$

Buradan isə

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \cos a \cdot \sin B \cdot \sin C$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq.

Alınmış bərabərliklər göstərir ki, sferik üçbucağın tərəfləri onun üç bucağı vasitəsilə təyin (ifadə) oluna bilər:

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cdot \cos C}{\sin B \cdot \sin C},$$

$$\cos b = \frac{\cos B + \cos C \cdot \cos A}{\sin C \cdot \sin A},$$

$$\cos c = \frac{\cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \cdot \sin B}.$$

Buradan alınır ki, verilmiş üç bucağa malik yeganə sferik üçbucaq mövcuddur.

DÖRD ELEMENT DÜSTURLARI (KOTANGENSLƏ)

Bu düsturlar sferik üçbucağın iki tərəfi, onlar arasındakı bucaq və bitişik bucaqlardan biri arasında əlaqəni ifadə edir. Bu düsturlara kotangensli düsturlar da deyilir.

Düsturun beş element düsturu və sferik üçbucağın tərəfləri ilə qarşı bucaqları arasındakı münasibətə əsaslanan çıxarılışı. Beş element düsturu və sferik üçbucağın tərəfləri ilə qarşı bucaqları arasındakı münasibətə əsasən

$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B,$$

$$\sin b \cdot \sin A = \sin a \cdot \sin B.$$

Bu iki bərabərliyi tərəf-tərəfə bölsək,

$$ctgA = \frac{\sin c \cdot ctga}{\sin B} - \frac{\cos c \cdot \cos B}{\sin B},$$

buradan da

$$ctgA \cdot \sin B = \sin c \cdot ctga - \cos c \cdot \cos B$$

bərabərliyini alarıq. Sonuncu bərabərliyi

$$\cos c \cdot \cos B = \sin c \cdot ctga - ctgA \cdot \sin B$$

kimi də yazmaq olar.

Bu cür düsturların sayı altıya bərabərdir.

Kotangensli düsturların tərəfin kosinusu düsturuna əsaslanan çıxarılışı. Tərəfin kosinusu düsturlarına əsasən

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A,$$

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos C.$$

Dörd element düsturu iki tərəf, onlar arasındakı bucaq, bitişik bucaqlardan biri – a, b, C, A elementləri arasında əlaqəni ifadə etməlidir. Yuxarıda yazılmış düsturlarda bu elementlərin hər biri iştirak edir, c elementi isə artıqdır. Bu bərabərliklərdən ikincisinin hər tərəfini $\cos b$-yə vuraq:

$$\cos b \cdot \cos c = \cos a \cdot \cos^2 b +$$

$$+ \sin a \cdot \sin b \cdot \cos b \cdot \cos C$$

Tərəf və bucaqların sinusları arasında

$$\frac{\sin c}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin A}$$

münasibətinə əsasən

$$\sin c = \frac{\sin a \cdot \sin C}{\sin A}.$$

Bu bərabərliyin hər iki tərəfini $\sin b \cdot \cos A$ hasilinə vuraq:

$$\sin b \cdot \sin c \cdot \cos A = \sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot ctgA.$$

$\cos b \cos c$ və $\sin b \sin c \cos A$ üçün alınmış düsturları

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

tərəfin kosinusu düsturunda nəzərə alsaq,

$$\cos a = \cos a \cdot \cos^2 b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos b \cdot \cos C +$$

$$+ \sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot ctgA,$$

$$\cos a \cdot (1 - \cos^2 b) = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos b \cdot \cos C +$$

$$+ \sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot ctgA,$$

$$\cos a \cdot \sin^2 b = \sin a \cdot \sin b \cdot \cos b \cdot \cos C +$$

$$+ \sin a \cdot \sin b \cdot \sin C \cdot ctgA$$

bərabərliklərinin doğru olduğunu alarıq. Sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini $\sin b$-yə bölək:

$$\cos a \cdot \sin b = \sin a \cdot \cos b \cdot \cos C +$$

$$+ \sin a \cdot \sin C \cdot ctgA$$

Nəhayət, sonuncu bərabərliyin hər iki tərəfini $\sin a$-ya bölsək,

$$\sin b \cdot ctga = \cos b \cdot \cos C + \sin C \cdot ctgA,$$

buradan da

$$\cos b \cdot \cos C = \sin b \cdot ctga - \sin C \cdot ctgA$$

düsturunun doğruluğunu alarıq.

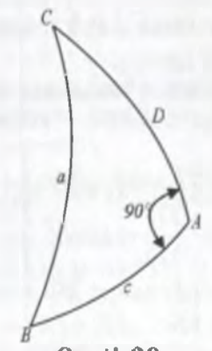
Sferik üçbucağın dörd elementi arasında əlaqəni ifadə edən bu düsturu bərabərliyin hər iki tərəfini $\cos b \cdot \cos C$ hasilinə bölməklə, aşağıdakı kimi də yazmaq olar:

$$\frac{\sin b \cdot ctga}{\cos b \cdot \cos C} - \frac{\sin C \cdot ctgA}{\cos b \cdot \cos C} = 1,$$

$$\frac{ctga}{ctgb} \cdot \frac{1}{\cos C} - \frac{ctgA}{ctgC} \cdot \frac{1}{\cos b} = 1.$$

DÜZBUCAQLI SFERİK ÜÇBUCAQLARIN HƏLLİ ÜÇÜN DÜSTURLAR

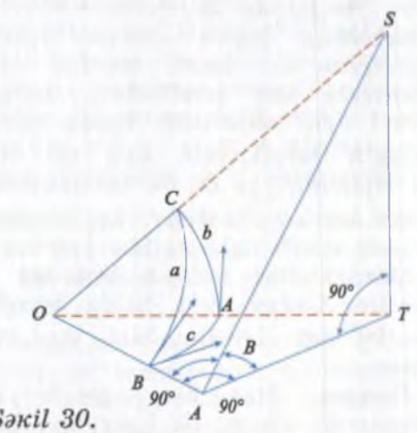
Sferik üçbucaq verilmiş üç elementinə görə birqiymətli təyin olunur. Düzbucaqlı sferik üçbucaqda elementlərdən biri (düz bucaq) məlumdur (şəkil 29) . Ona görə də düzbucaqlı sferik üçbucağın təyin olunması üçün daha iki element verilməlidir.



Şəkil 29.

Teorem (sferik Pifaqor teoremi). Sferik üçbucağın hipotenuzunun kosinusu onun katetlərinin kosinusları hasilinə bərabərdir.

İsbatı. Tutaq ki, A bucağı düz bucaq olan ABC sferik üçbucağı verilmişdir (şəkil 30). $OABC$ üçüzlü bucağının müstəvi və xətti bucaqları sferik üçbucağın elementlərini təyin edir. $OABC$ üçüzlü bucağının OB tərəfi üzərində hər hansı P nöqtəsi götürək və bu nöqtədən OB tərəfinə perpendikulyar olan PTS müstəvisi keçirək. Onda $SOPT$ tetraedrini alarıq, belə ki, tetraedrin ST tərəfi də AOB müstəvisinə perpendikulyardır (bu müstəviyə perpendikulyar olan iki müstəvinin kəsişmə xətti olduğundan; A bucağı düz bucaq olduğundan, OST müstəvisi AOB müstəvisinə perpendikulyardır). Buradan alınır ki, STP və STO üçbucaqlarının ortaq T təpəsindəki bucaqları düz bucaqdır. Bu düzbucaqlı üçbucaqların tərəfləri arasındakı münasibətlərə əsasən



Şəkil 30.

$$\frac{OT}{OS} = \cos b, \quad \frac{OP}{OT} = \cos c, \quad \frac{OP}{OS} = \cos a.$$

Bu münasibətləri

$$\frac{OP}{OS} = \frac{OT}{OS} \cdot \frac{OP}{OT}$$

bərbərliyində nəzərə alsaq,

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq.

İkinci isbat (tərəfin kosinusu düsturlarına əsaslanan).

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos A$$

tərəfin kosinusu düsturunda $\cos A = 0$ olduğunu nəzərə alsaq ($A = 90^0$ olduğundan),

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq. Bu düsturdan alınır ki, ixtiyari düzbucaqlı sferik üçbucaqda 90^0-dən böyük tərəflərin sayı cüt, 90^0-dən kiçik tərəflərin sayı isə təkdir. Həqiqətən də, $\cos a = \cos b \cdot \cos c$ bərabərliyinin doğru olması üçün, bu bərabərliyin sol tərəfi müsbət olduqda bərabərliyin sağ tərəfindəki vuruqların işarələri eyni olmalıdır, başqa sözlə, ya üçbucağın tərəflərinin üçü də 90^0-dən kiçik olmalıdır, ya da bu tərəflərdən ikisi 90^0-dən böyük olmalıdır; bu bərabərliyin sol tərəfi mənfi olduqda isə sağ tərəfdəki vuruqlardan biri müsbət biri isə mənfi olmalıdır. Deməli, bu halda tərəflərdən ikisi 90^0-dən böyük, biri isə 90^0-dən kiçikdir.

Teorem. Hər bir katetin sinusu hipotenuzun sinusu ilə qarşıdakı bucağın sinusu hasilinə bərabərdir.

İsbatı. Şəkildən göründüyü kimi (şəkil 17) ,

$$\frac{ST}{SP} = \sin B,\ \frac{SP}{SO} = \sin a,\ \frac{ST}{SO} = \sin b.$$

Bu münasibətləri

$$\frac{ST}{SP} = \frac{ST}{SO} : \frac{SP}{SO}$$

eyniliyində nəzərə alsaq,

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}$$

və ya

$$\sin b = \sin a \cdot \sin B$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq.

İkinci isbat (sferik üçbucağın tərəfləri və qarşı bucaqları arasında əlaqəyə əsaslanan). Sferik üçbucağın tərəfləri və qarşı bucaqları arasındakı

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b},\quad \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c}$$

münasibətlərində $\sin A = 1$ olduğunu nəzərə alsaq ($A = 90^0$ olduğundan)

$$\frac{1}{\sin B} = \frac{\sin a}{\sin b},\ \sin b = \sin a \cdot \sin B$$

və

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{\sin a}{\sin c},\ \sin c = \sin a \cdot \sin C$$

bərabərliklərini alarıq.

Teorem. Hər bir katetin tangensi hipotenuzun tangensi ilə ona bitişik bucağın kosinusu hasilinə bərabərdir.

İsbatı. Şəkildən də göründüyü kimi (şəkil 17)

$$\frac{PT}{PO} = tgc,\ \frac{PS}{PO} = tga,\ \frac{PT}{PS} = \cos B.$$

Bu münasibətləri

$$\frac{PT}{PO} = \frac{PS}{PO} \cdot \frac{PT}{PS}$$

eyniliyində nəzərə alsaq,

$$tgc = tga \cdot \cos B$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq.

İkinci isbat. Tərəfin sinusunun bitişik bucağın kosinusuna hasili düsturlarına baxaq:

$$\sin b \cos A = \sin c \cos a - \cos c \sin a \cos B,$$
$$\sin c \cos A = \sin b \cos a - \cos b \sin a \cos C.$$

Bu bərabərliklərdə $\cos A = 0$ olduğunu nəzərə alsaq ($A = 90^0$),

$$\sin c \cos a = \cos c \sin a \cos B,$$
$$\sin b \cos a = \cos b \sin a \cos C$$

münasibətlərinin doğru olduğunu alarıq. Son iki bərabərlikdən birincisinin hər tərəfini $\sin a \cos c$ hasilinə, ikincisinin hər tərəfini isə $\cos b \sin a$ hasilinə bölməklə

$$tgc \cdot ctga = \cos B,\ tgc = tga \cdot \cos B$$

və

$$tgb \cdot ctga = \cos C,\ tgb = tga \cdot \cos C$$

bərabərliklərini alarıq.

Teorem. Katetin tangensi digər katetin sinusu ilə qarşı bucağın tangensi hasilinə bərabərdir.

İsbatı. $SOPT$ tetraedrində (şəkil 17)

$$\frac{TS}{TO} = tgb,\ \frac{TP}{TO} = \sin c,\ \frac{TS}{TP} = tgB$$

münasibətləri doğrudur. Bu bərabərlikləri

$$\frac{TS}{TO} = \frac{TP}{TO} \cdot \frac{TS}{TP}$$

eyniliyində nəzərə alsaq,

$$tgb = \sin c \cdot tgB$$

bərabərliyinin doğru olduğunu alarıq.

Eyni üsulla

$$tgc = \sin b \cdot tgC$$

bərabərliyinin də doğru olduğunu isbat etmək olar.

Bu düsturdan alınır ki, düzbucaqlı sferik üçbucaqda katet və onun qarşısında duran bucaq eyni rübdə yerləşir.

Bu hökmü isbat etmək üçün əvvəlcə qeyd edək ki, burada tərəfləri və bucaqları 180^0-dən kiçik olan üçbucaqlara baxılır. Ona görə də $\sin b$ və $\sin c$ müsbətdir. Deməli, $tgb = \sin c \cdot tgB$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün tgb və tgB ədədləri, $tgc = \sin b \cdot tgC$ bərabərliyinin ödənilməsi üçün isə tgc və tgC ədədləri eyni işarəli olmalıdır.

VEKTORLAR VƏ ONLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR

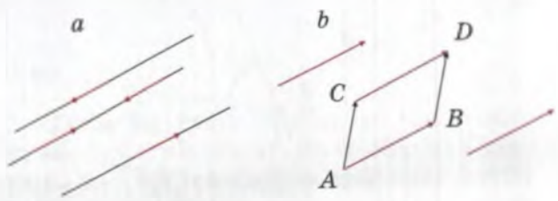
Vektor – nisbətən yeni riyazi anlayışdır. "Vektor" termini (latın vector – "daşıyıcı") ilk dəfə 1845-ci ildə irlandiyalı riyaziyyatçı və astronom Uilyam Hamiltonun (1805–1865) kompleks ədədləri ümumiləşdirən ədəd sisteminin qurulması haqqında əsərlərində işlənmişdir. "Skalyar", "skalyar hasil" və "vektorial hasili" terminləri Hamiltona məxsusdur. Onunla eyni zamanda və eyni istiqamətdə, amma başqa nöqteyinəzərə əsaslanaraq alman riyaziyyatçısı German Qrassman (1809–1877) araşdırmalar aparırdı. İngilis Uilyam Klifford iki yanaşmanı və özünə vektor hesabını da daxil edən ümumi nəzəriyyə çərçivəsində birləşdirə bildi. Amma sonuncu şəkilini o amerikan fizik və riyaziyyatçı Jozayn Uillard Qibbsin (1839–1903) əsərlərində qəbul etdi. O, 1901-ci ildə vektor analizinə həsr edilmiş geniş dərslik çap etdi.

VEKTOR NƏ DEMƏKDİR?

Vektor anlayışı qiyməti və istiqaməti ilə səciyyələnən obyektlər ilə iş zamanı yaranır. Belə obyektlərə fizikanın və riyaziyyatın müxtəlif sahələrində rast gəlmək olar. Fərz edək ki, cisim düzxəttli irəliləmə hərəkəti zamanı bir vəziyyətdən başqasına yerdəyişmə etdi. Bu yerdəyişmə cisimin keçdiyi məsafə (hər hansı nöqtənin ilk və axırıncı vəziyyətlərinin arasında məsafə hər nöqtə üçün eynidir) və yerdəyişmənin istiqaməti ilə verilir (cismin bütün nöqtələrinin birinci və axırıncı vəziyyətlərinə istiqamətlənən şüalar, eyni istiqamətlidirlər; onlardan hər birisi hərəkətin istiqamətini göstərir). "Sürət", "təcil", "qüvvə" kimi fiziki anlayışlar da istiqaməti və qiyməti ilə səciyyələnirlər (seçilmiş ölçü vahidi sistemində – ədəd ilə). Riyaziyyatda oxşar anlayış nümunəsi paralel köçürmədir (bax "Hərəkət" məqaləsinə).

Əyani surətdə istiqaməti və qiyməti istiqamətlənmiş parçanın köməyi ilə vermək olar, yəni ki AB parçası üçün verilmiş uclaların ardıcllığı məlum olur: A nöqtəsi onun başlanğıcı, B nöqtəsi isə – onun sonudur. Bu istiqamətlənmiş parça $\overline{AB}$ və ya $\vec{AB}$ kimi göstərilir. Bir hərf ilə və üstündə cizgi və ya ox ilə işarələməyi də istifadə edirlər: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$və ya $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}, \ldots$ İstiqamətlənmiş parça üçün başqa ad – vektordur. Dəqiq desək isə, bu "vektor" terminin bir mənalarından biridir. Çertyojlarda vektoru üstündə ox olan parça kimi göstərirlər. $\bar{a} = \overline{AB}$ parçasının uzunluğu a vektorun uzunluğu (və ya mütləq qiyməti və ya modulu) adlandırılır; o $|a|$ kimi işarələnir və ya sadəcə a ilə, yəni ki, eyni hərf ilə, amma üstündə xəttsiz. Vektorun istiqaməti onun başlanğıcından sonuna gedən şüanın istiqamətidir. Həmçinin sıfır vektoruna da $\overline{0} = \overline{AA}$ baxılır. Onun başlanğıcı və sonu üst-üstə düşür. Sıfır vektoru istiqamətə malik deyil.

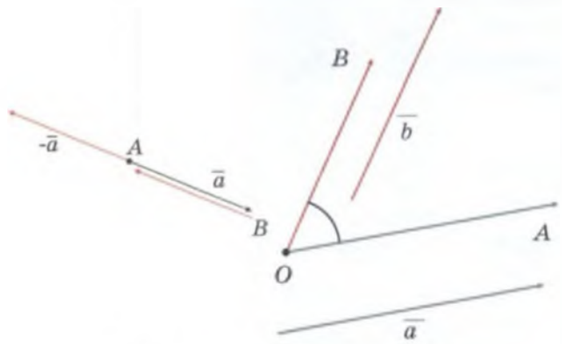
Paralel düz xətlərdə və ya eyni düz xətdə yerləşən vektorları kollinear adlandırırlar (şəkil 1*a*); sıfır vektoru istənilən vektora kollinear sayılır. Sıfıra bərabər olma- yan kollinear vektorların istiqamətləri üst- üstə düşə bilər və ya bir-birinə qarşılıqlı əks ola bilərlər. Uyğun olaraq belə vektorları eyni istiqamətli ya da əks istiqamətli adlandırırlar.



Şəkil 1.

İndi isə vektor cəbri üçün çox vacib bir tərifi verək: eyni uzunluğa və istiqamətə malik olan vektorlar bərabərdir (şəkil 1*b*). Əgər AB və CD bərabər vektorları bir düz xətdə yerləşmirlərsə, onda onların ucları $ABCD$ paralleloqramı təşkil edirlər, ona görə $AB = CD$ yalnız o zaman doğrudur ki, əgər $AB \uparrow\uparrow CD$ və $|AC| = |BD|$ olsun. Vektorların bərabərlik anlayışı parçanın müstəvidə və ya fəzada yerləşməsindən uzaqlaşmağa, istiqamət və uzunluğu "təmiz şəkildə" seçməyə imkan verir.

Yuxarıda verilmiş tərifdə bərabər vektorlar tamamilə bərabərhüquqlu və qarşılıqlı əvəz edilənlər kimi göstərilib. Bu həmçinin başqa vektorlara aid olan digər anlayış və faktlara aiddir. Məsələn, eyni uzunluğa, amma əks istiqamətlərə malik olan iki vektoru qarşılıqlı əks vektorlar adlandırırlar (şəkil 2). $\bar{a}$ vektoruna əks olan vektor $-\bar{a}$ kimi göstərilir; xüsusi halda, $-AB = BA$, amma BA vektoruna bərabər olan hər hansı vektor da AB qarşılıqlı əksdir. $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlar arası bucaq, onlara bərabər olan $OA = \bar{a}$ və $OB = \bar{b}$ ortaq O başlanğıclı vektorlar arasında AOB bucağının qiyməti kimi müəyyən edilir (şəkil 3). Biz görə bilərik ki, AOB bucağın qiyməti O nöqtəsinin seçimindən asılı deyil. Qeyd edək ki, verilmiş hər hansı O nöqtəsi üçün elə bir M mövcuddur ki, (və həmçinin yeganə şəkildə) hansı üçün $OM = \bar{a}$ olur, burada $\bar{a}$ – verilmiş vektordur. Onda deyirlər ki, M nöqtəsi $\bar{a}$ vektorunun O nöqtəsindən hərəkəti ilə yaranır.



Şəkil 2. *Şəkil 3.*

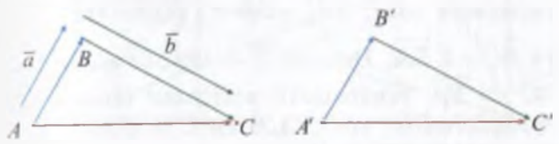
Vektor cəbrində bərabər vektorların tamamilə qarşılıqlı əvəz olmasına xüsusi əhəmiyyət vermək və həmçinin bir neçə məntiqi narahatlıqlardan qurtulmaq üçün (məsələn, sıfır vektorların çoxluğu – AA, BB və s.) sərbəst vektor anlayışını daxil edirlər. Sərbəst vektor öz aralarında bərabər olan bütün istiqamətləndirilmiş parçalar sinfinə uyğundur (bu halda bərkidilmiş vektorlar adlandırırlar) və tamamilə uzunluq və istiqamət ilə səciyyələndirilirlər. Riyaziyyatda geniş yayılmış üsuldan istifadə edərək, sərbəst vektoru tez-tez bərabər bərkidilmiş vektorlar sinfi kimi seçirlər. Vektorlar üstündə əməliyyatlar və vektorların koordinatları, əslində, sərbəst vektorlar üçün müəyyən edilməyinə baxmayaraq, adətən bu və ya başqa sərbəst vektoru təqdim edən hansısa bir (və ya bir neçə) istiqamətlənmiş vektor ilə iş aparırlar. Bununla belə, daima yadda saxlayırlar ki, onları bərabərlər ilə əvəz etmək olar.

Fizikada və riyaziyyatda təkcə vektorun qiymət və istiqaməti deyil, həmçinin onun tətbiq nöqtəsi də vacib olan məsələlərə tez-tez rast gəlmək olur. Məsələn, maqnit sahəsinin gərginliyi onun hansı nöqtədə ölçülməsindən asılıdır. Statikada isə qüvvə tətbiq olunduğu nöqtə qüvvənin istiqamətinə parallel olan düz xətt boyunca sürüşə bilər. Amma onu kənara sürüşdürsək, artıq yekun təsir başqa olacaq. Belə vektorial kəmiyyətlərin riyazi modeli sürüşən vektordur, yəni, bütün istiqamətlənmiş və öz aralarında bərabər olan parçaların məcmusu verilmiş düz xətt üzərində başlanğıcı ilə veriləndir.

VEKTORLAR CƏBRİ

Tutaq ki, $\bar{a}$ və $\bar{b}$ – iki vektordur. $\bar{a}$ vektorunu ixtiyari seçilmiş A nöqtəsindən çəkək, yəni, elə bir B nöqtəsini tapaq ki, $AB = \bar{a}$ olsun (şəkil 4). Sonra isə B nöqtəsindən $\bar{b}$ vektorunu çəkək – elə bir C nöqtəsi tapaq ki, $BC = \bar{b}$ olsun. Asanlıqla göstərmək olar ki, AC vektoru A nöqtəsinin seçimindən asılı deyil: əgər başqa bir əsas A' nöqtəsini götürsək və yuxarıda təsvir olunmuş üsul ilə $A'C'$ vektorunu qursaq, onda o AC vektoruna bərabər olacaq. Bu vektor $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorların cəmi adlandırılır və $\bar{a} + \bar{b}$ kimi

işarə olunur. Başqa sözlə, hər hansı üç A,B,C nöqtəsi üçün üç nöqtə qaydası düzdür:



Şəkil 4.

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

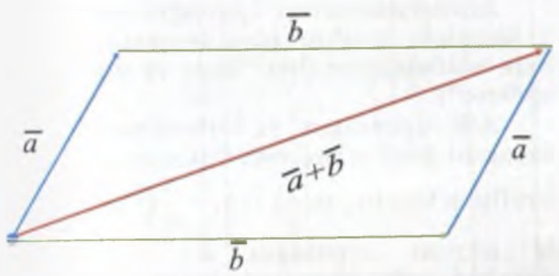
Məşhur üçbucaq bərabərsizliyi vektor dilində belə yazılır:

$$\left|\overline{AB}\right| - \left|\overline{BC}\right| \le \left|\overline{AC}\right| \le \left|\overline{AB}\right| + \left|\overline{BC}\right|$$

Yəni, hər hansı iki $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektoru üçün:

$$|\bar{a}| - |\bar{b}| \le |\bar{a} + \bar{b}| \le |\bar{a}| + |\bar{b}|$$

Əgər $\bar{a}$ və $\bar{b}$ sıfra bərabər olmayan vektorlar kollinear deyillərsə, onda onların cəmini paraleleloqram qaydası ilə tapmaq asandır (şəkil 5). Bir neçə $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ vektorların cəmini tapmaq üçün, onları bir-birinin ardınca elə qurmaq lazımdır ki, sonra gələn vektorun başlanğıcı əvvəlkinin sonu ilə üst-üstə düşsün. O zaman "tamamlayan" vektor – yəni ki birincisinin başlanğıcını axırıncısının sonu ilə birləşdirən $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n$ vektorlarının cəmi olacaq (şəkil 6). Qeyd edək ki, sonuncu nəticə vektorların ardıcıllığından asılı deyil.



Şəkil 5.

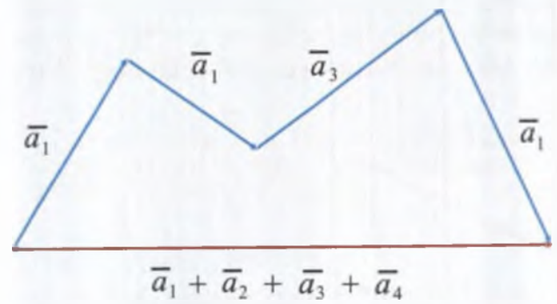
Vektorların cəminin əsas xassələrini göstərək:

1) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;

2) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$;

3) $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$;

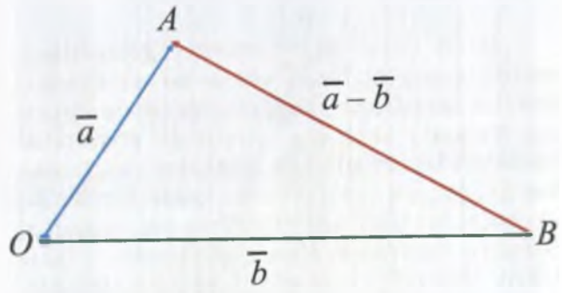
4) $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$



$$\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \bar{a}_4$$

Şəkil 6.

Vektor $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ vektoru $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorların fərqi adlandırılır. Həndəsi şəkildə $\bar{a} - \bar{b}$ vektorunu qurmaq üçün, hər hansı bir O nöqtəsindən $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarını çəkmək kifayətdir; əgər $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$ (şəkil 7), onda $\bar{a} - \bar{b}$ fərqi BA-a bərabərdir.



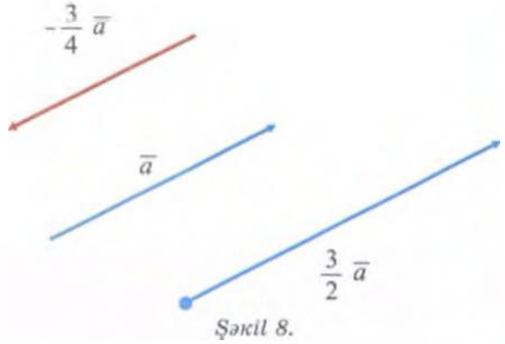
Şəkil 7.

Daha bir vacib əməllərdən biri vektorun ədədə vurulmasıdır. Bu əməliyyat $\bar{a}$ vektoruna və λ həqiqi ədədinə aşağıdakı şərtlər ilə müəyyən edilən $\bar{b} = \lambda\bar{a}$ vektorunu qarşı qoyur:

1) $\bar{b}$ vektorun uzunluğu $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ bərabərdir, yəni ki $|\lambda\bar{a}| = |\lambda|\cdot|\bar{a}|$; xüsusi halda, əgər $\bar{b} = \bar{0}$, onda $\bar{a} = \bar{0}$ və ya $\lambda = 0$.

2) əgər $\bar{b} = \lambda\bar{a} \neq \bar{0}$, onda $\lambda > 0$ olarsa, o, $\bar{a}$ vektoru ilə eyni istiqamətə malikdir, əgər $\lambda < 0$ – onda əks istiqamətdədir (şəkil 8).

Yuxarıda göstərilmiş toplamanın dörd xassəsinə vektorlar və ədədlər üstündə əməllər ilə bağlı olan daha dörd xassəni əlavə etmək olar. Bu xassələr hər bir $\bar{a}$, $\bar{b}$ və hər bir λ və μ həqiqi ədədləri üçün doğrudur:



Şəkil 8.

5) $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$;

6) $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$;

7) $\bar{a}(\lambda + \mu) = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$;

8) $1\cdot\bar{a} = \bar{a}$

Qeyd edək ki, yuxarıda göstərilmiş səkkiz xassə birlikdə vektorun ən ümumi tərifini təşkil edir. Toplama və ədədə vurulma əməlləri verilmiş, yuxarıda göstərilən xassələri təmin edən elementlərə malik olan hər bir çoxluq vektor fəzası adlandırılır. Bu mənada, ədədlər ardıcıllığı və ya, məsələn, parçada kəsilməz olan funksiyalar, "abstrakt" vektorlar – vektor fəzasının elementləri kimi gözdən keçirilə bilər.

DÜZ XƏTT ÜZƏRİNDƏ ÜÇ NÖQTƏ

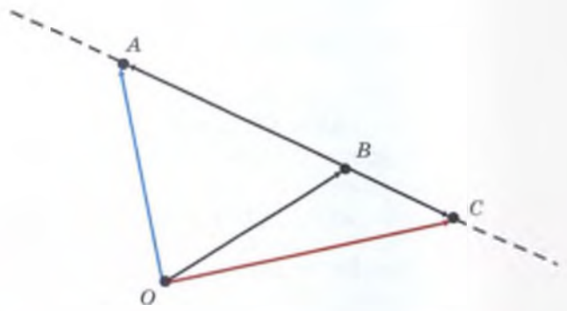
Həndəsə məsələlərinin həllində vektorlar cəbrinin işlənilməsinin əsasında aşağıdakı iki təklif dayanır:

1) əgər $\bar{a} \neq 0$ şərti ilə, $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları kollineardırsa, onda elə bir λ mövcuddur ki, $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.

2) C nöqtəsi AB düz xəttində (şəkil 9) yalnız o zaman yerləşə bilər ki, əgər elə bir λ ədədi mövcuddur ki, istənilən O nöqtəsi üçün:

$$\overline{OC} = \lambda\overline{OA} + (1-\lambda)\overline{OB} \qquad (*)$$

Doğrudan da, (*) bərabərliyini belə dəyişdirmək olar: $\overline{OC} - \overline{OB} = \lambda\left(\overline{OA} - \overline{OB}\right)$ və ya $\overline{BC} = \lambda\,\overline{BA}$. Deməli, 1-ci təklifə əsasən, o $\overline{BC}$ və $\overline{BA}$ vektorların kollinear olması ilə eynigüclüdür; yəni, A,B və C nöqtələri bir düz xətt üzərindədir.



Şəkil 9.

Bu mühakimədən görünür ki, əgər C nöqtəsi AB parçasını m/n nisbətində bölürsə, yəni ki $AC/CB=m/n$, onda (*) düsturunda $\lambda = n/(n+m)$, deməli

$$\overline{OC} = \frac{n}{n+m}\overline{OA} + \frac{m}{n+m}\overline{OB}$$

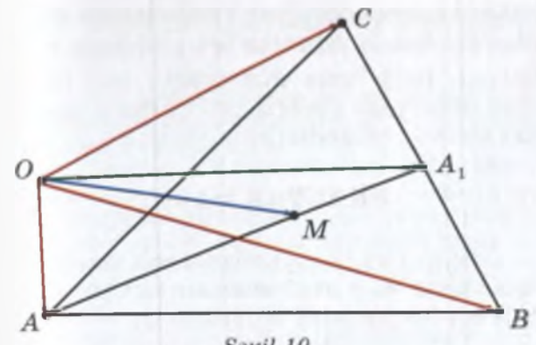
Xüsusi bir halda, əgər C AB parçasının ortasıdırsa, onda

$$\overline{OC} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB}\right)$$

Alınan düsturları üçbucağın medianları haqqında məşhur olan teoremin isbatı üçün istifadə edək (bax "Sadə və tükənməz üçbucaq").

ABC üçbucağını və sərbəst seçilmiş O nöqtəsini gözdən keçirək. Tutaq ki, A_1 – BC tərəfin ortasıdır, onda $\overline{OA_1} = \frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right)$.

M nöqtəsi üçbucağın AA_1 medianını $AM:MA_1 = 2:1$ nisbətində bölür (şəkil 10). (**) düsturuna görə,



Şəkil 10.

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\overline{OA_1} =$$

$$= \frac{1}{3}\overline{OA} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overline{OB} + \overline{OC}\right)\right)$$

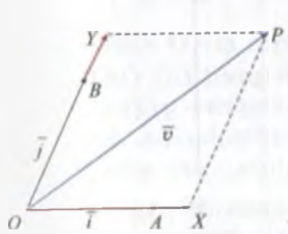
və ya

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$$

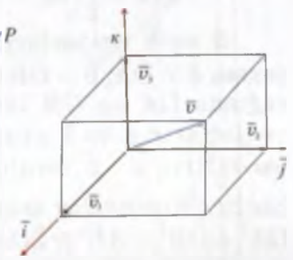
Bu düstur A, B və C-yə nəzərən simmetrikdir və ona görə başqa iki medianı 2:1 nisbətində bölən nöqtələr üçün də düzdür. Deməli, üç median bir nöqtədə kəsişirlər və göstərilmiş nisbətdə bölünürlər.

VEKTORUN KOORDİNATLARI

Tutaq ki, $\bar{i} = \overline{OA}$ və $\bar{j} = \overline{OB}$ – müstəvidə iki kollinear olmayan vektorlardır (şək. 11). Bu müstəvidə ixtiyari $\bar{v} = \overline{OP}$ vektorunu gözdən keçirək. Fərz edək ki, X və Y uyğun olaraq, OA və OB düz xətlərində elə bir nöqtələrdir ki, uyğun olaraq $PX \| OB$ və $PY \| OA$. $\overline{OA}$ və $\overline{OX}$, $\overline{OB}$ və $\overline{OY}$ cüt-cüt kollinear olduğuna görə, elə x və y ədədləri var ki, onlar



Şəkil 11.



Şəkil 12.

ÜÇBUCAĞIN HƏNDƏSƏSİ VƏ VEKTORLAR

Vektorların köməyi ilə üçbucağın bir neçə maraqlı xassəsini isbat etmək olar. ABC üçbucağının xaricinə çəkilmiş çevrənin O mərkəzindən onun təpələrinə vektorlar çəkək. Bu vektorların cəmini O nöqtəsindən çəkək (bax şəklə). Tutaq ki, H – çəkilmə zamanı alınan elə bir nöqtədir ki,

$$\overline{OH} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} \qquad (*)$$

Göstərək ki, H – üçbucaqlının hündürlüklərini kəsişmə nöqtəsidir (ortomərkəz). Qeyd edək ki,

$$\overline{AH} = \overline{OH} - \overline{OA} = \overline{OB} + \overline{OC},$$

$$\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$$

O nöqtəsindən bütün təpələrə məsafənin bərabər olmasına görə (onlar üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin R radiusuna bərabərdirlər)

$$\overline{AH}\cdot\overline{BC} = \left(\overline{OC} + \overline{OB}\right)\cdot\left(\overline{OC} - \overline{OB}\right) =$$

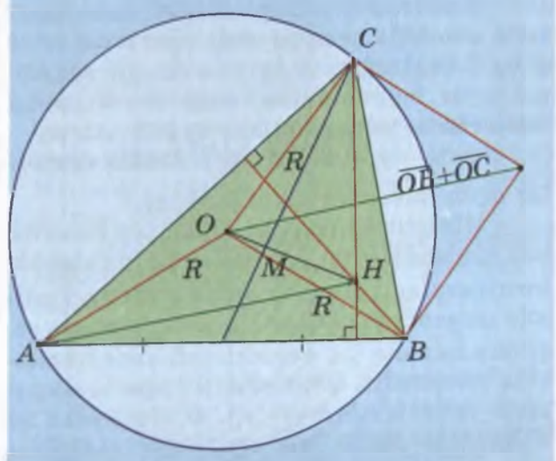
$$= OC^2 - OB^2 = R^2 - R^2 = 0$$

yəni $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ və deməli, AH və BC parçaları perpendikulyardırlar və deməli, H, A təpəsindən çəkilmiş hündürlük üzərində yerləşir. Elə bu üsul ilə H nöqtəsinin iki başqa hündürlük üzərində yerləşdiyi isbat edilir.

İndi isə xatırlayaq ki, M – ABC üçbucağın medianlarının kəsişmə nöqtəsidir, onda:

$$\overline{OM} = \frac{1}{3}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}\right)$$

(hər bir O nöqtəsi üçün, həmçinin xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzi üçün də). Bu bərabərliyi (*) ortomərkəz üçün olan düstur ilə müqayisə edərkən, tapırıq ki: $\overline{OH} = 3\overline{OM}$. Başqa sözlə, M nöqtəsi OH parçasında yerləşir və onu $OM:MH = 1:2$ nisbətində bölür. OH parçası Eyler düz xətti adlandırılır.



üçün $\overline{OX} = x\overline{OA} = x\bar{i}$ və $\overline{OY} = y\overline{OB} = y\bar{j}$ şərtləri ödənir. Buradan:

$$\bar{v} = \overline{OP} = \overline{OX} + \overline{OY} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

Beləliklə, əgər müstəvidə iki kollinear olmayan $\bar{i}$ və $\bar{j}$ vektorları verilmişsə, onda istənilən $\bar{v}$ vektorunu belə bir cəm şəkilində göstərmək olar:

$$\bar{v} = x\bar{i} + y\bar{j}$$

burada x və y – həqiqi ədədlərdir. Aydındır ki, $\overline{OX}$ və $\overline{OY}$ uyğun olaraq $\bar{i}$ və $\bar{j}$ vektorlarına kollinear vektorlardır və onların cəmi $\bar{v}$-yə bərabərdir. Deməli, axırıncı bərabərlikdə x və y ədədləri birqiymətli təyin olunub.

x və y ədədləri $\bar{v}$ vektorun $\bar{i}$ və $\bar{j}$ bazisinə görə koordinatları adlandırırlar. Bu belə yazılır: $\bar{v}(x;y)$.

Oxşar olaraq, əgər $\bar{i}$, $\bar{j}$ və $\bar{k}$ – fəzada üç komplanar olmayan (yəni, bir müstəviyə parallel olmayan) vektordurlar, onda hər bir sərbəst $\bar{v}$ vektorunu yeganə qayda ilə $\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \bar{v}_3$ cəmi kimi yazmaq olar, burada $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ və v_3 vektorları uyğun olaraq $\bar{i}$, $\bar{j}$ və $\bar{k}$ vektorlarına kollineardırlar (şəkil 12). Buradan belə bir nəticəyə gələ bilərik ki, fəzada hər bir $\bar{v}$ vektoru birqiymətli olaraq elə üç x,y və z həqiqi ədədi təyin edir ki:

$$v = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

x,y,z ədədlərini $\bar{v}$ vektorun $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ bazisinə görə koordinatları adlandırırlar.

Vektorlar üzərində əməlləri koordinatlarla asanlıqla yazmaq olar: əgər müstəvidə $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları (x_1,y_1) və (x_2,y_2) koordinatlarına malikdilərsə, onda $\bar{a} + \bar{b}$ və $\lambda\bar{a}$ vektorların koordinatları uyğun olaraq – $(x_1 + x_2; y_1 + y_2)$ və $(\lambda x_1; \lambda y_1)$. Fəzada vektorlar üçün düsturlar da oxşardılar.

Müstəvinin ixtiyari O nöqtəsi (koordinat başlanğıcı) və $\bar{i}$, $\bar{j}$ bazisi bu müstəvidə koordinatlar sistemini əmələ gətirir. Verilmiş sistemdə A nöqtəsinin koordinatları seçilmiş bazisdə $\overline{OA}$ vektorunun koordinatlarına bərabərdir. Qeyd edək ki, əgər A nöqtəsinin koordinatları (x_1,y_1), B nöqtəsinin isə – $(x_2;y_2)$, onda $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$ olduğuna görə, $\overline{AB} - (x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Tamamilə oxşar olaraq fəzada da koordinatlar müəyyən edilir.

Müstəvidə xüsusən, vahid uzunluqlu, cüt-cüt perpendikulyar vektorlardan ibarət olan $\bar{i}$, $\bar{j}$ bazisi rahatdır (və ya fəzada $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ bazisı). Belə bazis düzbucaqlı, ona uyğun olan koordinat sistemi isə – dekart koordinat sistemi adlandırılır.

SKALYAR HASİL

$(x_1;y_1)$ və $(x_2;y_2)$ düzbucaqlı koordinatları olan $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının skalyar hasili belə bir həqiqi ədəd adlandırılır:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Birbaşa tərifdən çıxır ki, vektorların skalyar hasilinin aşağıdakı xassələri var:

1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;

2) $\bar{a} \cdot (\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$;

3) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;

4) $\bar{a} \cdot \bar{a} = x^2 + y^2 = |\bar{a}|^2$

burada $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ – ixtiyari vektorlardır, λ – ixtiyari həqiqi ədəddir, $(x; y)$ – $\bar{a}$ vektorun düzbucaqlı koordinatlarıdır. 1–3 xassələri ədədlər üzərində əməllərin xassələrinə çox oxşayır və buradan belə çıxır ki, vektor ifadələri üzərində adi cəbri ifadələri üzərində aparılan çevirmələri aparmaq olar. Məsələn, iki vektorun fərqinin skalyar kvadratını tapaq:

$$(\bar{a} - \bar{b})^2 = (\bar{a} - \bar{b}) \cdot (\bar{a} - \bar{b}) =$$

$$= \bar{a} \cdot \bar{a} - \bar{a} \cdot \bar{b} - \bar{b} \cdot \bar{a} + \bar{b} \cdot \bar{b} =$$

$$= (\bar{a})^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + (\bar{b})^2$$

Dördüncü xassəni nəzərə alaraq, skalyar hasili vektorların uzunluqları və vektorların fərqləri vasitəsilə ifadə edə bilərik:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \frac{1}{2}\left(|\bar{a}|^2 + |\bar{b}|^2 - |\bar{a} - \bar{b}|^2\right)$$

$\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarını bir O nöqtəsindən çəkək, $\bar{a} = \overline{OA}$, $\bar{b} = \overline{OB}$ (şəkil 13). OAB üçbucağında OA və OB tərəfləri uyğun olaraq vektorların a və b uzunluqlarına, AB tərəfi isə onların $|\bar{a} - \bar{b}|$ fərqinin uzunluğuna bərabərdir. Kosinuslar teoreminə uyğun olaraq $OA^2 + OB^2 - AB^2 = 2OA \cdot OB \cdot \cos\varphi$, burada $\varphi = \angle AOB$. Bu düsturu skalyar hasil üçün axırıncı ifadə ilə müqayisə edərək, biz onun daha bir maraqlı xassəsini alırıq:

DÜZBUCAQLI KOORDİNATLARDA DÜZ XƏTTİN VƏ MÜSTƏVİNİN TƏNLİKLƏRİ

Nöqtədən düz xəttə qədər məsafəni və düz xəttin tənliyinin koordinat düsturunu almaq üçün skalyar hasildən istifadə edirik.

Tutaq ki, l – müstəvidə düz xəttdir, Oxy – düzbucaqlı koordinat sistemidir. $(a;b)$ koordinatları ilə l düz xəttinə perpendikulyar olan $\bar{n}$ vektorunu gözdən keçirək (belə vektor düz xəttə çəkilən normal adlandırılır). Düz xətdə hər hansı $A(x_0;y_0)$ nöqtəsini qeyd edək və müstəvidə hər hansı bir $P(x; y)$ nöqtəsini götürək (bax şəklə). P-dən l düz xəttinə qədər r məsafəsi P-dən l-ə çəkilmiş perpendikulyarın uzunluğuna bərabərdir və ya AP parçasının l-ə perpendikulyar olan düz xətt üzərindəki proeksiyasına bərabərdir. Amma bu uzunluq $|AP\cos\varphi|$-ə bərabərdir, burada φ – $\overline{AP}$ və $\bar{n}$ vektorları arasında bucaqdır (φ kor bucaq olsa burada modul işarəsi lazımdı). Skal- yar hasilin 5-ci xassəsinə görə $AP\cos\varphi = \frac{\overline{AP} \cdot \bar{n}}{n}$. $\overline{AP}$ vektorunun koordinatları $(x - x_0; y - y_0)$, normalın uzunluğu isə $n = \sqrt{a^2 + b^2}$. Buradan, skalyar hasilin koordinat tərifindən istifadə edərək, biz belə bir düstur alırıq:

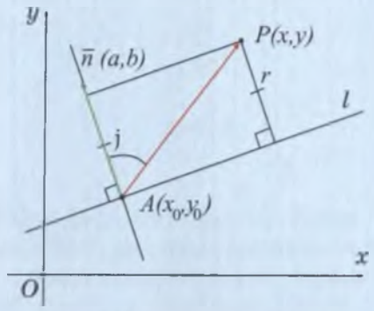
$$r = \frac{|a(x - x_0) + b(y - y_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} =$$

$$= \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

burada $c = -(ax_0 + by_0)$. P nöqtəsi yalnız o zaman l düz xəttinin üstündə yerləşə bilər ki, əgər r məsafəsi 0 bərabərdir, yəni $ax + by + c = 0$ bərabərliyi düz olanda burada a və b eyni zamanda 0-a çevrilməyirlər (çünki $n \neq 0$). Bu düz xəttin müstəvidə koordinat şəklində göstərilmiş tənliyidir.

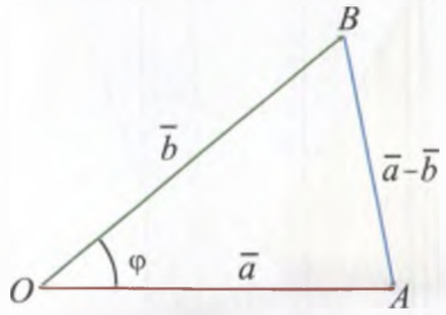
Oxşar qaydada isbat edilir ki, düzbucaqlı koordinatlarda hər hansı müstəvi $ax + by + cz + d = 0$ tənliyi ilə ifadə edilir, burada $(a;b;c) \neq (0;0;0)$ – müstəviyə çəkilmiş normalın koordinatlarıdır. Və əksinə belə şəkilli hər bir tənlik bizə müstəvini verir. $P(x; y; z)$ nöqtəsindən bu müstəviyə qədər r məsafəsi isə bu düstür vasitəsilə hesablanır:

$$r = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



5) $\bar{a} \cdot \bar{b} = ab\cos\varphi$, burada φ – $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlar arasında bucaqdır.

5-ci xassə bütövlükdə onu göstərir ki, skalyar hasil vektorların "həndəsəsi" ilə yəni, onların uzunluğu və istiqaməti ilə tam müəyyən edilir. Biz onu koordinatlar vasitəsilə daxil etdiyimizə baxmayaraq, o düzbucaqlı koordinat sisteminin seçimindən asılı deyil. Bu xassəni skalyar hasil kimi tez-tez qəbul edirlər.



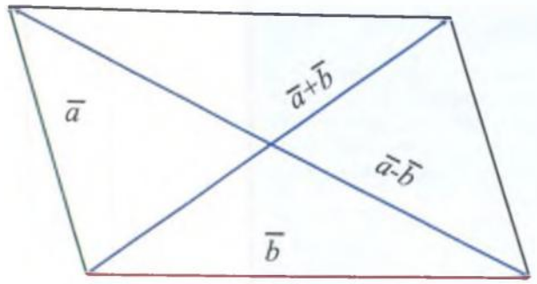
Şəkil 13.

Həmçinin 5-ci xassədən məlum olur ki, $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ bərabərliyi yalnız o zaman ola bilər ki, $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları qarşılıqlı perpendikulyar olsun (0 vektoru hər hansı başqa vektora perpendikulyar sayılır). Deməli, bizim üçün adi olan ortaq vuruğa ixtisar etmək skalyar hasil qanunsuzdur: $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{c} \cdot \bar{b}$ bərabərliyindən təkcə $\bar{a} - \bar{c}$ vektorunun $\bar{b}$ vektoruna perpendikulyarlığı kimi nəticəyə gəlmək olar, amma $\bar{a} = \bar{c}$ bərabərliyi nəticəsinə gəlmək olmaz.

Həndəsi teoremanın vektor vasitəsi ilə isbatının daha bir nümunəsini göstərək. Bu bərabərliyi asanlıqla yoxlamaq olar:

$$(\bar{a} + \bar{b})^2 + (\bar{a} - \bar{b})^2 = 2(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)$$

Həndəsi dildə (şəkil 14) o paraleleloqram bərabərliyi adlanan bir bərabərliyə çevrilir: paraleleloqramın diaqonallarının kvadratları cəmi onun bütün tərəflərinin kvadratları cəminə bərabərdir.



Şəkil 14.

Vektorların fəzada skalyar hasili müstəvidəki kimi müəyyən edilir. Əgər düzbucaqlı bazisdə $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları $(x_1; y_1; z_1)$ və $(x_2; y_2; z_2)$ koordinatlarına malikdirlərsə, onda onların skalyar hasili bərabərdir:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Yuxarıda göstərilmiş 1–5 xassələri fəzada vektorlar üçün də ödənilir; düzbucaqlı koordinatlar $(x; y; z)$ ilə $\bar{a}$ vektorun uzunluğu artıq bu düsturla hesablanır:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

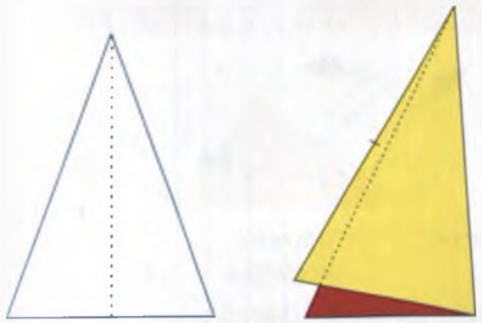
ÇOXÜZLÜ HƏNDƏSƏ

HƏRƏKƏT

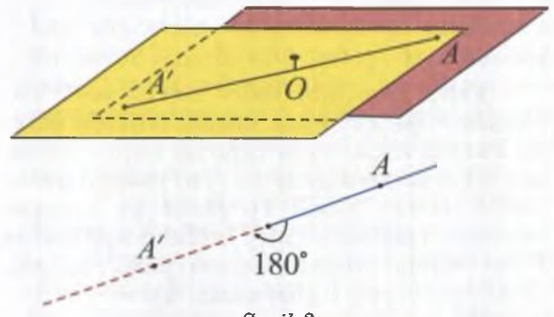
Qədim yunan riyaziyyatçısı Fales teoremlərin isbatı üçün hərəkətdən istifadə edirdi (bax "Fales və ilk isbatlar" məqaləsinə). Misal üçün, bərabəryanlı üçbucağın iki – yarı bölünmüş hissəsi ox simmetriyasının köməyi ilə yəni, çertyoju əyməklə üst-üstə salınır (təpə bucağının tənbölənina görə; şəkil 1). Nəticə kimi, buradan alınır ki, bərabəryanlı üçbucağın oturacağında yerləşən bucaqlar bir-birinə bərabərdilər.

Belə mühakimədə, biz təsəvvür edirik ki, üçbucağın bir yarısı bərk cisim kimi hərəkət edir, yəni, nöqtələr arasında məsafə dəyişmir və ikinci yarısı ilə üst-üstə düşür. Əgər çevirmə zamanı nöqtələr arasında məsafə dəyişmirsə, onda belə bir çevirmə hərəkət adlanır (çevirmənin başqa növləri haqqında bax "Həndəsə və çevirmə qrupları" məqaləsinə). Biz deyirik ki, iki fiqur o zaman bərabərdilər ki, onları hərəkət vasitəsi ilə üst-üstə salmaq olar. Xüsusi halda, oxa nəzərən simmetrik olan fiqurlar bərabərdirlər; çünki ox simmetriyası hərəkətin bir növüdür. Məsələn, diametr ilə bölünən dairənin iki yarısı, diametrə nəzərən simmetrik olduqlarına görə bərabərdirlər (bu faktdan bir neçə nəticəni siz "Çevrə və dairə" məqaləsində görə bilirsiniz).

Fales həmçinin hərəkətin başqa bir növündən, dönmədən də istifadə edirdi. Məsələn, qarşılıqlı bucaqların bərabərliyini isbat etmək üçün, o şəkil müstəvisini hansısa O nöqtəsinin ətrafında 180° döndərirdi. Belə

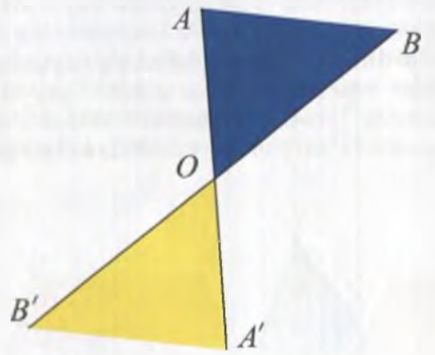

Şəkil 1.

bir dönmə zamanı (onu həm də O mərkəzli və mərkəzi simmetriya adlandırırlar) hər A nöqtəsi belə bir A' nöqtəsinə keçir ki, O nöqtəsi AA' parçasının ortasıdır (şəkil 2). O nöqtəsindən çıxan hər hansı şüa əks şüaya keçir, yəni, şüa O başlanğıcı keçən əsas şüa ilə bir düz xətt yaradır.



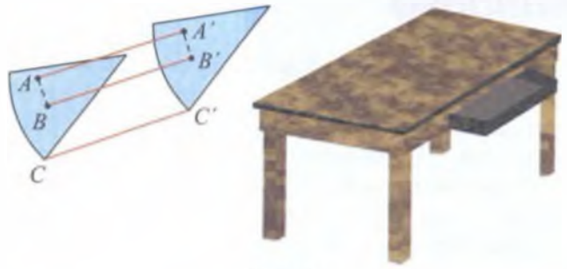
Şəkil 2.

Fales belə fikirləşirdi: Tutaq ki, O – AOB və $A'OB'$ qarşılıqlı bucaqların ortaq təpəsidir. Şəkil müstəvisini O nöqtəsi ətrafında 180° dərəcəyə döndərək. Onda OA şüası ona əks istiqamətli olan OA' şüasına, OB şüası isə – ona əks olan OB' şüasına keçəcək (şəkil 3). Deməli AOB bucağı $A'OB'$ qarşılıqlı bucağa keçir. Beləliklə, iki bucaqdan biri



Şəkil 3.

başqası ilə dönmə nəticəsində üst-üstə düşür. Dönmə hərəkətin bir növü və qarşılıqlı bucaqlar bərabər olduğuna görə, hər bir fiqur dönmə zamanı ona bərabər olan fiqura keçir.



Şəkil 4.

Fales həmçinin daha bir hərəkət növündən – paralel köçürmədən istifadə edirdi. Paralel köçürmədə fiqurun bütün nöqtələri müəyyən istiqamətdə eyni məsafə qədər yerini dəyişir (şəkil 4). Məhz bu hərəkət növünün vasitəsilə Fales indiki dərsliklərdə Fales teoremi adlanan teoremi isbat etmişdi. Onun mahiyyəti budur (şəkil 5):

✓ **Əgər bucağın bir tərəfində bərabər parçalar ayırsaq və bu parçaların uclarından bucağın ikinci tərəfi ilə kəsişən paralel düz xətlər keçirtsək, onda bucağın ikinci tərəfində də bərabər parçalar alınar.**

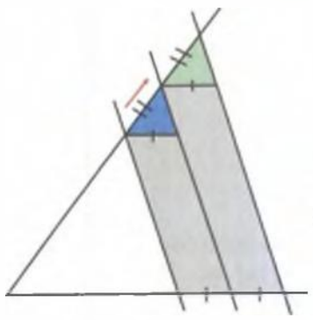
Fales gördü ki, qonşu paralel düz xətlər bucaqdan paraleloqram və üçbucağa bölünə bilən trapesiya kəsir. Teoremin isbatı üçün bütün belə üçbucaqların bərabərliyini isbat etmək lazım idi. Və həqiqətən də onlar bərabərdilər, çünki bir üçbucaq başqasından hərəkət vasitəsilə əmələ gəlib. Əgər dəqiqləşdirsək, məhz bucağın ikinci tərəfi istiqamətdə paralel köçürmə ilə əmələ gəlib.

Beləliklə biz hərəkətin üç növü ilə tanış olduq – *ox* simmetriyası, dönmə (mərkəzi simmetriyasının nümunəsində) və paralel köçürmə ilə. Sonra isə biz onların vasitəsi ilə müxtəlif həndəsi məsələlərin həllini göstərəcəyik. Hərəkətin daha bir növü var – bu, sürüşən simmetriyadır. Bu çevirmənin mənası ondadır ki, ardıcıllıqla – əvvəlcə *ox* simmetriyası həyata keçirilir, sonra isə simmetriya oxu istiqamətində paralel köçürmə (şəkil 6). Hərəkətin başqa növləri varmı? Ola bilərmi ki, bir neçə dönməni müxtəlif mərkəzlər ilə və ya dönməni ox simmetriyası ilə birləşdirsək yeni bir hərəkət növü yaransın? Məlum oldu ki, xeyr! *XIX* əsrdə fransız həndəsə alimi Mişel Şal isbat etdi ki:

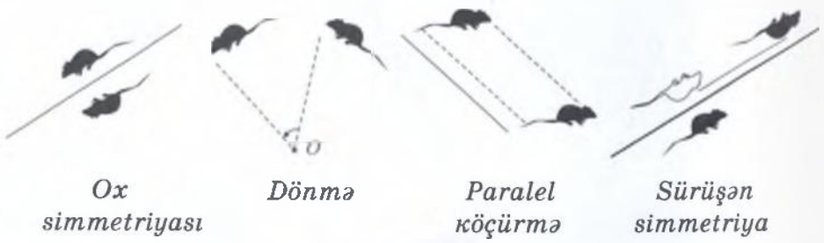
✓ **Müstəvinin hər bir hərəkəti ya ox simmetriyasıdır, ya dönmədir, ya paralel köçürmədir, ya da sürüşən simmetriyadır.**

Məsələn, ardıcıllıq ilə həm dönməni, həm köçürməni həyata keçirtsək, biz başqa mərkəz ilə, amma, yenə də eyni bucaq qədər dönmə alarıq, dönmə ilə sürüşən simmetriya isə nəticədə başqa ox ilə sürüşən simmetriyanı verəcək. Bundan başqa, əgər müstəvidə ixtiyari fiqur çəksək, sonra isə kağızdan onun surətini kəssək, bundan sonra isə bu surəti müstəvinin üstünə təsadüfi bir şəkildə qoysaq (yuxarı hər hansı tərəfi ilə), biz həmişə orijinalı surəti ilə Şalın teoremində sayılmış hərəkətin bir növü ilə üst-üstə sala bilərik.

Həndəsənin başa düşülməsində hərəkətin fundamental rolunu (və ümumiyyətlə



Şəkil 5.

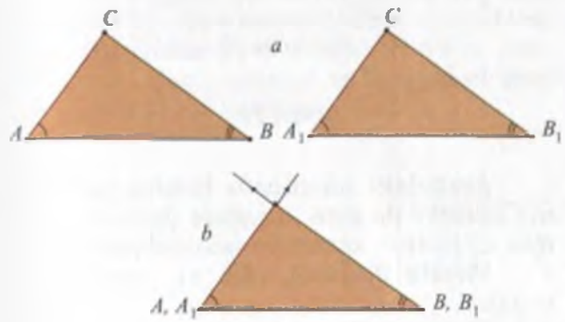


Şəkil 6.

həndəsi çevirmələrin) *XIX* əsrin alman riyaziyyatçısı Felikс Klein açdı (bax "Həndəsə və çevirmələr qrupları" məqaləsinə).

Amma qədim dünyanın riyaziyyatına qayıdaq. Əgər Falesin fikirləri həndəsənin müasir anlamasına Klein üslubunda yaxındılarsa, amma Evklid, öz "Başlanğıc"ında teoremlərin isbat üsullarına və məsələlərin həll edilməsini tamamilə başqa nəzər-nöqtəsinə sahib idi. Evklidin üsulunun əsası üçbucaqların bərabərliyi idi.

Lakin, əvvəllər, üçbucaqların bərabərlik əlamətlərini isbat edəndə, Evklid hərəkət idyeasından istifadə edirdi. Məsələn, üçbucaqların bərabərliyinin ikinci əlamətinə görə, əgər iki üçbucaq bir bərabər tərəfə və ona bitişik olan iki bərabər bucağa malikdirlərsə, onda onlar bərabərdir. Evklid isbatı aşağıdakı üsul ilə aparırdı. Tutaq ki, ABC və $A_1B_1C_1$ üçbucaqlarında AB və A_1B_1 tərəfləri və bucaqları A və A_1, B və B_1 (şəkil 7*a*) bərabərdirlər. $A_1B_1C_1$ üçbucağını ABC üçbucağın üstünə elə qoyaq ki, AB və A_1B_1 bərabər tərəfləri üst-üstə düşsünlər, bununla belə A_1 nöqtəsi A nöqtəsi ilə, B_1 nöqtəsi B nöqtəsi ilə üst-üstə düşsünlər, üçbucaqlar isə $AB=A_1B_1$-in bir tərəfində yerləşsinlər (şəkil 7*b*). O zaman bucaqların bərabərliyinə görə uyğun olaraq, hər üçbucağın başqa iki tərəfini özündə saxlayan şüalar da üst-üstə düşəcəklər və ona görə C və C_1 nöqtələri də onların kəsişmə nöqtəsinə düşərlər, yəni üçbucaqlar bütün təpələri ilə üst-üstə düşürlər. Beləliklə, bu üçbucaqlar bərabərdirlər.



Şəkil 7.

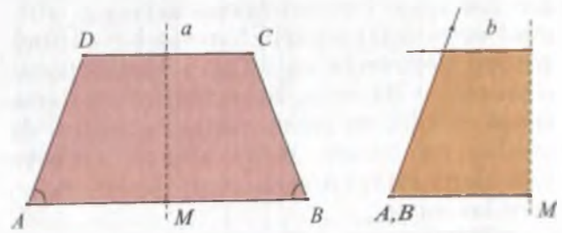
Amma "bir üçbucağı başqasının üstünə qoymaq", onu bərk bir cisim kimi köçürmək, yəni, hərəkəti tətbiq etmək deməkdir! Burada və həmçinin üçbucaqların bərabərliyinin başqa əlamətlərinin isbatı zamanı, Evklid Fales ideyalarına əsaslanırdı. Amma Evklid "üstünə qoyma" anlayışı müəyyən etməməsinə görə, onun aksiomatikasının çərçivəsində bu ciddi isbatlar deyildi, bunlar təkcə gündəlik təcrübəni istifadə edən aydınlaşdırılmalar idi.

Amma necə ki, artıq üçbucaqların bütün bərabərlik əlamətləri isbat edildi və aydınlaşdırıldı, Evklid artıq öz "Başlanğıcında" məhz onları sonrakı isbatların əsasına qoymuşdur. Artıq bütün düşüncələri hərəkətləri yada salmadan ("üstünə qoymalar") daha da ciddi aparmağa çalışırdı.

Nümunə kimi eyni məsələnin Evklid və Falesa görə həllərini müqayisə edək.

Məsələ 1. *ABCD* trapesiyasında aşağı oturacağa bitişik olan bucaqlar bərabərdilər. Trapesiyanın yan tərəflərinin bərabərliyini isbat etməli.

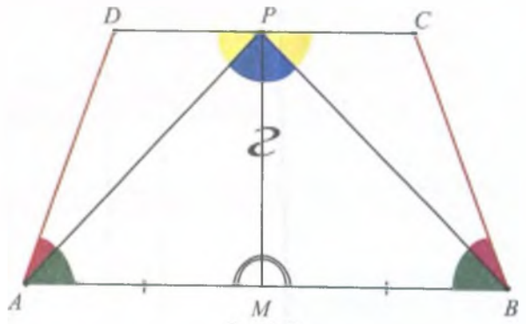
Fales belə mühakimə aparırdı. Aşağı oturacağa onun ortasından perpendikulyar çəkək (şəkil 8*a*). Şəkil çəkilmiş düz xəttə nəzərən simmetrikdir. Başqa sözlə, əgər biz şəkli verilmiş düz xəttə görə əysək, onda aşağı oturacağın yarıları üst-üstə düşəcəklər və ona görə (aşağı oturacaqda bucaqların bərabərliyinə görə) yan tərəflər A və B təpələrin düşdüyü bir nöqtədən keçən şüanın üzərində olacaq (şəkil 8*b*). Yuxarı oturacağın da hissələri eyni şüada yerləşəcəklər. Deməli yuxarı oturacağın C və D ucları bu şüaların kəsişmə nöqtəsinə düşəcəklər. Beləliklə, trapesiyanın yan tərəfləri üst-üstə gələcəklər, yəni onlar bərabərdirlər.



Şəkil 8.

Evklid üslublu isbat başqa cürdür. AB aşağı oturacağa onun M ortasından perpen-

dikulyar çəkək. Yuxarı oturacaq ilə perpendikulyarın kəsişmə nöqtəsini P ilə göstərək (şəkil 9). AP və BP parçalarını çəkək. O zaman $\Delta AMP = \Delta BMP$ üçbucaqları iki tərəf və aralarındakı bucağa görə bərabər olacaqlar (AM və BM tərəfləri qurmaya görə bərabərdilər, MP tərəfi ortaqdır, AMP və BMP bucaqları isə bərabərdirlər, çünki onlar düz bucaqlardır). Deməli bu üçbucaqların başqa elementləri də bərabərdilər – yaşıl bucaqlar, göy bucaqlar, AP və PB tərəfləri də, onlara bitişik olan bucaqlar da uyğun olaraq bərabərdirlər (əgər bir-birinin arasında bərabər olan trapesiyanın oturacağında yerləşən bucaqlardan bərabər yaşıl bucaqları çıxsaq, onda qalan çəhrayı bucaqlar da bərabər olacaqlar; oxşar qaydada sarı bucaqların da bərabərliyi təsdiq olunur). Deməli ADP və BCP üçbucaqları üçbucaqların bərabərliyinin ikinci əlamətinə görə bərabərdirlər. Deməli, verilmiş üçbucaqların başqa elementləri də uyğun olaraq, bərabərdirlər. Xüsusi halda – trapesiyanın yan (qırmızı) tərəfləri də bərabərdirlər.



Şəkil 9.

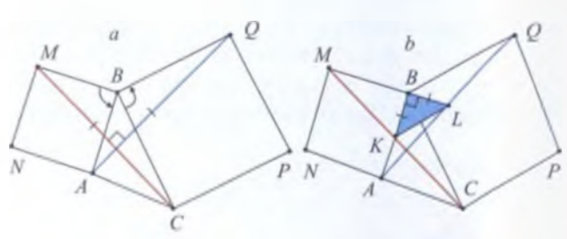
Belə bir mühakimə Evklid üçün tipikdir: hər hansı həndəsi faktın müəyyən edilməsi üçün üçbucaqların hansısa bir cütünü gözdən keçirtmək və onların bərabərliyini isbat etmək lazımdır, sonra isə üçbucaqların başqa cütünü və lazım olarsa üçüncünü də gözdən keçirtmək, lazım olunan nəticəyə nail olana kimi bu əməliyyatı davam etdirmək lazımdır.

Həndəsədən hər hansı dərslikdə siz çoxlu sayda teoremlərin isbatları və məsələlərin həllini üçbucaqların bərabərlik əlamətlərinin əsasında tapa bilərsiz – həndəsənin Evklid ənənəsi indiyə kimi yaşayır. Amma eyni cavablara biz həndəsi çevirmələr vasitəsilə də çata bilərik. Falesə əsaslanaraq həll etdiyimiz daha bir neçə məsələni gözdən keçirək.

Məsələ 2. ABC üçbucağının AB və BC yan tərəflərində, ondan xaricdə $ABMN$ və $BCPQ$ kvadratları çəkilib. CM və QA parçalarının perpendikulyar və bərabər olduqlarını isbat etmək lazımdır (şəkil 10*a*).

Bizə CM parçasını QA parçasına keçirən 90°-li dönməni isbat etmək kifayətdir. Nəticə kimi C nöqtəsinin Q nöqtəsinə keçməsi üçün 90°-lik iki dönmə mövcuddur: B mərkəzi ətrafında (saat əqrəbinin əksinə) və P ətrafında (saat əqrəbi istiqamətində). Aydındır ki, B ətrafında dönmə zamanı M nöqtəsi A-ya düşür. Məhz bizə lazım olan elə bu idi: göstərilmiş dönmə CM parçasını QA parçasına keçirir, deməli bu parçalar bərabər (dönmə – hərəkətdir) və perpendikulyardır (dönmə bucağı 90°-yə bərabərdir).

Bu həldən birbaşa olaraq göstərilən fiqurun diqqətə layiq olan başqa xüsusiyyətlərini də çıxartmaq olar. Məsələn, əgər K və L – müvafiq olaraq CM və AQ parçalarının ortalarıdırsa (şəkil 10*b*), onda BKL üçbucağı – düzbucaqlı və bərabəryanlıdır (çünki K nöqtəsi L nöqtəsinə B ətrafında 90° dönmə zamanı keçir).



Şəkil 10.

Aşağıdakı nümunədə biz bir çevirmənin köməyi ilə eyni zamanda paraleleloqramın üç məlum xassəsini isbat edəcəyik.

Məsələ 3. İsbat edin ki, paraleleloqramda:

1) diaqonalların kəsişmə nöqtəsi onları yarıya bölür;

2) qarşı tərəflər bərabərdilər;

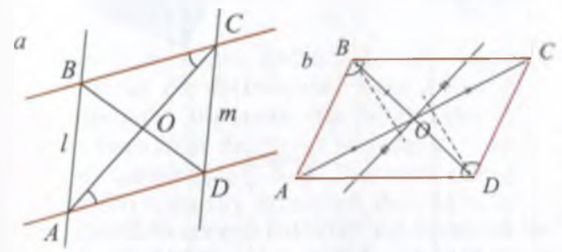
3) qarşı bucaqlar bərabərdilər.

Bizə ox simmetriyasının aşağıdakı sadə xassəsi lazım olacaq:

✓ **Əgər l və m düz xətləri hansısa O nöqtəsinə nəzərən simmetrikdirsə, onda onlar paraleldirlər (və ya üst-üstə düşürlər).**

Bu xassə onun nəticəsidir ki, l və m düz xətlərinin ortaq nöqtələrinin çoxluğu O-ya nisbətdə simmetrikdirlər, iki müxtəlif nöqtədən isə təkcə bir düz xətt keçirtmək olar.

Tutaq ki, indi $ABCD$ paraleleloqramdır. Onun daxilində AC diaqonalını çəkək və O nöqtəsini onun ortası kimi işarələyək (şəkil 11*a*). O-ya nəzərən simmetriyaya görə



Şəkil 11.

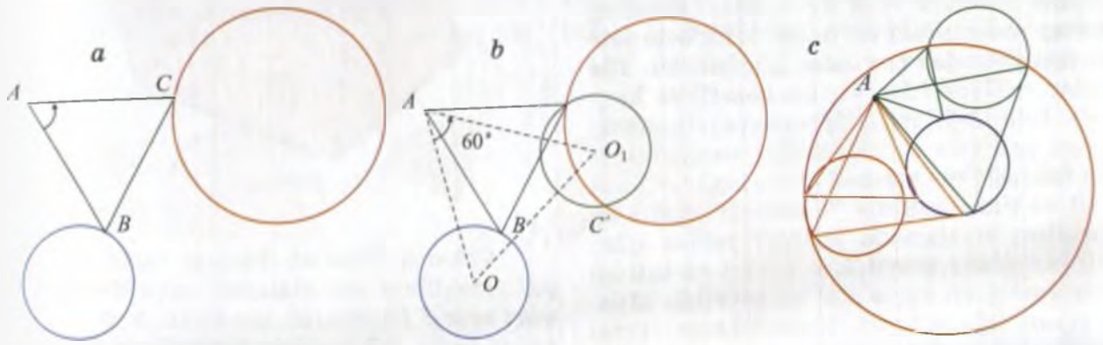
$l=AB$ düz xətti C nöqtəsindən keçən ona paralel olan m düz xəttinə keçir. Amma paraleloqramın tərifinə görə onun qarşı tərəfləri paralleldilər; deməli $m=CD$, yəni, AB və CD O-ya nəzərən simmetrikdirlər. Eyni qayda ilə AD və BC düz xətləri O-ya nəzərən simmetrikdirlər. Belə nəticə çıxır ki, paraleloqram bütövlüklə O nöqtəsinə nəzərən simmetrikdir. Yəni, təkcə A və C təpələri yox, həmçinin B və D təpələri də O-ya nəzərən simmetrikdirlər, BD diaqonalı isə O nöqtəsindən keçir və yarıya bölünür. Birinci xassə isbat edildi. O-ya nəzərən simmetriya zamanı hər tərəf qarşı tərəfə keçir, bunun nəticəsi isə ikinci xassədir, hər bucaq isə – qarşıdakı bucağa keçir, bununla da üçüncü xassə isbat edilir.

Eyni zamanda biz birbaşa paraleloqramın O nöqtəsinə nəzərən simmetrikliyindən daha iki təklif alırıq: 4) paraleloqramın qarşı bucaqlarının tənbölənləri paraleldirlər; 5) O nöqtəsindən keçən hər hansı düz xətt, paraleloqramın tərəflərini bu nöqtədə yarıya bölünən parça üzrə kəsir (şəkil 11*b*).

Hərəkətin tətbiqi – qurma məsələlərinin ən effektiv həll üsullarından biridir. Buna biz aşağıdakı nümunə əsasında əmin ola bilərik.

Məsələ 4. Bir təpəsi verilmiş A nöqtəsində, başqa ikisi isə – uyğun olaraq iki verilmiş çevrədə yerləşən bərabərtərəfli üçbucağı qurun.

Tutaq ki, ABC – bizim axtardığımız üçbucaqdır. Onun bərabərtərəfli olduğuna görə A nöqtəsinin ətrafında 60° dönməsindən sonra B nöqtəsi C nöqtəsinə keçəcək. Amma B nöqtəsi verilmiş iki çevrədən birində yerləşməlidir (bizim şəklimizdə – mavidə). Ona görə B surəti, yəni, C mütləq mavi çevrənin keçdiyi fiqurda olmalıdır; bu çevrə eyni radiuslu çevrədir (şəkildə o yaşıldır; şəkil 12*b*). Amma şərtə görə C ikinci verilmiş çevrədə yerləşir – qırmızıdadır. Beləliklə, C qırmızı və yaşıl çevrələrin kəsişmə nöqtəsidir. İndi artıq biz bilirik ki, C-ni necə qurmaq olar (deməli həm də B-ni). Bizə yaşıl çevrəni keçirtmək kifayətdir (onun mərkəzi O_1-dir – göstərilmiş dönmə zamanı



Şəkil 12.

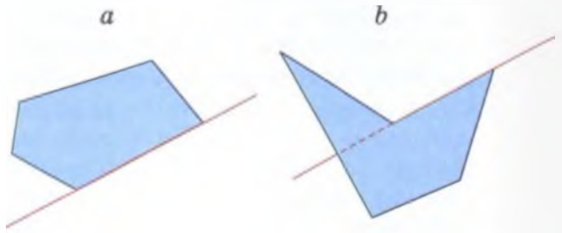
mavi çevrənin O mərkəzinin surətidir və AOO_1 bərabərtərəfli üçbucağın təpəsi kimi çəkilir). Onda C qırmızı və yaşıl çevrələrin kəsişmə nöqtəsidir. İki çevrə ya iki, ya bir ümumi nöqtəyə malik ola bilər, ya da heç birinə malik olmaya bilər. Uyğun olaraq göstərilmiş qurmanın da o qədər həlli var. Amma məsələnin həlli zamanı, həmçinin onu da nəzərə almaq lazımdır ki, biz dönmənin təkcə bir mümkün istiqamətini gözdən keçirtdik (saat əqrəbinin əksinə). Amma ABC üçbucağı təkcə o zaman bərabərtərəfli ola bilər ki, C nöqtəsi B nöqtəsinə saat əqrəbi istiqamətində $60°$ dönmə zamanı keçsin. Deməli bizim məsələnin dörd həlli ola bilər.

Göstərilmiş məsələlər hərəkətin istifadəsinin başqa halları ilə (bax "Qurma məsələləri" məqaləsinə) birlikdə bizə onu göstərir ki, həndəsənin bütün təklifləri həm üçbucaqların bərabərlik əlamətləri vasitəsilə, həm də hərəkətlər vasitəsilə isbat oluna bilərlər. İkinci üsul daha asandır. Bundan başqa, ümumiyyətlə simmetriya, hərəkət, çevirmə ideyaları müasir fizika və riyaziyyatın bölünməz hissəsinə çevrilmişdir (bax "Həndəsə və çevirmələr qrupu" məqaləsinə).

QABARIQ FİQURLAR

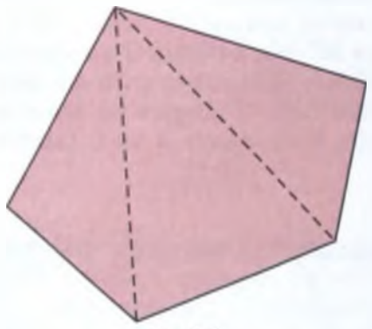
Qabarıq fiqurlar nəzəriyyəsi XIX və XX əsrin qovşağında alman riyaziyyatçısı German Minkovski tərəfindən yaradılıb. Qabarıq fiqurların xassələri haqqında onun tərəfindən isbat edilmiş incə teoremlər çoxlu sayda riyaziyyatçıların marağını cəlb etdi. Amma bəziləri yeni nəzəriyyəyə tənqidi yanaşdılar. Onlar elə hesab edirdilər ki, fizika, texnika və elmin başqa "tətbiqi" sahələri üçün vacib olan istiqamətlər, riyaziyyatda ən vacib rolu oynayırlar. Qabarıq fiqurlar nəzəriyyəsi isə onlar üçün belə tətbiqi məsələlərdən çox uzaq görünürdü. Elə alimlər də tapıldılar ki, bu nəzəriyyə haqqında belə dedilər: – Minkovskinin nəzəriyyəsi çox incə və qəşəngdir, amma tamamilə faydasız bir həndəsi oyuncaqdır. Yüz il keçdi və Minkovskinin "oyuncağı" elmin ən qabaqdakı sıralarında istifadə edilən qüvvətli bir silaha çevrildi, o nəzəri və tətbiqi riyaziyyatın ən vacib alətinə çevrildi. Müasir riyazi iqtisadiyyat, idarəetmənin riyazi nəzəriyyəsi və elmin başqa istiqamətləri tamamilə qabarıq fiqurların nəzəriyyəsinin anlayışlarına, ideyalarına və üsullarına əsaslanırlar. Bu anlayış və ideyalar ilə tanış olaq.

Qabarıq fiqurlar haqqında ilk təsəvvürümüzü biz çoxbucaqlıları gözdən keçirərək ala bilərik. Əgər, çoxbucaqlı hər hansı tərəfin daxil olduğu düz xətdən tamamilə bir tərəfdə yerləşirsə, onda o qabarıq adlandırılır (şəkil 1a). Qabarıq olmayan çoxbucaqlıda isə



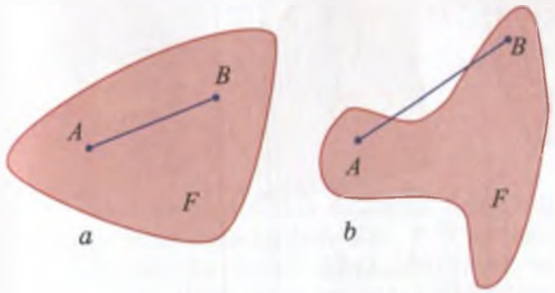
Şəkil 1.

ən azı onun bir tərəfini davam etdirsək, o fiquru hissələrə böləcək (şəkil 1b). Əgər n-bucaqlı qabarıqdırsa, onda onun bir təpəsindən keçirilmiş diaqonallar onu $n-2$ sayda üçbucağa bölürlər (şəkil 2). Deməli, onun daxili bucaqlarının cəmi $(n-2)\cdot 180°$-yə bərabərdir. Qabarıq olmayan n-bucaqlı üçün də bu düzdür, amma bunu daha çətin üsul ilə isbat etmək olar.



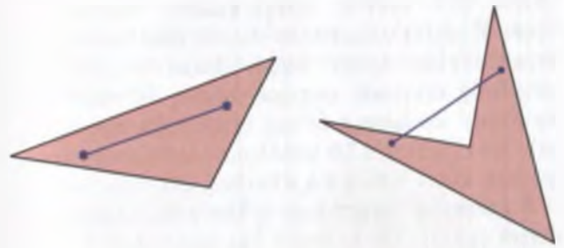
Şəkil 2.

Qabarıq fiqurun ümumi tərifi (təkcə çoxbucaqlılara aid olmayan) belə ifadə olunur: əgər F fiqurunun hər hansı A və B nöqtələri üçün AB parçası bütövlüklə F fiqurunda yerləşirsə, onda F fiquru qabarıq adlandırılır (şəkil 3a). Qabarıq olmayan F fiqurunda isə elə iki nöqtə tapılır ki, onları birləşdirən parça F fiqurunun daxilində yerləşmir (şəkil 3b). Asanlıqla isbat etmək olar



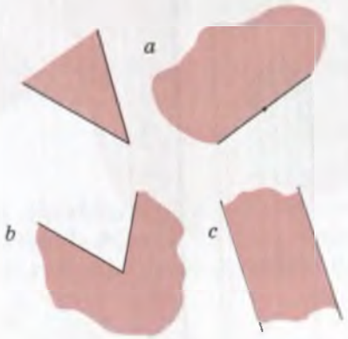
Şəkil 3.

ki, bütün üçbucaqlar qabarıqdırlar, amma eyni zamanda dördbucaqlılar həm qabarıq, həm də qabarıq olmayan ola bilər (şək.4). Dairə və həmçinin dairənin seqmenti – qabarıq fiqurlardır (şəkil 5a). Dairənin sektoru (şəkil 5b) qabarıq olmayan da ola bilər



Şəkil 4.

(əgər onun mərkəz bucağı $180°$-dən çoxdursa). Həmçinin məhdud olmayan (sonsuzluğa uzananlar) qabarıq fiqurları da gözdən keçirirlər: iti və açıq bucaqlar – qabarıq fiqurlardır (şəkil 6a), açıq bucaqdan böyük olan bucaq isə (şəkil 6b) – qabarıq olmayan fiqurdur. Zolaq da (iki parallel düz xəttin arasında yerləşən müstəvinin hissəsi) həmçinin məhdud olmayan qabarıq fiqurdur.

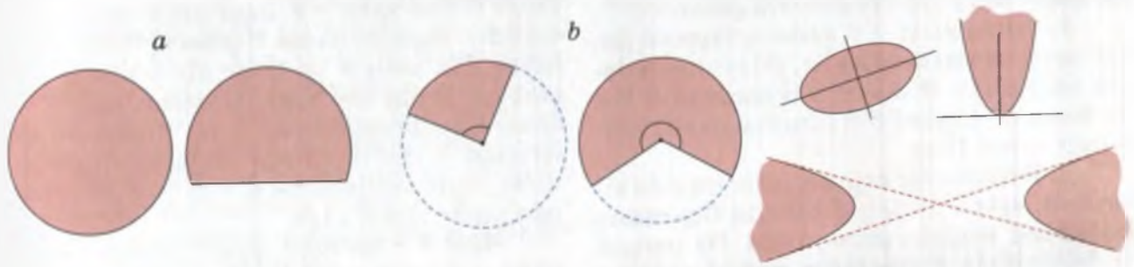


Şəkil 6.

Daha bir neçə nümunə: ellips, parabola və hiperbola ilə məhdudlaşdırılmış fiqurlar (şəkil 7). Hər bir ellips qabarıq fiquru məhdudlaşdırır. Parabola müstəvini iki hissəyə bölür, onlardan biri qabarıqdır. Hiperbolanın isə qollarından hər biri qabarıq fiquru məhdudlaşdırır, ikisi birlikdə isə qabarıq olmayan müstəvi oblastın sərhədidir.

Nöqtə və düz xəttlərin qabarıq fiqura nəzərən yerləşməsi ilə əlaqədar olan anlayışlara baxaq.

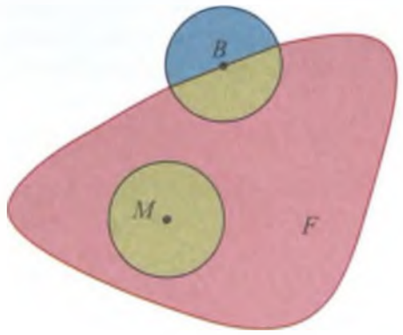
Əgər M mərkəzli və kifayət qədər kiçik radiuslu dairə bütövlüklə fiqurun daxilində yerləşirsə, onda M nöqtəsi F fiqurun daxili nöqtəsi adlandırılır (şəkil 8). Əgər hansısa B mərkəzli hər hansı bir dairə özünə həm F fiquruna məxsus olan nöqtələri və həm də F fiquruna məxsus olmayan nöqtələri də daxil edirsə, onda B, F fiqurunun sərhəd nöqtəsi adlandırılır. Bütün sərhəd nöqtələrinin çoxluğu F fiqurunun sərhədini təşkil edir



Şəkil 5.

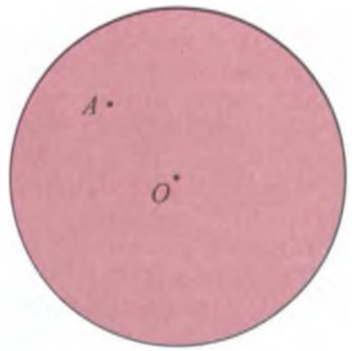
Şəkil 7.

(verilmiş təriflər həmçinin qabarıq olmayan fiqurlara da aiddir). r radiuslu açıq dairə



Şəkil 8.

(mərkəzdən r radiusundan kiçik olan məsafədə yerləşən bütün nöqtələrin çoxluğu; şəkil 9) – heç bir sərhəd nöqtəsinə malik olmayan qabarıq çoxluqdur. Ona bütün sərhəd nöqtələrini birləşdirsək qapalı dairə alarıq. Bundan sonra biz təkcə qapalı qabarıq



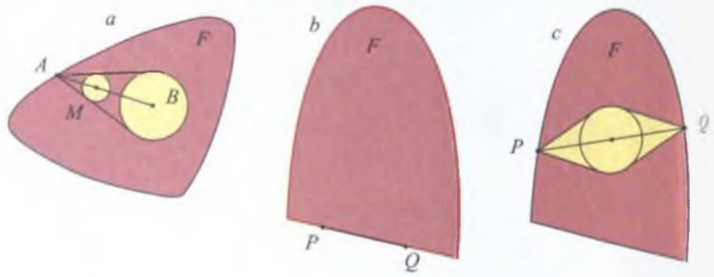
Şəkil 9.

fiqurlar haqqında yəni, özünün bütün sərhəd nöqtələrini daxil edən fiqurlar haqqında danışıcağıq.

Daxili və sərhəd nöqtələrinin iki kifayət qədər asan olan xassələrini göstərək:

1. Tutaq ki, A – F qabarıq fiqurun daxili və ya sərhəd nöqtəsidir, B isə - onun daxili nöqtəsidir. O zaman AB parçasının hər bir başqa M nöqtəsi F fiqurunun daxili nöqtəsidir (şəkil 10*a*).

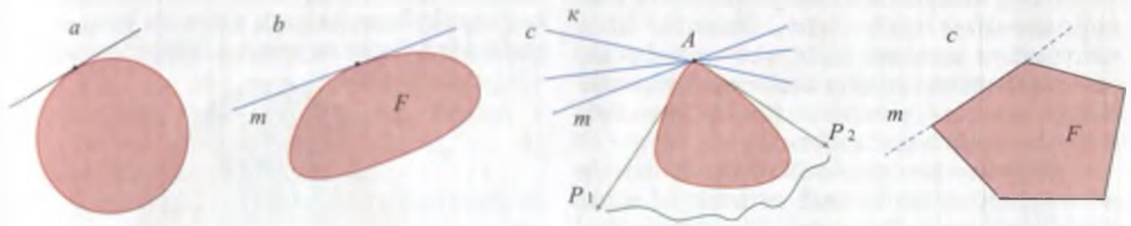
2. Buradan biz belə bir nəticəyə gələ bilərik ki, əgər P və Q – F qabarıq fiqurunun iki sərhəd nöqtələridirsə, onda PQ parçası ya bütövlüklə F fiquranın sərhəd nöqtələrindən ibarətdir (şəkil 10*b*), ya da ən azı bir daxili nöqtəyə malikdir – amma o zaman PQ parçasının uclardan başqa bütün nöqtələri F fiqurasının daxili nöqtələridir (şəkil 10*c*).



Şəkil 10.

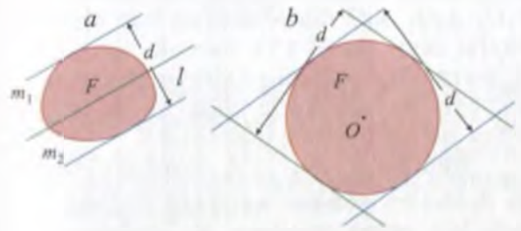
Qabarıq fiqurların dayaq düz xətləri xüsusi, vacib bir rola malikdirlər. Qabarıq müstəvi F fiquru üçün m düz xətti o zaman dayaq adlandırılır ki, əgər: birinci, m düz xətti F fiquru ilə bir ortaq nöqtəyə malikdir; ikincisi, əgər F fiquru bütövlüklə m düz xəttinə nəzərən bir yarımmüstəvidə yerləşirsə. Dayaq düz xəttini fiqurun hər hansı bir sərhəd nöqtəsindən keçirtmək olar. Məsələn, dairənin dayaq düz xətləri toxunanlarıdır (şəkil 11*a*). Onlardan hər biri verilmiş nöqtədə yeganə dayaq düz xəttidir və fiqur ilə başqa ortaq nöqtələrə malik deyil. Deyilənlər 11*b* şəkilində təsvir olunmuş m düz xətti üçün də düzdür. Amma, əgər A – F qabarıq fiqurunun künc sərhəd nöqtəsidirsə (şəkil 11*c*), onda bu nöqtədən sonsuz sayda dayaq düz xətti keçir. Dəqiq desək isə, A nöqtəsindən iki p_1 və p_2 F fiqurunun yarımtoxunan xətləri adlandırılan iki şüa çıxır. Onlar ilə təşkil olunmuş bucaq (açıq bucaqdan az olan) özünə F fiqurunu daxil edir və A nöqtəsindən keçən və bu bucaqla heç bir ortaq nöqtəyə malik olmayan hər hansı m düz xətti – F fiqurunun dayaq düz xəttidir. Bundan başqa F qabarıq fiqurunun dayaq düz xətti F ilə həmçinin bütöv ortaq parçaya malik ola bilər. Məsələn, əgər F – qabarıq çoxbucaqlıdırsa, m isə – onun tərəflərindən birini daxilində saxlayan düz xətdirsə, onda verilmiş tərəf – m və F-in ortaq parçasıdır (şəkil 11*ç*).

Əgər F – məhdud qabarıq fiqur; l isə – onun müstəvisində yerləşən ixtiyari düz xətdirsə, onda l-ə paralel olan F fiqurunun iki m_1 və m_2 dayaq düz xətti mövcuddur.



Şəkil 11.

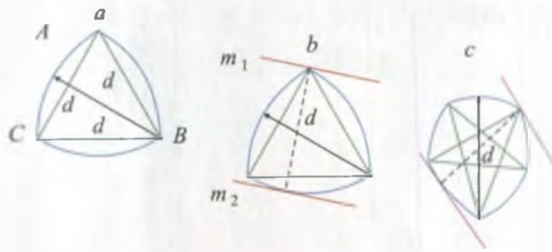
Belə fiqurlar arasında d məsafəsi l düz xəttinin istiqamətinə uyğun olan F fiqurunun eni adlandırılır (şəkil 12*a*). Aydındır ki, əgər F dairədirsə, onda onun eni bütün istiqamətlərdə eynidir – o dairənin diametrinə bərabərdir (şəkil 12*b*). Ona görə dairə – eni sabit olan fiqurdur: onun eni hər bir istiqamətdə diametrə bərabərdir. Sabit enliyə malik olan başqa fiqurlar mövcuddurmu? Başqa sözlə desək, dairədən fərqli olan hansısa qabarıq fiqur bütün istiqamətlərdə eyni ola bilərmi? İlk baxışda biz deyə bilərik ki, xeyr, ola bilməz. Amma bu təsəvvür aldadıcıdır. Sabit enliyə malik olan sonsuz çox fiqur mövcuddur! Onlardan birini *XIX* əsrdə alman mexaniki və həndəsə alimi Relo təsvir edib.



Şəkil 12.

Tərəfi d-yə bərabər olan bərabərtərəfli üçbucaq götürək, onun hər bir təpəsindən, mərkəz kimi, başqa iki təpədən keçən çevrə qövsünü çəkək. Alınan fiquru Relo üçbucağı adlandırırlar (şəkil 13*a*) və o sabit d enliyinə malikdir. Həqiqətən, hər hansı iki parallel dayaq düz xətlərindən biri üçbucağın təpəsindən keçir, ikincisi isə çevrənin qarşı qövsünə toxunur (şəkil 13*b*). Və ona görə onlar arasında məsafə qövsün radiusuna bərabərdir, yəni d-yə.

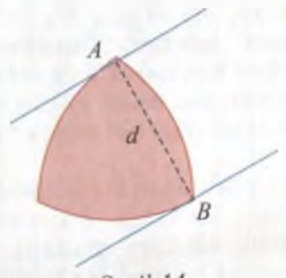
Sabit enə malik olan oxşar fiqurun eyni uzunluqlu diaqonalları olan beşbucaqlıdan da düzəltmək olar: hər təpədən mərkəz kimi istifadə edərək iki qarşı təpəni birləşdirən d radiuslu çevrə qövsünü keçirməklə



Şəkil 13.

(şəkil 13*c*). Beşbucaqlının yerinə tək sayda $(2n+1)$ tərəfi olan çoxbucaqlı götürmək olar; hansının ki, bütün "böyük" tərəflərinin d uzunluğu (n tərəflərdən onun sərhədini bağlayan hissə) eynidir. Sərhədi çevrənin qövslərindən ibarət olmayan sabit enliyə malik olan fiqurlar da mövcuddur.

Sabit enliyə malik olan fiqurun hər bir dayaq düz xətti onunla bir ortaq nöqtəyə malikdir (niyəsini özünüz fikirləşin). Bu iki paralel düz xəttin "kontakt nöqtələrini" birləşdirən parça bu düz xətlərə daima perpendikulyardır, onun uzunluğu isə fiqurun eninə bərabərdir (şəkil 14). Belə bir parçanın hər biri fiqurun diametri adlandırılır.



Şəkil 14.

Sabit enlıklı fiqurlar çoxlu sayda maraqlı xassələrə malıkdirlər. Onlardan birinin (Barbye teoremi) mahiyyəti ondadır kı, eyni d enlıklı bütün əyri xətlər eyni, dairədə olduğu kimi, πd, perimetrə (sərhəd əyri xəttinin uzunluğu) malıkdirlər.

Özünüzə bir neçə silindrık tir təsvir edin, onlardan hər birinin en kəsiyi d sabit enlıklı hər hansı fiqurdur. Belə "diyircəklərlə" hər hansı müstəvi altlıqlı əşyanın yerini dəyişdirmək olar (hamar yer üzrə və ya relslərdə). Hər tirin hündürlüyü d-yə bərabər olduğundan "silkələnmə" olmayacaq. Relo üçbucağı şəklində en kəsiyi olan burğu kvadrat şəkildə deşiklər açmağa imkan verir (amma dəyirmi uclar ilə; şəkil 15).

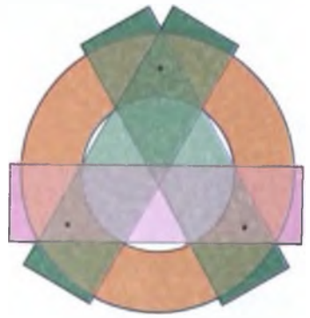


Şəkil 15.

Qabarıq fiqurlar nəzəriyyəsində ən gözəl teoremlərdən biri avstriyalı riyaziyyatçı Xelli tərəfindən verilmişdir. O bu teoremi Birinci dünya müharibəsi zamanı rus əsirliyində olan zaman isbat etdi. Xelli bu teoremini başqa əsir düşənə – Radona danışdı. Vətənə Xellidən əvvəl qayıdan Radon bu teoremin isbatını çap etdirdi (eyni zamanda qeyd etdi kı, onun müəllifi Xellidir). Sonra isə vətənə qayıdarkən Xelli, Radondakı kimi yox, öz isbatını çap etdirdi. Müstəvi fiqurlar üçün Xellinin teoremi belədir:

✓ **Tutaq kı, $M_1, M_2, \ldots, M_k$ – müstəvidə yerləşən qabarıq fiqurlardır. Əgər onlardan hər hansı üçü ortaq nöqtəyə malıkdirlərsə, onda bütün bu fiqurlara məxsus olan bir nöqtə tapılar.**

16-cı şəkildə dörd fiqur təsvir olunub – üç düzbucaqlı və halqa. Onlardan hər üçü ümumi ortaq nöqtəyə malıkdirlər, amma dördünün ortaq nöqtəsi isə yoxdur (onların kəsişməsi boşdur). Fiqurlardan biri (halqa) qabarıq olmadığına görə belə bir vəziyyət baş verdi. Əgər halqanı dairə ilə əvəz etsək, onda dörd fiqurun ortaq nöqtəsi tapılar.



Şəkil 16.

Xellinin teoremi çoxlu sayda əlavələrə malıkdir. Burada biz bir neçə nümunə göstərək. Onlardan biri hələ XIX əsrdən məlum olan bir teoremdir:

✓ **Əgər $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nöqtələrindən hər hansı üçünü r radiuslu dairə ilə örtmək olarsa, onda bütün nöqtələri birlikdə r radiuslu dairə ilə örtmək olar.**

Həqiqətən də, tutaq kı, $O - A_1, A_2, A_3$ nöqtələrini örtən dairənin mərkəzidir. Onda A_1O, A_2O, A_3O məsafələrdən hər biri r-dən böyük deyil (şəkil 17). Deməli, əgər A_1, A_2, A_3 mərkəzli r radiuslu dairələr götürsək (yaşıl, sarı və çəhrayı), onda bu üç dairə O ortaq nöqtəyə malik olacaqlar.

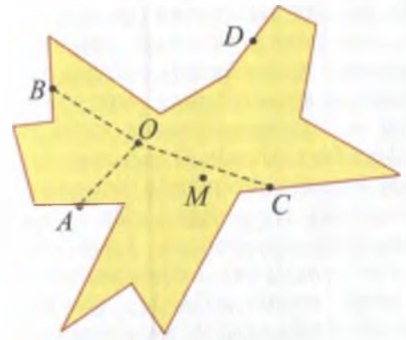
İndi isə $A_1, A_2, \ldots, A_k$ mərkəzli r radiuslu dairələri gözdən keçirək. Onlardan hər üçü bir ortaq nöqtəyə malıkdirlər. Xelli



Şəkil 17.

teoreminə görə $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mərkəzli dairələr M ortaq nöqtəyə malıkdirlər. Başqa sözlə, biz elə bir M nöqtəsini tapa bilərik kı, $MA_1, MA_2, \ldots, MA_k$ məsafələrdən heç biri r məsafəsindən böyük olmayacaq. Deməli r radiuslu dairə eyni zamanda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ nöqtələrinin hamısını daxil edir.

İkinci nümunə isə – rus riyaziyyatçısı M. Krasnoselskı tərəfindən isbat olunmuş teoremdir. Hansısa qəribə kolleksiyaçı mürəkkəb çoxbucaqlı şəklində şəkil qalereyasını düzəldib və bütün divarlarını şəkillərlə doldurub. Belə qalereyanın planını təsvir edən 18-ci şəkildə O nöqtəsindən A, B, C şəkilləri görünür, amma D şəkli isə görünmür. Krasnoselskinin teoremində deyilir:



Şəkil 18.

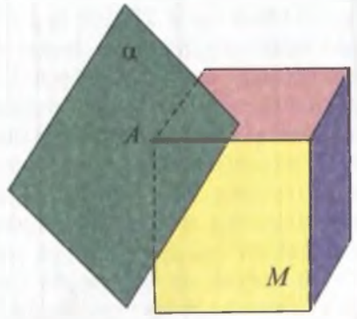
✓ **Əgər qalereyada yerləşən 3 şəklin hər birinin görünməsi üçün bir nöqtə tapılarsa, onda elə bir M nöqtəsi tapırıq kı, bu nöqtədən eyni zamanda bütün şəkillər görünür.**

Bunu Xelli teoremindən istifadə edərək isbat etməyə çalışın. Daha bir nümunə:

✓ **Müstəvidə ixtiyari şəkildə 30 nöqtə verilib. O zaman müstəvidə belə bir Q nöqtəsi tapılar kı, ondan keçən hər bir düz xəttin hər tərəfində verilmiş nöqtələrdən 10-dan az olmayan sayda nöqtə yerləşəcək.**

Xelli teoreminin başqa tətbiqi formaları da var, həmçinin tətbiqi riyaziyyat üçün də.

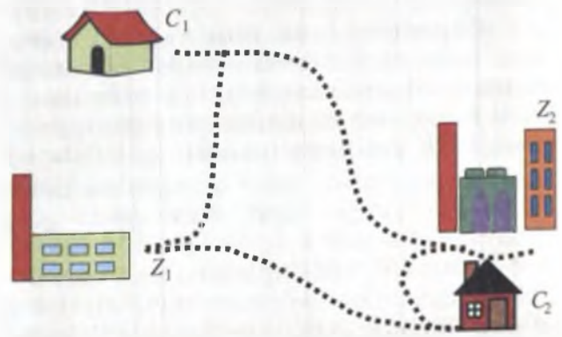
Yuxarıda göstərilmiş bütün nümunələr müstəvi həndəsəsi ilə bağlıdır. Amma qabarıq fiqurlar nəzəriyyəsi həm üçölçülü və həm də çoxölçülü fəzalarda həndəsəyə aiddir. Məsələn, əgər üçölçülü M cismi qabarıqdırsa, onda onun hər bir A sərhəd nöqtəsindən bu cisimin α dayaq müstəvisini keçirtmək olar. Bu müstəviyə nəzərən bütün M cisimi bir yarımfəzada yerləşəcəkdir (şəkil 19). Xelli teoremi, Krasnoselskinin teoremi və qabarıq fiqurların nəzəriyyəsi ilə bağlı başqa təkliflər uyğun olan düzəlişlərlə üçölçülü (həmçinin n-ölçülü) fəza üçün doğrudur.



Şəkil 19.

Minkovskinin nəzəriyyəsini riyazi məsələlərdə necə istifadə edirlər? Rus riyaziyyatçısı Leonid Vitalyeviç Kantoroviç bu gün riyazi iqtisadiyyatın bünövrəsi olan kəşflərinə görə Nobel mükafatını alıb. Onun araşdırmalarında əsas rolu qabarıq fiqurlar nəzəriyyəsi oynayırdı. Bu barədə bir az ətraflı danışaq.

Təsəvvür edək kı, C_1 və C_2 anbarlarında hansısa xammal mövcuddur, birinci anbarda – 20 vahid, ikincisində isə – 14 vahid olduğunu fərz edək. Bu xammalı hər zavoda 12 vahid olmaqla iki Z_1 və Z_2 zavodlarına

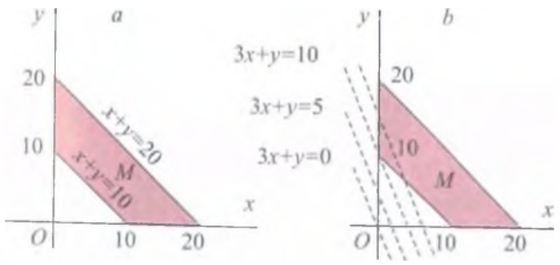


Şəkil 20.

aparmaq lazımdır (şəkil 20). x və y vasitəsilə uyğun olaraq birinci və ikinci zavodlara C_1 anbarından aparılan xammalı göstərək. Onda ikinci anbardan hər zavoda $12-x$ və $12-y$ sayında xammalı aparmaq lazım olacaq. Bununla belə $x+y \le 20$ (birinci anbarda 20 vahid xammal mövcuddur) və $(12-x)+(12-y) \le 14$ (ikinci anbarda isə 14 vahid xammal var). Əlbəttə ki, x və y qiymətləri mənfi deyillər. Alınan dörd bərabərsizlik

$$x+y \le 20, x+y \ge 10, x \ge 0, y \ge 0$$

koordinat müstəvisində hər hansı M qabarıq dördbucaqlını təyin edir (şəkil 21*a*). M dördbucaqlının nöqtələri daşınmanın bütün mümkün olan planlarını təsvir edir.



Şəkil 21.

Fərz edək ki, C_1 anbarından Z_1 və Z_2 zavodlarına aparılan xammal vahidlərinin dəyəri uyğun olaraq 5 və 4 pul vahidinə bərabərdir, eyni zavodlara C_2 anbarından daşınma isə – 2 və 3 pul vahidinə bərabərdir. Onda daşınmaların ümumi dəyəri bərabərdir:

$$5x+4y+2(12-x)+3(12-y)=60+(3x+y)$$

Daşınmaların ən ucuz variantını seçmək üçün M dördbucaqlıda elə bir $(x;\ y)$ nöqtəsini tapmaq lazımdır ki, onda $3x+y$ xətti funksiyası bu nöqtədə ən kiçik qiymət alsın. 21*b* şəkilində punktir xətlər $3x+y$ xətli funksiyasının sabit qiymətə malik olduğu düz xətləri təsvir edir. Şəkildən görə müəyyən edə bilərik ki, M funksiyası ən kiçik qiymətə (0; 10) nöqtəsində malikdir. Deməli daşınmanın ən ucuz variantı, $x=0$, $y=10$ olduqda, yəni, ikinci zavoda C_1 anbarından 10, C_2 anbarından isə 2 xammal vahidi gətirmək lazımdır (birinci zavoda isə bütün 12 xammal vahidini C_2 anbarından götürmək lazımdır). Beləliklə, məsələnin həlli axırda M qabarıq dörbucaqlısında müşahidə edilən $f(x,y)=3x+y$ xətti funksiyanın minimumunun tapılmasına gətirildi.

Əgər xammal ilə üç zavodu təmin etmək lazımdırsa, onda C_1 anbarından bu zavodlara gətirilən xammalın miqdarını x, y və z ilə göstərsək, biz o zaman üçölçülü fəzada oxşar həndəsi məsələ alacağıq (üç x, y, z koordinatların mövcudluğuna görə). Başqa sözlə desək, qabarıq çoxüzlüdə hansısa xətti funksiyanın minimumunu tapmaq lazım olacaq. Zavod və anbarların daha böyük sayda olduğu zaman, eyni məsələni artıq çoxölçülü fəzada həll etmək lazım olacaq. Ona oxşar məsələlər materialı sərfəli şəkildə parçalamaq, müəssisənin optimal işləmə rejimini seçən zaman lazım olur.

Bu yol ilə riyaziyyatda xətti proqramlaşdırılma formalaşdı. O qabarıq çoxüzlülərdə xətti funksiyaların minimumunun tapılması üsulları ilə məşğul olan riyaziyyatın istiqamətidir (çoxölçülü fəzalarda). Belə məsələləri nəqliyyat müəssisələrində, ağac emal edən kombinatlarda, planlaşdırılma müəssisələrində işləyən riyaziyyatçılar tərəfindən həll edilməsi lazım gəlir.

Nəyahət, texniki və istehsal prosesləri ilə optimal idarəetmə nəzəriyyəsi haqqında danışaq. Qabarıqlıq anlayışı bu nəzəriyyənin ən vacib teoremlərinin birinin isbatında vacib rol oynayır. Bu 50-ci illərin ortalarında L.S. Pontryaqin, V.Q. Boltyanski və R.V. Qamkrelidze kimi riyaziyyatçılar tərəfindən müəyyən edilmiş maksimum prinsipidir. Onun əsasında texniki proseslərin – raketlərin üçuşu, termik peçlərdə pəstahların qızdırılması, sualtı qayıqların mühərriklərinin işi və s. – optimal idarəetmə rejimləri hesablanır.

Bü gün qabarıq fiqurlar nəzəriyyəsi (müstəvidə, üçölçülü, çoxölçülü və hətta sonsuzölçülü fəzalarda) – həm nəzəri, həm də tətbiqi riyaziyyatda əhəmiyyətli rol oynayan elmin vacib bölməsidir.

FRAKTALLAR

Çoxları Alisanın əhvalatları ilə tanışdırlar – Lyus Kerrol təxəllüsü altında yazan ingilis riyaziyyatçı və yazıçı Çarlz Latuidc Dodcsonun (1832-1898) sehrli nağıllarının qəhrəmanıdır. "Alisa möcüzələr ölkəsində" adlı povestdə qız ilə dəyişilmələr kaskadı baş verir. O ya ağlasığmayan ölçülərə qədər böyüyür, ya da dovşan və ya siçan ölçüsünə qədər kiçilir. Maraqlısı odur ki, bəzi hallarda onun ətrafında olan əşyalar heç bir dəyişikliyə uğramır, başqa hallarda isə – lap balaca forma alırlar.

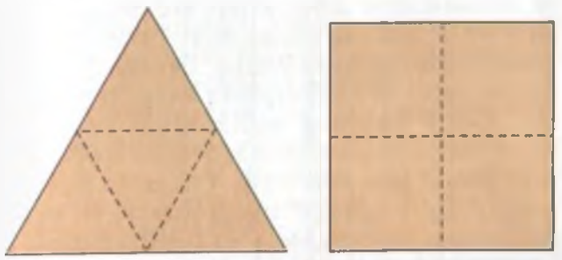


Təbiətdə özünəoxşarlıq. Ayıdöşəyi budağı.

Balacanın böyükdə özünəoxşarlıq ideyası haqqında təkcə nağılçılar danışmırdılar. Məşhur alman filosofu və riyaziyyatçısı Qotfrid Vilhelm Leybnis (1646-1716) təxmin etdi ki, su damlasının daxilində öz planetləri ilə birlikdə kainatlar yerləşə bilərlər. Və bu planetlərdə Yerdəki kimi filosoflar fikrə qərq olurlar. "Elektronun dünyası" adlı şeirdə Valeri Brusov bu fikiri poetik formada ifadə etdi:

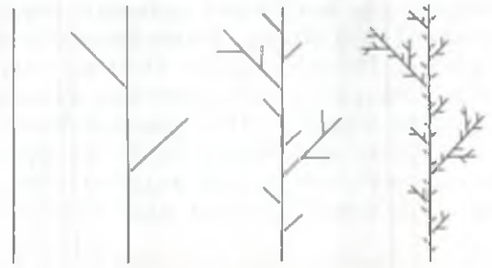
Ola bilər bu elektronlar –
Beş materik olan dünyadır
Sənətlər, biliklər, müharibələr, taxt-taclar
Və 40 əsrin yaddaşları!
Və həmçinin ola bilər hər atom –
Yüz planetə malik olan kainatdır:
Orada bizdə olan hər şey sıxılmış
vəziyyətdədir
Və həmçinin burada olmayan da.

Eyni sayda özünə oxşar fiqurlara bölünən fiqura özünəoxşar həndəsi fiqur deyilir. Misal üçün, özünəoxşar fiqur kvadrat və düzgün üçbucaqlıdır (şəkil 1). Amma qəribə



Şəkil 1.

şəklə malik olan özünəoxşar fiqurlar da var. 2-ci şəkildə "budağın" düzəldilməsinin ilk bir neçə mərhələsi göstərilib. Bu sonsuz sayda elementlərə malik olan sadə özünəoxşar



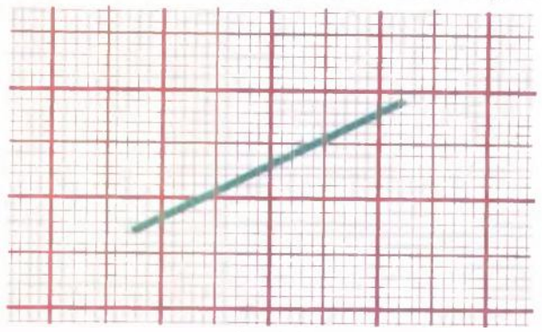
Şəkil 2.

fiqurdur. O aşağıdakı üsul ilə düzəldilir. Əsas parçanı üç bərabər hissəyə bölürlər və bölgü nöqtələrindən əsas parçanın üçdə birini təşkil edən 45° altında parçalar çəkirlər. Sonra isə eyni qayda ilə yenicə qurulmuş parçaları da bölürlər və davam edirlər.

Belə özünəoxşarlıq xüsusiyyətinə təbiətdə çoxlu sayda obyektlərdə rast gəlmək olar. Biz təkcə bu obyektlərə diqqətlə baxmalıyıq: yer qabığında çat xətlərinə, ağacların budaqlanmasına, dağların, buludların və koral riflərin şəkillərinə baxaq. Əgər biz dağ silsiləsinə müxtəlif məsafələrdən baxsaq – kosmosdan, təyyarənin bortundan və sonra isə birbaşa dağ zirvəsindən, biz hər dəfə yeni təfərrüatlar, əyintilər, sınan yerlər görəcəyik – əvvəllər biz onları relyefin düz xətt və ya müstəvi hissələri kimi təsəvvür edirdik. Amma buna baxmayaraq, biz eyni dağları görürük. Dağların relyefi miqyasdan asılı deyil, o özünəoxşardır. Belə xüsusiyyətə malik olan obyektləri Amerika riyaziyyatçısı Benua Mandelbrot fraktallar (latın "frangere" – "sındırmaq", "bölmək") adlandırmağı təklif etdi. 1982-ci ildə çap olunmuş "Təbiətin fraktal həndəsəsi" adlı kitabda Mandelbrot fraktallara dənəvər, budaqlı, qırış-qırış, dolaşıq formaya, dəniz qabarmalarına oxşayan obyektləri aid etməyi təklif etdi.

Fraktalların daxili xüsusiyyətlərini, fraktal ölçü adlandırılan ədədi xarakteristika ilə təsvir etmək daha rahatdır. Çətin olmayan bir sınaq keçirək. Bir ədəd təmiz millimetrlik kağız götürək və üstündə ixtiyari düz xətt parçası çəkək (şəkil 3). Bu parçanın keçdiyi 1 sm uzunluğunda tərəfi və

1mm uzunluğunda tərəfi olan damaların sayını hesablayaq. Biri digərindən neçə dəfə böyükdür? Əgər bu eksperimenti səliqəli aparsaq, onda parçanın keçdiyi millimetrli damaların sayı santimetrli damaların sayından on dəfə çox olacaq. Nəticə tamamilə təbii görünür: çünki damanın ölçülərini neçə dəfə azaltsaq, elə o dəfə qədər belə damaların sayı da çoxalacaq. Belə qanunauyğunluğu biz dairə, paraleleloqram və ya üçbucağın perimetrlərini araşdırsaq görə bilərik. Başqa sözlə desək, parçanın daxil olduğu N

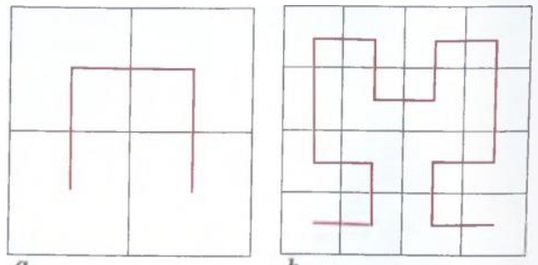


Şəkil 3.

kvadratların sayı $1/d$ ədədinə mütənasibdir, burada d – kvadratın tərəfinin ölçüsüdür. Elə görünür ki, biz müəyyən etdiyimiz xüsusiyyət müstəvidə yerləşən hər bir xəttə məxsusdur. Amma nə qədər qəribə olsa da bu belə deyil.

1890-cı ildə Juzeppe Peano bir xətt qurdu. Bu gün biz bu xətti şübhəsiz fraktal adlandırırıq. Peano əyri xəttinin qurulmasının ilk mərhələləri 4-cü şəkildə göstərilib (onun hissələrinin bölünməsini sonra da davam etdirmək olar). Peano əyri xətti son dərəcə heyrətləndirici bir xüsusiyyətə malikdir: biz ölçü torunu necə bölsək də – onun hər bir xırda kvadratında əyri xəttin nöqtələri olacaq! Onda elə alınır ki, Peano əyri xəttini örtən d tərəfli kvadratların sayı, adı "xoşgörkəmə" malik olanlardakı kimi $1/d$ yox, $\frac{1}{d^2}$-na mütənasibdir.

Sözsüz, Peano əyri xətti – ekzotikdir, bacarıqlı riyazi təfəkkürün şıltaqlığı, fantaziyasıdır. Peano əyri xətti kimi praktiki həndəsənin təsəvvürlərinə sığışmayan real obyektləri tapanda alimlər çox böyük təəccüb keçirtdilər. Belə obyektlər ilə birinci rast



Şəkil 4.

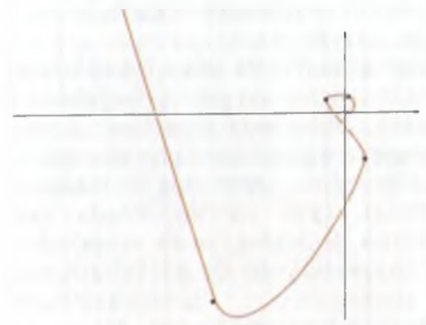
gələnlər arasında ingilis təbiətşünası L. Riçardson (1881-1953) da var idi. O sahil xətlərini araşdıran zaman belə obyektlərə rast gəldi. Məlum oldu ki, sahilin L ölçülən uzunluğu $\frac{1}{d^{\alpha}}$-ya mütənasibdir, harada d – miqyas torunun kvadratının tərəfinin uzunluğudur, α isə sahilin kəsik-kəsik olmasının dərəcəsinin göstəricisidir. Məsələn, Böyük Britaniya sahili üçün α göstəricisi 1,24-ə bərabərdir; Avstraliya sahili üçün – 1,13 və s. Sahil xətlərinin sınıq və kələ-kötürlü olması böyük miqyaslı xəritələrdə onun azalması ilə itir. Əgər biz sahil xəttinin uzunluğunu müxtəlif miqyaslı xəritələrdə ölçsək, onda biz görərik ki, miqyas böyüdükcə, o da böyüyür.

Fraktalın quruluşunun kəsik-kəsik və ya mürəkkəblik dərəcəsinin müəyyən edilməsi üçün istifadə edilən üsul 1919-cu ildə alman riyaziyyatçısı Felikx Xausdorf tərəfindən təklif edilmiş ölçülük anlayışına aiddir. Çətin formaya malik olan və üstü millimetrlik kağız kimi kvadratlar ilə örtülmüş obyekt təsəvvür edək. Obyektin nöqtələrinin daxil olduğu kvadratların N sayı axırıncının formasından və kvadrat damanın tərəfinin d uzunluğundan asılıdır. Əgər N, $1/d^{\alpha}$-ya mütənasibdirsə, onda α dərəcə göstəricisi obyektin ölçülüyü adlandırılır.

Praktikada obyektin ölçülüyünü ln N-in ln d–dən asılıq qrafikini çəkərək müəyyən etmək daha asandır. Bu qrafik düz xətt kimi təsvir olunur. Onun meyl bucağının tangensi elə bu obyektin ölçülüyü olacaqdır.

Riyaziyyatın dolaşıq, budaqlı və ya parçalanmış quruluşlarına riyaziyyatçılar daim ehtiyatla yanaşırdılar. 1860-cı ildə məşhur alman riyaziyyatçısı Karl Teodor Vilhelm Veyerştrass qrafiki həm kiçik, həm də böyük miqyasda eyni görünən müstəsna dərəcədə sındırılmış funksiya haqqında işini çap edəndə, başqa məşhur riyaziyyatçı Şarl Ermit buna son dərəcədə ekspansiv yanaşdı: "Nifrət və dəhşət ilə mən fəsadlı "yara"dan – heç bir nöqtədə törəməyə malik olmayan kəsilməz funksiyalardan – üzümü çevirirəm".

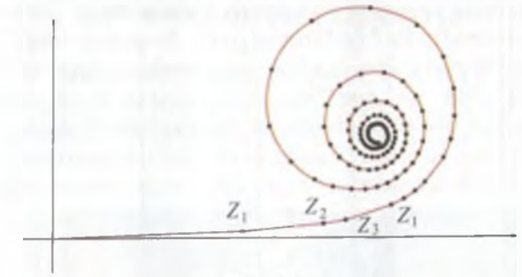
XX əsrin axırında elmi-texniki tərəqqinin axını üzərində yaranmış kəşflər də insanlara böyük bir emosional təsir göstərirdi. 7-ci şəkildə təsvir olunmuş fantastik naxışları birinci dəfə görən insan çətinliklə inana bilər ki, onları çətin olmayan riyazi plana əməl edərək "cansız" hesablama maşını çəkib. Bu naxışları Benua Mandelbrot kəşf edib. Onun əsərləri – zəngin fraktallar dünyasının ən gözəl təmsilçiləridir.



Şəkil 5.

Belə gözəlliyi riyaziyyatçılar necə hesablaya bildilər? Belə şah əsərlərin əsasında hansı riyazi asılıqlar dayanıb?

Cavabı axtararkən, biz kompleks ədədləri və kompleks müstəvini xatırlayaq. Hər hansı $z = x + iy$ kompleks ədədi verilmiş müstəvidə nöqtə ilə təsvir edilir və onu iki x və y koordinatları verməklə – z ədədinin uyğun olaraq həqiqi və xəyalı hissələrini – tapmaq olar. i ədədi (xəyalı vahid) çox qəribədir: onun kvadratı –1-ə bərabərdir.



Şəkil 6.

$z = x + iy$ yazısında o, z ədədinin həqiqi hissəsini xəyalı hissəsindən fərqləndirmək üçün xidmət edir. Kompleks ədədləri toplayıb və çıxmaq da olar, və nəticədə də kompleks ədədi alınacaq. Kompleks ədədlərin toplanması zamanı, onların komponentləri ayrılıqda toplanılır, vurulma isə çoxhədlilərin vurulma qaydalarına əsasən aparılır. Məsələn:

$$(2 + 3i) \cdot (4 - 5i) = 8 - 10i + 12i - 15i^2 =$$

$$= 8 + 2i - 15i^2$$

Nəzərə alsaq ki, $i^2 = -1$-ə bərabərdir, biz nəticədə $8 + 2i - 15i^2 = 23 + 2i$ alırıq.

Nöqtəni kompleks müstəvi üzrə səyahətə göndərək. Onu aşağıdakı şərt ilə təchiz edək. Əgər nöqtə hansısa $z = x + iy$ məntəqəsində yerləşirsə (onun koordinatları x və y), onda sonrakı z' məntəqəsini aşağıdakı qaydaya görə seçməlidir:

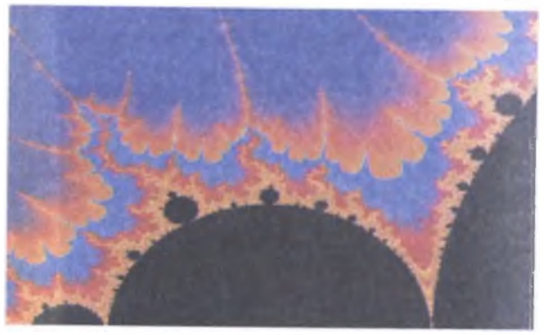
$$z' = z^2 + c$$

harada $c = c_1 + ic_2$ – həqiqi c_1 və xəyalı c_2 hissəsi olan hansısa kompleks ədəddir (nöqtənin səyahəti zamanı dəyişilməyən). Kompleks ədədlər üzərində əməllərin ifadə edilməsi qaydalarına əsasən, nöqtənin yeni koordinatları $(x'; y')$ aşağıdakı düsturlar ilə hesablanır:

$$\begin{cases} x' = x^2 - y^2 + c_1, \\ y' = 2xy + c_2. \end{cases}$$

5 və 6-cı şəkillərdə koordinat başlanğıcında startı yerləşən nöqtənin səyahətinin marşrutu göstərilib, c-nin müvafiq olan müxtəlif qiymətlərinə, 5-ci şəkildə $c = 0{,}27 + 0{,}01i$, 6-cı şəkildə isə $c = 0{,}29 + 0{,}01i$. Birinci halda nöqtə "ev ocağından"uzağa qaçmaq istəmir. İkinci halda isə – "gözləri hara baxır ora qaçır": yəni ki daha da uzağa qa-

çır. c parametrinin elə qiymətlər oblastı var kı, səyahət edən nöqtələr daima start yerinin ətrafında "fırlanacaqlar". Başqa qiymətlər zamanı isə, onlar "sonsuzluq çağırışının" dalınca qaçırlar. Bu, Mandelbrot adı alan oblastın sərhədi qəribə şəkildə düzəldilib. 7-ci şəkidlə Mandelbrot çoxluğunun sərhədinin hissələri göstərilib. Və ən maraqlısı



Şəkil 7.

odur kı – sonsuz dərinliyə gedən naxışların hörmə yazıların arasında, müxtəlif cür buruqlar, spirallar və "protuberanslar" arasında bizim qabağımızda son dərəcə gözəl olan bir şəkil açılır və əvvəlkı Mandelbrot çoxluğunun xeyli dərəcədə azaldılmış surətləri görünürlər. Ümumilikdə isə, özü təsvir olunan bir sonsuz gözəllik, yəni fraktal yaranır.

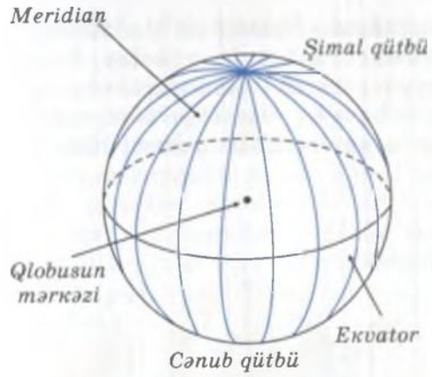
SFERADA FİQURLAR

İndi artıq hər bir savadlı insan bilir kı, qəribə bir qeyri-evklid həndəsəsi – Lobaçevskinin həndəsəsi mövcuddur. O Nikolay İvanoviç Lobaçevskı tərəfindən yaradılıb. Onun kəşfi, müxtəlif və bərabərhüquqlu həndəsələrin mövcudluğu haqqında inqilabi fikirlər, təkcə riyaziyyatda çevrilişə yox, həmçinin insanların ətraf dünya haqqında təsəvvürlərində də çevrilişə səbəb oldu (bax "Lobaçevskinin həndəsəsi" məqaləsinə). Amma buna baxmayaraq, gündəlik həyatımızda və hətta məktəblərdə keçirilən həndəsə dərslərində də biz bununla rastlaşmırıq. Və ona görə çoxları Lobaçevskinin nə kəşf etdiyini başa düşmür. Amma bununla bərabər Lobaçevskinin kəşfi vaxtında qeyri-evklid həndəsələrindən birini artıq çoxdan bilirdilər və araşdırırdılar. Söhbət fəza həndəsəsi haqqındadır. Bu həndəsədə fiqurlara sferada baxılır və onlar arasında asılılıqlar araşdırılır.

Kainatın antik modelinə uyğun olaraq, planetlər və ulduzlar Yerin yerləşdiyi ümumi mərkəzli sferada yerləşirlər. Bununla, həmçinin ulduzlar elə bil sferaya "mıxlanıblar" və onunla birlikdə Yerin ətrafında fırlanırlar, planetlər isə öz sferalarında mürəkkəb fiqurlar çəkirlər – axı "planet" sözü yunan dilindən "dolaşan" deməkdir. Belə geosentrik modelin vasitəsilə qədim dövrdə planetlərin hərəkətlərini dəqiqliklə təsvir edə və qabaqcadan xəbər verə bilirdilər. Bu, misal üçün, gəmiçilikdə və "yer" fəaliyyətinin başqa sahələrində də lazımlıdır. Biz nəzərə almalıyıq kı, bizim ayaqlarımızın altında üç balina üstündə müstəvi kökə yox, kürədir. Göy cisimlərinin fırlanma qanunauyğunluqlarının tədqiqatı zamanı sfera və onun üzərində böyük çevrələr yaradan fiqurlar ilə bağlı olan müxtəlif cür riyazi məsələlər əmələ gəldi.

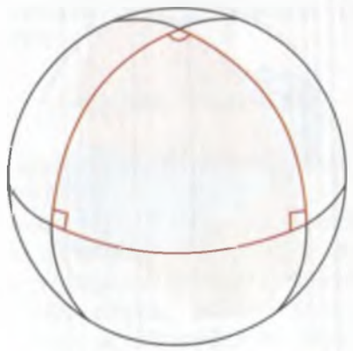
Sfera adi üçölçülü Evklid fəzasında yerləşdiyinə görə sferik həndəsənin teoremlərini biz adi stereometriya teoremləri kimi qəbul edə bilərik. Ona görə də sferik həndəsədə "başqa planimetriyanı" görmürdülər. Bu Lobaçevskı həndəsəsi ilə baş verdiyi kimi, baxışların devrilməsinə gətirmədi. Əgər sferaya diqqətlə nəzər salsaq – bunun üçün adi qlobus da uyğundur – çoxlu sayda qəribəliklər tapmaq olar.

Sapı götürün və onu qlobusda yerləşən iki məntəqə arasında çəkin. O sferada yerləşən bu iki məntəqəni birləşdirən ən qısa xətt üzrə keçəcək və təyyarə üçün ən sərfəli marşrutu göstərəcək. Əgər belə bir marşrutu siz Moskvadan eyni en dairəsində yerləşən Nyu-Yorka keçirtsəz, onda müşahidə edərsiz kı, laynerin yolu siz gözlədiyinizdən bir qədər şimala keçir – Skandinaviyadan və Qrenlandiya ilə yaxınlıqdan. Bu nə xətdir? Əgər ekvatorda yerləşən nöqtələri götürsək cavab bizə məlum olacaq. O zaman bütöv sap ekvator üzrə keçəcək. Ekvator sferanın ən böyük çevrələrindən biridir, yəni kı ən uzun radiusa malik olan çevrələrindəndir. Onlar sferanın mərkəzindən keçən diametral müstəvilərin kəsişməsindən yaranır. Qlobusda ekvatordan başqa xətlərdən böyük çevrələri həmçinin meridianlar da əmələ gətirir (şəkil 1). Sferik həndəsədə düz xətlərin rolu məhz böyük çevrələrə aid edilir. Qaydaya



Şəkil 1.

uyğun olaraq sferada da, müstəvidəkı kimi ikı nöqtədən təkcə bir sferik düz xətt çəkmək olar. Diametral əks tərəflərdə yerləşən nöqtələr istisnadırlar: məsələn, qlobusun polyuslarından sonsuz sayda meridian keçir. Amma adi həndəsədən fərqli olaraq hər hansı ikı sferik düz xətt ikı diametral əks tərəflərdə yerləşən nöqtələrdə kəsişirlər – sferada paralellik anlayışı yoxdur. Sferada düz xəttin müstəvidə olan düz xətdən başqa çox vacib bir fərqi ondadır kı, sferik düz xətt qapalıdır: bu xətt üzrə bir tərəfə hərəkət etsək, axırda biz başladığımız nöqtələrə qayıdacağıq, yəni kı, nöqtə sferik xətti adi düz xəttin şüası kimi ikı hissəyə bölmür. Sferik həndəsənin daha bir "aydın olan, ağıla sığmayan": sferada yerləşən üçbucaq üç düz bucağa malik ola bilər, əgər, məsələn, o



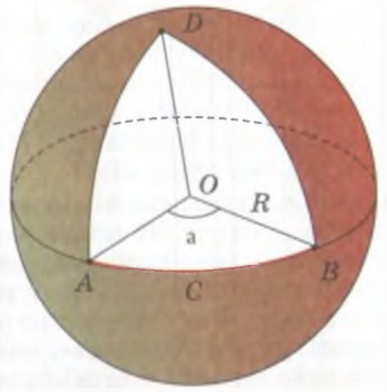
Şəkil 2.

ikı perpendikulyar meridian və ekvator ilə məhdudlaşıbsa (şəkil 2). Gəlin sferik həndəsənin tərifləri və faktları ilə tanış olaq. Bununla belə biz onları həmişə adi həndəsənin faktları ilə müqayisə edəcəyik.

SFERADA DÜZ XƏTTLƏR, PARÇALAR, MƏSAFƏLƏR VƏ BUCAQLAR

Beləliklə, sferada böyük çevrələr düz xətlər kimi hesab olunur. Əgər ikı A və B nöqtələri böyük çevrəyə məxsusdurlarsa, onda bu ikı nöqtəni birləşdirən ikı qövsün qısasının uzunluğu A və B nöqtələri arasında sferik məsafə kimi qəbul edilir. AB qısa qövsünü sferik parça hesab edəcəyik. Diametral əks tərəflərdə yerləşən nöqtələri sonsuz sayda sferik parçalar – böyük yarımçevrələr ilə birləşdiriblər.

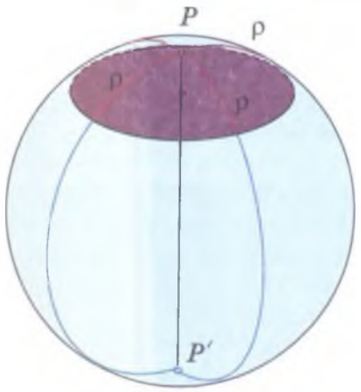
AB sferik məsafəsi AOB mərkəz bucağının α radian ölçüsü və sferanın radiusu R ilə ifadə olunur (şəkil 3): qövsün uzunluğu düsturuna görə o $R\alpha$-ya bərabərdir.



Şəkil 3.

Əgər sferanın radiusunu uzunluq vahidi kimi götürsək, onda sferik məsafə uyğun olan qövsün bucaq qiymətinə bərabər olacaq. AB sferik parçasının hər hansı C nöqtəsi onu ikı hissəyə bölür və onların sferik uzunluqlarının cəmi, planimetriyadakı kimi bütün parçanın uzunluğuna bərabərdir və ya $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB$. Parçadan xaricdə yerləşən hər hansı D nöqtəsi üçün "üçbucağın sferik bərabərsizliyi" doğrudur: D-dən A-ya kimi və D-dən B-yə kimi sferik məsafələrin cəmi AB-dən böyükdür və ya $\angle AOD + \angle DOB > \angle AOB$. Burada müstəvi və sferik həndəsələr arasında tam uyğunluq mövcuddur. Üçbucaq bərabərsizliyi – sferada həndəsənin əsas xassələrindən biridir. Və məhz ona görə planimetriyadakı kimi, hər hansı sferik parça sferik sınıq xətdən qısa-

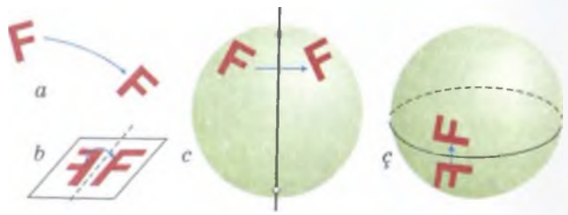
dır və deməli, onun uclarını birləşdirən sferada hər hansı əyri xətdən də qısadır.



Şəkil 4.

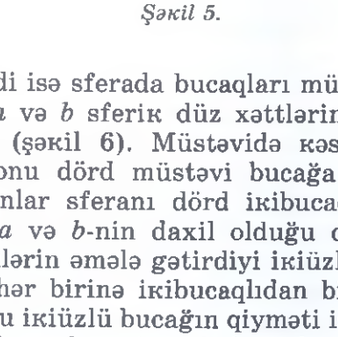
Sferik məsafənin tərifindən sonra sferik həndəsəyə müstəvi həndəsənin bütün anlayışlarını aid edirlər, çünki onların hamısını müstəvidə məsafələr vasitəsilə ifadə etmək olar. Məsələn, sferik çevrə – verilmiş P nöqtəsindən müəyyən ρ sferik məsafədə yerləşən bütün nöqtələrinin çoxluğudur. Belə çoxluğun sferanın PP' diametrinə perpendikulyar olan müstəvidə yerləşməsini göstərmək elə də çətin deyil (şəkil 4), yəni ki sferik çevrə fiqur kimi – mərkəzi PP' diametrində yerləşən adi müstəvi çevrədir. Sferik mərkəzlərin sayı isə onda ikidir – P və P'; onları adətən onun polyusları adlandırırlar. Qlobusda Şimal və Cənub polyuslar bütün paralellərin ümumi "sferik mərkəzləri" kimi xidmət edirlər. Əgər ρ "radius" $\pi/2$-yə bərabərdirsə, onda sferik çevrə sferik düz xəttə çevrilir; bu halda onu P və P' nöqtələrindən hər birinin polyaroidi adlandırırlar.

Həndəsənin ən vacib anlayışlarından biri məsafə ilə birbaşa bağlı olan – fiqurların bərabərliyidir. Əgər onlardan birini digərinin üzərinə nöqtələr arasında məsafəni saxlamaqla inikas etdirmək mümkündürsə, onda iki fiqur bərabər sayılırlar. Müstəvidə iki bərabər fiquralardan birini həmişə başqasının üstünə qoymaq olar: ya müstəvidə fiquraları yerini dəyişdirməklə (şəkil 5*a*, o zaman onları məxsusi bərabər sayırlar), ya da birini müstəvidən kəsərək başqa tərəfə çevirərək – bu halda onlar güzgü təsvirli – bərabər hesab olunurlar (şəkil 5*b*). Sferada məxsusi bərabər olan fiqurlar birinin hansısa ox ətrafında fırlanması ilə üst-üstə düşürlər (şəkil 5*c*). Amma, məsələn, diametral müstəviyə nəzərən simmetrik olan güzgü təsvirli – bərabər olan fiquraları sağ və sol əlcəklər kimi üst-üstə salmaq olmur (şəkil 5*ç*).



Şəkil 5.

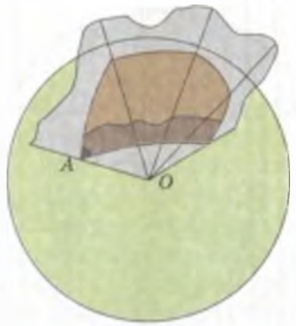
İndi isə sferada bucaqları müəyyənləşdirək. a və b sferik düz xəttlərini gözdən keçirək (şəkil 6). Müstəvidə kəsişən düz xətlər onu dörd müstəvi bucağa böldüyü kimi, onlar sferanı dörd ikibucaqlıya bölürlər. a və b-nin daxil olduğu diametral müstəvilərin əmələ gətirdiyi ikiüzlü bucaqlardan hər birinə ikibucaqlıdan biri cavab verir. Bu ikiüzlü bucağın qiyməti isə, tərifə görə ikibucaqlının təpəsində yerləşən bucaqla müəyyənləşdirilir. Sferik düz xətlərin arasındakı bucaq isə onlardan təşkil olunmuş ikibucaqlı bucaqlardan kiçiyinə bərabərdir.



Şəkil 6.

Sferik həndəsənin və stereometriyanın anlayışları arasında yaranan uyğunluğa diqqət yetirin. Sferanın hər bir nöqtəsinə sferanın O mərkəzindən çəkilmiş şüa, sferada hər hansı fiqur üçün isə – ümumi başlanğıcı

O nöqtəsində olan bütün kəsişən şüaların birləşməsi qarşı qoyulur. Belə ki, sferik düz xəttə onun daxil olduğu diametral müstəvi, sferik parçaya – müstəvi bucaq, ikibucaqlıya – ikiüzlü bucaq, sferik çevrəyə – oxu çevrənin polyuslarından keçən konik səth uyğundur. Həndəsi kəmiyyətlər də özlərinə "cüt" tapırlar: məsələn, sferik parçanın uzunluğuna – müvafiq olan müstəvi bucağın qiymətidir.



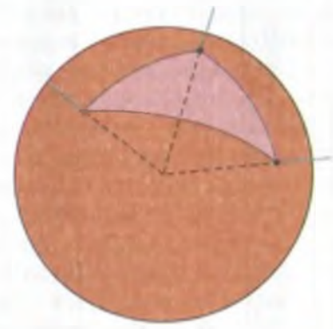
Şəkil 7.

Təpəsi sferanın mərkəzi O-da yerləşən çoxüzlü bucağı gözdən keçirək. O sferanı sferik çoxbucaqlı adlanan fiqur üzrə kəsir. Bu oblast sferada sferik parçanın əmələ gətirdiyi sınıq xətlə məhdudlanır. Sınıq xəttin hissələri – sferik çoxbucaqlının tərəfləridir. Onların uzunluqları müvafiq olan çoxüzlü bucağın müstəvi bucaqlarının qiymətlərinə bərabərdirlər; çoxbucaqlının ixtiyari A təpəsində yerləşən bucağının qiyməti isə OA tilində yerləşən ikiüzlü bucağın qiymətinə bərabərdir.

SFERİK ÜÇBUCAQ

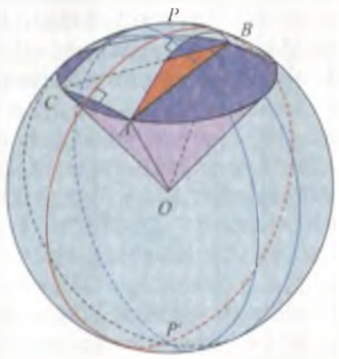
Ən sadə sferik çoxbucaqlı olan üçbucaq xüsusi maraq kəsb edir (şəkil 8). İlk dəfə onu İsgəndəriyyədə Menelay (I əsr) həndəsi dövriyyəyə buraxıb və araşdırıb. Onun "Sferika" əsəri yunanların sferik həndəsədə nailiyyətlərinin zirvəsi idi. Menelay sferaya müstəvi üçbucaqların Evklid nəzəriyyəsini gətirdi. Sferik üçbucağın tərəfləri üzərində və ya onların davamlarında üç nöqtə bir düz xətt üzərində yerləşmə şərti aldı. Maraqlısı odur ki, müstəvi üçün müvafiq teorem (bax "Sadə və tükənməz üçbucaq" məqaləsinə) artıq o vaxtlarda da çox məşhur idi, amma həndəsənin tarixinə o Menelay teoremi kimi daxil oldu.

Sferik üçbucağın bir çox xassələri (onlar eyni zamanda üçüzlü bucaqların da xassələridir) demək olar ki, adi üçbucağın xassələrini təkrar edir. Onların arasında – üçbucaq bərabərsizliyi, üçüzlü bucaqların dilində bu o deməkdir ki, üçüzlü bucağın hər



Şəkil 8.

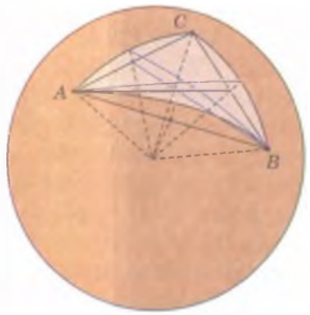
hansı müstəvi bucağı digər iki bucağın cəmindən kiçikdir. Və ya, məsələn, üçbucaqların bərabərlik əlamətlərini də göstərmək olar. Aydındır ki, yuxarıda göstərilən bütün planimetriya teoremlərinin nəticələri və isbatları sferada da doğrudur. Belə ki, parçanın uclarından eyni məsafədə yerləşən nöqtələr çoxluğu sferada da onun ortasından keçən perpendikulyar düz xətt olacaq. Buradan elə nəticəyə gələ bilərik ki, ABC sferik üçbucağın tərəflərinə çəkilmiş orta perpendikulyarları ümumi nöqtəyə malikdirlər, dəqiq desək, iki, P və P' diametral əks tərəflərdə yerləşən nöqtələr onun xaricinə çəkilmiş yeganə çevrənin polyuslarıdır (şəkil 9). Streometriyada bu o deməkdir ki,



Şəkil 9.

hər hansı üçüzlü bucağın xaricinə konus çəkmək olar. Həmçinin sferaya asanlıqla üçbucağın tənbölənlərinin onun daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzində kəsişməsi haqqında teoremini də aid etmək olar.

Hündürlük və medianların kəsişməsi haqqında teoremlər də doğru qalırlar, amma onların planimetriyada adi isbatları, sferada olmayan bu və ya digər yol ilə paralellikdən istifadə edirlər və ona görə onları yenidən, artıq streometriya dilində isbat etmək daha asandır. 10-cu şəkil medianlar haqqında sferik teoremin isbatını təsvir edir: *ABC* sferik üçbucağının medianlarını özündə saxlayan müstəvilər təpələri həmin nöqtələr olan müstəvi üçbucağı onun medianları üzrə kəsir. Deməli, onlar müstəvi medianların kəsişmə nöqtəsindən keçən sferanın radiusunu öz üzərlərində saxlayırlar. Radiusun uc nöqtəsi üç "sferik" medianın ortaq nöqtəsi olacaq.

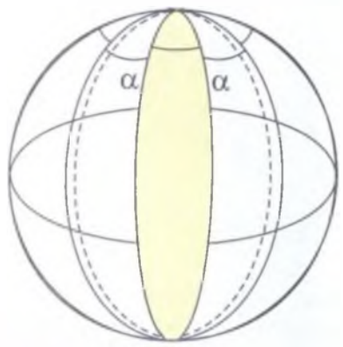


Şəkil 10.

İki həndəsənin oxşarlıq nümunələrini daha çox göstərmək olar, amma onlar arasında fərqlər daha maraqlıdırlar. Xüsusən də 1629-cu ildə hollandiyalı A. Jirar tərəfindən çap olunmuş və onun xatirəsinə adlandırılan üçbücağın sahəsi üçün düstur maraqlıdır. Bu düstura əsasən 1 radiuslu sferada *ABC* üçbucağın sahəsi onun bucaq artımına bərabərdir, yəni, onun bucaqlarının cəminin müstəvi üçbucağın bucaqlarının cəminin fərqinə bərabərdir:

$$S_{ABC} = \angle A + \angle B + \angle C - \pi$$

Düsturdan göründüyü kimi, sferik üçbucaqlının bucaqlarının cəmi həmişə π-dən çoxdur. Haradan belə gözlənilməyən bir düstur yaranır? Əvvəlcə, $\alpha = 2\pi/n$ şərti ilə, α bucaqlı ikibucaqlını gözdən keçirək. Burada n – tam ədəddir, sferanı düz n sayda belə ikibucaqlıya bölmək olar (şəkil 11). Sferanın səthi $4\pi R^2 = 4\pi$, $R = 1$. Ona görə ikibucaqlının sahəsi $4\pi/n = 2\alpha$. Bu düstur, aydındır ki $\alpha = 2\pi m/n$ olduqda da doğrudur. Buradan belə bir nəticəyə gəlmək olar ki, o bütün α-lar üçün doğrudur. Əgər, indi *ABC* sferik üçbucağının tərəflərini davam etdirsək və sferanın sahəsini *A*,*B*,*C* bucaqlarından təşkil olunan ikibucaqlıların sahəsi və onun öz sahəsi ilə ifadə etsək, onda yuxarıda göstərilmiş Jirar düsturuna gələcəyik.



Şəkil 11.

Sferik üçbucağın bucaqları ilə birmənalı olaraq nəinki onun sahəsi verilir, həmçinin o özü də sferik həndəsədə fiqur kimi üçbucaqların dördüncü bərabərlik əlamətini – üç bucaq üzrə – ödəyir. Beləliklə, sferada oxşar, bərabər olmayan üçbucaqlar mövcud deyillər. Bundan başqa sferik həndəsədə ümumiyyətlə oxşarlıq anlayışı yoxdur, çünki burada bütün məsafələri eyni (birə bərabər olmayan) ədəd dəfə dəyişdirən çevirmələr mövcud deyil. Bu xassələr paralel düz xətlər haqqında Evklid aksiomunun pozulması ilə bağlıdır. Və bu xassələr həmçinin Lobaçevski həndəsəsinə də məxsusdur.

Sferik triqonometriya praktiki istifadə üçün çox vacibdir (bax "Triqonometriya" məqaləsinə). Sferada, müstəvidəki kimi, üçbucağın üç elementinə görə başqalarını tapmaq çətin deyil. Və əlbəttə ki, müvafiq düsturları müstəvi və üçüzlü bucağın ikiüzlü bucaqları arasında asılılıqlar kimi gözdən keçirtmək olar. Sferik sinuslar teoremi adi sinus teoreminə oxşardır:

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$$

Burada *A*,*B*,*C* – bucaqlardır, *a*,*b*,*c* isə – *ABC* üçbucağın tərəflərinin sferik uzunluqlarıdır. Kosinuslar teoremi isə əksinə, burada tanınmayacaq dərəcədə dəyişir:

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

Amma o da üç tərəfi və bir bucağın qiymətlərini əlaqələndirir. $A = \pi/2$ olduqda bu düstur özünəməxsus sferik "Pifaqor teoreminə" çevrilir:

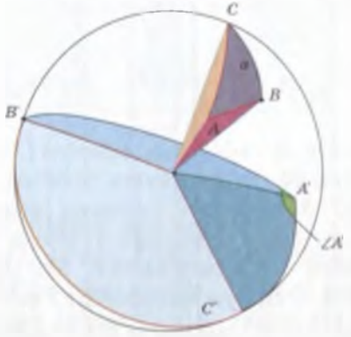
$$\cos a = \cos b \cos c$$

Sferada ikinci kosinuslar teoremi də doğrudur. O üçbucaqlının üç bucağını və bir tərəfinin qiymətlərini əlaqələndirir:

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

İKİLİK

Kosinusların ikinci teoremini birincisindən polyar çevirmə vasitəsilə almaq olar. Tutaq ki, $A^* - BC$ sferik düz xəttin polyusudur, dəqiq desək, *A* nöqtəsi ilə birlikdə verilmiş düz xətdən müxtəlif tərəflərdə yerləşən iki polyusdan biridir. Belə üsul ilə B^* və C^* nöqtələrini müəyyənləşdirək. $A^*B^*C^*$ sferik üçbucağı (şəkil 12) verilmiş *ABC* üçbucağına nəzərən polyar adlandırılır. Həmçinin göstərmək olar ki, *ABC* üçbucağı $A^*B^*C^*$



Şəkil 12.

üçbucağı üçün polyardır və bir üçbucağın hər hansı tərəfinin qiyməti ilə digərinin uyğun bucağının cəmi π-yə bərabərdir: $a + A^* = a^* + A$ və s. Bu düsturlar və $A^*B^*C^*$ üçbucağı üçün birinci kosinuslar teoreminin köməyi ilə *ABC* üçbucağı üçün ikinci kosinus teoremini çıxartmaq olar.

Eynilikə üçbucağın üç tərəfə görə bərabərlik əlamətindən üç bucağa görə bərabərlik əlamətini, iki tərəf və onlar arasındakı bucaq əlamətindən isə – bir tərəf və ona bitişik olan iki bucağa görə əlamətini almaq olar. Ümumiyyətlə, sferik üçbucaq üçün hər bir teoremdən başqasını çıxartmaq olar: necə deyərlər ikili teoremi, hansında ki, düz xətlər və nöqtələr, məsafələr və bucaqlar rollarını dəyişirlər; bu təkcə üçbucaqlar üçün deyil. Məsələn, ikili teoremlər cütü xaricinə və daxilinə çəkilmiş dördbucaqlıların əlamətlərini təşkil edirlər: birincisi dördbucaqlının qarşı tərəflərinin cəminin bərabərliyini tələb edir, ikincisi isə – qarşı bucaqların cəminin bərabərliyini (daxilinə çəkilmiş dördbucaqlının qarşı bucaqlarının cəmi 180°-yə bərabər olduğu haqqında planimetrik nəzəriyyə sferada doğru deyil, çünki bütün dörd bucağın cəmi artıq əvvəlcədən 360°-dən böyükdür). Amma ikilik prinsipi, təsdiq edir ki, əgər iki qarşılıqlı ikili teoremlərdən biri doğrudursa, deməli digəri də doğrudur, sferik həndəsədə bunlar bəzi qeyd və düzəlişlər ilə icra edilir. Amma sferanın iki diametral əks nöqtələrini "yapışdırmaq" və onları bir nöqtə kimi saymaq olar. Belə "yapışdırma" nəticəsində əmələ gələn elliptik və ya Riman həndəsəsi daha gözəl görünür. Məsələn, bu həndəsədə, hər hansı iki nöqtədən yeganə bir düz xətt keçir, hər hansı iki düz xətt bir nöqtədə kəsişir, ikilik prinsipi isə qeyd-şərtsiz icra edilir.

LOBAÇEVSKİ HƏNDƏSƏSİ

Məşhur qədim yunan alimi Evklidin həyatından bizə o qədər də çox şey məlum deyil. Amma onun qoyub getdiyi "Başlanğıc" əsəri sözsüz onun fəaliyyətinin möhtəşəm abidəsidir. Evklid ondan qabaq onun sələfləri tərəfindən həndəsə və "sözlü cəbr" (hərfli işarələr və düsturlar ilə o vaxtın riyaziyyatçıları hələ malik deyildilər) sahələrində etdiklərini bir topluya yığdı. Amma onun xidməti təkcə bunda deyil. O yaradıcı surətdə bütün yığdıqlarının üstündə işlədi və çox sayda özünün maraqlı, yeni ideyalarını da daxil etdi. Və o qədər möhtəşəm bir əsər yaratdı ki, onun "Başlanğıcı" özünəməxsus riyazi "İliada" və ya "Odisseya" kimi minilliklərdən keçdi. Avropanın bəzi ölkələrində *XX* əsrə qədər məktəblərdə həndəsəni Evklidin tərcümə edilmiş və ədəbi dildə düzəldilmiş "Başlanğıcı"nı daxil edən dərsliklər əsasında dərs keçirdilər. Rusiyada məşhur olan A.P. Kiselyovun həndəsə dərsliyi məhz belələrindəndir.

Amma Evklidin yazdıqları ondan sonra yaşayan riyaziyyatçıları bütövlükdə qane et-

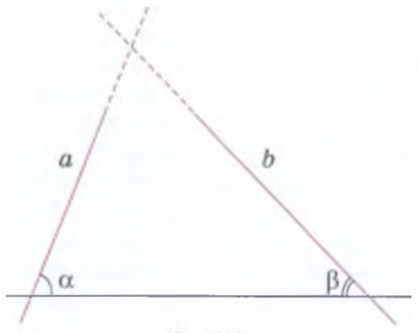
mirdi. Əlbəttə, onun həndəsəni aksiomatik quruluşda vermək, yəni həndəsənin bütün teoremlərini əsaslandığı bir neçə sadə aksiomlardan məntiqi nəticə kimi çıxarmaq təşəbbüsü çox gözəl idi; Amma Evklid tərəfindən təklif edilmiş aksiomlar siyahısı dərhal tənqidə məruz qaldı. Məsələn, "bütün düz bucaqlar bir-biriləri ilə bərabərdilər" deyən aksiomlardan biri sadəcə lazımsız oldu. Onu başqa Evklid aksiomları vasitəsilə teorem kimi isbat etmək müyəssər oldu.



Amma onlardan biri, Evklidin beşinci postulatı, riyaziyyatçıların xüsusi tənqidinə məruz qalmışdı. Tarix göstərdi ki, məhz bu aksiom özündə başqa qeyri-evklid həndəsənin başlanğıcını qoymuşdu.

Beşinci postulatda belə deyilirdi:

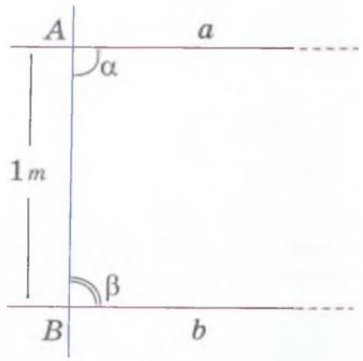
✓ **Əgər a və b düz xətləri üçüncü düz xətlə kəsişmədə, qiymətlərinin cəmi iki düz bucağın cəmindən kiçik olan (yəni 180°-dən az olan; şək. 1), α və β daxili birtərəfli bucaqlarını yaradırsa, onda bu iki düz xətt mütləq şəkildə, üçüncü düz xəttin α və β bucaqları (birlikdə 180°-kiçikdir) yerləşən tərəfində kəsişirlər.**



Şəkil 1.

Bu təklif başqa aksiomalardan gözə çarpacaq qədər mürəkkəbdir. Ona görə bu aksiomu müasir dərsliklərdə onunla eynigüclü olan paralellik aksiomu ilə əvəz edirlər: verilmiş düz xəttə onun xaricində götürülmüş nöqtədən bir paralel düz xətdən çox paralel düz xətt çəkmək olmaz. Amma iş təkcə ifadənin çətinliyində deyil. Teoremə tənqidi yanaşan insanı bu fikirin kifayət qədər əsaslandırılmış olmasına əmin etmək çox çətindir.

Təsəvvür edək ki, biz iki A və B nöqtələrini götürmüşük və bir-birindən 1m məsafədə iki a və b düz xətlərini elə çəkmişik ki, a AB ilə $\alpha = 90^\circ$ olan bucağı yaradır, b və AB arasındakı bucaq isə $89^\circ59'59''$-dir (şəkil 2). Başqa sözlə iki daxili α və β birtərəfli bucaqların cəmi 180°-dən təkcə 1 bucaq saniyəsi



Şəkil 2.

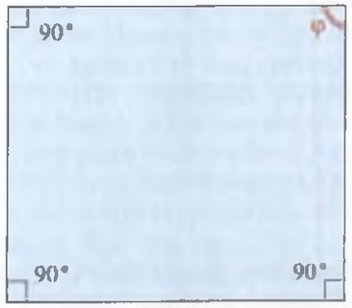
qədər azdır. a və b düz xəttlərini C nöqtəsində kəsişməyə qədər davam etdirək. Nəticədə, ABC düzbucaqlı üçbucaq alınacaq və təpədə yerləşən C bucağı 1 bucaq saniyəsi təşkil edən γ-ya bərabərdir. Bu üçbucağın AC kateti $c/tg\gamma$-ya bərabərdir, burada c=1 m. Kalkulyator vasitəsilə biz hesablaya bilərik ki, $1/tg\gamma \approx 2{,}06 \cdot 10^5$. Beləliklə AC katetin uzunluğu təxmini $2{,}06 \cdot 10^5$m=206km (həqiqətdə bir qədər çoxdur).

1 bucaq saniyəsinə bərabər olan bucağı biz kifayət qədər hiss edə bilərik (məsələn astronomik hesablamalarda). Amma yuxarıda göstərilmiş düz xətlərin 206 km məsafəsində kəsişməyini yoxlamaq elə də asan deyil. Çünki uzunluğu 200 km-dən çox müstəvi şəklində kağız və xətkeş hazırlamaq mümkün deyil. Bəlkə, optik cihazlardan istifadə edək? Amma o zaman daha bir postulat əlavə etmək lazım olacaq: işıq düz xətt üzrə yayılır (amma bu artıq həndəsə deyil, fizikadır). Əgər α və β bucaqlarının cəmi 180°-dən 1 bucaq saniyəsindən daha çox fərqə malik olsa necə olar?! Gördüyünüz kimi

Evklidin beşinci postulatı o qədər də sadə və inandırıcı deyil.

Beşinci postulatın ifadəsinin mürəkkəbliyi və inandırıcı olmaması ona gətirmişdir ki, riyaziyyatçıların bir çoxu bu postulatı aksiomların siyahısından çıxarmaq, yəni, onu başqa aksiomları vasitəsilə teorem kimi isbat etmək istəyirdilər. Riyaziyyatçıların beşinci postulat ilə həqiqi uzunsürən "müharibəsi" gedirdi. Müxtəlif ölkələrdə və müxtəlif əsrlərdə yaşayan riyaziyyatçılar bu "müharibə"də iştirak etdilər, amma "döyüşlərdə", xüsusilə uzağa "vuranlar", Lambert, Saккeri və Lejandr idi.

İtalyan Saккeri üç düz bucaq olan dördbucaqlını gözdən keçirdi (şəkil 3). Dördüncü bucaq (onu φ ilə işarə edək) düz, iti və ya kor



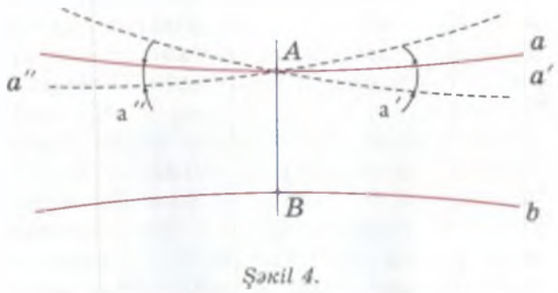
Şəkil 3.

bucaq ola bilərdi. Saккeri qərara gəldi ki, düz bucaq hipotezi, yəni, dördüncü φ bucağı həmişə 90°-yə bərabərdir, beşinci postulatı isbat etməyə imkan verir. Başqa sözlə, düz bucaq hipotezi beşinci postulata ekvivalent olan yeni bir aksiom təşkil edir.

Kor bucaq hipotezi, yəni ki, dördüncü φ bucağın kor olmasına imkan verən dördbucaqlının mövcudluğu haqqında hipotezi Saккeri ciddi mühakimələr ilə rədd etdi. Amma iti bucağın hipotezinin düzgün olmamasını nə Saккeri, nə də onun tərəfdarları sübut edə bilmədilər. Beşinci postulatın alınmaz "qalası" fəth edilməmiş qaldı.

Fransız riyaziyyatçısı Adrien Mari Lejandrın tədqiqatları çox maraqlıdır. Onun Evklid həndəsəsinə həsr edilmiş kitabı çox yaxşı yazılıb və bir neçə dəfə çap olunmuşdur. Onların hər birində Lejandr, onun fikrinə görə beşinci postulatın isbat olunduğunu göstərən mühakimələr gətirirdi. Amma hər növbəti nəşrdə müəllif etiraf edirdi ki, onun tədqiqatında hər dəfə hansısa bir fikrin (tədqiqatda açıq göstərilməmiş) – "aydın olan"ın təsdiqindən istifadə edilir, amma həqiqətdə isə beşinci postulata ekvivalent olan yeni aksiom təklif edilirdi. Amma Lejandrın təşəbbüslərinin heç biri uğurla nəticələnməmişdi.

Lejandrın sınaqlarından birinin qısa təsvirini verək. Tutaq ki, a və b – eyni üçüncü bir düz xəttə perpendikulyar olan və onunla A və B nöqtələrində kəsişən iki düz xətlərdir. Bu iki a və b düz xətti kəsişmirlər. Fərz edək ki, Evklidin beşinci postulatı düz deyil və A nöqtəsindən daha bir a', b ilə kəsişməyən düz xətt keçirtmək olar (şək. 4). Ona (AB-yə nəzərən) simmetrik olan a'' düz xətti də b ilə kəsişmir. İki α' və α'' iti bucaq-

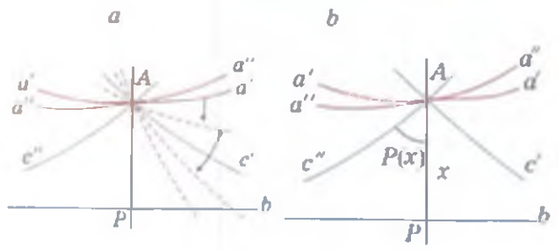


Şəkil 4.

larını gözdən keçirərək (bir-birinə nəzərən simmetrik olan) Lejandr ciddi surətdə isbat edir ki, a düz xəttini həm sağ tərəfə, həm də onu sol tərəfə davam etdirsək, o b düz xəttindən uzaqlaşacaq. Amma a və b düz xətləri özlərini belə apara bilməzlər: əgər bu xətlər bir-biri ilə kəsişmirlərsə, onda onlar bütün uzunluğu boyu bir-birindən müəyyən məsafədə yerləşməlidirlər. İnandırıcıdır, elə deyilmi? Amma əslində, bu sadəcə başqa aksiomdur: o Evklidin beşinci postulatının nəticəsi kimi alınır və ondan öz növbəsində beşinci postulatın düzgünlüyü irəli gəlir.

XIX əsrin əvvəlində beşinci postulat ilə "döyüşə" Kazan universitetinin professoru rus riyaziyyatçısı Nikolay İvanoviç Lobaçevski də daxil oldu. O son dərəcə istedadlı təkidli idi. Əvvəlcə Lobaçevski onun sələflərinin seçdiyi yol ilə gedirdi, yəni ki, əksini fərz etməklə düşünməyə çalışırdı. Evklidin beşinci postulatının düz olmamasını və başqa aksiomların düzgünlüyünü fərz

etsək, biz ziddiyyətlə rastlaşacağıq. O bu ziddiyyətlə də isbat olunacaq.



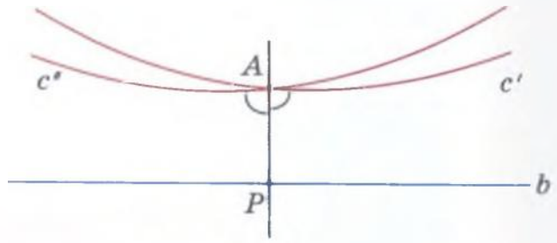
Şəkil 5.

Beləliklə, fərz edək ki, beşinci postulat düz deyil: b düz xəttinə aid olmayan A nöqtəsindən (şəkil 5*a*) biz b ilə kəsişməyən birdən çox düz xətt keçirə bilərik. Tutaq ki, a' və a'' düz xətləri b ilə kəsişmirlər. Şəkildə göstərildiyi kimi, biz a' düz xəttini saat əqrəbi istiqamətində döndərəcəyik. O zaman b ilə "axırıncı dəfə" kəsişməyən c' düz xətti tapılar. Deməli saat əqrəbinə uyğun döndərəndə (kifayət qədər kiçik bucağa) c'-dən alınan düz xətlər b düz xətti ilə kəsişəcəklər, c'-dən əks istiqamətdə kiçik dönmə zamanı əmələ gəlmiş düz xətlər isə b ilə kəsişməyəcəklər. Başqa sözlə, A nöqtəsindən keçən bütün düz xətlər arasında c' düz xətti b ilə kəsişən düz xətləri onunla kəsişməyənlərdən ayırır. c' düz xətti özü b ilə kəsişmir. b-yə çəkilmiş AP perpendikulyarına nəzərən c' ilə simmetrik olan c'' düz xətti üçün də eyni təsviri müşahidə edə bilərik. O da b ilə kəsişən düz xətləri kəsişməyənlərdən ayırır.

Lobaçevski c' və c'' düz xətlərini b düz xəttinə parallel adlandırır, belə ki, c' b ilə sağa paraleldir, c'' isə b ilə sola paraleldir. A nöqtəsindən keçən və b düz xətt ilə kəsişməyən başqa düz xətləri (a' və a'' kimi) b düz xətti ilə ayrılan adlandırırlar.

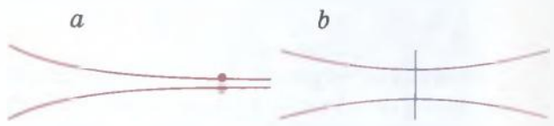
Sonra isə, AP xəttin uzunluğunu x ilə, c' və c'' düz xəttlərinin AP düz xətti ilə əmələ gətirdiyi bucağı $P(x)$-lə göstərək (şək.5*b*). Lobaçevski ona məxsus olan təkidlə bu anlayış və işarələri daxil edərək, onun beşinci postulatın düz olmaması haqqında fərziyyəsindən nə alındığını öyrənmək istəyir və arzuolunan ziddiyyəti tez bir zamanda tapmağa çalışır.

Bizim cizgilərimizdə xətlər əyilmişlər. Oxucu başa düşməlidir ki, Lobaçevski məhz düz xətlər haqqında fikirləşir. Əgər AP parçası kiçikdirsə, onda $P(x)$ bucağı 90°-yə yaxındır. AP kəsiyi lap kiçik olanda P nöqtəsinə "mikroskopla" baxsaq (şəkil 6), biz görərik ki, c' və c'' düz xəttləri praktiki olaraq qovuşurlar (üst-üstə düşür), çünki $P(x)$ bucağı 90°-yə çox yaxındır. Ümumi şəkildə isə, beşinci postulatın düzgün olmaması fərziyyəsinə uyğun olaraq xətləri əyri təsvir etməyimiz lazım olur. Əgər sonradan daha da çox qəribə şeylər əmələ gəlsə, bu bizim üçün ancaq yaxşı olacaq – biz çoxdan gözlənilən ziddiyyət ilə tezliklə rastlaşacağıq.



Şəkil 6.

Lobaçevski isbat edir ki, (beşinci postulatın düzgün olmaması haqqında fərziyyədə) iki paralel düz xətt paralellik tərəfinə bir-biri ilə daima yaxınlaşırlar, amma əks istiqamətdə isə onlar qeyri-məhdud bir birindən uzaqlaşırlar (şəkil 7*a*). İki ayrılan düz xətt isə yeganə ümumi perpendikulyara

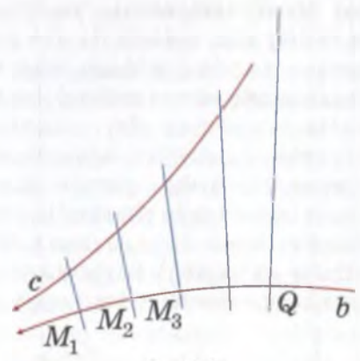


Şəkil 7.

malikdirlər. Ondan iki tərəfə də onlar qeyri-məhdud şəkildə bir-birindən uzaqlaşırlar (şəkil 7*b*). Bu – Lejandrın yazdıqlarına çox oxşayır, amma biz bilirik ki, bunda heç bir ziddiyyət yoxdur.

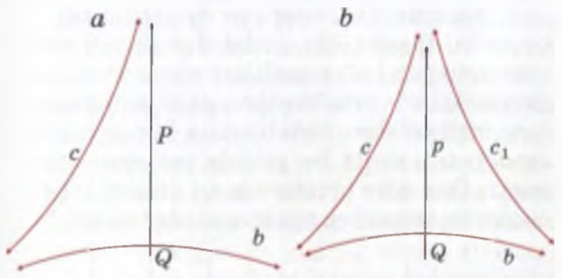
Sonra Lobaçevski iki b və c parallel düz xətləri gözdən keçirir və b düz xəttində paralelliyə əks tərəfdə uzaqlaşan M nöqtəsini

götürür (şəkil 8). M nöqtəsinin hər bir vəziyyətində o, c düz xətti ilə kəsişənə qədər b



Şəkil 8.

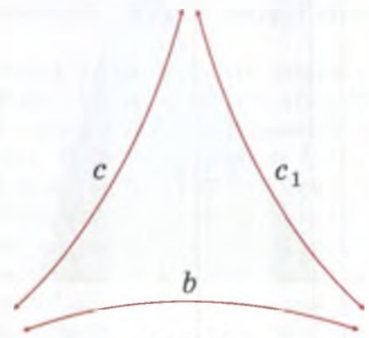
düz xəttini çəkir. M nöqtəsinin hərəkəti zamanı perpendikulyarın uzunluğu dayanmadan artır və hansısa Q vəziyyətinə çatanda perpendikulyarın uzunluğu sonsuz böyük olur. Dəqiq desək, b düz xəttinə Q nöqtəsində keçirilmiş p perpendikulyarı c düz xətti ilə paraleldir (şəkil 9*a*). p perpendikulyarına nəzərən c düz xəttinə simmetrik olan c_1 düz xətti qursaq, biz bir-birinə cüt-cüt paralel olan üç düz xətt alacağıq – b, c və c_1 (şəkil 9*b*). Özünəməxsus "sonsuz üçbucaq"



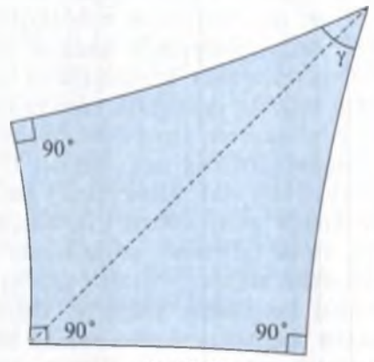
Şəkil 9.

yaranır: onun iki tərəfi bir-birinə paraleldir, təpəsi isə heç yoxdur (onlar elə bil sonsuzluqda yerləşirlər; şəkil 10). Bu artıq adət etdiyimiz düz xətlərin yerləşməsi ilə heç uyğunlaşmır! Amma burada da ziddiyyət yoxdur.

O zaman Lobaçevski düsturların qüvvətini istifadə etməyə çalışır. Daxil etdiyi $P(x)$-dən istifadə edərək, üçbucağın tərəflərinə görə onun bucaqlarını hesablamağa imkan verən asılılıqlar alır. Və məlum olur ki, hər hansı üçbucağın bucaqlarının cəmi 180°-dən kiçikdir. Deməli, Saккeri dördbucaqlısında (əgər onu diaqonalla iki üçbucağa



Şəkil 10.



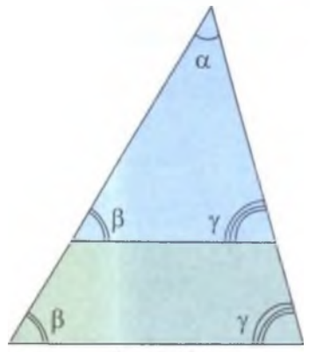
Şəkil 11.

bölsək; şəkil 11) bucaqların cəmi 360°-dən kiçikdir.

Bu onu göstərir ki, biz iti bucaq hipotezinin şərtləri daxilindəyik – yəni Saккeri dördbucaqlısında dördüncü bucaq $\varphi < 90°$. Sanki yeni heç nə yoxdur: Saккeri və onun davamçıları çox uzun müddət iti bucaq hipotezinin üstündə işləyirdilər, lakin ziddiyyət tapa bilmədilər.

Amma Lobaçevski indi artıq çox "varlı" oldu: o artıq hər hansı üşbucağın tərəfləri və bucaqları arasında asılılıqları ifadə edən düsturlara malik idi. Öz düsturlarından istifadə edərək, Lobaçevski isbat etdi ki: əgər bizə üçbucağın bucaqları məlumdursa, onda biz birmənalı olaraq, onun tərəflərini də hesablaya bilərik. Çox qəribədir! Çünki oxşar üçbucaqlar var ki, onların bucaqları uyğun olaraq bərabərdir, amma tə-

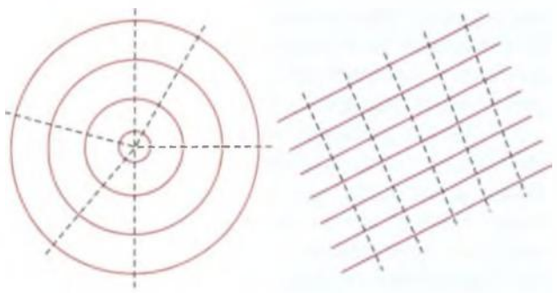
rəfləri isə eyni deyil, beləliklə üçbucağın bucaqları onun bütün tərərlərini hesablamağa imkan vermir (şəkil 12).



Şəkil 12.

Bəs bu nədir – arzuolunan ziddiyyət? Təəssüf ki, yenə də yox! Oxşar, lakin bərabər olmayan üçbucaqların mövcudluğu paralel düz xətlər haqqında aksiom ilə isbat olunur. Ona görə belə üçbucaqların mövcudluğu artıq beşinci postulata ekvivalent olan daha bir yeni aksiom kimi qəbul oluna bilər.

Lobaçevskinin ağlına yeni bir fikir gəldi: ziddiyyət heç vaxt olmayacaq! Başqa sözlə, əgər başqa aksiomlara biz beşinci postulatı da əlavə edirksə, onda bizdə ziddiyyətsiz həndəsi sistem – bizim vərdiş etdiyimiz Evklid həndəsəsi yaranır. Əgər qalan aksiomlara beşinci postulat yerinə biz paralellik aksiomunun inkar edilməsi aksiomunu əlavə etsək, yəni ki, – düz xətt xaricində yerləşən nöqtədən verilmiş düz xəttə birdən çox paralel düz xətt çəkmək mümkünlüyünü – onda biz artıq başqa ziddiyyətsiz həndəsi sistem (Lobaçevski onu "təsəvvür edilən" həndəsə adlandırırdı) alarıq.



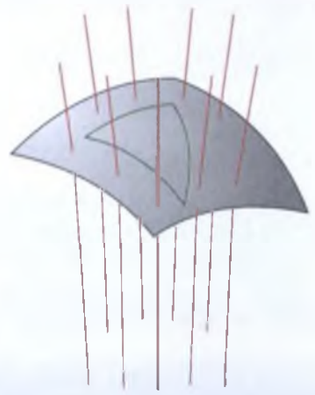
Şəkil 13.

Lobaçevski bir istiqamətdə bir-birinə paralel olan düz xətlər dəstəsini və onun ortoqonal trayektoriyasını, yəni, verilmiş dəstənin bütün düz xətləri ilə düz bucaq altında kəsişən xəttləri gözdən keçirtdi. Evklid həndəsəsində də ortoqonal trayektoriyanı gözdən keçirtmək olar. Məsələn, konsentrik çevrələrin dəstəsi üçün bu mərkəzdən başlayan şüalardır, paralel düz xətlər dəstəsi üçün isə – onlara perpendikulyar olan düz xətlərdir (şəkil 13). Amma Lobaçevski həndəsəsində ortoqonal trayektoriyalar kimi düz xətlər və çevrələrdən başqa, bu xətlərin dəstəsi üçün yeni xətlər də əmələ gəlir – orisiklər (və ya predel xətlər, şəkil 14).



Şəkil 14.

Sonrakı hadisələr çox dramatik idi. Lobaçevski fəzada düz xətlər dəstəsinin və onlara ortoqonal olan səthləri gözdən keçirtdi. Belə səthlər – orisferalar – gözəl xüsusiyyətlərə malikdirlər. Orisferanın hər iki nöqtəsindən tamamilə bu səthdə yerləşən orisikl keçir. Ona görə orisferada üç orisiklin üçbucaqlarını nəzərdən keçirmək olar (şəkil 15).



Şəkil 15.

Məlum oldu ki, orisfera həndəsəsində yerləşən hər hansı üçbucağın bucaqlarının cəmi 180°-yə bərabərdir. Yəni, orisferada orisiklər üçün beşinci postulat doğrudur – Evklid həndəsəsi hökmranlıq edir. Başqa sözlə, özünün "təsəvvür edilən" həndəsənin materiallarına əsaslanaraq Lobaçevski Evklid həndəsəsinin modelini düzəldə bildi. Həyatın nə acı istehzasıdır! Əgər hər şey əksinə olsaydı! Dahi alim başa düşürdü ki: əgər o Evklid həndəsəsinin (onun ziddiyyətsizliyində heç kimin şübhəsi yox idi) materialından özünün "təsəvvür edilən" həndəsəsinin modelini yaratsaydı – onda onun həndəsə sisteminin qanunauyğunluğu isbat olunacaqdır. Bunu artıq sonrakı nəslin riyaziyyatçıları etdi.

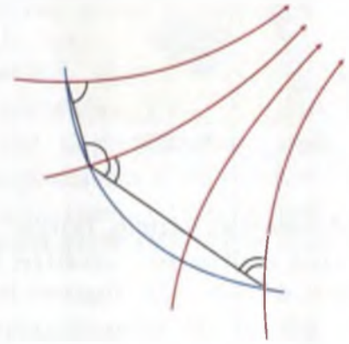
Lobaçevski 1824-cü ildə qeyri-evklid həndəsəsinin kəşfi haqqında məruzə ilə çıxış etdi, amma dəstək tapa bilmədi. O onun haqqında bir sıra məqalə və kitab çap etdirdi, onun köməyi ilə qabaqlar məlum olmayan bir neçə inteqralı da hesablaya bildi. Amma dövrün riyaziyyatçıları qeyri-evklid həndəsəsinin mövcudluğu haqqında fikirə hələ hazır deyildilər. Alim öz ideyalarının qəbul edilməsini görməyib vəfat etdi.

Lakin bir adam onun işlərini başa düşürdü və dəstəkləyirdi. Dahi Qauss, "riyaziyyatçıların şahı" (onun ölümündən sonra araşdırılmış arxivə əsaslanaraq) hələ 1815-ci ildə, Lobaçevskidən doqquz il əvvəl oxşar ideyalar haqqında fikirləşirdi. Baxmayaraq ki, Qauss qeyri-evklid həndəsəsini Lobaçevski kimi belə dərin və ətraflı araşdırmamışdı, amma oxşar ideyaların qanunauyğunluğunu qəbul edirdi və hətta yeni həndəsədə bir neçə isbatlar etmişdir. Amma baxmayaraq ki, onun rəyinə bütün riyaziyyatçılar qulaq asırdılar, Qauss öz əsərlərini nə çap etdirməyə, nə də Lobaçevskini dəstəkləməyə cürət etmədi. Qauss başa düşürdü ki, riyaziyyatçılar onun qeyri-adi ideyalarını qəbul etməyəcəklər və onun fikrini dahinin "qəribəliyi" kimi qiymətləndirəcəklər. Amma Qauss nail oldu ki, Lobaçevskini Qettinq alim cəmiyyətinin xarici müxbir üzvü kimi seçsinlər. Bu, Lobaçevskiyə həyatı boyu alim kimi verilmiş yeganə şərəf idi.

Qaussdan başqa qeyri-evklid həndəsəsinin açılışında daha bir alimin xidməti var. Macar riyaziyyatçısı Yanoş Bolyay Evklidin beşinci postulat problemi ilə dərindən maraqlanırdı və bu haqda atası riyaziyyatçı Farkaş Bolyaya məktubda yazmışdır. Farkaş oğluna cavab verdi ki, bu problem insanın gücü xaricindədir. O bütün boş vaxtı alacaq, sakitliyindən və sağlamlıqdan məhrum edəcək və bununla məşğul olmaq lazım deyil.

Amma Yanoş atasının məsləhətinə qulaq asmadı. Və tezliklə müvəfəqiyyətə nail oldu. O qeyri-evklid həndəsəsini qurmağa nail oldu. Baxmayaraq ki, o Lobaçevskidə olduğu kimi dərin və ardıcıl deyil. Həndəsə dərsliyinin axırında yerləşdirilmiş "Appendix" adlı öz əsərində Yanoş Bolyay yeni sistemi izah etdi. Lobaçevski kimi o da cəmiyyətdə qəbul edilmədi. Amma ona xəbər verdilər ki, ondan üç il əvvəl eyni məzmunlu kitabı hansısa rus alimi də çap etdirib. Bolyay inanmadı və qərara gəldi ki, onu kəşfindən məhrum etmək istəyirlər. O, xüsusi olaraq rus dilini Lobaçevskinin əsərlərini orijinalda oxumaq üçün öyrəndi. Cəmiyyətdə qəbul edilməməsi və onu qabaqladığından kədər hissi Yanoşun ruhi gücünü sındırdı.

Qeyd edək ki, Yanoşda Lobaçevkidə olmayan bəzi maraqlı qurmalar var idi. Məsələn, o orisikləri bərabər meyillə vətərlər vasitəsilə müəyyən edir (ortoqonal trayektoriyalar kimi yox, baxmayaraq ki, bu iki tərif ekvivalentdir; şəkil 16).



Şəkil 16.

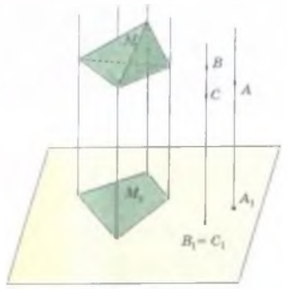
Sonrakı nəslin riyaziyyatçıları (Klein, Keli, Puankare və s.) Lobaçevskinin həndəsəsinin modelini Evklid həndəsəsinin materialına əsaslanaraq qura bildilər, bununla onlar yeni həndəsənin ziddiyyətsizliyini və qanunauyğunluğunu isbat etdilər. Riyaziyyatçılar başa düşdülər ki, müxtəlif həndəsələr və müxtəlif fəzalar ola bilər.

HƏNDƏSƏ VƏ ÇEVRİLMƏLƏR QRUPLARI

Cəbrdə müxtəlif funksiyalara baxılır. Onlardan ən sadələri – xətli və kvadratikdir. Hansısa çoxluqdan (təyin oblastı) götürülmüş hər hansı x-ə f funksiyası – funksiyanın x nöqtəsində $f(x)$ qiymətini qarşı qoyur. Məsələn, $f(x) = x^2 + 1$ funksiyası $x = 2$ ədədinə $f(2) = 2^2 + 1 = 5$ ədədini qarşı qoyur.

Həndəsədə isə bir az başqa növlü funksiyalar – həndəsi çevrilmələri gözdən keçirirlər. Cəbri funksiyalardan fərqli olaraq, bu funksiyalar, hər nöqtəyə uyğun nöqtəni qarşı qoyur.

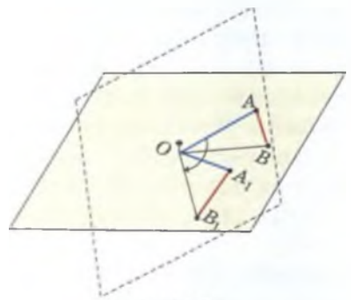
Məsələn, fəza fiqurunun müstəviyə p proyeksiyalanmasını gözdən keçirək (şək.1). Hər bir A nöqtəsinə bu çevirilmə uyğun olaraq proyeksiya müstəvisində yerləşən A_1 nöqtəsini qarşı qoyur. Biz deyirik ki, A_1 proyeksiya müstəvisində A nöqtəsinin surətidir və $A \xrightarrow{P} A_1$ yazırıq. İxtiyari M fiqurunun bütün nöqtələrinin surətləri M_1 fiqurunu təşkil edirlər – M_1 fiqurun surətidir. Verilmiş şəkildə M piramidasının surəti proyeksiyalar müstəvisində dördbucaqlıdır, yəni, $M \xrightarrow{P} M_1$. Oxşar olaraq, hər hansı çevirilmələr zamanı nöqtə və fiqurların surətləri göstərilir. Əgər hansı çevirilmə haqqında söhbət getdiyi aydındırsa, onda oxun üstündə onun işarəsi yazılmır:



Şəkil 1.

$$A \to A_1,\ M \to M_1$$

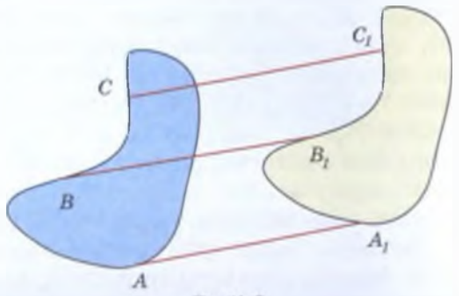
Əgər həndəsi çevirilmə zamanı nöqtələr arasında məsafə dəyişmirsə, bunu hərəkət adlandırırlar, yəni, əgər $A \to A_1$ və $B \to B_1$, onda $AB = A_1B_1$. Belə ki, dönmə (şəkil 2) – nöqtələr arasında məsafəni dəyişmədiyindən – hərəkətdir. Qeyd edək ki, hərəkətin həndəsi başa düşülməsində nöqtənin əvvəlki və axırıncı yerləşməsinə diqqət yetirilir, onun sürətindən, aralıq mövqeyindən və s. asılılığı fikri nəzərdən atılır. Hərəkətə həndəsi yanaşma fiziki yanaşmadan fərqlidir.



Şəkil 2.

Müstəvinin hərəkətini aşağıdakı şəkildə təsəvvür etmək olar. Təsəvvür edək ki, müstəvidə hansısa nöqtə və fiqurlar verilib. Onun üstünə kalka qoyub, nöqtə və fiqurları haşiyələyək. Sonra isə kalkanı çıxarıb, onu artıq müstəviyə yeni vəziyyətdə qaytaraq. Kalka yarımşəffaf olduğuna görə müstəvidə yerləşən əsas nöqtə və fiqurlar da görünir, həm də kalkanın kənar edilmiş vərəqində olan təsvirləri (surətləri) də görünür. Müstəvinin hər bir nöqtəsi yeni vəziyyətə keçir (surət). Bu həndəsi çevirilmə hərəkət adlandırılır.

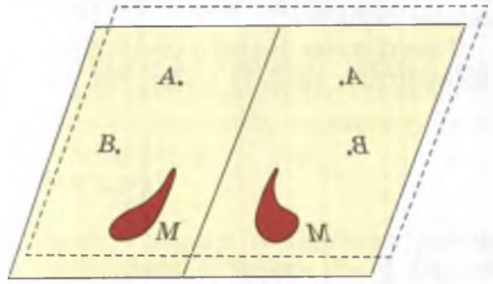
Paralel köçürmə də hərəkətdir. Müstəvinin bütün nöqtələrini eyni məsafəyə və eyni istiqamətdə yerlərini dəyişdirən çevirilməyə paralel köçürmə deyilir (şəkil 3). Paralel köçürülmə zamanı nöqtəni və onun surətini birləşdirən vektor bütün nöqtələr üçün eyni olduğuna görə, paralel köçürmə



Şəkil 3.

zamanı deyirlər ki, hansısa $\bar{a}$ vektoruna paralel köçürüb.

Hərəkətin daha bir növü – ox simmetriyasıdır. Tutaq ki, müstəvidə hər hansı l düz xətti (simmetriya oxu) və hansısa fiqur və nöqtələr çəkilib. Vərəqin üstünə kalkanı qoyub, onun üstünə l düz xəttini, nöqtə və fiqurları köçürək. Sonra isə kalkanı çevirək və müstəviyə əks üzü ilə elə qoyaq ki, l düz xəttinin hər nöqtəsi özü ilə üst-üstə düşsün (şəkil 4). O zaman hər bir nöqtə və hər bir fiqur elə bir vəziyyətə düşəcəklər ki, əvvəlki



Şəkil 4.

vəziyyətə nəzərən l düz xəttinə görə simmetrik olacaqlar. Ox simmetriyasını cizgini l oxuna görə qatlamaqla da reallaşdırmaq olar.

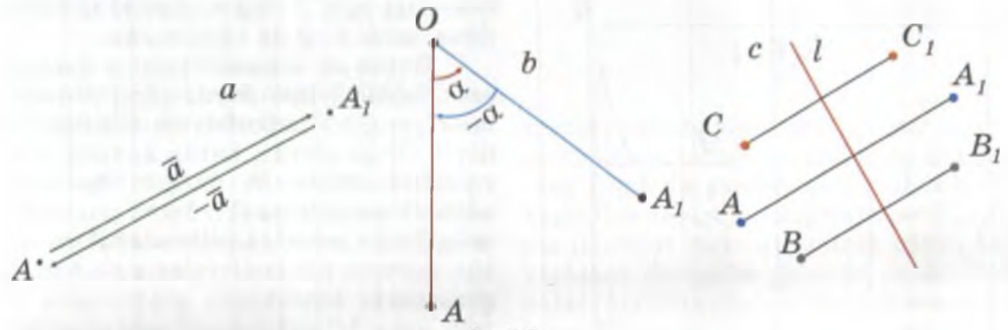
Hər hansı hərəkət müstəvinin eyni müstəviyə qarşılıqlı birqiymətli çevirilməsidir, yəni, iki müxtəlif A və B nöqtələrinə iki müxtəlif A_1 və B_1 nöqtələri uyğundur. Bu aydındır: A və B nöqtələri müxtəlif olduğuna görə, onlar arasında məsafə sıfıra bərabər deyil, hərəkət zamanı məsafə dəyişmədiyindən onların A_1 və B_1 surətləri arasında məsafə də sıfıra bərabər deyil, yəni ki A_1 və B_1 arasında məsafə AB məsafəsinə bərabərdir. Hər f hərəkəti üçün ona tərs olan, f^{-1} kimi göstərilən əks hərəkəti müəyyən etmək olar: əgər f hərəkəti A nöqtəsini A_1 nöqtəsinə keçirirsə, onda f^{-1} hərəkəti A_1 nöqtəsini A nöqtəsinə keçirir, yəni, hər surəti öz yerinə qaytarır.

Əgər çevrilmə qarşılıqlı birqiymətli deyilsə, onda onun üçün tərs çevrilmə müəyyən edilməyib. Məsələn, fəzanın müstəviyə proyeksiyası qarşılıqlı birqiymətli deyil: xüsusilə, fəzanın müxtəlif B və C nöqtələrində (şəkil 1) proyeksiyalar müstəvisində surətləri ola bilər ki, üst-üstə düşməsin. Ona görə tərs çevrilmə zamanı obrazın fəzanın hansı nöqtəyə köçürülməsi məlum deyil.

a vektoruna paralel köçürmə üçün tərs hərəkət – $\bar{a}$ vektoruna paralel köçürülmə olacaq (şəkil 5a), O nöqtəsi ətrafında α bucağına dönmə üçün tərs çevirmə O nöqtəsi ətrafında $(-\alpha)$ bucağına dönmə olacaq (şəkil 5b). Ox simmetriyasında tərs hərəkət – elə eyni simmetriyadır (şəkil 5c); burada tərs hərəkət əvvəlki hərəkət ilə üst-üstə düşür. Həqiqətən, əgər l düz xəttinə nəzərən simmetriya zamanı A nöqtəsi A_1 nöqtəsinə keçirsə, onda A_1 nöqtəsi eyni simmetriyada A-ya qayıdır.

İki hərəkətin ardıcıl icra edilməsinin nəticəsi kompozisiya adlandırılır. Əgər əvvəlcə f hərəkəti, ondan sonra isə g hərəkəti icra edilirsə, onda kompozisiya $f \circ g$ kimi göstərilir.

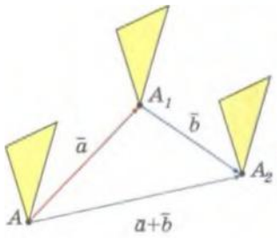
Məsələn, əgər $f - \bar{a} = \overline{AA_1}$ vektoruna paralel köçürülmə, g isə $-\bar{b} = \overline{A_1A_2}$ vektoruna paralel köçürülmədirsə, onda onların $f \circ g$ kompozisiyası $\bar{a} + \bar{b} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2}$ kimi təsvir edilir (şəkil 6). Həqiqətən, vektorların toplama qaydasına uyğun olaraq:



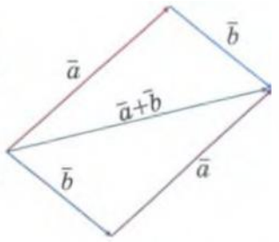
Şəkil 5.

$\overline{AA_2} = \overline{AA_1} + \overline{A_1A_2} = \bar{a} + \bar{b}$.

Başqa sözlə, əgər $A \xrightarrow{f} A_1 \xrightarrow{g} A_2$, onda $f \circ g$ (A-nı dərhal A_2-yə köçürən çevirmə) $\bar{a} + \bar{b}$ vektoruna paralel köçürülmədir. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ olduğuna görə paralel köçürülmələrin kompozisiyası hansı ardıcıllıq ilə icra edilməkdən asılı deyil: $f \circ g = g \circ f$.



Şəkil 6.



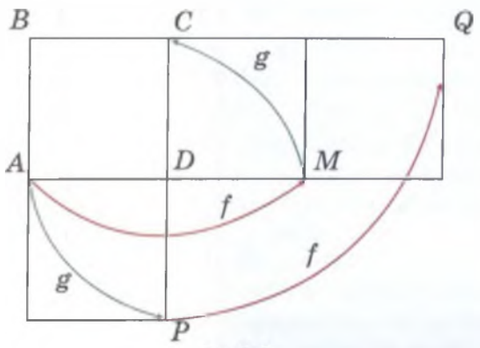
Şəkil 7.

Amma hərəkətin başqa növləri üçün yerdəyişmə qanunu uyğun gəlmir. Məsələn, bir neçə yanaşı kvadratlar ilə $ABCD$ kvadratını gözdən keçirək (şəkil 8). C nöqtəsinin ətrafında 90° dönməni f ilə göstərək, g ilə isə – D nöqtəsinin ətrafında 90° dönməni göstərək (dönmələr saat əqrəbinə qarşı icra edilirlər). Onda:

$A \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} C$, $A \xrightarrow{g} P \xrightarrow{f} Q$.

Yəni, $f \circ g$ kompozisiyası A nöqtəsini C nöqtəsinə köçürür, eyni zamanda $g \circ f$ A nöqtəsini Q-ya köçürür. Deməli $f \circ g$ və $g \circ f$ – müxtəlif çevirmələrdir. Beləliklə, paralel köçürülmələrin kompozisiyası kommutativdir (yəni yerinidəyişdirmə qanununa uyğundur): $f \circ g \neq g \circ f$, eyni zamanda dönmələr kompozisiyası (müxtəlif nöqtələr ətrafında) qeyri-kommutativdir:

$f \circ g \neq g \circ f$

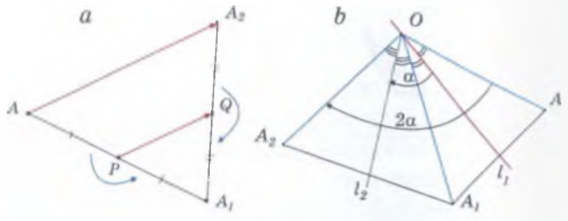


Şəkil 8.

Daha iki nümunə göstərək: P və Q nöqtələrinə nəzərən iki mərkəzi simmetriyaların kompozisiyası (şəkil 9*a*) $2\overrightarrow{PQ}$ vektoruna paralel köçürmədir, α bucağını təşkil edən l_1 və l_2 oxlarına nəzərən ox simmetriyalarının kompozisiyası (şəkil 9*b*) – oxların kəsişmə nöqtəsinin ətrafında 2α bucağına dönmədir.

Amma hər halda f və g hərəkətlərinin kompozisiyası hər hansı hərəkətdir: çünki həm f hərəkəti zamanı, həm g hərəkəti zamanı məsafələr dəyişmir və həmçinin g çevirilmələri ardıcıllıq ilə icra edilən zamanda məsafələr dəyişmir.

G çevrilmələr çoxluğu çevrilmələr qrupu adlandırılır, əgər 1) G-dən hər hansı f



Şəkil 9.

çevrilməsi üçün ona tərs olan və G-yə aid olan f^{-1} çevrilməsi mövcuddursa, 2) G-dən hər hansı iki çevrilmənin $f \circ g$ kompozisiyası G-yə aid aiddirsə. Deyilənlərdən görmək olar ki, bütün hərəkətlərin D çoxluğu çevrilmələr qrupudur.

Bütün hərəkətlərin çoxluğundan başqa çevrilmələrin başqa qruplarını da göstərmək olar: məsələn, bütün paralel köçürmələrin T çoxluğunu. Həqiqətən, əgər f çevrilməsi T çoxluğuna daxildirsə (paralel köçürmədir), onda tərs çevrilmə də – paralel köçürmədir. Sonra isə əgər f və g – paralel köçürmələrdirsə, onda $f \circ g$ da köçürmədir.

Bütün ox simmetriyaların çoxluğu isə çevrilmələr qrupu deyil, çünki iki ox simmetriyasının kompozisiyası ox simmetriyası deyil. Oxşar olaraq, bütün mərkəzi simmetriyaların çoxluğunu da çevrilmələr qrupu adlandırmaq olmaz (biz bunu yuxarıda görmüşdük). Amma biz isbat edə bilərik ki, bütün mərkəzi simmetriyaların və paralel köçürmələrin bütövlükdə götürülmüş S çoxluğu artıq bir qrup təşkil edir.

Bütün hərəkətlərin D qrupuna əsaslanaraq, alman həndəsə alimi Felıks Kleyn "Həndəsə nə deməkdir?" sualına cavab verdi. Bundan başqa, Kleynin yanaşması Evklid həndəsəsinin, Lobaçevski həndəsəsinin və bir sıra başqa həndəsi sistemlərin daxili bütövlüyünü görməyə imkan verdi. Evklid həndəsəsinin nümunəsində Kleynin yanaşması ilə tanış olaq.

Kleynə görə, iki fiqur o zaman bərabər sayılır ki, əgər birini hansısa hərəkət növü ilə başqasına keçirtmək olar. Aydındır ki

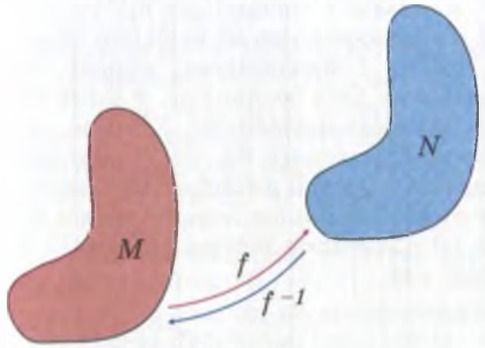
✓ **hər fiqur özünə bərabərdir.**

Çünki bütün nöqtələri yerində saxlayan eynilik çevrilməsi fiquru özünə keçirir. Fiqurların bu bərabərlik xassəsini refleksivlik adlandırırlar.

Sonra isə:

✓ **Əgər M fiquru N fiquruna bərabərdirsə, onda N fiquru da M fiquruna bərabərdir.**

Həqiqətən, əgər f hərəkəti ilə M, N-ə keçirsə, onda f^{-1} tərs hərəkəti ilə N M-ə keçəcək (şəkil 10). Deyirlər ki, fiqurların bərabərliyi simmetrikliyə malikdir.

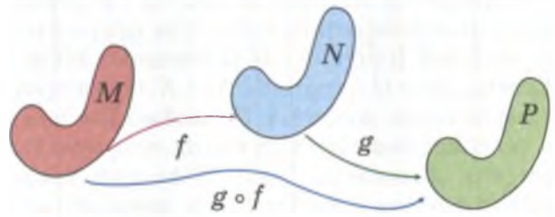


Şəkil 10.

Fiqurların bərabərliyinin daha bir xassəsi tranzitivlik adlandırılır:

✓ **Əgər M fiquru N fiquruna bərabərdirsə, öz növbəsində N isə P fiquruna bərabərdirsə, onda M fiquru P-yə bərabərdir.**

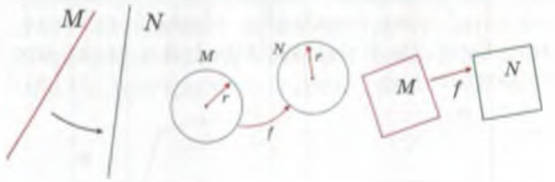
Verilmiş xüsusiyyəti Evklid başqa cür ifadə etmişdir: "üçüncüsünə bərabər olan iki fiqur, öz aralarında bərabərdirlər". Həqiqətən, əgər M N-ə bərabərdirsə, onda M-i N-ə keçirən f hərəkəti mövcuddur. Sonra isə əgər N-i P-yə bərabərdir, onda N P-yə keçirən g hərəkəti mövcuddur: $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ (şəkil 11). Onda $f \circ g$ kompozisiyası (o da hərəkətdir) M-i P-yə keçirir, deməli M fiquru



Şəkil 11.

P-yə bərabərdir. Göründüyü kimi, fiqurların bütün bərabərlik xassələri D hərəkətlər çoxluğunun qrup olmasından irəli gəlir.

Öz aralarında bərabər olan fiqurlar eyni xassələrə malikdirlər. Məsələn, əgər M – düz xətdirsə, onda ona bərabər olan N fiquru da – düz xətdir (şəkil 12). Əgər M – r radiuslu çevrədirsə, onda N də r radiuslu çevrədir. Əgər M – kvadratdırsa, onda N də



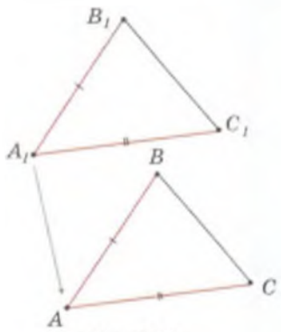
Şəkil 12.

mütləq şəkildə kvadratdır. Əgər hansısa fiqur S sahəsinə malikdirsə, onda ona bərabər olan fiqur da eyni sahəyə malikdir. Başqa sözlə, bir fiqurdan ona bərabər fiqura keçsək (hərəkət zamanı) fiqurun bütün həndəsi xassələri dəyişməz qalır və ya deyirlər ki, onlar invariantdırlar (dəyişilməyən). İndi artıq Kleyinin tərifi başa düşülən olacaq: həndəsə fiqurların bütün hərəkətlər zamanı

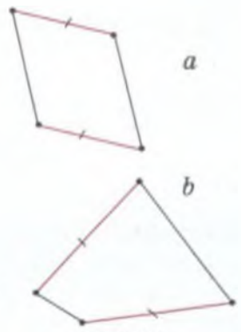
invariant qalan xassələrini tədqiq edir. Belə ki, Pifaqor teoremi (katetlərin kvadratları cəmi hipotenuzun kvadratına bərabərdir) həndəsədə tədqiq edilən xassələrə aiddir, çünki bu xassə hərəkət zamanı dəyişilmir. Nöqtənin bu və ya digər koordinatlara malik olması isə onun həndəsi xassəsi deyil.

Amma biz daha irəli gedək. Kleyn həndəsənin ümumi təsvirini verir. Tutaq ki, G – D qrupu ilə üst-üstə düşən və ya ondan fərqli olan müstəvinin hərəkətlər qrupudur. M və N iki fiqurunu biz G-bərabərli adlandırarıq, əgər G qrupunda M-i N-nə keçirən hərəkət varsa; sonra isə, G-həndəsə hər hansı iki G-bərabər olan fiqurlarda eyni olan fiqurların xassələrini, yəni, G qrupun hərəkətləri zamanı invariant olan xassələri adlandırarıq.

Məsələn, bütün paralel köçürmələrin T qrupunu müəyyən edən həndəsəni gözdən keçirək. T-həndəsənin teoremlərindən biri: əgər ABC üçbucağının AB və AC tərəfləri uyğun olaraq $A_1B_1C_1$ üçbucağının A_1B_1 və A_1C_1 tərəflərinə T-bərabərdirlərsə (təpələrin ardıcıllığını nəzərə alaraq), onda bu üçbucaqlar T-bərabərdirlər (şəkil 13). Həqiqətən, AB və A_1B_1 tərəflərin T-bərabərliyi o deməkdir ki, AB-ni A_1B_1-ə keçirən paralel köçürmə mövcuddur. Eyni köçürülmə A-nı A_1-ə keçirir, AC isə – T-bərabərli A_1C_1 tərəfinə, yəni ki bütün birinci üçbucağı ikincisinə köçürür. Başqa sözlə, T-həndəsədə üçbucaqların iki tərəf üzrə bərabərlik əlaməti mövcuddur. Evklidin həndəsəsində buna oxşar heç nə yoxdur.



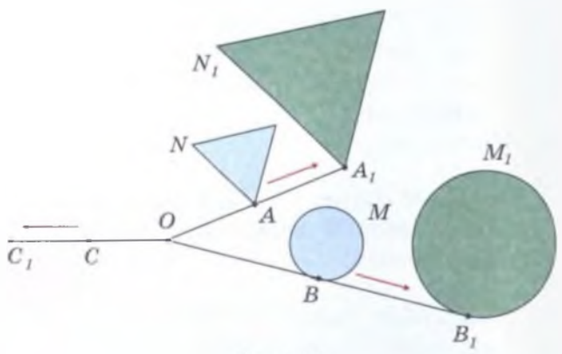
Şəkil 13.



Şəkil 14.

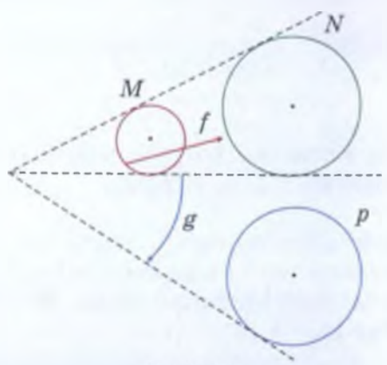
Daha bir qeyri-adi teorem (Evklid həndəsəsi üçün): əgər dördbucaqlıda iki qarşı tərəf T-bərabərlidirsə, onda verilmiş dördbucaqlı – paraleloqramdır (şəkil 14*a*). Evklid həndəsəsində iki qarşı tərəfin bərabərliyindən (D-bərabərliyi) dördbucaqlının paraleleloqram olduğu çıxmır (şəkil 14*b*).

İndi isə D qrupundan daha geniş olan çevrilmələr qrupunu gözdən keçirək. Xatırladaq ki, bütün məsafələri κ dəfə dəyişilən müstəvinin çevrilməsi oxşarlıq adlandırılır, burada κ – oxşarlıq əmsalı adlanan hər hansı müsbət ədəddir. Oxşarlığın nümunəsi kimi O mərkəzli və κ əmsallı homotetiya xidmət edə bilər, yəni, hər A nöqtəsi elə bir A_1 nöqtəsinə keçir ki: $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$ (şəkil 15).



Şəkil 15.

κ əmsallı f homotetiyasının və g hərəkəti ilə kompozisiyası da həmçinin oxşarlıqdır, çünki f homotetiyası zamanı bütün məsafələr κ dəfə böyüyürlər, g hərəkəti zamanı isə onlar dəyişmirlər. Xüsusən, κ əmsallı və O mərkəzi ilə elə O mərkəzinin ətrafında α bucaqlı g dönməsi ilə f homotetiyası (şəkil 16) dönmə homotetiyasını təşkil edir (O nöqtəsində mərkəz, κ əmsallı və α bucağı ilə).

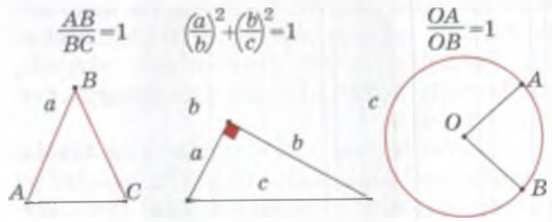


Şəkil 16.

Asanlıqla başa düşmək olar ki, iki oxşarlığın kompozisiyası yenə də oxşarlıqdır. Əgər f oxşarlığı nəticəsində bütün məsafələr κ_1 dəfə g oxşarlığı nəticəsində isə – κ_2 dəfə dəyişirlərsə, onda $f \circ g$ kompozisiya zamanı bütün məsafələr $k_1 \cdot k_2$-yə vurulur: deməli $f \circ g$ – $k_1 \cdot k_2$ əmsalı ilə oxşarlıqdır. Oxşar olaraq, əgər f – κ əmsalı ilə oxşarlıqdırsa, onda tərs çevrilmə – $1/\kappa$ əmsalı ilə oxşarlıqdır. Bu o deməkdir ki, bütün oxşarlıqların H çoxluğu çevrilmələr qrupudur.

H qrupu ilə müəyyənləşdirilən həndəsə necədir? Çünki oxşarlıq çevrilmələri zamanı məsafələrin uzunluqları sabit qalmır və ona görə H həndəsəsində parçaların uzunluğu haqqında danışmaq lazım gəlmir. İlk baxışdan oxşarlıqlar həndəsəsində bütün Evklid həndəsəsinin teoremləri mənalarını itirirlər. Məsələn, bərabəryanlı üçbucaqda oturacağa bitişik olan bucaqların bərabər olması haqqında teoremi göstərmək olar. Bərabəryanlı üçbucaqda yan tərəflərin uzunluqları bərabərdir. Amma, əgər bizdə uzunluqlar yoxdursa, onda bərabəryanlı üçbucaqlar da yoxdur. Eynilikle Pifaqor teoremi haqqında demək olar: orada düzbucaqlı üçbucağın tərəflərinin uzunluqları haqqında danışılır. Yenidən uzunluqlar! Oxşarlıqlar həndəsəsində daha nə qalır ki?

Yuxarıda göstərilmiş iki teorem oxşarlıqlar həndəsəsində mövcuddurlar. Onların ifadə olunması başqadır. İş ondadır ki, baxmayaraq ki, oxşarlıq çevirmələri zamanı parçaların uzunluqları dəyişir, iki parçanın uzunluqlarının nisbəti invariantdır. Bərabəryanlı üçbucağı iki yan tərəfin nisbəti 1-ə bərabər olan üçbucaq kimi müəyyən etmək olar (şəkil 17*a*). Oxşarlıq çevrilmələri zamanı bucaqların qiymətləri invariant olduğuna görə, bərabəryanlı üçbucaq haqqında teorem tamamilə "hüquqları bərpa edir". Oxşarlıqlar həndəsəsi üçün Pifaqor teoremi (şəkil 17*b*): hər hansı düzbucaqlı üçbucaqda $(a/c)^2 + (b/c)^2 = 1$ bərabərliyi mövcuddur, burada a/c və b/c – katetlərin uzunluqlarının hipotenuzun uzunluğuna nisbətidir. Ümumiyyətlə, bu qayda ilə həndəsənin məktəb kursunda keçdiyimiz bütün teoremlərini və anlayışlarını ifadə etmək olar. Bir nümunə göstərək: əgər hər hansı A və B nöqtəsi üçün elə O nöqtəsi (mərkəz) mövcuddur ki, OA/OB nisbəti 1-ə bərabərdir, onda xətt çevrə adlandırılır (şəkil 17*c*).

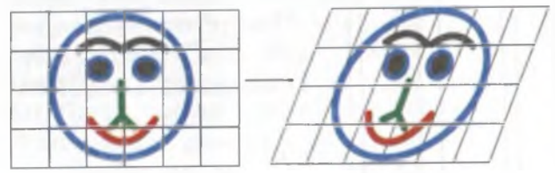


Şəkil 17.

Kleynin mövqeyinə əsaslanaraq başqa həndəsələrin təsvir edilməsinə baxaq.

Hərəkətlər zamanı nöqtələr arasında məsafələr invariantdır, deməli nöqtələrin düzxətli yerləşməsi (düz xətlər düz xətlərə keçirlər) və düz xətlər arasında bucaqların qiymətləri saxlanılır. Buna əsaslanaraq, hərəkətin başqa xassələrini də demək olar. Sonra isə oxşarlıq çevrilməsi zamanı nöqtələr arasında məsafələrin nisbəti də saxlanılır. Deməli, oxşarlıq zamanı həm nöqtələrin düzxətli yerləşməsi, həm də bucaqların qiymətləri də saxlanılır.

Nöqtələrin düzxətli yerləşməsi və hər hansı iki paralel parçanın uzunluqlarının nisbətini saxlayan daha da böyük ümumi çevrilmələr mövcuddur. Belə çevrilmələr afin çevrilmələri adlandırılır (şəkil 18). Müstəvinin bütün afin çevrilmələrin çoxluğu da çevrilmələr qrupunu da təşkil edir.

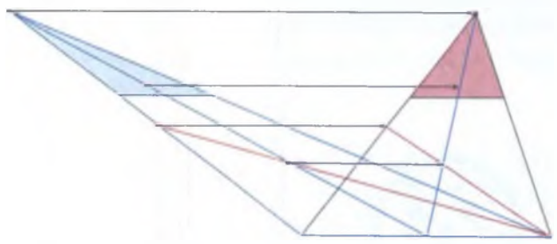

Şəkil 18. Afin çevrilməsi

Bu qrup ilə müəyyən edilən həndəsə afin həndəsəsi adlandırılır. Hər hansı oxşarlıq afin çevrilmə olduğuna görə, bütün afin

həndəsəsinin teoremləri həm oxşarlıqlar həndəsəsi üçün, həm də Evklid həndəsəsi üçün düzdür. Amma Evklid teoremlərinin çoxu (həm də oxşarlıq həndəsəsinin) afin həndəsəsində yoxdur. Xüsəsən, bu həndəsədə Pifaqor teoremi yoxdur (afin həndəsəsində bucaqlar qeyri-invariantdır, deməli, düzbucaqlı üçbucaqlardan danışmağın mənası yoxdur).

Hansı teorem və anlayışlar afin həndəsəsində var? Düz xətlər cütünün paralelliyi (ortaq nöqtəsinin olmaması) afin çevrilmələr zamanı saxlanılır və ona görə afin həndəsəsində paraleloqram və trapesiyaları gözdən keçirtmək olar. Paraleloqramların diaqonalları kəsişən zaman yarıya bölünürlər. Afin həndəsəsinin dilində bu faktı $AO/CO=1$ və $BO/DO=1$ bərabərlikləri kimi yazırlar, burada O – $ABCD$ paraleleloqramların diaqonallarının kəsişmə nöqtəsidir. Paralel parçaların uzunluqları nisbəti bir düz xəttin parçaları kimi (AO/CO, BO/DO) afin həndəsəsində mənaya malikdirlər.

Üçbucağın medianları bir nöqtədə kəsişir və orada 2:1 nisbətində bölünməsi haqqında teorem də afin həndəsəsinə malikdir. Qeyd edək ki, hər hansı iki üçbucaq "afin bərabərdir": onlardan biri başqasına "əyrilik" (şəkil 19) və oxşarlıq çevrilməsi vasitəsilə keçirilir. Ona görə medianlar haqqında teoremi hansısa bir üçbucaq üçün isbat etmək daha rahatdır, məsələn, bərabərtərəfli üçbucaq üçün.



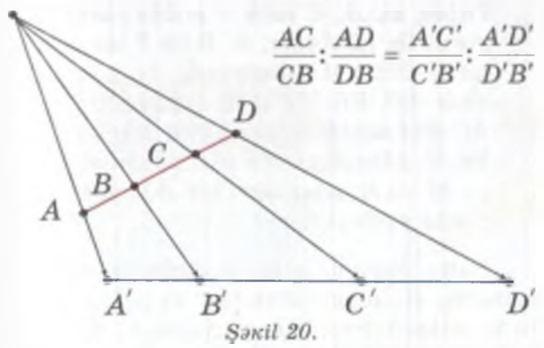
Şəkil 19.

Afin həndəsəsini başqa həndəsi sistemlər kimi – proyeksiya həndəsəsi kimi, Kleynin işlərindən əvvəl də bilirdilər, amma onların çevrilmələr qrupları əsasında başa düşülməsi ona məxsusdur.

Burada biz proyeksiya həndəsəsinin əsas tezisləri haqqında qısaca məlumat verəcəyik, çünki həndəsənin bu sistemi haqqında ayrıca bir məqalə veriləcək. Bu həndəsədə bütün proyeksiyalı təsvirlərdə invariant olan fiqurların xassələri – yəni, nöqtələrin düzxətli yerləşməsini saxlayan çevrilmələr zamanı öyrənilir. Bütün afin çevrilmələr və oxşarlıqlar bu xassəyə malikdirlər. Daha bir nümunəni gözdən keçirək. Verilmiş α müstəvisini hansısa mərkəzdən başqa β müstəvinin üstünə proyeksiyasını çəkək, sonra isə başqa mərkəzdən β müstəvisinin α müstəvisində proyeksiyasını çəkək. Aralıq mərkəz proyeksiyaları daha da böyük sayda götürmək olar. Amma proyeksiyaların belə bir kompozisiyası bütün α müstəvisində müəyyən edilməyəcək. Müstəvini özünün üstünə qarşılıqlı əks etdirilməsini almaq üçün, onu tamamlayırlar – hər düz xəttə bütün paralel düz xətlər üçün eyni olan sonsuz uzaqlaşmış nöqtəni əlavə edirlər, düz xətlərin çoxluğuna isə – daha bir bütün yeni nöqtələr ilə təmin edilmiş sonsuz uzaqlaşmış düz xətti əlavə edirlər.

Sonsuz uzaqlaşmış nöqtələr ilə tamamlanmış müstəvi proyeksiyalı müstəvi adlandırılır. İndi isə yuxarıda verilmiş anlayışı dəqiqləşdirə bilərik: hər hansı düz xəttin (sonsuz uzaqlaşmış nöqtə ilə tamamlanmış) yenidən düz xəttə keçirilməsi baş verən proyeksiyalı müstəvinin özünə əks etdirilməsi proyeksiyalı çevrilmələr adlandırılır. Proyeksiyalı çevrilmələr qrup təşkil edirlər (əgər iki çevrilmə düz xətti düz xəttə keçirirsə, o da onların kompozisiya üçün də doğrudur və eyni zamanda hər hansı üçün tərs olan çevrilmələr üçün də). Proyeksiyalı həndəsəni elə bu qrup da müəyyən edir.

Qeyd edək ki, "paralel parçaların uzunluqlar nisbəti" ifadəsi proyeksiyalı həndəsədə mənasını itirir – çünki burada hətta paralellik anlayışı da yoxdur: tamamlanmadan sonra hər hansı iki paralel xətt kəsişəcəklər! Paralel parçaların uzunluqlarının nisbətinin yerinə dörd nöqtənin düz xəttə ikili münasibəti gözdən keçirilir. A,B,C,D (şəkil 20) nöqtələri üçün o, $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$ nisbəti ilə verilir. İstənilən proyeksiyalı çevrilmələr zamanı, xüsusi halda mərkəzi proyeksiya zamanı da, bu nisbətin saxlanıldığını göstərmək olar.



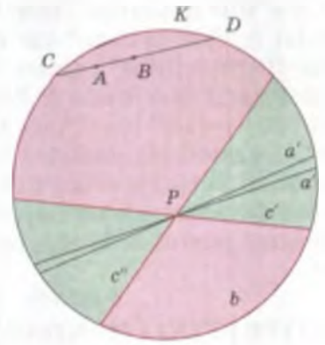
Şəkil 20.

Ümumiyyətlə desək, proyeksiyalı çevrilmələr zamanı çevrə ellips, hiperbola və ya parabolaya keçir. Amma verilmiş çevrəni çevrəyə keçirən sonsuz sayda müstəvinin proyeksiyalı çevrilmələri də mövcuddur. Onlar bizim L ilə göstərdyimiz qrupu təşkil edirlər. L qrupundan çevrilmələrin sadə nümunələri – çevrənin mərkəzinin ətrafında dönmələr və onun diametrlərinə nəzərən simmetriyalardır. Daha maraqlısı odur ki, proyeksiyalı çevrilmələr vasitəsilə çevrəni özünə elə əks etdirmək olar ki, onun mərkəzi çevrənin daxilində verilmiş hər hansı nöqtəyə keçmiş olsun.

L qrupunu gözdən keçirərək, Kleyn başa düşdü ki, onun vasitəsilə Lobaçevskinin tədqiq etdiyi həndəsənin modelini almaq olar və bununla onun ziddiyyətsizliyini isbat etmək olar. Bu fikiri haqqında Kleyn öz müəllimi məşhur alman riyaziyyatçısı Karl Veyerştrasa danışdı. Amma o, öz şagirdini dəstəkləmədi – onun ideyasını mənasız saydı. Riyaziyyatçıların yeganə həndəsənin – Evklid həndəsəsi – mövcudluğunda nə qədər böyük əminliyi var idi! Amma Kleyn müəllimin məsləhətinə qulaq asmadı və modelinin quruluşunu bitirdi. Ondan asılı olmayaraq eyni modeli ingilis cəbr alimi Artur Keli yaratdı.

Lobaçevski həndəsəsinin Keli-Kleyn modeli belədir (şəkil 21). Müstəvidə K çevrəsini verək (onu mütləq adlandırırlar). Verilmiş modelə aid olan bütün anlayışları dırnaq arasına qoymağı şərtləşək. Bizi təkcə K çevrəsinin daxilində yerləşən "nöqtələr", yəni onun daxili oblastının nöqtələri maraqlandıracaq (K mütləq çevrəsinin və onun xarici oblastının nöqtələri araşdırılmaqdan istisna olunur). Uc nöqtələrsiz K çevrəsinin hər hansı vətərini "düz xətt" adlandıraq.

Hər hansı A və B "nöqtələrindən" Evklid aksiomalarına tam uyğun olaraq, təkcə bir



Şəkil 21.

"düz xətt" keçdiyi aydındır. K çevrəsinin daxili oblastını "Lobaçevski müstəvisi" adlandıraq. K-nı özü-özünə keçirən hər hansı proyeksiyalı çevrilməni "hərəkət" adlandıraq. Buna oxşar "hərəkətlər" L qrupunu təşkil edirlər. Keli-Kleyn modelində bu qrup ilə təyin olunan həndəsə araşdırılır.

"Lobaçevski müstəvisinin" "nöqtələri" arasında məsafəni bütün "hərəkətlər" zamanı dəyişməsin deyə, müəyyənləşdirməliyik. "Hərəkətlər" proyeksiyalı çevrilmələrdir, deməli ikili münasibət saxlanılır. Ona görə Keli-Kleyn modelində "məsafə" ikili münasibət vasitəsilə ifadə olunur. O bu düstur ilə müəyyənləşir:

$$\left|\ln\left(\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}\right)\right|$$

Burada C və D – A və B-dən keçən vətərin uclarıdır. Qeyd edək ki, verilmiş ifadə sıfıra təkcə o zaman bərabər ola bilər ki, əgər ikili münasibət 1-ə bərabərdir, yəni, $A=B$. "Düz xətlər" arasında "bucaqlar" da proyeksiyalı həndəsədə olan düsturlar ilə müəyyənləşir. İndi artıq "Lobaçevski müstəvisində" "perpendikulyar" "düz xətlər", tərəflərin "uzunluqlarını" və üçbucaqların "bucaqlarını" gözdən keçirmək olar.

Sonra isə, əgər iki "düz xətti" təsvir edən vətərin ortaq ucları K çevrəsində yerləşirsə, onları "paralel" adlandırmağı şərtləşək. Əgər iki "düz xətti" təsvir edən vətərlər nə K mütləq çevrəsinin daxilində, nə də onun xaricində ortaq nöqtələrə malik deyillərsə, onda onları "ayrılan" adlandırırlar. İndi isə məlum olur ki, b "düz xəttində" yer-

ləşməyən P "nöqtəsindən" b "düz xətti" ilə kəsişməyən sonsuz sayda "düz xətt" keçirtmək olar. Bu "düz xətlərdən" ikisi (c' və c'' 21-ci şəkildə) b "düz xəttinə" iki müxtəlif istiqamətdə "paraleldirlər", qalan iki yaşıl vertikal bucaqların daxilində P "nöqtəsindən" keçən "düz xətlər" isə b "düz xətti" ilə "ayrılırlar". Düzəldilmiş modeldə Lobaçevski həndəsəsinin bütün faktları düzdür. İki min ildən çox davam etmiş riyaziyyatçıların Evklidin beşinci postulatı ilə döyüş belə də yekunlaşdı.

PROYEKSİYALI HƏNDƏSƏ

PROYEKSİYALI TEOREMLƏR

Proyeksiyalı həndəsə bir fənn kimi 1822-ci ildə formalaşmışdı. O zaman fransalı riyaziyyatçı Jan Viktor Ponsele özünün məşhur "Fiqurların proyeksiyalı xassələri haqqında elmi əsəri" çap etdirdi. Amma "yeni həndəsi düşüncənin" doğma yeri kimi Saratovu saymaq olar. Orada 1813-cü ilin martından 1814-cü ilin iyununa kimi əsir götürülmüş fransız leytenantı Ponsele "Elmi əsər..." əsasını qoymuş qeydləri yazırdı.

Amma formalaşmış nəzəriyyə boş yerdə əmələ gələ bilməzdi. Onun kökləri tarixin dərinliklərinə gedirdi. Müəllifi qədim yunan riyaziyyatçısı İsgəndəriyyəli Papp olan "Riyazi toplu"ya (IV əsr) proyeksiyalı həndəsənin ilk fundamental teoremi daxildir.

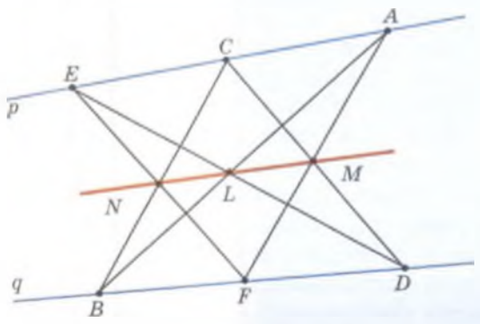
Məşhur "başsındıran" məsələni həll edərkən siz Pappın teoremi ilə tanış ola bilərdiniz: doqquz ağacı doqquz sıraya hərəsində üç-üç olmaqla əkmək (şəkil 1). Bu teoremin dəqiq ifadəsi belədir:

✓ **Tutaq ki, A, C və E – p düz xətti üzərində üç nöqtədir, B, D və F isə – başqa q düz xətti üzərində üç nöqtədir; əgər AB, CD, EF düz xətləri DE, FA, BC düz xətləri ilə uyğun olaraq L, M və N nöqtələrində kəsişirlərsə, onda L, M və N nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlər.**

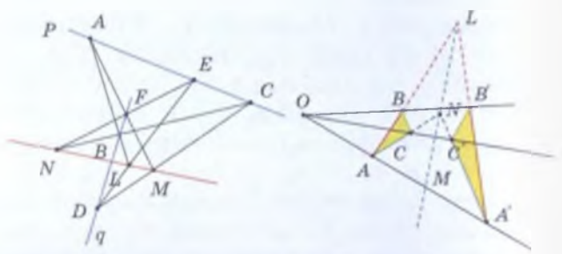
Papp teoremi kifayət qədər qəribədir. Birincisi, onun şərtlərində p və q düz xətlərin və onların üzərində yerləşən A, B, C, D, E, F nöqtələrinin qarşılıqlı yerləşməsi haqqında heç nə deyilmir. Əgər müxtəlif insanlardan xahiş etsək ki, "eksperiment" olaraq teoremin doğruluğunu isbat etsinlər, ola bilər ki, onlar müxtəlif cizgilər təklif edəcəklər; 1-ci şəkildə mümkün olan hallardan ikisi göstərilib. İkincisi, biz həndəsə dərsliklərində görməyə adət etdiyimiz nə uzunluq, nə bucaq, nə də ümumiyyətlə onlar ilə bağlı anlayış yoxdur. Burada təkcə həndəsənin ən əsas üç anlayışı istifadə edilir – nöqtə, düz xətt və nöqtənin düz xəttə məxsusluğu. Məhz belə tipli teoremlər proyeksiyalı həndəsə üçün xarakterikdir.

Buna oxşar tipli teoremin daha bir nümunəsini 1636-cı ildə çox kiçik həcmdə, 12 səhifəlik elmi əsərində fransız həndəsə alimi, arxitektor və mühəndis Jerar Dezarq vermişdi:

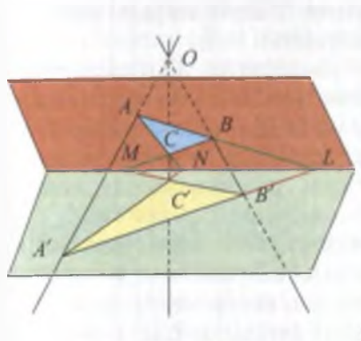
✓ **Tutaq ki, ABC və $A'B'C'$ üçbucaqlarının uyğun təpələrini birləşdirən AA', BB' və CC' düz xətləri eyni bir O nöqtəsindən keçir. O zaman üç uyğun tərəflərin AB və $A'B'$, BC və $B'C'$, CA və $C'A'$ cüt-cüt kəsişmə nöqtələri L, M, N (əgər belə nöqtələr mövcuddularsa) bir düz xətt üzərində yerləşirlər.**



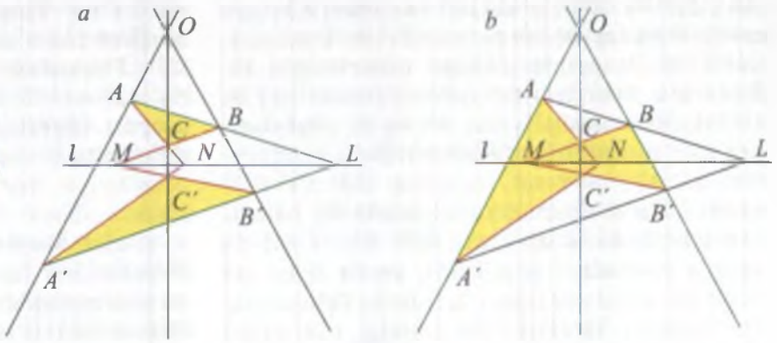
Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.



Şəkil 4.

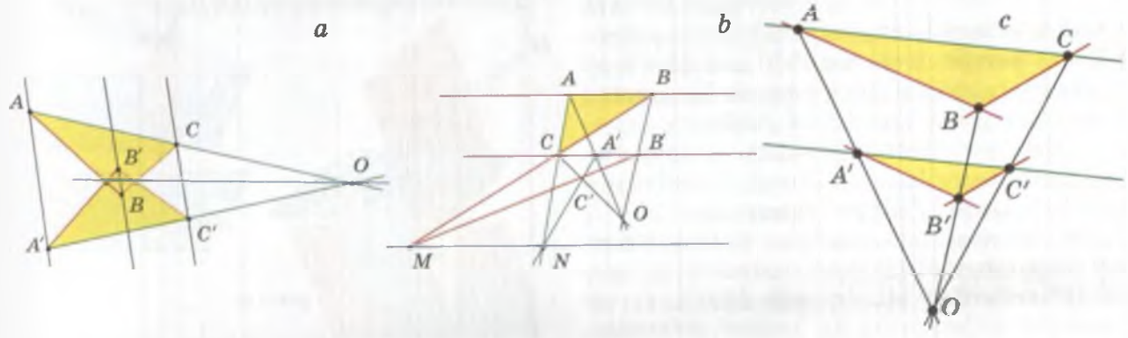
2,3 və 4-cü şəkillərdə Dezarqın teoreminin şərtlərini ödəyən çoxsaylı müstəvi və fəza konfiqurasiyalardan bir neçəsinin nümunəsi göstərilib. Qeyd edək ki: üçbucaqların "tərəfləri" kimi burada AB, $A'B'$ və s. parçalar yox, onların yerləşdiyi düz xətlər nəzərdə tutulub. Yeri gəlmişkən, bu konfiqurasiyalar on ağacın on sırada, hər sırada üç-üç yerləşməsini təsvir edir.

ABC və $A'B'C'$ üçbucaqların müstəviləri müxtəlif olanda Dezarq teoreminin doğruluğu aydındır (şəkil 3). Bu halda üçbucaqların uyğun tərəflərinin L, M və N kəsişmə nöqtələri ABC və $A'B'C'$ müstəvilərinin hər ikisinə aiddir, yəni onların kəsişdiyi düz xəttin üzərindədir. Əgər üçbucaqlar bir müstəvidə yerləşirlərsə (şəkil 4a) isbat üçün oxşar fəza konstruksiyanın təsvirini – proyeksiyasını – teoremə cizgi kimi təqdim etmək lazımdır (3 və 4-cü şəkilləri müqayisə edin). Fəzada L, M və N nöqtələri bir düz xətdə yerləşirlər, proyeksiya zamanı düz xətt düz xəttə keçir. Deməli, müstəvidə də teorem doğrudur.

Dezarq teoreminin şərtini – AA', BB' və CC' düz xətləri O nöqtəsində kəsişir – belə ifadə edə bilərik: AA' və BB' düz xətlərin O kəsişmə nöqtəsi CC' düz xətti üzərində yerləşir, ya da belə: AA' və BB', AN və BM, NA' və MB' (ANA' və BMB' üçbucaqların tərəfləri) bir düz xətt üzərində O, C və C' nöqtələrində cüt-cüt kəsişirlər. Onda teoremin hökmünü aşağıdakı şəkildə verək: AB, $A'B'$ və NM düz xətləri L nöqtəsində kəsişirlər. Nəticədə Dezarq teoremi özünün tərs teoreminə çevriir:

✓ **Əgər iki üçbucağın uyğun tərəflərinin cüt-cüt kəsişmə nöqtələri bir düz xəttdə yerləşirsə, onda bu üçbucaqların uyğun təpələrini birləşdirən düz xətlər eyni nöqtədən keçir.**

Amma tərs teorem başqa üçbucaqlara aiddir – ANA' və BMB' (4a və b şəkillərini müqayisə edin). Amma 5a şəklində ABC və $A'B'C'$ üçbucaqların uyğun tərəfləri bir düz xətt üzərində yerləşən üç nöqtədə kəsişirlər,



Şəkil 5.

AA', BB' və CC' düz xətləri isə ortaq nöqtəyə malik deyillər: onlar paraleldirlər. Bəs iş nədədir? Sadəcə, biz yaddan çıxartmışıq ki, Dezarqın teoremində üçbucaqların uyğun tərəflərinin kəsişdiyi L, M və N nöqtələrinin mövcudluğu fərz edilirdi. Belə fərziyyəsiz iki uyğun tərəf, məsələn AB və $A'B'$ paralel ola bilərlər. Belə bir halda biz həmçinin isbat edə bilərik ki, MN düz xətti də onlara paraleldir (şəkil 5*b*), ya da daha iki tərəf paraleldirsə (şəkil 5*c*), onda üçbucaqların üçüncü tərəfləri də paralel olacaqlar. Özünüz bütün halları nəzərə alaraq Dezarq teoreminin düz və tərs teoremlərini ifadə etməyə çalışın – o zaman siz proyeksiyalı nəzər-nöqtəsinin verdiyi üstünlükləri daha yaxşı qiymətləndirə bilərsiniz.

PROYEKSİYALI ÇEVİRMƏLƏR

Müstəvidə üçölçülü fiqurları necə təsvir etmək olar? Belə bir praktiki sual qədim həndəsəçilərin qarşısında dayanmışdı. O iki istiqamətdə həll edilirdi. Memarlığın tələbləri üçün – binaların cizgilərinin çəkilməsi ilə və onların yerləşmə planları üçün – ortoqonal proyeksiya üsulu hazırlanmışdı. Amma rəssamları belə bir "müstəvi" təsvir qane etmirdi. Onlar şəkildən xaricdə yerləşən fəzanın tamaşaçıda reallıq duyğusunu oyatmağa çalışırdılar. Görmə qabiliyyətinin mexanizmin təhlili perspektiv, mərkəzi proyeksiya anlayışlarına və həmçinin bir fiqurun iki perspektivin ümumi xassələri haqqında suala gətirdi. Sonra isə elə bu sualdan proyeksiyalı həndəsə əmələ gəldi.



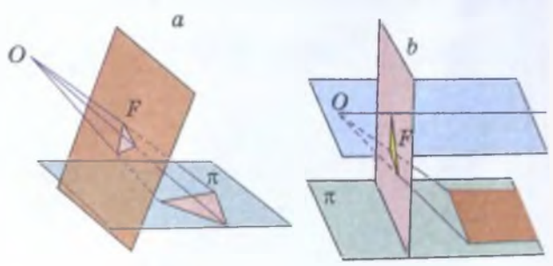
Leonardo da Vinçi

Perspektiv nəzəriyyəsinin əsasını Florensiyada baş kilsənin qübbəsinin layihəsini tərtib edəndə Filippo Bruneleski (1377-1446) qoymuşdu. O rəssamlar üçün perspektiv haqqında mühazirələri oxuyanlar arasında birincilərdən idi. İntibah dövrünün ustaları bu təlimi daha da inkişaf etdirdilər. Perspektiv qaydalarına ciddi surətdə uyğun olan şəkillərin çox gözəl nümunəsi – Leonardo da Vinçinin "Gizli axşam yeməyi" məşhur rəsm əsəridir.

Perspektiv nəzəriyyəsi ilə alman rəssamı Albrext Dürer (1471-1528) çox məşğul olurdu. Maraqlı odur ki, o, bir fiqurun fəzada müxtəlif vəziyyətlərdə yerləşən iki və üç müstəviyə mərkəzi proyeksiyasını araşdırırdı.

Həndəsədə perspektiv nə deməkdir? Fəzanın hər hansı O nöqtəsindən (proyeksiya mərkəzindən) və fəzada verilmiş F fiqurunun bütün nöqtələrindən düz xətlər keçirək. Seçilmiş π proyeksiyalar müstəvisi ilə bu düz xətlərin kəsişmə nöqtələrinin əmələ gətirdiyi fiqura F fiqurunun perspektiv təsviri, ya da başqa sözlə, onun O nöqtəsindən π müstəvisinə çəkilmiş mərkəzi proyeksiyası deyilir (şəkil 6*a*). Əlbəttə ki, O nöqtəsi π müstəvisində yerləşməməlidir; qalanları isə, fiqur, mərkəz və proyeksiya müstəvisi ixtiyari şəkildə yerləşə bilərlər. Müxtəlif müstəviləri seçərək (O mərkəzinin dəyişilməyən yerləşməsi ilə) biz fiqurun müxtəlif təsvirlərini alırıq. Rəssamlıqda proyeksiya müstəvisi (şəklin çəkildiyi parça özü) adətən mərkəz (göz) və F obyekti arasında yerləşir, fotoşəkildə isə mərkəz (obyektivin fokusu) π müstəvisi (foto plyonkası) və obyekt arasında yerləşir.

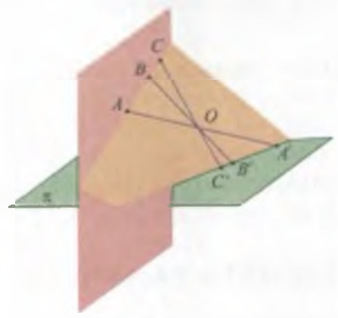
Mərkəzi proyeksiya F fiqurunun nöqtələri və onun π müstəvisində təsviri arasında perspektiv adlanan uyğunluq təyin edir. 6*a* şəkilində uyğunluq qarşılıqlı birqiymətlidir – hər F nöqtəsinə təsvirdə yeganə nöqtə uyğundur və tərsinə. Ümumiyyətlə, əgər F O-nun daxil olmadığı müstəvidə yerləşirsə (biz ancaq belə bir halı araşdıracağıq), onda O-dan hər hansı keçirilmiş düz xətt F ilə



Şəkil 6.

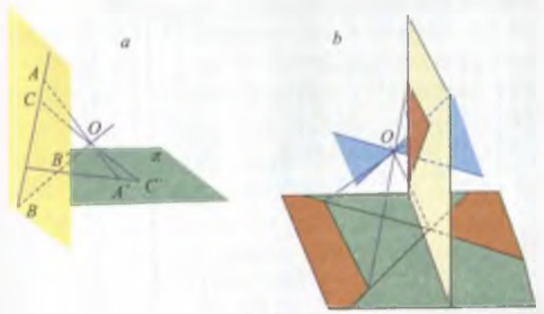
birdən çox olmayan nöqtədə rastlaşır. Deməli, belə bir halda təsvirin hər bir nöqtəsinə fiqurun yeganə nöqtəsi cavab verir. Amma bu, uyğunluğun qarşılıqlı birqiymətli olması üçün kifayət deyil: F fiqurunun O-dan keçən π müstəvisinə paralel olan nöqtələri də ola bilər (şəkil 6*b*), belə nöqtələrə isə proyeksiya müstəvisində heç bir nöqtə uyğun deyil.

Mərkəzi proyeksiyanın vacib xassəsi ondadır ki, o nöqtələrin düz xətli yerləşməsini saxlayır. Başqa sözlə, (O nöqtəsindən keçməyən) düz xəttin proyeksiyası düz xətdir (şəkil 7). Xatırlayaq ki, elə bu xassə bizə müstəvidə Dezarq teoremini daha asan yolla



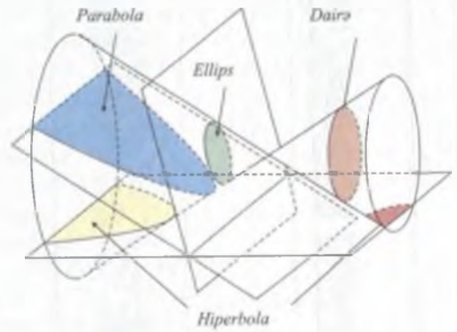
Şəkil 7.

fəza halına gətirməyə imkan verdi. Amma bizə tanış olan Evklid həndəsəsində mərkəzi proyeksiya zamanı dəyişilməyən hər hansı tanış anlayış və ya xassə tapmaq elə də asan deyil. Kəsişən düz xətlər paralel olurlar (şəkil 6*b*), paralel düz xətlər – kəsişənlərə çevrilirlər, düz xətt üzərindəki nöqtələr isə öz ardıcıllığını dəyişirlər (şəkil 8*a*). Məsafə və bucaqların saxlanılmasından artıq danışmaq da lazım deyil. Hətta üçbucaq kimi belə sadə fiqur da çox qəribə bir şeyə çevrilə bilər – birindən üçbucaq kəsilmiş qarşılıqlı bucaqlar cütünə (şəkil 8*b*) və ya zolağın yarısına.



Şəkil 8.

Çevrənin təsviri haqqında xüsusilə demək lazımdır. O mərkəzindən çıxan və çevrə ilə kəsişən düz xətlər konusşəkilli səth təşkil edirlər. Və ona görə çevrənin hər hansı mərkəzi proyeksiyası konusşəkilli səthin müstəvi ilə kəsişməsidir. Alınan xətləri (şəkil 9) konik kəsik və ya ikinci tərtib əyri xətlər adlandırırlar (koordinatlarda onları ikinci tərtib tənliklər vasitəsilə göstərirlər;



Şəkil 9.

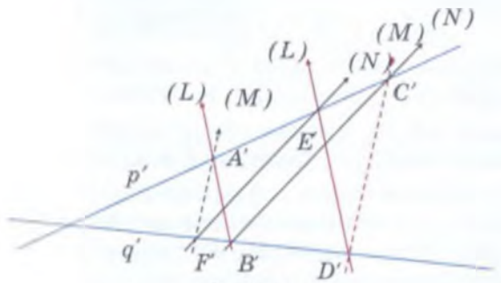
bax "Çox gözəl əyri xətlər" məqaləsinə). Belə əyri xəttin şəkli çevrənin və proyeksiya müstəvisinə paralel olan O nöqtəsindən keçən müstəvinin qarşılıqlı yerləşməsindən asılıdır. Əgər çevrə və müstəvi kəsişmirlərsə, onda çevrənin proyeksiyası ellips olacaq, əgər toxunurlarsa – parabola olacaq, əgər kəsişirlərsə – hiperboladır. İkinci tərtib əyri xətlərin oxşar olmamasına baxmayaraq, onların ümumi xassəsi də var – mərkəzi proyeksiya zamanı "saxlamağa müyəssər olan" xüsusiyyətlərdir. İndi isə biz proyeksiya həndəsəsinin tərifi üçün əsas anlayışlara yaxınlaşdıq.

Tutaq ki, F – α müstəvisində yerləşən fiqurdur və biz onun O (α üzərində yerləşməyən) nöqtəsindən β müstəvisinə proyeksiyasını alırıq: Burada yeni F' fiquru yaranır. Sonra isə biz F' fiqurunu β müstəvisinə daxil olmayan başqa O' nöqtəsindən γ müstəvisində proyeksiyasını alırıq və yeni F'' fiqurunu alırıq. Beləliklə, F'' fiquru F-dan iki ardıcıl mərkəzi proyeksiyasından sonra əmələ gəlir. Bu proyeksiyalar ardıcıllığını davam etdirmək olar. Mərkəzi proyeksiyaların hər hansı sonlu ardıcıllığı proyeksiyalı çevirmə adlandırılır, proyeksiyalı çevrilmələr zamanı fiqurların dəyişilməyən xüsusiyyətləri – proyeksiyalı xassələr adlandırılır, belə xassələri araşdıran elm isə – proyeksiyalı

həndəsə adlanır (qeyd edək ki, çevrilmələrin başqa növlərinə əsaslanaraq Evklid həndəsəsinin, Lobaçevski həndəsəsinin və başqa həndəsələrin predmetini izah etmək olar; bax "Həndəsə və çevrilmələr qrupu" məqaləsinə).

Proyeksiyalı həndəsənin banisi Ponsele onun mahiyyətini belə başa düşürdü. Araşdırılan obyektə bu nöqteyi-nəzərdən əsaslanaraq, o yeni nəticələr almaq üçün güclü bir üsul yaratdı. Əgər bizi maraqlandıran xassələr mərkəzi proyeksiya zamanı saxlanılırsa, onda verilmiş fiqurun aşağıdakı üsul ilə proyeksiyasını almağa çalışaq: proyeksiyada fiqurun xassələri, əgər aydın görünən deyilsə, onda asanlıqla isbat olunan olmalıdırlar.

Papp teoreminin isbatı üçün Ponsele üsulunu tədbiq edək. Bu teoremdə deyilir ki, AB və DE, EF və BC, AF və CD düz xətlərin uyğun olaraq kəsişdiyi L, M, N nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlər. Başqa sözlə, N nöqtəsinin LM düz xətti üzərində yerləşməsini isbat etməliyik. Tutaq ki, teoremdə verilmiş bütün nöqtə və düz xətlər (şəkil 1) α müstəvisində yerləşirlər. α müstəvisindən xaricdə yerləşən O nöqtəsini və OLM müstəvisinə paralel olan π müstəvisini götürək. α müstəvisinin O mərkəzindən π müstəvisində proyeksiyasını alaq. OL düz xətti π-yə paralel olduğundan L nöqtəsində kəsişən AB və DE düz xətləri, proyeksiya alındıqdan sonra, $A'B'$ və $D'E'$ paralel düz xətləri olacaqlar (6*b* şəkili ilə müqayisə edin). M nöqtəsindən keçən EF və BC düz xətlərin proyeksiyaları da paralel olacaqlar. N nöqtəsi LM düz xəttində yalnız o zaman



Şəkil 10.

yerləşir ki, əgər ON düz xətti OL və OM düz xətləri ilə bir müstəvidə yerləşmiş olsun, yəni, π-yə paralel olsun. Deməli AF və CD düz xətlərin proyeksiyaları da paralel olmalıdırlar. Beləliklə π proyeksiyalar müstəvisində Papp teoremi aşağıdakı təklifə çevrilir (şəkil 10):

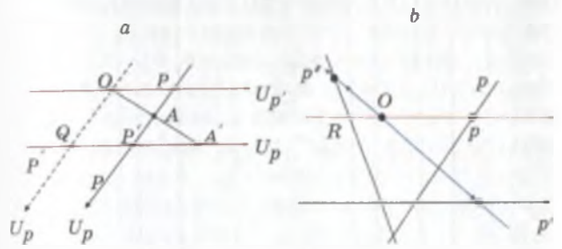
✓ **Əgər iki nöqtə üçlüyü $-A', C', E'$ və B', D', F' uyğun olaraq p' və q' düz xəttlərində yerləşirlərsə və $A'B' \| D'E'$ və $E'F' \| B'C'$, onda $A'F' \| C'D'$-dir.**

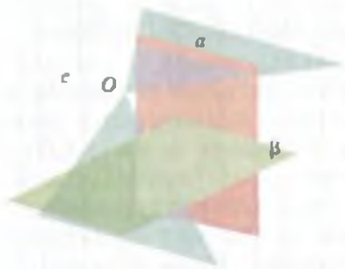
Bunu, artıq p' və q'düz xətlərinin əmələ gətirdiyi bucağın daxilində yerləşən oxşar üçbucaqlardan istifadə edərək isbat etmək çətin deyil (isbat zamanı ayrıca daha asan bir halı ($p' \| q'$) da gözdən keçirtmək lazım gələcək).

Belə bir paradoks yaranır: üç nöqtənin bir düz xəttin üstündə yerləşməsi haqqında təklifin isbatını biz cizgidə nə nöqtələrin özünün, nə də düz xəttin cizgidə olmayan halına gətirdik! Bununla belə, aşağıda biz görəcəyik ki, onlar yaxşıca "gizlənib lər".

MÜSTƏVİNİN TAMAMLANMASI

Biz artıq qeyd etmişdik ki, fiqurlar arasında perspektiv uyğunluq, ümumiyyətlə desək, qarşılıqlı birqiymətli deyil. Qarşılıqlı birqiymətliliyin pozulmasının nəyə görə baş verdiyini aydınlaşdıraq. Müstəvidə iki p və p' düz xətləri və onlara aid olmayan O nöqtəsini götürək (şəkil 11*a*). p düz xəttinin üzərində seçilmiş A nöqtəsinə p' düz xəttinin OA düz xətti ilə kəsişdiyi A' nöqtəsini qarşı qoyaq. Amma p'-ə paralel olan OP düz xəttinin P nöqtəsinə heç bir nöqtə qarşı qoymuruq. p' düz xəttində də həmçinin p-də heç bir nöqtəyə uyğun olmayan bir Q nöqtəsi qalır – elə Q nöqtəsi ki, hansı üçün OQ düz xətti p-yə paraleldir. Bu istisnalar bizdə, xüsusən o zaman narahatlıq yaradır ki, əgər biz bir neçə mərkəzi proyeksiyalar ardıcıllığını gözdən keçiririk. Tutaq ki, məsələn, p düz xəttinin O mərkəzindən p' düz xəttinə proyeksiyası çəkilir, hansının ki, eyni mərkəzdən p'' düz xəttinə də proyeksiyası çəkilir (şəkil 11*b*). Nəticədə p-nin p''-in üzərinə birbaşa proyeksiyası alınır. Amma "pis" (birinci proyeksiyaya nəzərən) P nöqtəsi ilə, hansı ki $OP \| p'$, nə baş verir? Əvvəlcə o "heç yerə" gedir – p' düz xətti üzərində heç bir nöqtəyə uyğun deyil, amma ikinci proyeksiya





Şəkil 11.

zamanı o elə bir "heç yandan" geri qayıdır və məhz p'' düz xəttinin ($OR \| p'$) "pis" R nöqtəsinə düşür!

Oxşar olaraq, α müstəvisinin β müstəvisinə mərkəzi proyeksiyası zamanı (şəkil 11*b*) əgər α və β müstəvilərdən "pis" düz xəttləri çıxartsaq; məhz α və β müstəvilərinin O nöqtəsindən keçən və β və α-ya uyğun olaraq paralel olan müstəvilər ilə kəsişən düz xəttləri kənarlaşdırsaq onların nöqtələri arasındakı uyğunluq qarşılıqlı birqiymətli olacaq. Deməli, burada da paralellik bizə "mane olur". Onda gəlin paralelliyi ümumiyyətlə yığışdıraq.

Hər bir p düz xəttinə bir U_p əlavə nöqtə birləşdirək – onu p düz xəttinin qeyri-məxsusi və ya sonsuz uzaqlaşmış nöqtəsi adlandırırlar, həmçinin bütün bir-birinə paralel olan düz xətlərə eyni nöqtəni əlavə edək. Bu əməliyyat tamamlama adlandırılır. Nəticədə paralel düz xətlər onların ortaq uzaqlaşmış nöqtəsində kəsişən düz xətlərə çevrilirlər. İndi isə, p düz xəttinin O mərkəzindən p' düz xəttinə proyeksiyasını çəkək (şəkil 11*a*) p düz xəttinin "pis" P nöqtəsi, bütün "adi" nöqtələr kimi OP və p' tamamlanmış düz xətlərin kəsişmə nöqtəsinə keçəcək, yəni, sonsuz uzaqlaşmış U_p nöqtəsinə, p düz xətinin sonsuz uzaqlaşmış U_p nöqtəsi isə – p' üzərində "pis" Q nöqtəsinə, p və p' arasında uzunluq qarşılıqlı birqiymətli olacaq. α müstəvisinin β-nın üzərinə mərkəzi proyeksiyası da qarşılıqlı birqiymətli olacaq (şəkil 11*c*). α müstəvisinin bütün "pis" nöqtələri (β müstəvisində heç bir nöqtəyə uyğun olmayan) β-ya parallel olan və O proyeksiya mərkəzindən keçən, yəni, a düz xəttindən keçən müstəvidə yerləşirlər. Deməli, a düz xətti β müstəvisinin qeyri-məxsusi nöqtələri çoxluğuna proyeksiyalanır. Hər bir "normal" düz xəttin proeksiyası düz xətt olduğuna görə, biz təbii olaraq qəbul etməliyik ki, bütün qeyri-məxsusi nöqtələr özləri ayrılıqda qeyri-məxsusi və ya sonsuz uzaqlaşmış düz xətt təşkil edirlər.

Beləliklə, tamamlanmanın mahiyyəti ondadır ki, ona yeni, sonsuz uzaqda yerləşən, məcmusunda bir yeni düz xətt təşkil edən nöqtələr əlavə edilir. Bununla belə, bütün bir-biri ilə paralel olan düz xətlər, yəni, bir istiqamətdə paralel olanlar eyni sonsuz uzaqlaşdırılmış nöqtə alırlar, müxtəlif istiqamətlərə isə müxtəlif sonsuz uzaqlaşdırılmış nöqtələr cavab verir.

Tamamlama əməliyyatını fəzaya da tətbiq etmək olar. Birincisi, hər l düz xəttinə bir dənə yeni (qeyri-məxsusi) nöqtə əlavə edilir və eyni nöqtə bütün l ilə paralel olan düz xətlərə əlavə edilir. İkincisi, hər α müstəvisinə onun daxilində yerləşən bütün düz xətlərin bütün qeyri-məxsusi nöqtələri birləşir. Bu nöqtələr α müstəvisinin qeyri-məxsusi düz xəttini təşkil edirlər. Eyni nöqtələr hər hansı α müstəvisinə paralel olan β müstəvisinə də əlavə ediləcəklər. Deməli, tamamlamadan sonra hər hansı iki müstəvi düz xətt üzrə kəsişirlər. Üçüncüsü, bütün əlavə edilən qeyri-məxsusi nöqtələr bir yeni qeyri-məxsusi müstəvi əmələ gətirir.

PROYEKSİYALI MÜSTƏVİ

Sonsuz uzaqlaşmış nöqtələrə öyrəşmək elə də çətin deyil – sadəcə yadda saxlamaq lazımdır ki, onlardan hər biri istiqamət göstərir. Əgər düz xətt adi A nöqtəsindən və qeyri-məxsusi U_l nöqtəsindən keçirsə, onda bu o deməkdir ki "düz xətt A nöqtəsindən l düz xətti istiqamətində (paralel olaraq) keçir" və s. Əgər proyeksiyalı xassələrə əsaslanaraq sonsuz uzaqlaşdırılmış nöqtələri adi

nöqtələrdən fərqləndirmık üsulu mövcud olsaydı, onda tamamlamağa biz bir ifadəyə çoxlu sayda halları daxil etməyə imkan verən terminlər haqqında razılaşma kimi yanaşa bilərdik. Amma belə bir üsul mövcud deyil. Məsələn, xassə:

✓ **1) Müstəvinin hər hansı iki nöqtəsindən bir və yalnız bir düz xətt keçir.**

adi nöqtələr üçün müstəvini tamamlamadan sonra düzdür; əgər nöqtələrdən biri qeyri-məxsusidir (çünki bu nöqtədən bu istiqamətdə təkcə bir düz xətt keçir) və həmçinin, əgər hər ikisi də qeyri-məxsusidir (onda düz xətt də qeyri-məxsusidir). Analoji olaraq, yoxlanılır ki:

✓ **2) İstənilən iki düz xətt bir ortaq nöqtəyə malikdir.**

Daha mürəkkəb təkliflərdə də istənilən düz xətti sonsuz uzaqlaşmış düz xətt kimi qəbul etmək olar, bununla belə təklifin doğruluğu pozulmaz. Mahiyyətinə görə, Papp teoreminin isbatında biz elə bu üsuldan istifadə etdik. Dezarq teoremi üçün müxtəlif cizgilər (şəkil 2,5) – eyni proyeksiyalı konfiqurasiyanı adi müstəvidə çəkmək üçün müxtəlif üsullardır, onlar yalnız sonsuz uzaqlaşan düz xəttin seçimi ilə fərqlənirlər.

Əslində adi və sonsuz uzaqlaşan nöqtələrin fərqlənmədikləri aydındır. Çünki mərkəzi proyeksiyada sonsuz uzaqlaşmış və adi nöqtələr (və düz xətlər) bir-birinə keçə bilərlər və deməli, onların bütün proyeksiyalı xassələri üst-üstə düşür. Ona görə proyeksiyalı həndəsədə tamamlanmış müstəvinin bütün nöqtələri və düz xətləri eynihüquqludurlar. Bu prinsipial faktı başa düşərək, biz çox vacib tərifləri verək.

Qeyri-məxsusi nöqtələr ilə tamamlanmış adi müstəvi proyeksiyalı müstəvi adlandırılır. Oxşar olaraq, tamamlanmış fəza proyeksiyalı fəza adlandırılır. Proyeksiyalı müstəvidəki kimi, proyeksiyalı fəzada da məxsusi və qeyri-məxsusi elementlər arasında fərqlər yoxdur (nöqtələr, düz xətlər, müstəvilər).

Əlbəttə ki, biz istərdik ki proyeksiyalı müstəvinin belə bir tərifi olsun ki, onun daxilində bütün nöqtələrin bərabərhüquqluğu əvvəlcədən qoyulmuş olsun. Onu biz aksiomatik üsul ilə verə bilərik (bax "Aksiomlar" məqaləsinə). Proyeksiyalı həndəsənin aksiomatikası Evklid həndəsəsinin aksiomatikasından asandır. Onda sadəcə üç müəyyən olunmayan anlayış mövcuddur: nöqtə, düz xətt və "nöqtə düz xəttin üzərindədir", "düz xətt nöqtədən keçir" və s. sözlər ilə ifadə olunan məxsusluq nisbətidir. Amma yenə də aksiomların tam siyahısı burada göstərilməsi üçün çox böyükdür. Təkcə qeyd edək ki, ona yuxarıda deyilmiş iki təklif də daxildir.

İKİLİK PRİNSİPİ

1 və 2-ci xassələrə (aksiomlara) ilk baxışdan onların simmetrikliyi şübhəsizdir. Əgər biz formasına görə müxtəlif olan, amma mənaca eyni "nöqtə düz xətt üzərindədir" və "düz xətt nöqtədən keçir" ifadələrini "nöqtə və düz xətt insidentdirlər" ifadəsi ilə əvəz etsək bu daha da aydın görünəcək. O zaman 1 və 2-ci xassələr belə ifadə olunacaqlar: "hər hansı iki nöqtə yalnız bir düz xəttə insidentdir" və "hər hansı iki düz xətt yalnız bir nöqtəyə insindentdir". İki tərifdən hər biri "nöqtə" sözünün "düz xətt" sözü ilə və tərsinə əvəz etsək, başqasına çevrilir. Qeyd edək ki, adi müstəvidə oxşar "çevrilmələr" baş vermir: 1-ci xassə – Evklid həndəsəsinin aksiomlarından biridir, 2-ci xassə isə sədəcə, düz deyil (və əlbəttə ki, paralelliyə görə).

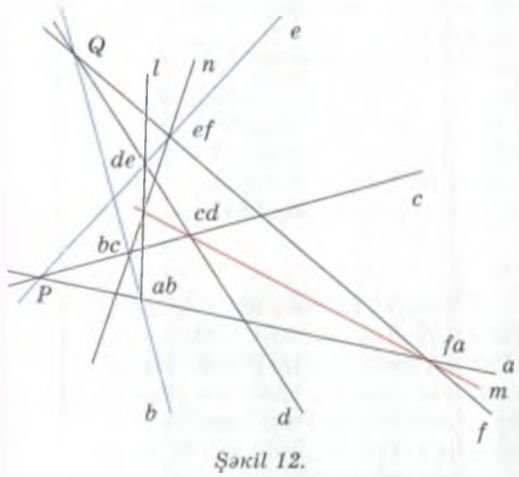
Bizim qeyd etdiyimiz hal təsadüfi deyil. Onda aydın şəkildə proyeksiyalı həndəsənin çox gözəl bir xassəsi – nöqtələr və düz xətlər arasında tam oxşarlıq görünür. Proyeksiyalı müstəvinin quruluşunun bu simmetriyasını ikilik prinsipi şəklində ifadə edirlər:

✓ **Əgər proyeksiyalı müstəvidə insidentlik ilə ifadə olunmuş nöqtə və düz xətlər haqqında doğru təklifdə "nöqtə" sözünü "düz xətt" sözü ilə və tərsinə əvəz etsək, biz yenə də doğru təklif alarıq.**

İkili teoremlər cütləri adi həndəsədə də mövcuddurlar (məsələn, Çeva və Menelay teoremləri: bax "Sadə və tükənməz üçbucaq" məqaləsində). Amma baxmayaraq ki, onlar çoxdan məlumdurlar, həndəsə alimləri bu ikiliyə heç bir izah tapa bilmirdilər. O

vaxta kimi, bu ikiliyi proyeksiyalı həndəsənin mövqeyindən başa düşməyə başladılar. İkilik prinsipi fəza üçün də düzdür, amma burada "nöqtə" və "müstəvi" sözləri yerlərini dəyişirlər, "düz xətt" sözü isə əvəz edilmir.

İkilik prinsipinin müxtəlif isbatları var. Məsələn, polyar çevirmə adlandırılan insidentlik saxlayan düz xətlər çoxluğu və nöqtələr çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar. Biz bir, amma açıq-aydın bir nümunə ilə məhdudlaşacağıq: məqalənin əvvəlində göstərilmiş Papp teoreminə ikili olan təklifi ifadə edək.



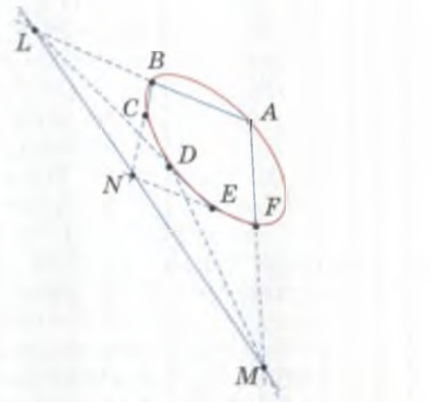
Şəkil 12.

A və *B* nöqtələrindən keçən düz xətt üçün *AB* işarəsi ilə oxşar olaraq (*A* və *B* insident), *a* və *b* düz xətlərin kəsişmə nöqtəsini *ab* kimi göstərəcəyik (*a* və *b* insident). Papp teoremində ardıcıllıq ilə "nöqtələri" "düz xətlər"lə və tərsinə əvəz edərək, biz belə bir təklifə gələcəyik: əgər *a*, *c*, *e* düz xəttləri ortaq *P* nöqtəsinə malikdilərsə, *b*, *d* və *f* düz xətləri isə – ortaq *Q* nöqtəsinə, onda uyğun olaraq *ab* və *de*, *cd* və *fa*, *ef* və *bc* nöqtələrini birləşdirən *l*, *m* və n düz xəttləri bir nöqtədən keçirlər (şəkil 12). Bir az səbr və səliqə göstərərək, siz görərsiniz ki, burada isbat etməyə heç nə yoxdur – bu uyğun olaraq nöqtə üçlükləri üçün Papp teoremidir, məsələn, *P*, *de*, *ed* və *Q*, *ab*, *bc* nöqtələri üçün. Müstəqil surətdə Dezarq teoreminə ikili olan təklifi ifadə etməyə çalışın və əmin olun ki, o Dezarq teoreminin tərsi olan teorem ilə üst-üstə düşür (biz bilirik ki, o düz xəttdən irəli gəlir). İki göstərilmiş halda ikilik prinsipi yeni nəticələr vermədi. Amma, aşağıda biz onun köməyi ilə yeni məzmunlu teoremin necə "pulsuz" alındığını gö- rərik.

MİSTİK HEKSAQRAM

Fiqurların proyeksiyalı xassələrinin öyrənilməsi ilə bağlı Dezarqın ideyaları Blez Paskalı da maraqlandırdı. 16 yaşında o konusşəkilli kəsiklərin proyeksiyalı nəzəriyyəsinin əsasını qoyan çox gözəl teoremi kəşf etdi.

Paskal öz kəşfini 50 nüsxədə hazırlanmış "Konusşəkilli kəsiklər haqqında təcrübə" adlı afişa formasında çap etdirdi. Ona məxsus olan təvazökarlıqla o bu afişada təkcə öz inisialını qeyd etdi, amma öz müəllimi Dezarqa lazimi diqqət yetirdi. Paskalın teoremi belə ifadə olunur (şəkil 13):

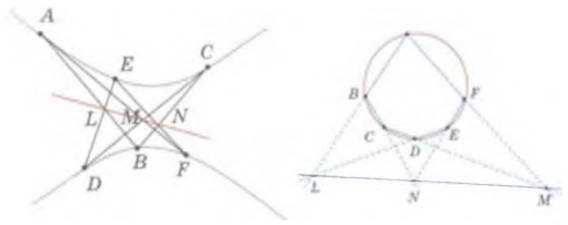


Şəkil 13.

✓ **Əgər proyeksiyalı müstəvidə altıbucaqlının bütün təpələri konusşəkilli kəsikdə yerləşirsə, onda onun qarşı tərəflərinin cüt-cüt kəsişmə nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşirlər (altıbucaqlının paskal düz xətti üzərində).**

Dezarq teoremindəki kimi, burada da "tərəflər" təpələri birləşdirən parçalar yox, altıbucaqlının hər cüt qonşu təpələrindən keçən düz xətlər sayılır. Altıbucaqlı özü ixtiyari qapalı *ABCDEF* sınıq xətti kimi götürülür. Bu altıbucaqlı həm qabarıq, həm də qabarıq olmayan altıbucaqlı ola bilər, hətta özü ilə kəsişə də bilər.

Paskal əvvəlcə "mistik heksaqram" (altıbucaqlı) haqqında teoremini çevrə üçün isbat etdi (şəkil 14). Konusşəkilli kəsikləri o çevrənin mərkəzi proyeksiyaları kimi gözdən keçirirdi (şəkil 9), elə bu da ona isbat

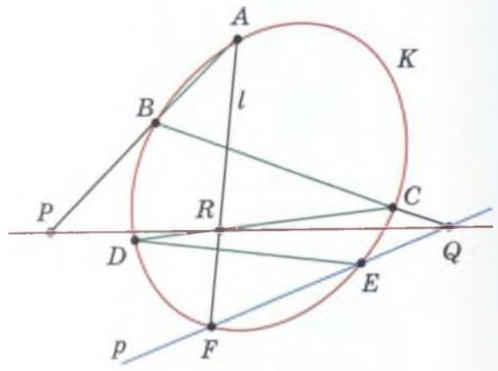


Şəkil 14.

olunmuş teoremini onlara tətbiq etməyə imkan verdi. Əgər konusu təpəsindən keçən müstəvi ilə kəsək, onda əyri xətt yox, bir cüt kəsişən düz xətt alınacaq. Elə onu da Dezarq konusşəkilli kəsiklərə aid edirdi (əgər biz ardıcıl olmaq istəyirikсə, onda onlara həmçinin paralel düz xətlərin cütünü də aid etməliyik, çünki proyeksiyalı həndəsədə onlar da "kəsişirlər"). Maraqlısı odur ki, "mistik heksaqram" haqqında teoremin hökmü düz xətlər cütü üçün də doğrudur. Bundan başqa, biz onu artıq isbat da etmişik – bu, Papp teoremidir! Konusşəkilli kəsiklərin belə geniş anlayışında ona tərs olan teorem də doğrudur: altıbucaqlının qarşı tərəfləri cüt-cüt bir düz xəttin üzərində yerləşən üç nöqtədə kəsişirlərsə, onda onun təpələri konusşəkilli kəsiyə aiddir. Əgər bu halda altı təpədən heç bir üçü bir düz xətt üzərində yerləşmirsə, onda kəsik əyri xətt düz xətlər cütü yox çevrənin proyeksiyası olacaq.

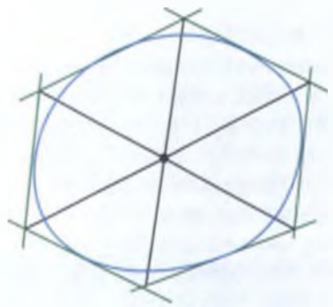
Buradan belə nəticəyə gəlirik ki, konusşəkilli K kəsiyini, dəqiq desək, onun üzərində yerləşən istənilən sayda nöqtəni onun beş verilmiş nöqtəsinə görə adi xətkeş ilə qurmaq olar. Tutaq ki, A, B, C, D, E – beş verilmiş nöqtədir (şəkil 15). E nöqtəsindən ixtiyari p düz xəttini keçirək. K-nın daxilinə çəkilmiş altıbucaqlının altıncı F təpəsini aşağıdakı qayda ilə quraq.

Axtarılan $ABCDEF$ altıbucaqlısının paskal düz xəttinin iki nöqtəsi bizə məlumdur: AB və DE düz xətlərinin kəsişmə nöqtəsi P, BC və $p(=EF)$ düzxəttlərinin kəsişmə nöqtəsi Q-dür. Beləliklə, paskal düz xətti müəyyən edilib. $l=FA$ düz xətti R nöqtəsindən keçməlidir, harada ki, PQ paskal düzxətti CD düz xətti ilə rastlaşır. Bu l düz xəttini müəyyən edir, l və p düz xətlərin kəsişməsi isə axtarılan F nöqtəsini verir. Eyni qurma E nöqtəsindən keçən hər hansı p düz xətti üçün icra edilə bilər.



Şəkil 15.

"Mistik heksaqram" haqqında teoremin kəşfindən yüz əlli il sonra Şarl Julyen Brianşon ikilik prinsipinin köməyi ilə konusşəkilli kəsiyin xaricinə çəkilmiş altıbucaqlı haqqında teorem isbat etdi (yəni verilmiş əyri xəttə çəkilmiş altı toxunanın əmələ gətirdiyi; şəkil 16):



Şəkil 16.

✓ **Əgər altıbucaqlı proyeksiyalı müstəvidə konusşəkilli kəsiyin xaricinə çəkilibsə, onda onun qarşı təpələrini birləşdirən üç düz xətt bir nöqtədə kəsişir.**

Paskal və Brianşonun teoremlərinin qarşılıqlı ikiliyi daha ətrflı izah tələb edir, amma biz bu izahda dayanmayacağıq.

Paskal teoremindəki kimi, Brianşonun da teoremindən tərs teoremi almaq olar və onu konusşəkilli kəsiyi ona çəkilən verilmiş beş toxunan əsasında düzəltmək üçün istifadə etmək olar.

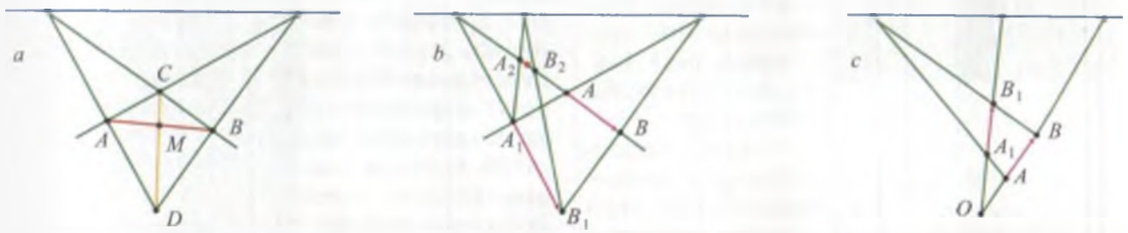
PROYEKSİYALI HƏNDƏSƏ – BÜTÖV HƏNDƏSƏDİR!

Başlıqdakı fikri XIX əsrin ortalarında ingilis riyaziyyatçı Artur Keli irəli sürüb. Amma sonralar inkişaf etmiş müasir həndəsənin topologiya və ümumi Riman həndəsəsi kimi sahələrinə Kelinin cazibədar fikirləri aid deyil. Buna baxmayaraq, proyeksiyalı həndəsə – həqiqətən Evklid və çoxlu sayda qeyri-evklid həndəsələrin məzmununu daxil edən, nöqtələrin, düz xəttlərin və müstəvilərin qarşılıqlı yerləşməsi ilə bağlı olan fiqurların xassələrini araşdıran "sadə" fəndir. Axı bu necə mümkün ola bilər? Burada nə paralellik, nə perpendikulyarlıq, nə də məsafə yoxdur.

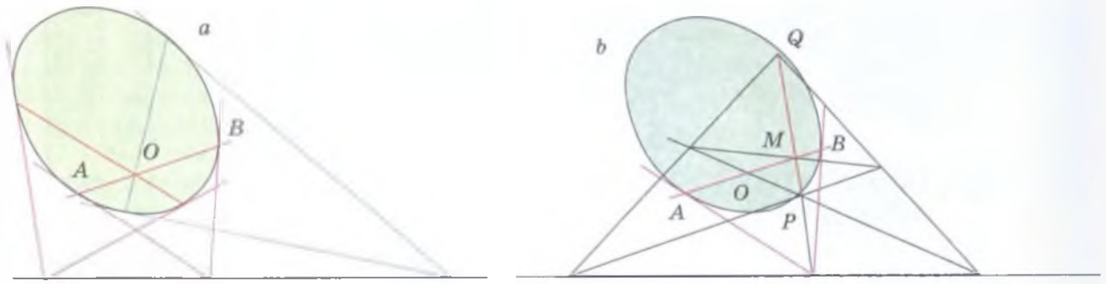
İş orasındadır ki, yuxarıda sayılan anlayışları proyeksiyalı həndəsənin vasitəsi ilə modelləşdirib daxil etmək olar. Biz bunu bir neçə sadə, amma vacib misallarla göstərəcəyik.

Paralellikdən başlayaq. Proyeksiyalı müstəvidə hər hansı düz xətti seçək (xatırladaq ki, onların hamısı bərabərhüquqludur) və onu qeyri-məxsusi düz xətt elan edək. Qeyri-məxsusi düz xətt üzərində kəsişən iki düz xətti paralel adlandıraq. Başqa sözlə, müstəvinin tamamlanmasına əks olan əməliyyatı icra edək. Belə üsul ilə müəyyən edilmiş paralel düz xətlər bütün lazım olan xassələrə malikdirlər: verilmiş nöqtədən verilmiş düz xəttə paralel olan yalnız bir düz xətt keçirtmək olar, üçüncüsünə paralel olan hər iki düz xətt bir-biri ilə də paralel olacaqlar (yuxarıda göstərilmiş 1 və 2-ci xassələrdən asanlıqla alına bilər). İndi isə biz paraleleloqramlar qura bilərik, deməli, parçanı yarıya bölərik (şəkil 17*a*), paralel köçürmələri icra edə bilərik (şəkil 17*b*) və homotetiyanı (şəkil 17*c*) da göstərə bilərik.

Bizi Evklid həndəsəsinə yaxınlaşdıran daha bir vacib addım ataq. Paskal teoremi proyeksiyalı həndəsə çərçivəsində konusşəkilli kəsikləri müəyyən etməyə imkan verir. Onlardan qeyri-məxsusi düz xətt ilə ortaq nöqtələrə malik olmayan birisini seçək və onu çevrə adlandıraq. Biz bilirik ki, əgər adi Evklid çevrəsinə iki toxunan paraleldirlərsə, deməli toxunma nöqtələri – bir diametrin uclarıdır, yəni, mərkəzlə bir düz xətt üzərində yerləşirlər. proyeksiyalı həndəsədə bu xassə belə bir forma alır: əgər verilmiş düz xəttin nöqtələrindən konusşəkilli kəsiyə toxunanlar cütünü çəksək (şəkil 18*a*), onda hər cütün toxunma nöqtələrini birləşdirən düz xətlər bir nöqtədə kəsişəcəklər. Burada düz xətt və konusşəkilli kəsik kimi bizim seçdiyimiz qeyri-məxsusi düz xətti və "çevrəni" götürərək, onun "diametrlərini" və onların O kəsişmə nöqtəsini quraq (O – "çevrənin" "mərkəzidir"). Bununla belə diametrin, vətərlərin, toxunanların bütün adi xassələri ödəniləcəkdir. Məsələn, əgər PQ vətəri AB diametrinin uclarından çəkilmiş toxunanlara paraleldirsə (şəkil 18*b*), onda onun M ortası (bizim tərifimizə görə) AB-nin üzərindədir. Adi həndəsədə belə vətər, elə toxunan kimi, diametrə perpendikulyardır və bu bizə perpendikulyarlıq anlayışını daxil etməyə imkan verir. Verilmiş çevrəyə paralel köçürməni və homotetiyanı tətbiq edərək, biz hər hansı verilmiş mərkəzli və radiuslu çevrə ala bilərik.



Şəkil 17.



Şəkil 18.

Amma burada biz dayanacağıq. Təkcə onu qeyd edək ki, Evklid həndəsəsinin bütün binasını addım-addım "proyeksiyalı kərpiclərdən" düzəltmək olar.

Elə bu universal materialdan Lobaçevski həndəsəsi və başqa həndəsələr də tikilə bilər. Məhz bu yolda Felikс Kleyn "Həndəsə və çevrilmələr qrupu" məqaləsində həndəsənin təbiəti haqqında danışılmış fundamental ideyalara gəlmişdi.

RİYAZİ ANALİZ NƏ DEMƏKDİR?

Riyazi analiz – riyaziyyatın *XVII* əsrdə yaranmış bölməsidir. Onun vacib hissəsini differensial və inteqral hesabı təşkil edir.



İsaak Nyuton

Riyazi analizin yaranmasında vacib rolu İsaak Nyuton və Qotfrid Vilhelm Leybnis oynayıblar. Nyuton analizin əsasları üzərində daha əvvəl, 1665-1666-cı illərdə işləməyə başlayıb. Amma riyazi analizə həsr olunmuş ilk çap olunmuş əsər Leybnisə məxsusdur (1684-cü il).

Məhz Leybnis "differensial hesabı" və "inteqral hesabı" anlayışlarını daxil etdi. Onlar təəccüb ediləcək dərəcədə dəqiqliklə müvafiq nəzəriyyələri təsvir edirlər. "Differencia" sözü latın dilində "bölünmə", "ayrılma", "xırdalama" deməkdir. Differensiallama prosesinin mahiyyəti kiçik bir hissədə funksiyanı onun differensialı ilə əvəz etməkdədir, yəni, onun toxunanının bir hissəsi ilə. Əvəz edilən hissəyə Leybnis "sonsuz kiçik" adı verdi. Leybnisə görə differensiallama – funksiyanın sonsuz kiçik hissələrə ayrılması deməkdir.



Qotfrid Vilhelm Leybnis

"İnteger" latınca – "bütöv" deməkdir; inteqrallama – fiqur, cisimi və s. təşkil edən kiçik elementlərin birləşdirilmə prosesidir (əvvəlcə Leybnis "cəmli hesab" anlayışını təklif edirdi).

Dərhal Leybnisin tərəfdarları əmələ gəldi, onların arasında ən məşhurları İohann və Yakob Bernulli idi. "Analiz" anlayışına ilk dəfə "Sonsuz kiçik kəmiyyətlərin analizi" (1696-cı il) dərsliyinin başlığında rast gəlirik. Bu dərslik İohann Bernullinin şagirdi Qiyom de Lopital tərəfindən yazılmışdır.

Leybnisin yanaşması həndəsi idi: o əyri xətlərə çəkilmiş toxunanın müəyyənləşdirilməsinin ümumi üsulunu vermək və funksiyaların qrafikləri ilə məhdudlaşmış fiqurların sahələrini hesablamağı öyrənmək istəyirdi. Leybnisin sələfləri qədim dövrün böyük həndəsə alimləri idi. Arximed fiqurların sahə və həcmlərini hesablayaraq – dairə, kürə, silindr, parabolanın seqmentinin – inteqral hesabına lap yaxınlaşdı. Onun fikirlərini *XVII* əsrdə "bölünməyən" (maxiyyətinə görə, sonsuz kiçik olanlar) üsulunu yaratmış Bonaventura Kavalyeri inkişaf etdirmişdir. Müxtəlif əyri xətlərə çəkilmiş toxunanları *XVII* əsrdə Rene Dekart, Blez Paskal, Pyer Ferma və Xristian Hyügens tədqiq edirdilər. Sonuncusu Leybnisə xüsusilə güclü təsir göstərdi.

Nyuton analizə müxtəlif proseslərin təkamülünü və cisimlərin hərəkətlərini təsvir etmək ehtiyacından gəldi. O fizik kimi kinematik olaraq düşünürdü: əgər $x(t)$ funksiyası t vaxtına qədər gedilən yolu verirsə, onda bu zaman $v(t)$ sürət anlayışı təbii olaraq yaranır. O təxminən Δt çox kiçik vaxt müddətinə cisimin keçdiyi $\big(x(t+\Delta t)-x(t)\big)$ yolun Δt nisbətinə bərabərdir, daha dəqiq desək – Δt sıfıra yaxınlaşan zaman, bu nisbətin limitinə bərabərdir. Δt anında cismin sürətini Nyuton $\dot{x}(t)$ kimi göstərdi və flyuksiya adlandırdı (latın. "fluctio" – "axmaq", "saçmaq"). Müasir riyaziyyatda "törəmə" və $x'(t)$ işarələnməsi qəbul olunub, fiziklər isə tez-tez $\dot{x}(t)$ simvolundan istifadə edirlər.

Nyutonun 1670-1671-ci illərdə "Flyuksiya metodu və sonsuz sıralar" adlı əsəri onun ölümündən sonra 1736-ci ildə çap edilmişdi. Nyutona görə differensiallanmanın mahiyyəti – sürəti yola görə tapmaqdır, yəni, $\dot{x}(t)$-ni $x(t)$-yə görə; interqallama isə – ona tərs olan əməliyyat, yəni, yolun sürətə əsasən tapılmasıdır. Başqa sözlə, inteqrallama – ən asan differensial tənliyin həllidir:

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

Bununla da Nyuton müasir təbiətşünaslığın təsisçiləri – Qalileo Qalileydən və İohann Keplerdən estafeti götürmüşdü.



İohan Kepler

Nyuton tərəfindən yaradılmış riyazi aparat onu fundamental konsepsiyaya gətirdi. Bu konsepsiyanı alim şifrələnmiş şəkildə anaqramma ilə ifadə etdi. Onun mahiyyətini bu sözlər ilə ifadə etmək olar: "Dünya differensial tənliklər ilə idarə edilir". "Natural fəlsəfənin riyazi əsaslarında" (1687-ci il) Nyuton dünyanın mexaniki sistemini təsvir etdi, xüsusi halda, ümumdünya Cazibə qanununa əsaslanaraq o Kainatda göy cisimlərinin hərəkət qanunlarını ifadə etdi.

Dünya miqyaslı tanınma və onun səbəb olduğu Nyuton klassik mexanikasının inkişafı determenizm prinsipinin mövqelərini daha da bərkitdi – əgər dünyanın vəziyyəti haqqında hansısa an üzrə tam informasiya varsa (əsas məlumatlar kimi), onda təbiətin bütün hadisələrini tamamilə qabaqcadan müəyyən etməkdən danışan fəlsəfi prinsipdir. Belə qabaqcadan görmənin ən sadə nümunəsi hansısa cismin $[0,T]$ kəsiyində onun məlum olduğu $v(t)$ sürətinə əsaslanaraq $x(t)$ yolunu təsvir etmək imkanıdır. Bunun üçün təkcə başlanğıc şərtləri – başlanğıc anlarında cisimin vəziyyətini müəyyən edən $x(0)$ koordinatını vermək lazımdır.

Təbiətşünaslıqda və riyaziyyatda gələcək 300 il müddətində baş vermiş böyük nailiyyətlər Nyuton və Leybnisin böyük kəşfinə əsaslanmışdır. *XVIII* əsrdə riyazi analizin inkişafında İohann və Yakob Bernulli qardaşları, Leonard Eyler, Jozef Lui Laqranj, Pyer Simon Laplas və başqaları böyük rol oynamışdılar. Obrazlı surətdə desək, onlar mümkün qədər böyük oblastları əhatə etmək istəyirdilər, amma artıq olanların maksimal dərəcədə öyrənilməsi haqqında fikirləşmirdilər. Sonsuz kiçik və onların cəmlənməsi haqqında təsəvvürləri, onlar çox güman ki, məntiqi təhlil etməyərək intuitiv başa düşürdülər.

Yalnız *XIX* əsrdə funksiya, kəsilməzlik, törəmə kimi anlayışların ciddi tərifləri verilmişdi. Funksiyanın müasir anlayışı *XIX* əsrin birinci yarısında Nikolay İvanoviç Lobaçevski, Peter Qustav Lejen Dirixle və başqaları kimi məşhur riyaziyyatçıların araşdırmalarında ifadə edilmişdi. Törəmə funksiyanın artımının arqumentin artımına nisbətinin limiti kimi müəyyən edilmişdir (Ogüsten Koşi); inteqral – inteqral cəminin limiti kimi, yəni, mahiyyətə görə verilmiş (inteqrallanan) funksiyaya yaxınlaşan hissə-hissə sabit ("pilləli") funksiyaların qrafiklərinin əmələ gətirdiyi sahələrin cəmidir (Bernhard Riman). Riyazi təhsil indiyə kimi bu yanaşmalara əsaslanır, baxmayaraq ki *XX* əsrdə bu yanaşmalar kifayət qədər inkişaf etmişdir. Elə o vaxt "elementar" və "ali"

riyaziyyat terminləri yarandı (elementar riyaziyyat kimi adətən riyazi təhlildən əvvəl yaranmış və mövcud olmuş riyaziyyatı başa düşürlər; ali isə limit, törəmə və inteqral anlayışlarından başlayır).

XIX əsrin riyazi analizinin ən vacib nailiyyətlərindən biri analitik funksiyaların və kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin yaranması idi.

Analitik funksiyaların nəzəriyyəsi əsasən riyazi analiz ilə eyni vaxtda yaranmış sıralar nəzəriyyəsinə əsaslanır. Elementar funksiyaların sıralara ilk ayrılışı hələ *XVII* əsrdə alınmışdı. Eyler elementar funksiyaların çoxunu sıralara ayırmağı öyrəndi. Analitik funksiyalar nəzəriyyəsini Koşi yaratdı.

Riyazi analizin əsaslandığı çox mühüm hissələrindən biri olan həndəsə *XVIII-XIX* əsrlərdə əsasən, ondan asılı olmayaraq, inkişaf edirdi. *XX* əsrdə artıq yeni bir səviyyədə riyazi analiz və həndəsənin birləşməsi gedirdi. Artıq analizin tətbiq edildiyi oblastlar çoxşəkillidir – bir qayda olaraq əlavə cəbri quruluşa malik olan (hərəkətlər qrupu və s.) çoxölçülü fəzalarda yerləşən əyrilər və səthlər daxildirlər.

SONSUZ ARDICILLIQLAR VƏ CƏMLƏR

ARDICILLIQLAR

Riyaziyyat daim sonsuzluqla iş aparır. Xüsəsən də, bu, ali riyaziyyat üçün xarakterikdir. Məsələn, riyazi analiz ədədlərin sonsuz çoxluqlarını, sonsuz cəmləri və hasillərini, sonsuz kişik və sonsuz böyük ədədlərin nisbətini öyrənir. Hətta 1, 2, 3, 4... natural ədədlər sırası kimi belə sadə anlayış da sonsuz obyekt deməkdir. Natural sıranın köməyi ilə başqa sonsuz obyektləri də təsvir edirlər, məsələn, ədədlər ardıcıllıqlarını.

Fərz edək ki, hər bir 1, 2, 3, ... n, ... natural ədədə hansısa çoxluğun (ədəd, nöqtə, həndəsi fiqurların və s.) a_n elementinin qarşı qoyulması qaydası göstərilib. O zaman deyirlər ki, a_n elementləri ardıcıllığı verilib. Onu adətən fiqurlu mötərizələr $\{a_1, a_2, ...\}$ və ya sadəcə $\{a_n\}$ kimi işarə edirlər. a_n – bu ədədlərdir və belə ardıcıllıqları ona görə ədədi ardıcıllıqlar adlandırırlar.

ƏDƏDİ ARDICILLIQLAR NECƏ VERİLİR

Beləliklə, biz deyirdik, ki: "...göstərilmiş qaydaya görə...". Amma burada qayda necə göstərilib? İstənilən qaydada, təki, uyğunluq birqiymətli olsun, yəni, hər n-ə – öz a_n-i olsun.

Qaydalardan biri – təsviri qaydadır. Biz sadəcə hansı elementlərdən və hansı qaydada ardıcıllıq düzəldiyini göstəririk. Məsələn: "Ardıcıllığın bütün hədləri 1-ə bərabərdir", yəni, ardıcıllıq belə bir {1, 1, 1, ..} şəklə malikdir. Başqa nümunə: "Ardıcıllıq artma sırası ilə bütün sadə ədədlərdən ibarətdir" və ya {2, 3, 5, 7, 11, ...}. Burada göstərilmiş təsvirlər birqiymətlidir, baxmayaraq ki, burada göstərilmiş ikinci halda biz bu ardıcıllığın 1000000-cu elementi hansıdır sualına dərhal cavab verməkdə çətinlik çəkərik.

Ardıcıllıqların daha bir verilmə üsulu isə – düsturlu üsuldur. Bu halda bir düstur və ya əgər lazımsa bir neçə düstur verirlər və onların vasitəsilə verilmiş n-ə görə a_n-i tapmaq olar. Belə ki, $\{2n-1\}$ – cüt olmayan ədədlərin, $\{n^2\}$ – kvadratların, $\{2^{n-1}\}$– ikinin qüvvətlərinin, {1} – yuxarıda göstərilmiş vahidlərin ardıcıllığıdır.

ALQORİTMLİ TƏSVİR EDİLƏN ARDICILLIQLAR

Riyaziyyatçılar "təsvir" anlayışını dəqiqələşdirərək, "alqoritm" termini ilə əvəz edirlər. Alqoritm verilənlərin əsasında axtarılan nəticəyə keçmə prosesini müəyyənləşdirən dəqiq göstərişlərdir. Əgər hər hansı n üçün a_n-i hesabalamaq üçün dəqiq göstərişlər verilibsə, onda deyirlər ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı alqoritmik olaraq təsvir edilib.

Məsələn, sadə ədədlərin ardıcıllığı alqoritmik olaraq təsvir edilib. Deyək ki, bizə birinci altı ədəd məlumdur: 2, 3, 5, 7, 11, 13, o zaman növbəti sadə ədədi biz 13-dən sonra gələn sadə ədədləri araşdıraraq taparıq: 14 2-yə bölünür – deməli sadə deyil, 15 isə 3-ə bölünür – o da sadə deyil, 16 yenə də 2-yə bölünür, 17 isə verilmiş ədədlərin heç birinə bölünmür, deməli o sadədir və s.

$\sqrt{2}$ ədədin onluq işarələrin ardıcıllığı da alqoritmikdir:

{1, 4, 1, 4, 2, 1, 3, 5, 6, 2, ...} (*)

(natural ədədlərdən ikincidərəcəli köklərin hesablanması çox qədim vaxtalardan məlumdur).

Bu isə qeyri-alqoritmik ardıcıllığın nümunəsidir: əgər (*) ardıcıllığında dalbadal gedən sıfırlar ardıcıllığı varsa $a_n = 0$ və əgər yoxdursa $a_n = 1$.

Ardıcıllıqların rekurent verilmə üsulu çox geniş yayılıb. Onun mənası bundadır: ardıcıllığın birinci p həddləri açıq surətdə verilir, başqaları üçün isə əvvəlki p həddlərini bilərək a_n-i tapmaq üçün hansısa üsul (məsələn, düstur) göstərilir. Beləliklə, verilmiş p hədlərə əsaslanaraq $(p+1)$ həddini tapmaq olar, sonra isə ikinci həddən başlayaraq $(p+1)$ ilə başqa hədləri, həmçinin $(p+2)$ və s. hədlərini də tapmaq olar. Üsulun "rekurent" adı, yəni "qayıtma" özü üsulun mahiyyətindən xəbər verir: növbəti həddi təyin etmək üçün, biz əvvəlki p-yə qayıtmalıyıq və onların qiymətlərindən istifadə etməliyik.

Təkcə vahidlərdən ibarət olan ardıcıllıq rekurent olaraq, belə təsvir olunur: $a_1 = 1$ və bütün $n \geq 1$ $a_{n+1} = a_n$. Cüt olmayan ədədlərin ardıcıllığı isə: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n + 2$; $n \geq 1$. Kvadratlar ardıcıllığını da rekurent üsul ilə vermək asandır: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 1$, $n \geq 1$. İkinin qüvvətlərinin ardıcıl-

lığını belə vermək olar: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 2a_n$, $n \geq 1$.

Biz ardıcıllıqların üç verilmə üsulunu gözdən keçirtdik. Amma bununla belə, birinci (təsviri) üsulu başqa iki üsuldan çox vaxt fəqləndirmək olmur. Çünki hər hansı bir düstur və həmçinin rekurent düstur da – təsviridir. Amma bu üsulu biz başqalarından fərqləndirməliyik, çünki elə hallar olur ki, a_n-nin nə n-dən, nə də p-dən birbaşa asılılığını müəyyən etmək olmur. Sadə ədədlərin ardıcıllığı belədir.

İndi bir çox gözəl ardıcıllığı araşdıraq.

FİBONAÇÇİ ARDICILLIĞI

Avropalıların bir çox nəsillərinə Leonardo Pizanlı (Fibonaççi) hər şeydən əvvəl onluq say sistemi ilə tanış edən "Abaka kitabının" (1202) müəllifi kimi məlum idi. İndi isə onun adını ev dovşanlarının çoxalması haqqında məsələni həll edərkən, onun araşdırdığı ardıcıllıqla {1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...} bağlı yada salırlar (bax "Leonarda Pizanlı və onun zəmanəsi" məqaləsinə). Burada birinci iki ədəd – vahidlərdir, amma qalanlar isə, onlardan əvvəl gələn iki ədədin cəminə bərabərdilər. Bu ardıcıllıq aşağıdakı rekurent münasibət ilə verilir:

$$a_1 = 1,$$
$$a_2 = 1,$$
$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \left(n \geq 1\right)$$

Fibonaççi ədədlərinə riyaziyyatın müxtəlif sahələrində rast gələ bilərik: kombinatorikada, həndəsədə, ədədlər nəzəriyyəsində, maksimum və minimum məsələlərində.

Fibonaççi ardıcıllığı üçün a_n qiymətini n vasitəsilə aydın şəkildə, yəni ki düstur vasitəsilə göstərmək olarmı? Bu düsturu göstərək.

Bir müddət başlanğıc şərtləri yaddan çıxardaq $\left(a_1 = 1, a_2 = 1\right)$ və $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ rekurent düsturunu ödəyən $\{q^n\}$ şəklində ardıcıllığı axtaraq. Niyə məhz $\{q^n\}$? Leonard Eyler tərəfindən yaradılmış qayıtma ardıcıllıqları nəzəriyyəsi bu suala cavab verir. Amma onun müzakirəsi bu kitabın çərçivəsindən kənara çıxır.

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ düsturunda a_n-in yerinə q^n yazaq. Onda biz belə bir tənlik alarıq:

$$q^{n+2} = q^{n+1} + q^n$$

$q=0$ həllini kənara ataraq, biz tənliyin hər iki tərəfini q^n-ə ixtisar edək. Bu zaman iki sıfra bərabər olmayan kökə malik olan $q^2 = q + 1$ ikincidərəcəli tənlik alacağıq:

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{və} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Onlardan birincisi məşhur ϕ Fidiy ədədinə bərabərdir (bax "Fidiy ədədləri və qızıl kəsik" məqaləsinə). Viet teoreminə görə $q_1 q_2 = -1$, onda ikinci ədəd $1/\phi = -\varphi$, burada φ – Fidiyin ikinci ədədidir.

Beləliklə, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ tənliyini ödəyən iki $\{q_1^n\}$ və $\{q_2^n\}$ ardıcıllıqları tapılıb. Bundan başqa birbaşa yerinə qoymaqla görərik ki, hər hansı:

$$\{c_1 q_1^n + c_2 q_2^n\}$$

şəklində ardıcıllıq da bu tənliyi ödəyir. Deməli, elə c_1 və c_2 tapmaq olar ki, ardıcıllığın birinci iki həddi 1-ə bərabər olsun. Bu zaman o Fibonaççi ardıcıllığı ilə üst-üstə düşər.

$a_1 = 1$ və $a_2 = 1$ olduğunu nəzərə alaraq, biz belə tənliklər sistemini alırıq:

$$\begin{cases} c_1 q_1 + c_2 q_2 = 1, \\ c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 = 1, \end{cases} \text{ yaxud}$$

$$\begin{cases} c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1, \\ c_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

Bu sistem iki naməlum həddi ilə xətti tənliklərdən ibarətdir. Bu naməlum hədlər asanlıqla müəyyən edilir: $c_1 = 1/\sqrt{5}$ və

NƏRDİVANLA NEÇƏ ÜSUL İLƏ QALXMAQ OLAR?

Nərdivanla necə qalxdığınızı yada salın: ya hər pilləkənə ayaq basmaq ilə, ya da bir pillənin üstündən keçərək. Və neçə üsul ilə biz nərdivanla qalxa bilərik? Bir pilləli nərdivan üçün yeganə üsul var, ikipilləli nərdivan üçün isə ikidir: ya hər pilləyə ayaq basmaq ilə ya da dərhal axırıncıya qalxmaqla.

n-ninci pilləyə neçə "yol" aparır? Onların sayını b kimi göstərək. Aydındır ki, n-ninci pilləyə ya $(n-1)$-ci pilləkən qalxaraq, ya da dərhal $(n-2)$-dən qalxaraq. Tərifə uyğun olaraq $(n-1)$-ə qalxmaq üçün üsulların sayı b_{n-1}, $(n-2)$-yə isə $-b_{n-2}$. Deməli $b_n = b_{n-1} + b_{n-2}$. İndi aydındır: b_n ədədi Fibonaççi ardıcıllığının $(n+1)$-ci həddinə bərabərdir.

$c_2 = -1/\sqrt{5}$. Nəticədə tapırıq ki, Fibonaççi ardıcıllığının n-ci həddinin onun sıra nömrəsindən asılılığı aşağıdakı düstur ilə ifadə olunur:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (*)$$

Təəccüblü deyilmi: təkcə natural ədədlərdən ibarət olan ardıcıllığı ifadə edən düsturda ikincidərəcəli köklər iştirak edirlər! Bir neçə birinci n üçün "əl ilə" yoxlamaq arzusundan özünü az adam saxlaya bilir.

a_n-in n vasitəsilə ifadəsi bizə çox şey verir. Qeyd edək ki, $\left(1-\sqrt{5}\right)/2$ mütləq qiymətinə görə 1-dən kiçikdir və ona görə onu dərəcəyə yüksəldəndən sonra n-in artırılması ilə ədədlər kiçiləcəklər. Artıq $n = 15$, kvadrat mötərizələrdə ikinci toplanan $1/1000$-dən kiçikdir, $n = 30$ isə $1/1000000$-dən kiçikdir. Ona görə biz deyə dilərik ki, Fibonaççi ardıcıllığının hədləri özünü $\phi^n/\sqrt{5}$ kimi aparırlar, yəni, hər növbəti toplanan əvvəlkindən ϕ dəfə böyükdür (həmçinin n nə qədər böyükdürsə, o qədər də dəqiqdir).

Özünüz başqa $\{a_n\}$ardıcıllığını araşdırmağa çalışın, hansında ki $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ və hər bir həddi üçüncüdən başlayaraq cəmə bərabər yox, əvvəlki iki həddin cəminin yarısına bərabərdir. a_n-i n vasitəsilə ifadə edə bilərsinizmi? Xeyir-duanın yerinə biz deyə bilərik ki, burada radikal olmayacaq.

ARDICILLIQLARIN XASSƏLƏRİ

Əgər bütün n-lər üçün $a_{n+1} \geq a_n$ və ya $a_{n+1} \leq a_n$ olarsa, $\{a_n\}$ ardıcıllığı monoton adlandırılır. Birinci halda monoton azalmayan, ikinci halda isə – monoton artmayan ardıcıllıqdır. Əgər bütün n-lər üçün $a_{n+1} > a_n$ və ya $a_{n+1} < a_n$ onda deyirlər ki, $\{a_n\}$ ardıcıllığı ciddi monotondur (birinci halda artır, ikinci halda isə azalır).

Əgər ardıcıllığın bütün hədləri üçün $c \leq a_n \leq C$ bərabərsizliyini ödəyən c və C ədədləri mövcuddursa, onda $\{a_n\}$ ardıcıllığı məhdud adlandırılır.

Əgər ardıcıllığın bütün hədləri üçün $a_n \leq C$ bərabərsizliyini ödəyən C ədədi varsa, onda belə ardıcıllıq yuxarıdan məhdud adlandırılır.

Əgər ardıcıllığın bütün hədləri üçün $a_n \geq c$ bərabərsizliyini ödəyən c ədədi varsa, onda belə ardıcıllıq aşağıdan məhdud adlandırılır.

Beləliklə, əgər deyirlər ki, ardıcıllıq məhduddursa, onda o həm yuxarıdan, həm də aşağıdan məhdudlaşıb.

Əgər hər hansı n-dən başlayaraq elə natural T ədədi mövcuddursa, $a_n = a_{n+T}$ bərabərliyi ödənilir, onda bu ardıcıllıq periodik və ya dövri, T isə – onun periodunun uzunluğu adlanır. Ən asan hal – ardıcıllığın bütün hədləri eyni olandır. Misal üçün vahidlərdən (burada $T=1$) təşkil olunmuş ardıcıllığı göstərmək olar. $\{(-1)^n\}$ ardıcıllığı, yəni, $\{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$ $T = 2$ periodu ilə periodikdir. n-in 5-ə bölünməsindən alınan qalıqlardan təşkil olunmuş ardıcıllıq – belə göstərilir: {1, 2, 3, 4, 0, 1, 2, 3, 4, 0, ...} və periodun uzunluğu isə T=5.

Yuxarıda göstərilmiş ardıcıllıqlara qayıdaq. Təkcə vahidlərdən təşkil olunmuş ardıcıllıq, qeyd etdiyimiz kimi, periodikdir və həmçinin monoton olaraq nə artmır, nə də monoton azalmır və ondan başqa, məhduddur.

Natural ədədlərin ardıcıllığı isə monotondur (artan), aşağıdan məhduddur, yuxarıdan məhdudlaşmayıb və periodik deyil. Eyni sözlər sadə ədədlərin ardıcıllığına da aiddir.

Sərbəst araşdırma üçün verilən $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ və üçüncüdən başlayaraq hər bir həddi əvvəlki ikisinin cəminin yarısına bərabər olan ardıcıllıq məhduddur (çünki onun bütün hədləri artıq əvvəldən 0 və 1 arasındadırlar), amma monoton və periodik deyil. Buna əmin olmaq üçün, biz a_n-i n vasitəsilə ifadə etməliyik. Öz cavabınızı yoxlaya bilərsiniz:

$$a_n = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{(-2)^{n-1}}\right)$$

Monotonluq, məhdud və periodiklik anlayışlardan istifadə edərək ardıcıllıqların çoxlu asan xassələrini təsvir edə bilərik. Onlardan bir neçəsi bunlardır.

Əgər $\{a_n\}$ ardıcıllığı monoton artandırsa, onda $\{-a_n\}$ ardıcıllığı monoton azalandır və tərsinə. Oxşar qaydada, əgər $\{a_n\}$ ardıcıl-

lığı monoton artan deyilsə, onda $\{-a_n\}$ ardıcıllığı monoton azalan deyil və tərsinə.

Monoton artan ardıcıllıq aşağıdan məhduddur, monoton azalan ardıcıllıq isə yuxarıdan.

Monoton artan və ya monoton azalan ardıcıllıqlar periodik ola bilməz.

Periodik (dövri) ardıcıllıq həmişə məhduddur.

* * *

Beləliklə, məşhur "Əhatə edilməyəni əhatə etmək mümkün deyil" kəlamına təkzib kimi göstərdik ki, biz təkcə sonsuz ədədi ardıcıllıq kimi "əhatə olunmayan" obyektləri verməyi öyrəndik, həmçinin biz onların bir neçə qrupunu seçdik və bundan başqa onların bir neçə əlahiddə xassələrini də təsvir etdik. Amma sonsuzluğun təbiətinin başa düşülməsində həqiqi inqilab limit anlayışı ilə bağlıdır (bax "Ardıcıllığın limiti" məqaləsinə).

ƏDƏDİ VƏ HƏNDƏSİ SİLSİLƏLƏR

ƏDƏDİ SİLSİLƏ

Aşağıdakı rekurent üsulu ilə müəyyən edilmiş $\{a_n\}$ ardıcıllığına baxaq. Verilib: a_1 və hər bir $n \geq 1$ üçün $a_{n+1} = a_n + d$ doğrudur, burada d hansısa verilmiş ədəddir. Başqa sözlə, ardıcıllığın birinci həddi məlumdur, amma hər növbəti həddi isə əvvəlkindən eyni bir ədəd qədər böyükdür.

a_n-nin n vasitəsilə aşkar (düsturlu) ifadəsini tapmaq asandır. Növbəti elementə keçəndə onun qiyməti əvvəlkinə nəzərən d ədədi qədər artır. Birinci həddən n-ci həddə çatmaq üçün biz $n-1$ sayda belə keçidlər etməliyik, və bunun nəticəsində a_n, a_1-dən $(n-1)d$ qədər böyükdür, yəni:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

Bizim qurduğumuz ardıcıllıq ədədi silsilə adlandırılır, d isə – ədədi silsiləsinin fərqidir.

Yeni anlayışa rast gələn kimi, onun mənşəyi haqqında öyrənmək istəyirsən. Niyə məhz silsilə? Niyə məhz ədədi?

Birinci suala cavab aydındır. Belə ardıcıllığın hədləri həmişə eyni d ədədi ilə "çoxalırlar", yəni ki, ya daha da yüksəklərə qalxaraq (əgər $d > 0$), ya da daha da aşağı enərək $(d < 0)$ artırlar (axırıncı silsilə "reqressiyaya" oxşayır, amma belə bir termin işlənmir). Əlbəttə ki, belə bir $d = 0$ "cırlaşmış" halı da mümkündür. Bu artıq eyni ədədlərdən "hərəkətsiz" bir ardıcıllıq olacaq.

Bu ardıcıllıq ona görə ədədi adlandırılıb ki, bu ardıcıllığın hər bir həddi (birincidən başqa), ona qonşu olanların (ondan əvvəlkinin və ondan sonrakının) ədədi ortasına bərabərdir. Gəlin buna əmin olaq. Biz ardıcıllığın üç ardıcıl həddini götürək, məsələn, a_{n-1}, a_n və a_{n+1} (burada $n \geq 2$). Ədədi silsilənin qaydalarına görə:

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

buradan

$$a_n = a_{n+1} - d$$

birinci və üçüncü bərabərlikləri toplayaraq, alırıq:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \text{ və ya } a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Elə bunu da isbat etmək lazım idi.

Həmçinin onun tərsi də düzdür: əgər ardıcıllığın hər həddi, birincidən başqa öz iki qonşusunun ədədi ortasına bərabərdirsə, onda belə ardıcıllıq ədədi silsilə adlanır. Bunu isbat etmək çətin deyil və bunun üçün n-ə görə tam riyazi induksiya üsulundan istifadə etmək daha məqsədəuyğundur (bax "Riyazi induksiya üsulu" məqaləsinə). Beləliklə, tutaq ki, hansısa $\{a_n\}$ ardıcıllığı göstərilmiş xassələrə malikdir. Onun ikinci və birinci həddləri arasında fərqi d ilə göstərək, yəni $a_2 - a_1 = d$ və ya $a_2 = a_1 + d$. Tutaq ki, bütün n-lər üçün 2-dən k-ya kimi, a_n daxil edilməklə, a_{n-1}-dən eyni d qədər böyükdür:

$$a_k = a_{k-1} + d$$

Əmin olaq ki, $n = k+1$ üçün də bu ifadə düzdür. a_k, a_{k-1} və a_{k+1} üçün ədədi orta olduğundan:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}.$$

Onda

$$a_{k+1} = 2a_k - a_{k-1} = a_k + (a_k - a_{k-1}) = a_k + d$$

İnduksiyanın tələbi yerinə yetirilib və ona görə göstərilmiş ardıcıllıq həqiqətən də ədədi silsilədir.

a_n-nin n ilə ifadə olunmuş aşkar ifadəsini istifadə edərək, biz asanlıqla ədədi silsilənin aşağıdakı xassəsini isbat edə bilərik: əgər i, j, k, l natural ədədləri elədirlər ki, $i + j = k + l$, onda $a_i + a_j = a_k + a_l$. Buna əmin olmaq üçün $a_n = a_1 + (n-1)d$ ifadəsinə n-ni i, j, k, l ilə əvəz etmək kifayətdir, sonra isə toplayıb, mötərizələri açıb və sonra isə nəticələri yoxlamaq qalır. Buradan biz belə bir nəticəyə gələ bilərik ki, əgər ədədi silsilənin yalnız ilk n həddlərini gözdən keçirtsək, onda uclardan eyni məsafələrdə yerləşən hədlərin cəmləri bərabər ola- caqlar:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} =$$

$$= \ldots = 2a_1 + (n-1)d$$

Axırıncı bərabərlik ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmini hesablamağa imkan verir: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$

Deyirlər ki, alman riyaziyyatçısı Karl Fridrix Qauss hələ məktəbli olarkən 1-dən 100-ə kimi bütün natural ədədlərin cəmini tapa bilirdi. O gördü ki, uclardan eyni məsafədə yerləşən ədədlərin cəmləri bərabərdirlər:

$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 50 + 51 = 101$

Ümumi şəkildə ədədlərin 50 cütü alınır və hər cütün cəmi 101-dir, ona görə ümumi cəmi isə $50 \cdot 101 = 5050$-dir. Həqiqətən də, natural ədədlərin ardıcıllığı ədədi silsilədir. Burada $a_1 = 1$ və $d = 1$. Qauss toplananların cüt sayını araşdırırdı və ona görə, o onları cüt-cüt bölə bildi. Bizdə isə n – hər hansı natural ədəddir. Ola bilərmi ki, biz cüt və tək n hallarını ayrıca gözdən keçirək? Xeyr, biz başqa cür edəcəyik. Daha bir belə cəm götürək, amma toplananları tərs ardıcıllıq ilə yazaq:

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_2 + a_1$$

Sonra isə biz hədbəhəd bizə verilmiş cəm ilə toplayaq, bununla belə toplananları cüt-cüt qruplaşdıraq. Nəticədə:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Hər mötərizədə silsilənin uclarından eyni məsafədə yerləşən hədlərin cəmidir, hansı ki, biz bildiyimiz kimi $2a_1 + (n-1)d$-yə bərabərdir. Belə cəmlərin sayı n-dir və ona görə:

$$2S_n = n(2a_1 + (n-1)d) = 2na_1 + n(n-1)d$$

Buradan isə

SAHİBKAR VƏ İŞÇİ

Belə bir məsələni gözdən keçirək. Sahibkar işçini bir həftəyə (bazar ertəsindən bazar gününə kimi) işə götürüb. Və hər gün eyni miqdarda o onun əmək haqqını artırır. Əgər cümə axşamı işçi 3 manat alıbsa, o cəmi nə qədər pul alıb?

Bu məsələdə biz ədədi silsiləsini görürük, amma sanki verilənlər azdır. Bizə təkcə hədlərin sayı $n = 7$ və dördüncü həddin qiyməti $a_4 = 3$ məlumdur. Silsilənin fərqini və ya birinci həddini bilsə idik, onda biz asanlıqla nə tələb olduğunu müəyyən edərdik. Amma...

Və hər halda bu məsələni həll etməyə çalışaq. Tutaq ki, a – silsilənin birinci həddidir, d isə - fərqidir. Hər günə görə gəliri cədvəl şəkilində göstərək:

B.e.	C.a.	C.	C.a	C.	S.	B.
a	$a+d$	$a+2d$	$a+3d$	$a+4d$	$a+5d$	$a+6d$

Həftə ərzində işçi $7a + 21d = 7(a + 3d)$ qazanıb. Amma $a + 3d$ bu cümə axşamına görə qazancdır, yəni ki 3 manat. Deməli işçi ümumi olaraq 21 manat qazanıb.

Başqa bir üsul da var. Həftə ərzində əmək haqqı – ədədi silsilənin ilk hədlərinin tək sayların cəmidir. Qeyd edək ki, əgər 7 həddin cəmini tapmaq lazımdırsa, onda 4-cü ədəd ortadır. Ona görə bu düsturdan istifadə edək:

$$S_n = na_k,$$

Burada $n = 2k - 1$. Beləliklə, həftə ərzində ümumi əmək haqqı $7a_4 = 7 \cdot 3 = 21$.

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}. \qquad (*)$$

Beləliklə ədədi silsilənin ilk n həddinin cəmi birinci hədd və fərqin vasitəsilə ifadə edilir.

Diqqət edin ki, ədədi silsilə özü n-ə mütənasib olaraq artır, onun birinci n hədlərinin cəmi isə – daha da tez, təxminən $n^2/2$ kimi və bu təsadüf deyil, bu inteqral hesabının "uzaq əks-sədasıdır" (bax "İnteqral və ibtidai funksiya" məqaləsinə).

İndi isə ədədi silsilənin ilk n hədlərinin cəmi üçün ifadəni tapaq, əgər bizə yalnız birinci və sonuncu hədlər məlumdursa; yəni, a_1 və a_n. Daha bir bərabərliyi araşdıraq:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots +$$

$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Hər bir mötərizədə cəmlər bərabərdirlər, deməli:

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

$$S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \qquad (**)$$

Nəhayət biz S_n üçün daha da sadə bir ifadə verək, baxmayaraq ki o təkcə tək n-lər üçün yararlıdır, yəni ki $n = 2k - 1$. Bununla belə $1 + n = 1 + (2k - 1) = 2k = k + k$, və yuxarıda göstərilmiş ədədi silsiləsinin xassələrinə görə:

$$a_1 + a_n = a_k + a_k = 2a_k.$$

Ona görə:

$$S_n \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n \cdot 2a_k}{2}$$

Və nəhayət ki:

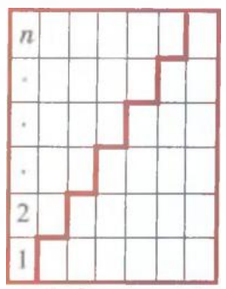
$$S_n = na_k \qquad (***)$$

Ədədi silsiləsinin xassələrini bilməyimiz bizə müxtəlif məsələləri həll etməyə imkan verir. Məsələn, ixtiyari n üçün ilk n natural həddlərin cəmlərini (*) və ya (**)-dan istifadə edərək tapmaq olar.

Bu halda ikinci düstur daha rahatdır, çünki birinci və axırıncı toplananlar bizə məlumdur (onlar uyğun olaraq 1 və n-ə bərabərdirlər) və toplananların ümumi sayı n-ə bərabərdir. Deməli:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Bu düstur sadə həndəsi izaha malikdir (şəkil 1).

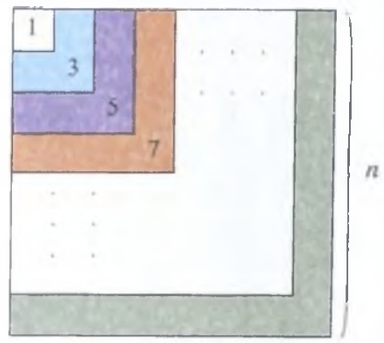


Şəkil 1.

Əgər bizə ilk n tək natural ədədlərin cəmini hesablamaq lazımdırsa, yəni ki 1+3+5+... (cəmi n toplananlardır)? Burada (*) düsturundan istifadə etmək olar. Axtarılan cəm buna bərabər olur:

$$n \cdot 1 + \frac{n(n-1) \cdot 2}{2} = n^2$$

Düz deyilmi, təəccüblüdür: ilk n tək ədədlərin cəmi dəqiqliklə onların sayının kvadratına bərabərdir! Belə təsadüflər onlar üçün izah tapmayana qədər sakit olmağa



Şəkil 2.

imkan vermir. 2-ci şəklə baxın: $n \times n$ kvadratı qnomon adlandırılan n bucaqdan ibarətdir. Qnomonların sahələri artma ardıcıllığında tək ədədlərin ardıcıllığını təşkil edir, yəni $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n - 1 = n^2$.

HƏNDƏSİ SİLSİLƏ

Belə üsul ilə müəyyən edilmiş $\{a_n\}$ ardıcıllığını gözdən keçirək: a_1 verilib və bütün $n \geq 1$ üçün $a_{n+1} = a_n q$ bərabərliyi doğrudur, burada q sıfra bərabər olmayan hər hansı verilmiş ədəddir. Başqa sözlə, ardıcıllığın birinci həddi məlumdur, qalanları isə əvvəlki həddən eyni ədəd dəfə böyükdürlər. Belə ardıcıllıq həndəsi silsilə adlandırılır, q isə həndəsi silsilənin vuruğudur.

Şotland riyaziyyatçısı Jon Neperə belə bir fikir gəldi ki, əgər toplama və çıxmanı, uyğun olaraq, vurma və bölmə ilə, vurma və bölməni isə – qüvvətə yüksəltmək və kökün çıxarılması ilə əvəz etsək biz ədədi silsilənin xassələrindən həndəsi silsilənin oxşar xassələrinə keçə bilərik. Belə bir əvəzetmədən sonra isə təkcə xassələrin ifadələrindən başqa, həm də onların isbatları da qalır (demək lazımdır ki, riyaziyyatçılar yeni məsələləri artıq həll edilmiş məsələlərə gətirməyi sevirlər)!

Neperin prinsiplərini praktikada yoxlayaq. Xatırladaq ki, ədədi silsilənin hər bir həddi onunla qonşu olan həddlərin – ondan əvvəldə gələnin və ondan sonrakının – ədədi ortasıdır. Deməli həndəsi silsilənin hər bir

həddi öz "qonşularının" (əgər silsilənin bütün həddləri müsbətdilərsə) həndəsi orta qiymətinə bərabər olmalıdır. İsbat üçün üç ardıcıl həddi götürək a_{n-1}, a_n və $a_{n+1} (n \geq 2)$.

Həndəsi silsilənin qaydalarına görə:

$$a_n = a_{n-1} q,$$

$$a_{n+1} = a_n q,$$

buradan isə

$$a_n = \frac{a_{n+1}}{q}$$

Əgər birinci və üçüncü bərabərlikləri bir-birinə vursaq, onda:

$$a_n^2 = a_{n-1} a_{n+1},$$

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} a_{n+1}}$$

alarıq. Elə bunu da isbat etmək lazım idi.

Əgər ədədi əməliyyatları Neper qaydalarına uyğun olaraq əvəz etsək, onda bu isbat tamamilə ədədi silsilə üçün isbat ilə üst-üstə düşər. Elə bu eynilikə tərs teoremin isbatına da aiddir: əgər ardıcıllığın ikincidən başlayaraq hər bir həddi ondan əvvəl və sonra gələnlərin həndəsi orta qiymətidirsə, onda bu ardıcıllıq həndəsi silsilə olacaq.

İndi isə ədədi silsilənin xassələrini yada salaq və onları toplama, vurma və çıxma dilindən vurma, bölmə və qüvvətə ədədi silsilədə yüksəltmə dilinə keçirək.

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

deməli, həndəsi silsilədə:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

$(n-1)d$ ifadəsinə q^{n-1} ifadəsi uyğundur, tərsi deyil, yəni ki $(n-1)^{\text{-ci}}$ deyil. Bu onunla izah olunur ki, burada biz a_1-i $n-1$ dəfə q-yə vururuq (elə ədədi silsilədəki kimi, a_1-ə biz $n-1$ dəfə d-ni əlavə edirdik). Vurmanı qüvvətə yüksəltmə ilə əvəz edəndə belə təfərrüatları bilmək lazımdır.

Ədədi silsilənin aşağıdakı xassəsini "tərcümə edirik": əgər i, j, k, l natural ədədləri elədirlər ki, $i + j = k + l$, onda:

$$a_i + a_j = a_k + a_l$$

Həndəsi silsilə üçün oxşar xassə belə ifadə olunur: əgər i, j, k, l natural ədədlər elədirlər ki, $i + j = k + l$, onda

$$a_i a_j = a_k a_l$$

Ədədi silsilənin cəmi üçün bizdə üç düstur var idi. Onların hərəsi üçün "həndəsi" oxşarı tapmaq çətin deyil, əgər biz S_n cəmi yerinə həndəsi silsilənin ilk n hədlərinin P_n hasilini götürsək, nəticə belə alınacaq:

$$P_n = a_1 q^{\frac{n(n-1)}{2}}, \quad P_n = (a_1 a_n)^{\frac{n}{2}}, \quad P_n = a_k^n$$

burada $n = 2k - 1$. Bütün bu düsturlar doğrudur.

Həndəsi silsilənin hədlərinin cəmi üçün:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} =$$

$$= a_1 + a_1 q + \ldots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1}$$

bizdə düstur hələ yoxdur. Belə bir cəm düsturu toplamanın və qüvvətə yüksəltmənin hibridini təşkil edir. Bu ifadəni asanlaşdırmağa çalışaq. Dərhal biz görürük ki, a_1 qiymətini mötərizə xaricinə çıxartmaq olar:

$$S_n = a_1 (1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

İndi isə bir hiyləgərlik edək: a_1-i sol tərəfə keçirək (bizə mənə olmasın) və sonra isə hər iki tərəfi $1-q$-yə vuraq:

$$\frac{(1-q)S_n}{a_1} = (1-q)(1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Sağ tərəfdə mötərizələri açaq, əvvəlcə vahidi hədbəhədd ikinci mötərizənin toplananlarına vuraraq, sonra isə onları $-q$-yə vursaq, alarıq:

$$1 + q + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} - q - q^2 - \ldots - q^{n-1} - q^n$$

Sevinə-sevinə əmin oluruq ki, yazılmış $2n$ toplananlarının arasında əks işarəli hədlərin islahı baş verir, məhz: q, $-q$ ilə birlikdə yox olurlar, q^2, $-q^2$ ilə birlikdə və s., və q^{n-1} və $-q^{n-1}$ kimi. Bəs nə qalır?

Yalnız iki toplanan – birinci və axırıncı, yəni ki $1 - q^n$ qaldılar. Beləliklə:

$$\frac{(1-q)S_n}{a_1} = 1 - q^n$$

Buradan isə

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}$$

Daha bir təfərrüatı qeyd edək: $q=1$ olanda, düsturu ayrıca çıxartmaq lazımdır. Bu çox asandır. Çünki, əgər $q = 1$ olarsa, onda $a_1 = a_2 = \ldots a_{n-1} = a_n$ və ona görə $S_n = a_1 n$.

Həndəsi silsilələrə məsələlərdə ədədi silsilələrdən az olmayaraq rast gəlinir. Belə ki, məşhur Fibonaççi ardıcıllığı (bax "Ardıcıllıqlar" məqaləsinə) iki həndəsi silsilə-

nin cəmidir. Və indi isə onun ilk n həddinin cəmini tapmaq yalnız texnikanın işidir.

ARDICILLIĞIN LİMİTİ

Limit anlayışı – elementar riyaziyyatdan ali riyaziyyata açılan kandardır. Demək olar ki, hamı limit anlayışının özü üçün intuitiv təsvirini yarada bilər, baxmayaraq ki, onun ciddi tərifi hamıya çətin gəlir.

Nümunədən başlayaq. $\{1/n\}$ ardıcıllığını gözdən keçirək. Bu ardıcıllığın hər bir həddi, ikincidən başlayaraq əvvəlki həddən sonrakı həddin orta harmonik qiymətidir, ona görə bu ardıcıllığı harmonik adlandırırlar. Xatırladaq ki, c ədədi a və b ədədlərin orta harmonik qiymətidir, əgər $c = \frac{2ab}{a+b}$ və ya $\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$. Diqqət yetirin: n-nin artması ilə harmonik ardıcıllığın hədləri azalırlar və durmadan sıfıra yaxınlaşırlar. Həqiqətən, n=1000-dən başlayaraq hər növbəti həddi sıfırdan 1/1000-dən çox olmayaraq fərqlənir, n=1000000-dan başlayaraq – artıq 1/1000000-dan çox olmayaraq fərqlənir. Və ümumiyyətlə biz hansı "mikroədəd" seçsək, belə bir həddi tapılacaq ki, o sıfırdan elə bu "mikroədəddən" çox olmayaraq fərqlənəcək. Belə halda deyirlər ki, n sonsuzluğa yaxınlaşmaq şərti ilə, verilmiş ardıcıllıq yığılır və onun limiti sıfırdır. Bu belə yazılır:

$$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$$

Burada lim – latın. limes sözünün birinci hərfləridir – "limit". ∞ işarəsi ilə adətən sonsuzluğu göstərirlər.

İndi isə başqa ardıcıllığı götürək: onun birinci elementi 0, ikincisi 1 və hər bir növbəti elementi isə iki ondan əvvəldə gələn hədlərin cəminin yarısına bərabərdir. Göstərmək olar ki (bax "Ardıcıllıqlar" məqaləsinə):

$$a_n = \frac{2}{3}\left[1 - \frac{1}{(-2)^{n-1}}\right]$$

Baxmayaraq ki $\frac{1}{(-2)^{n-1}}$ kəsri ardıcıllıqla ya müsbət, ya da mənfi qiymətlər alır, o da n-nin artması ilə sıfıra yaxınlaşır və hətta $1/n$-dən tez yaxınlaşır. Ona görə kvadrat mötərizədəki ifadə birə yaxınlaşır, a_n-in qiyməti isə – 2/3-yə. Deməli, axtarılan limit $\lim_{n\to\infty} a_n = 2/3$.

Limitlərdən danışarkən belə bir çox gözəl ardıcıllıq haqqında xatırlatmamaq olmaz:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

Onun limiti varmı?

Ardıcıllığın hər bir növbəti həddi $1+1/n$-ə bərabər olan əsasın n qüvvətinə yüksəltmək ilə alınır. n-nin artması ilə əsası birə yaxınlaşır və o hər hansı qüvvətdə birə bərabər olaraq qalır. Ona görə, bir tərəfdən ona oxşayır ki, ardıcıllığın hədləri 1-ə yaxınlaşır. Amma başqa tərəfdən baxsaq, görürük ki, n-nin böyük olmasına baxmayaraq, əsas daima ən azı bir az 1-dən böyükdür. Qüvvətin göstəricisi qeyri-məhdud surətdə artdığından, a_n-nin qiyməti də qeyri-məhdud artmalıdır. Paradoks?

Xeyr, yalnız paradoks illüziyasıdır. Burada biz iki faktorla, iki "qüvvə" ilə rastlaşırıq: birə yaxınlaşan əsas ilə və qeyri-məhdud artan qüvvətin göstəricisi ilə. Bu qüvvələrdən hər birisi öz tərəfinə dartır. Onlardan hansı çəkəcək?

Buna cavab bir neçə yüz il əvvəl tapılmışdır. Məlum oldu ki, mübarizə edən tərəflər kompromisə gəldilər. Baxmayaraq ki, ardıcıllıq monoton artır, amma bununla belə məşhur Eyler ədədinə e=2,71828... bərabər olan limitə malikdir (bax "e ədədi" məqaləsinə).

LİMİTİN İNTUİTİV ANLAYIŞINDAN CİDDİ ANLAYIŞINA

Tutaq ki, bizə $\{a_n\}$ ardıcıllığı verilib və onun limiti A-ya bərabərdir. İntuitiv olaraq biz başa düşürük bu nədir: n-in artması ilə ardıcıllığın hədləri A ədədinə daha da yaxınlaşırlar. Bəziləri isə A ilə üst-üstə düşə bilərlər! Təbii ki, bu yaxınlıq a_n və A arasında fərq ilə bağlıdır, yəni ki $a_n - A$. Və ya ola bilər ki, $A - a_n$?

Amma qeyd edək ki, $a_n - A$ və $A - a_n$ fərqləri təkcə işarə ilə fərqlənirlər, onların mütləq qiymətləri bərabərdirlər. Məhz elə bu qiymət ədədlər arasında yaxınlıq meyarıdır. Gəlin məhz mütləq qiymətlər ilə işləyək. Bunun üçün biz təkcə fərqimizi (ikisindən hər hansı) iki tərəfdən mütləq qiymətin işarəsi ilə əhatə edək: $|a_n - A|$. Və n-in artması ardıcıllığın hədlərinin A yaxınlaşması faktını belə ifadə etmək olar: n-in artması ilə $|a_n - A|$ ifadəsi sıfıra daha da yaxınlaşır.

"Sıfıra daha da yaxınlaşır" sözlərini necə başa düşmək olar? Asan yolu budur: n-in artması ilə $|a_n - A|$ ifadəsi hər hansı əvvəlcədən verilmiş ε müsbət ədədindən kiçik olacaq, o, nə qədər kiçik olsa da, məsələn, deyək ki, ε=0,00001, onda bütün $n \geq N$ üçün elə bir N mövcud olmalıdır ki $|a_n - A|$<0,00001 bərabərsiziliyi doğru olsun. Yoxladıq – və bunun belə olduğuna əmin olduq. Başqa ε verək, daha da kiçik, məsələn, 0,00000000001. Onun üçün də müvafiq N tapılmalıdır.

Nəhayət ki, biz çalışıb isbat edə bilərik ki, N-nin belə başlanğıc qiyməti ümumiyyətlə ixtiyari seçilmiş kiçik müsbət ε üçün tapılar. Əgər biz bunu edə bildiksə, onda A-nın $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti olması isbat edildi.

İndi isə ardıcıllığın ciddi surətdə verilmiş tərifini göstərək:

✓ **Əgər istənilən ε>0 üçün, elə yalnız ε-dan asılı N ədədi tapmaq olarsa ki, $n \geq N$ bərabərsizliyini ödəyən istənilən n-lər üçün $|a_n - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin, onda A ədədi verilmiş $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti adlanır.**

Bu belə göstərilir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

✓ **Əks halda isə ardıcıllıq dağılan adlandırılır.**

Bu tərifə əsaslanaraq artıq demək olar ki, $\{1/n\}$ ardıcıllığı $A = 0$ limitə malikdir. Tutaq ki, ε – çox kiçik olan müsbət ədəddir. Onda biz belə bir fərqi gözdən keçirək:

$$|a_n - A| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n}.$$

Bütün $n \geq N$ üçün $1/n < \varepsilon$ bərabərsizliyini ödəyən belə bir N mövcuddurmu? Əlbəttə ki, mövcuddur! N kimi biz 1/ε-dan böyük olan hər hansı natural ədəd götürək. Onda:

$$\frac{1}{N} < \varepsilon$$

Və bütün $n \geq N$ üçün:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Bununla isbat bitdi.

BİR NEÇƏ FAYDALI TEOREM

Bu və ya digər ardıcıllıqda limitin mövcudluğunu isbat etmək hərdən göstərilmiş nümunədəki kimi asan olmur. Bizim xoşbəxtliyimizdən, belə isbatlar ilə daim məşğul olmaq ehtiyacı yoxdur. Tez-tez rast gəldiyimiz ardıcıllıqlar yaxşıca öyrəniliblər və dərsliklərdə, sorğu kitabçalarında verilibləri. Bundan başqa, həmçinin elə teoremlər var ki, onlar bizə artıq araşdırılmış ardıcıllıqlara əsaslanaraq verilmiş ardıcıllıqda limitin olub-olmamasını müəyyənləşdirməyə imkan verir (və hətta onu hesablamağa da). Bu teoremlərdən bir neçəsinə baxaq:

Əgər ardıcıllığın limiti varsa, deməli o məhdud ardıcıllıqdır.

Əgər ardıcıllıq məhdud deyilsə, onda onun limiti ola bilməz. Məsələn, $\{n\}$ natural ədədlər ardıcıllığı limitə malik deyil.

✓ **Əgər ardıcıllıq monoton və məhduddursa, onda o limitə malikdir.**

Nümunə kimi elə bu ardıcıllığı göstərək:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

Məlum oldu ki, $a_{n+1} > a_n$ olduğunu istənilən n üçün isbat etmək olar (yəni ki ardıcıllıq monoton artır) və ikincisi, a_n həmişə 3-dən kiçikdir (yəni, ardıcıllıq yuxarıdan məhduddur). Aşağıdan məhdudolmanı isə ümumiyyətlə isbat etmək də lazım olmur: bütün hədlər əvvəlcədən müsbətdirlər və ona görə 0-dan böyükdürlər. Ona görə verilmiş ardıcıllıq limitə malik olmalıdır. Amma onu hesablamağa bizə teorem imkan vermir.

✓ **Əgər $\{a_n\}$ ardıcıllığı A limitinə malikdirsə, onda $\{ca_n\}$, $\{a_n+c\}$ və $\{|a_n|\}$ ardıcıllıqları müvafiq olaraq cA, $A+c$**

və $|A|$ limitlərinə malikdirlər (burada c – ixtiyari ədəddir).

✓ **Əgər $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqları müvafiq olaraq A və B-yə bərabər olan limitlərə malikdirlərsə, onda $\{pa_n+qb_n\}$ ardıcıllığı $pA + qB$ limitinə malikdir.**

✓ **Əgər $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqları müvafiq olaraq A və B bərabər olan limitlərə malikdirlərsə, onda $\{a_n \cdot b_n\}$ ardıcıllığı AB limitinə malikdir.**

✓ **Əgər $\{a_n\}$ və $\{b_n\}$ ardıcıllıqlar müvafiq olaraq A və B limitlərinə malikdirlərsə və bundan başqa $b_n \neq 0$ və $B \neq 0$, onda $\{a_n/b_n\}$ ardıcıllığı A/B limitinə malikdir.**

XÜSUSİ LİMİT

Növbə ilə təkrarlanan üç və beşlərdən ibarət olan ardıcıllığı gözdən keçirək: {3, 5, 3, 5, ...}. Aydındır ki, bu ardıcıllıq limitə malik deyil, çünki ardıcıllığın bütün hədlərinin yaxınlaşdığı ədəd yoxdur. Eyni zamanda, əgər ardıcıllıqdan bütün cüt hədləri pozsaq, onda üçlərdən ibarət olan altardıcıllıq qalacaq və onun limiti isə, əlbəttə ki, 3-ə bərabər olacaq. Əgər, əksinə, bütün tək hədləri pozsaq, onda 5 limitinə malik olan altardıcıllıq qalacaq. Ona görə bu ardıcıllığın iki limitə: 3 və 5-ə malik olduğu haqqında fikirdən qaçmaq çətindir.

Artıq limitin ifadə olunmuş tərifinə görə belə bir fikir mənasız görünür, amma hansısa əlavə bir məlumat bu fikri bizə verir. Ona görə yeni bir anlayış verək:

✓ **Əgər verilmiş ardıcıllığın hansısa altardıcıllığı A limitinə malikdirsə, onda A qiymətini verilmiş ardıcıllığın limit nöqtəsi və ya xüsusi limiti adlandırırlar.**

Beləliklə, baxmayaraq ki, üçlərdən və beşlərdən ibarət olan ardıcıllıq dağılır, o iki limit nöqtəsinə malikdir: 3 və 5. Aydındır ki, əgər ardıcıllıq A limitinə malikdirsə, o yeganə A limit nöqtəsinə malikdir, çünki onun hər hansı altardıcıllığı eyni limitə yaxınlaşır.

ƏDƏDİ SIRALAR

Sonsuz sayda toplananların cəmini hesablamaq olarmı? Bir konkret halda, o halda ki, bütün toplananlar sıfıra bərabər olsun, onda cavab özü-özünə məlumdur:

$$0 + 0 + 0... = 0$$

Bəs başqa hallarda necə olsun?

Vuruğu mütləq qiymətcə vahiddən kiçik olan: $-1 < q < 1$, $a_n = a_1 q^{n-1}$ həndəsi silsiləsini araşdıraq. Silsilənin ilk n həddinin cəmini hesablayaq:

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}$$

Aydındır ki, $|q| < 1$ n-in artması ilə q^n sıfıra yaxınlaşır. Onda S_n cəmi $a_1/(1-q)$-ə yaxınlaşır və bu ədədi sonsuz azalan həndəsi silsilənin hədlərinin cəmi adlandırmaq təbiidir:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + ... = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Eyni qayda ilə hər hansı başqa ardıcıllığa da yaxınlaşmaq olar.

SIRANIN CƏMİ KİMİ NƏ BAŞA DÜŞÜRLƏR

Gəlin hər hansı $\{a_n\}$ ardıcıllığını götürək və onun hədləri arasında toplama işarələrini qoyaq:

$$a_1 + a_2 + a_3 ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (*)$$

Sağ tərəfdə bu sonsuz cəmin ixtisar olunmuş forması göstərilib. $\sum$ Yunan baş hərfinin ("siqma") aşağısından və yuxarısından cəmin sərhədləri göstərilib: n=1-dən sonsuzluğa qədər. Belə ifadə ədədi sıra adlanır.

Sonra isə hər n natural ədədə $\{a_n\}$ ardıcıllığın ilk n həddinin cəmini qarşı qoyaq:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$$

S_n qiymətlərini (*) sıranın xüsusi cəmləri adlandırırlar. Onlar yeni bir $\{S_n\}$ ardıcıllığını – xüsusi cəmlər ardıcıllığını təşkil edirlər.

Əgər xüsusi cəmlərin ardıcıllığı S limitinə malikdirsə, yəni ki $\lim S_n = S$, onda deyirlər ki, bu sıra yığılır və S – onun cəmidir. Bu belə yazılır:

FİQURUN SAHƏSİNİ MÜƏYYƏN EDİN

Həndəsi silsiləni bilmək bizə bir maraqlı məsələni həll etməyə kömək edə bilər.

1 uzunluğunda tərəfi olan kvadrat verilib. Onun hər bir tərəfini üç bərabər hissəyə bölürlər və qonşu tərəflərin yaxın yerləşən nöqtələri birləşdirirlər. Alınmış üçbucaqları kəsirlər (şəkil 1). Eyni qayda ilə qalan səkkiz-bucaqlı ilə də (şəkil 2), on altı-bucaqlı ilə də və s. sonsuzluğa qədər rəftar edirik. Nəticədə alınan fiqurun sahəsini tapmaq lazımdır.

Nədənsə belə bir təsəvvür yaranır ki, düzəldilmiş fiqur – verilmiş kvadratın daxilinə çəkilmiş çevrədir. Biz bunun belə olmamasına indi əmin olacağıq.

Rahatlıq üçün fiqurun özünün sahəsinin yerinə biz kəsilmiş üçbucaqların ümumi sahəsini axtaracağıq. Birinci addımda 4 üçbucaq silinmişdi. Onlardan hər birinin sahəsi, bunu saymaq çətin deyildi, 1/18 bərabərdir, onların ümumi sahəsi isə:

$$4 \cdot \frac{1}{18} = \frac{2}{9}.$$

İndi isə hansısa addım zamanı kəsilmiş ABC üçbucağını, və gələn addımda kəsilmiş DEA üçbucağını araşdıraq (şəkil 3). Görmək çətin deyil ki, DEA üçbucağının AD oturacağı və E təpəsindən çəkilmiş hündürlük ABC üçbucağın oturacağından və hündürlüyündən müvafiq olaraq üç dəfə kiçikdir. Və ona görə DEA üçbucağının sahəsi ABC üçbucağının sahəsindən 9 dəfə kiçikdir. Amma "yeni nəslin" üçbucaqlarının sayı isə iki dəfə çox olacaq, deməli onlar ümumi sahəsi "əcdadların" sahələrinin 2/9 təşkil edir. Bu isə o deməkdir ki, kəsilən üçbucaqların $\{a_n\}$ ümumi sahələrin ardıcıllığı bu şərti ödəyir:

$$a_1 = 2/9,$$

$$a_n = a_{n-1} \cdot \frac{2}{9} \quad n > 1$$

beləliklə, $\{a_n\}$ – həndəsi silsilə və bütün üçbucaqların sahələrinin cəmi belə bir sıranın cəmidir:

$$\frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + ...$$

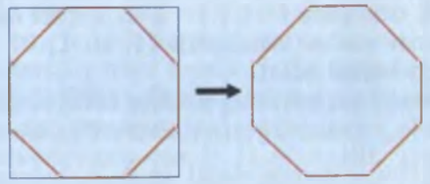
Bu sıra, biz bildiyimiz kimi yığılır. Onun cəmi

$$\frac{\frac{2}{9}}{1-\frac{2}{9}} = \frac{2}{7}\text{-dir.}$$

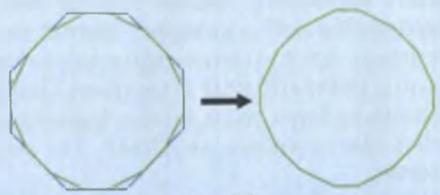
Nəhayət ki, qalanın sahəsini hesablayırıq:

$$1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$$

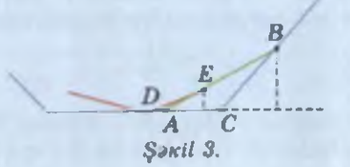
Cavab da belədir. Buradan belə bir nəticəyə gələ bilərik, alınmış fiqur verilmiş kvadratın daxilinə çəkilmiş dairə ola bilməz (çünki belə bir dairənin səthi $\pi/4$-ə bərabər olmalıdır).



Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

$$a_1 + a_2 + a_3 ... = S \text{ və ya}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

Əks halda sıra dağılan adlanır.

Beləliklə, tərifə görə, sıranın cəmi – onun xüsusi cəmlərinin ardıcıllığının limitidir.

YIĞILMA ŞƏRTLƏRİ

Verilmiş sıranın dağılmağını və ya yığılmağını müəyyən etmək üçün onun xüsusi cəmlərinin ardıcıllığını tədqiq etmək mütləq deyil. Çünki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırasının yığılması mütləq şəkildə cəm işarəsi altında yerləşən $\{a_n\}$ ardıcıllığın özünü necə aparması ilə bağlı olmalıdır. Bununla bağlı bir neçə teorem isbat edilmişdi və ilk növbədə sıranın mütləq

yığılması əlaməti: əgər $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılırsa, onda $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beləliklə, əgər $\{a_n\}$ ardıcıllığı sıfıra bərabər olmayan limitə və ya ümumiyyətlə limitə malik deyilsə, onda sıra dağılır. Misal üçün, {1, −1, 1, −1,...} ardıcıllığı limitə malik deyil, ona görə 1 − 1 + 1 − 1 +... sırası dağılır (onun xüsusi cəmlərini {1, 0, 1, 0...} ardıcıllığı təşkil edir).

Təəssüf ki, verilmiş əlamət kifayət deyil: əgər $\{a_n\}$ ardıcıllığının limiti sıfıra bərabərdirsə, bu o demək deyil ki $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası mütləq yığılmalıdır. Bunu həmçinin belə də izah etmək olar: toplama zamanı biz kiçicik toplananları toplayırıq, amma onların sayı isə sonsuzdur. Nə üstün gələcək? Bunun aydınlaşdırılması üçün sıranın yığılması və ya dağılmasının müxtəlif kafi əlamətləri tapılmışdı. Amma onların çoxu bütün toplananları müsbət olan sıralara aiddirlər. İki əlamət göstərək.

Dalamber əlaməti: əgər $c < 1$ şərtini ödəyən müsbət bir ədəd varsa ki, n-dən başlayaraq, belə bir bərabərsizlik ödənilirsə:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \le c,$$

onda sıra yığılır. Əgər, hansısa n-dən başlayaraq belə bir bərabərsizlik ödənilirsə:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1,$$

onda sıra dağılır. Buradan, xüsusi halda, həndəsi silsilənin vuruğunun $0 < q < 1$ şərtində yığılması və $q \ge 1$ dağılması baş verir.

Koşi əlaməti: əgər $c < 1$ şərtini ödəyən müsbət bir ədəd var ki, n-dən başlayaraq, belə bir bərabərsizlik ödənilirsə $\sqrt[n]{a_n} \le c$, onda bu o deməkdir ki sıra yığılır. Əgər hansısa n-dən başlayaraq belə bir bərabərsizlik ödənilirsə: $\sqrt[n]{a_n} \ge 1$, onda sıra dağılır.

Təəssüf ki, bir çox sıralar verilmiş əlamətlər ilə "ifşaya" uğramırlar. Belə sıralara, məsələn, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonik sırası və həmçinin $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ümumiləşmiş harmonik sıra da aiddirlər: burada s – hansısa ədəddir. İndi isə analiz üçün başqa üsullardan istifadə etmək qalır və onlar göstərirlər ki, əgər $s > 1$-dirsə ümumiləşmiş harmonik sıra yığılır, əgər $s \le 1$ isə o dağılır.

Hələ Leonard Eyler kəşf etmişdi ki, bir neçə ümumiləşmiş harmonik sıraların cəmləri cüt s-lər üçün hansısa qəribə şəkildə π ədədi ilə bağlıdırlar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \text{ və s.}$$

Maraqlıdır ki, s-in tək qiymətləri üçün indiyə kimi belə bir ifadələr tapılmayıb.

Sıraların hamısı yalnız müsbət hədlərdən ibarət olmur. Amma qarışıq işarəli sıralar üçün də teoremlər var. Misal üçün, əgər yığılan müsbət işarəli sırada sərbəst şəkildə hədlər arasında üstəgəl və çıxma işarələrini qoysaq, onda alınan sıra da yığışacaq.

Sıralar arasında xüsusi yerə həmçinin belə bir sıralar malikdirlər ki, hansıların toplananlarının işarələri ciddi surətdə növbələşirlər, sıranın hədlərinin mütləq qiymətləri isə monoton şəkildə azalırlar. Məlum oldu ki, onlar üçün sıranın yığılmasının zəruri əlaməti həm də kafidir, yəni, əgər $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olarsa, onda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sırası yığılır.

BƏZİ GÖRKƏMLİ SIRALAR

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = e = 2{,}71828\ldots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots = \frac{1}{e} = 0{,}36787\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \text{–dağılır.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2 = 069314\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4} = 0{,}78539\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64493\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12} = 0{,}82246\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}08232\ldots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{1}{1^4} - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{7\pi^4}{720} = 0{,}94703\ldots$$

FUNKSİYALAR

FUNKSİYA ANLAYIŞI

Təsəvvür edək ki, maşın düz xətli yol boyu sabit v sürəti ilə gedir. t zamanında gedilən s məsafəsi $s=vt$ düsturu ilə ifadə olunur. Bu düz mütənasib asılılıqdır. Bu isə kvadratik asılılığın nümunəsidir: ağırlıq qüvvəsinin təsiri altında düşən cismin getdiyi yol

$$s = g\frac{t^2}{2}$$

düsturu ilə tapılır (g – sabitdir). Və ya tərsmütənasib asılılıq: Boyl-Mariott qanununa uyğun olaraq, qazın p təzyiq və V həcmi arasında sabit temperaturda əlaqə $p = C/V$ düsturu ilə ifadə olunur. Cazibə qanunu iki cisimin qarşılıqlı F təsir qüvvəsi M və m kütlələri və r məsafəsinin arasında əlaqəni təyin edir:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

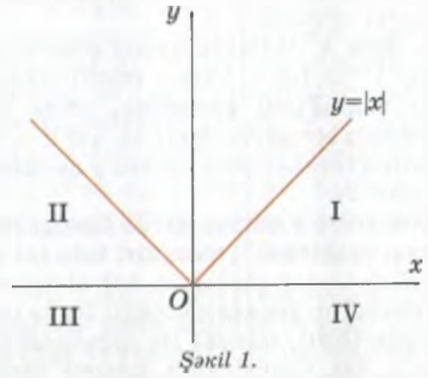
burada G – qravitasiya sabitdir. Biz burada sadə funksional asılılıqların nümunələrini göstərdik, onları ümumi şəkildə belə təsvir etmək olar:

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{c}{x} \text{ və } y = \frac{d}{x^2}$$

Məktəblərdə başqa funksiyaları da öyrənirlər: $y = \log_a x$ loqarifmik funksiyası, $y=sinx$, $y=cosx$, $y=ctgx$ triqonometrik funksiyaları və s.

Funksiya – ümumi elmi anlayışların əsaslarından biridir; o müxtəlif obyektlər arasında əlaqəni təyin edir. Funksiya anlayışı dərhal müəyyən edilməyib. Əvvəlcə o qeyri-müəyyən idi və dəqiq bir təsvirə malik deyildi. Bu anlayışın konturlarını təsvir etməyə ilk cəhdlər *XVII* əsrdə riyazi təhlilin banilərindən biri Leybnis tərəfindən, ondan başqa onun şagirdləri – İohann və Yakob Bernulli qardaşları tərəfindən edilmişdir. "Funksiya" termininin özü Leybnisə məxsusdur və latın functio sözündəndir, bu söz "icra edilmə", "həyata keçirilmə" deməkdir. İohann Bernulli belə yazırdı: "Dəyişən kəmiyyətin funksiyası, bu dəyişən kəmiyyətdən və ədədlərdən, yaxud sabit kəmiyyətlərdən hansısa üsul ilə təşkil edilmiş ifadədir".

Eyler funksiya kimi analitik ifadə başa düşürdü, amma bununla birlikdə, o, həmçinin daha geniş tərifi qəbul edirdi: funksiya – bu, "kağız vərəqdə karandaş ilə çəkmək" mümkün olan şeydir (latın dilində – libera manu dicta). Ona sözlə və ya həndəsi təsvir olunan funksiyalar da məlum idi. Belə ki, y funksiyasını (şəkil 1) müxtəlif üsullar ilə müəyyən etmək olar, məsələn, $y = |x|$ düsturu (analitik ifadə) ilə. Onun, həmçinin həndəsi tərifi də var – birinci və ikinci rüblərin tənbölənlərinin birləşməsidir. Arqument mənfi deyilsə, $y = \sqrt{x^2}$ funksiyası arqumentin qiymətini alır və əgər arqument mənfidirsə, o, "minus arqumentə" bərabərdir desək, onda biz onun söz ilə tərifini verərik.



Şəkil 1.

Hansını üstün tutaq? Alimlər çox bərk mübahisə edirdilər. Məsələn, Eyler hesab edirdi ki, "sərbəst çəkilmiş əyri xətlə" verilən funksiyalar sinfi analitik ifadələr ilə verilən funksiyalar sinfindən daha genişdir. Dalamber etiraz edirdi: ikisi də birdir. Daniel Bernulli isə daha da uzağa getdi: o dedi ki, sərbəst seçilmiş 2π-dövrlü funksiyanı belə bir triqonometrik sıra kimi göstərmək olar:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

Alimlərin çoxuna elə gəlirdi ki, bu funksiyaların dar bir sinfidir: o, analitik ifadələrdən dardır və əlbəttə ki, "sərbəst seçilmiş əyri xətlərdən" də dardır.

XIX əsrin əvvəlində funksiya anlayışının uyğunluq kimi başa düşülməsi meydana gəldi. Bu qaydaya görə funksiya X çoxluğundan olan sərbəst x dəyişəninin Y çoxluğunun y dəyişəninə "hər hansı üsulla" çevrilməsidir (bax "İnikas" məqaləsinə). Bu cür yanaşmanı daha da rahat başa düşmək üçün, bir neçə nümunə göstərək.

1. Məktəbdə hər bir şagird müəyyən bir sinifdə oxuyur. Əgər məktəbdə şagirdlərin sayını X çoxluğu kimi, Y isə siniflərin çoxluğunu göstərsək, onda demək olar ki, X çoxluğunun hər bir elementinə (yəni hər bir şagirdə) Y çoxluğunun yeganə elementi (yəni bu şagirdin oxuduğu sinif) qarşılaşdırılıb.

2. Verilmiş sinfin hər bir şagirdinə ilin axırında riyaziyyata görə müəyyən qiymət yazılır. Əgər X ilə sinifdəki şagirdlərin sayını, Y ilə 2-dən 5-ə kimi tam ədədlərin çoxluğunu işarə etsək, onda demək olar ki, X-dən hər bir elementə Y-dən yeganə bir element qarşı qoyulub.

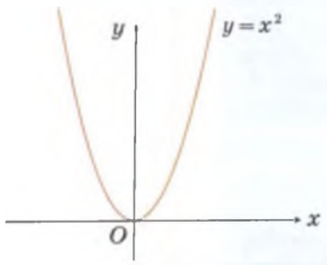
3. Əgər X ilə bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu, Y ilə isə – bütün mənfi olmayan ədədlər çoxluğunu göstərsək, onda $y=x^2$ düsturu belə bir qayda verir ki, hər x-ə, x-in kvadratına bərabər olan yeganə y qarşılaşdırılır (şəkil 2).

Göstərilmiş nümunələrdə fərqlərə baxmayaraq, aşağıdakı ümumidir: bizə iki çoxluq verilib və bir çoxluğun hər elementinə başqa çoxluğun yeganə elementi bu və ya digər qayda (üsul, qanun) ilə qarşılaşdırılıb. Beləliklə, biz funksiyanın ümumi tərifinə gəlirik. Tutaq ki, X və Y – hansısa çoxluqlardır. Əgər X çoxluğundan hər bir x-ə müəyyən f qayda (üsul, qanun) ilə Y çoxluğundan yeganə y elementi qarşı qoyulubsa, onda deyirlər ki, X çoxluğunda f funksiyası (Y-də yerləşən qiymətlər ilə) verilib (ya da təyin olunub). X çoxluğunu – f funksiyasının təyin oblastı, Y çoxluğunu isə – f-in qiymətlər oblastı adlandırırlar. x-ə uyğun olan $y \in Y$ funksiyanın x nöqtəsində qiyməti adlanır və $y=f(x)$ kimi göstərilir.

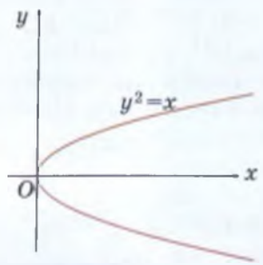
Məktəblərdə ədədi funksiyaları – həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin edilmiş və həqiqi ədədlər çoxluğunda qiymətlər alan funksiyaları öyrənirlər. Həmçinin $y=f(x)$ funksional asılılığı aşkar şəkildə (analitik ifadə ilə) verilir. Məsələn: $y=x^2$, $y=x^3$, $y=\sqrt{x}$, $y=\sin x$ və s. Birinci, ikinci və dördüncü funksiyalar $\mathbf{R}$ həqiqi ədədlər çoxluğunda təyin ediliblər, üçüncü isə bütün mənfi olmayan $\mathbf{R}_+$ ədədlər çoxluğunda təyin edilib.

Yuxarıda göstərilmiş tərif tələb edir ki, funksiyanın təyin oblastından hər bir x-ə y-in yeganə qiyməti uyğun olsun. Məsələn, 3-cü şəkildə göstərilmiş qrafik heç bir funksiyanı müəyyən etmir. Burada Y çoxluğundan y-in eyni qiyməti x arqumentinin mümkün qiymətlərindən ya bir neçəsinə uyğundur, ya da heç birinə də müvafiq deyil (şəkil 2). Əgər, Y çoxluğundan hər y X çoxluğundan yeganə x ilə tutuşdurulubsa ($y=f(x)$), onda Y çoxluğunda belə bir f^{-1} funksiyasını təyin etmək olar: $x=f^{-1}(y)$.

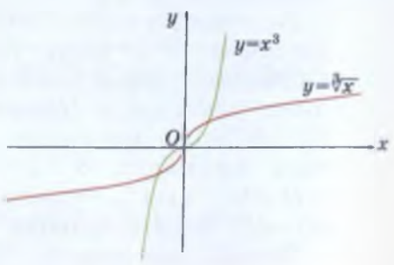
Bu funksiya f-in tərs funksiyası adlandırılır. $\mathbf{R}$ çoxluğunda verilmiş $y=x^3$ funksiyasının tərsi $x=\sqrt[3]{y}$ olacaq, $\mathbf{R}_+$ çoxluğunda $y=\sqrt{x}$ funksiyası üçün tərs funksiya $x=y^2$ olur. Funksiyanın arqumentini x ilə işarə etmək qəbul olunduğundan, $x=\sqrt[3]{y}$ yerinə, $y=\sqrt[3]{x}$ yazırlar. Beləliklə, $y=x^3$ və $y=\sqrt[3]{x}$ $\mathbf{R}$-də qarşılıqlı tərs funksiyalardır (şəkil 4), $y=x^2$ və $y=\sqrt{x}$ $\mathbf{R}_+$-də qarşılıqlı tərs funksiyalardır (şəkil 5). Əgər qiymətlər çoxluğu $Y=[-1;1]$ parçası olan $y=\sin x$ funksiyasına



Şəkil 2.



Şəkil 3.

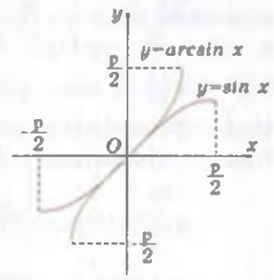


Şəkil 4.

$X=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ parçasında baxsaq, onun tərs funksiyası $y=\arcsin x$ olacaq (şəkil 6). Oxşar olaraq, digər tərs triqonometrik funksiyalar təyin olunur.



Şəkil 5.



Şəkil 6.

Funksiyanın yuxarıda göstərilmiş tərifi, bünövrəsi Georq Kantor tərəfindən qoyulmuş çoxluqlar nəzəriyyəsinin konsepsiyalarına əsaslanır (bax "Çoxluq və onun elementləri" məqaləsinə). Bu konsepsiyalar onun müasirlərinə böyük bir təsir göstərmişdir. Bütün dövrlərin ən dahi riyaziyyatçılarından biri David Hilbert çoxluqlar nəzəriyyəsi haqqında bunu deyib: "Mən hesab edirəm ki, o riyazi dahiliyin ən yüksək göstəricisidir və insanın mənəvi həyatında ən böyük nailiyyətidir". Həmçinin əlavə etmək lazımdır ki, indiki zamanın, demək olar ki, bütün riyazi əsərləri bu və ya başqa dərəcədə çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından və simvolikasından istifadə edirlər.

Amma çoxluqlar nəzəriyyəsinin konsepsiyalarının olduqca cürətli istifadə edilməsi paradokslara gətirirdi. Bir çox riyaziyyatçılar nəzəri-çoxluq anlayışların istifadə edilməsinə məhdudliyyətlər qoyulması haqda danışmağa başladılar. Onlar, xüsusilə funksiya anlayışına "konstruktivlik" tələbinin qoyulması fikrini irəli sürürdülər. Bu o demək idi ki, tərifdə verilmiş x-ə görə y-i tapmaq üçün aydın qaydalar (və ya indi deyildiyi kimi, alqoritmlər) qoyulmalı idi. Və nəticədə çoxluqlar nəzəriyyəsinin geniş istifadəsinə etiraz edən riyaziyyatda bir neçə istiqamət yarandı.

KƏSİLMƏZ VƏ KƏSİLƏN FUNKSİYALAR

Birdəyişənli funksiyalar arasından, qrafiki, qələmi kağızdan ayırmadan çəkilə bilən funksiyaları ayırmaq təbii görünür. Məsələn, 1-ci şəkildə göstərilmiş $y=f(x)$ funksiyası belədir.

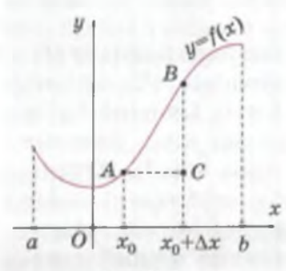
Müəyyən edilmiş x_0 nöqtəsi üçün $(a<x_0<b)$ başqa, ona yaxın olan nöqtəni $x_0+\Delta x$ kimi göstərirlər. Δx qiyməti ("delta iks" kimi oxunur) arqumentin artımı adlandırılır. Əgər yaxın nöqtə x_0 nöqtəsindən sağda yerləşsə, bu qiymət müsbətdir, əgər x_0 nöqtəsindən solda yerləşirsə, onda qiymət mənfidir. $x_0+\Delta x$ və x_0 nöqtələrində funksiyanın qiymətlərinin fərqi arqumentin Δx artımına uyğun funksiyanın artımı adlandırılır və Δy kimi göstərilir ("delta iqrek" kimi oxunur), yəni

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

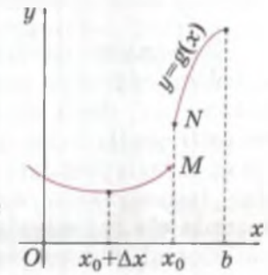
1-ci şəkildə funksiyanın artımı BC parçasının uzunluğuna bərabərdir. Əgər arqumentin artımı "0"-a yaxınlaşırsa, onun müsbət və ya mənfi olmağından asılı olmayaraq, funksiyanın artımı da "0"-a yaxınlaşır: $\Delta x \to 0$ olduqda $\Delta y \to 0$ olduğunu belə ifadə edirlər: Δy qiymətinin limiti Δx "0"-a yaxınlaşanda "0"-a bərabərdir:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

2-ci şəkildə $[a,b]$ parçasının hər bir nöqtəsində təyin edilmiş $y=g(x)$ funksiyasının qrafiki göstərilib. O iki kəsilməz fraqmentdən ibarətdir və x_0 nöqtəsində "sıçrayış" alır (x_0 nöqtəsində funksiyanın qiyməti N nöqtəsindən x_0 nöqtəsinə qədər parçanın uzunluğuna bərabərdir). Belə qrafiki karandaşı ayırmadan çəkmək mümkün deyil və ona görə onu kəsilən kimi adlandırmaq təbiidir. "Sıçrayış" nöqtəsinin yaxınlığında



Şəkil 1.



Şəkil 2.

$y=g(x)$ funksiyasının davranışı necədir? Əgər arqumentin artımı müsbət qalmaqla "0"-a yaxınlaşırsa, funksiyanın artımı da "0"-a yaxınlaşır. Əgər Δx mənfi qalmaqla "0"-a yaxınlaşırsa, onda funksiyanın artımı MN parçasının uzunluğuna bərabər olan qiymətə yaxınlaşır. Beləliklə, əgər Δx "0"-a "hər hansı üsul ilə" yaxınlaşırsa, onda $y=g(x)$ funksiyanın artımı nə 0, nə də $|MN|$-ə yaxınlaşmır (Δx 0-a yaxınlaşdıqda Δy-in limiti yoxdur).

Tutaq ki, $y=f(x)$ funksiyası $[a,b]$ parçasında təyin edilib və $a < x_0 < b$. Arqument artımı 0-a hər hansı tərzdə yaxınlaşdıqda funksiya artımı 0-a yaxınlaşırsa, $f(x)$ funksiyasına x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya deyilir.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x)\big) = 0 \ (*)$$

Əgər $x = x_0 + \Delta x$ göstərsək və həmçinin $\Delta x \to 0$ şərti ilə $x \to x_0$ olduğunu nəzərə alsaq, onda (*) bərabərliyini belə bir şəkildə yazmaq olar:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

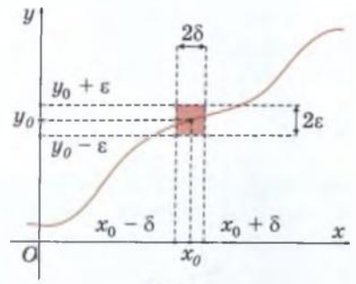
Başqa sözlə desək, əgər funksiyanın x_0 nöqtəsində limiti varsa və bu limit x_0 nöqtəsində funksiyanın qiymətinə bərabərdirsə, onda funksiya bu nöqtədə kəsilməzdir.

$(a;b)$ aralığının bütün nöqtələrində kəsilməz olan funksiyaya bu aralıqda kəsilməz funksiya deyilir. Eyni qayda ilə $[a;b]$ parçasında da kəsilməzliyin tərifi verilir. Bu zaman $x=a$ nöqtəsində $f(x)$-in kəsilməzliyi $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ \Delta x>0}} f(x) = f(a)$ (sağdan kəsilməzlik) kimi, $x=b$ nöqtəsində isə $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ \Delta x<0}} f(x) = f(b)$ (soldan kəsilməzlik) kimi başa düşülür.

"ε – δ" DİLİNDƏ KƏSİLMƏZLİYİN TƏRİFİ

İlk vaxtlar, kəsilməz funksiyanı qrafiki, qələmi kağızdan ayırmadan "əlin sərbəst hərəkəti ilə" (belə bir tərifi Leonard Eyler demişdi) çəkilə bilən olması kimi təsəvvür etmək riyaziyyatçıları qane edirdi. Araşdırılan funksiyaların sayı artdıqca – onlar arasında elə funksiyalar var idi ki, onların qrafiklərini qurmaq mümkün deyildi – kəsilməzlik anlayışı daha dəqiq olmağı tələb edirdi. Ogüsten Koşi tərəfindən funksiyanın limiti anlayışı verildikdən sonra kəsilməzlik anlayışı dəqiqləşdi (1820-ci ilə yaxın). Onun istifadə etdiyi üsulu, çox vaxt "ε – δ" dili adlandırırlar ("epsilon-delta" oxunur).

Koşiyə görə, istənilən qədər kiçik müsbət ε ədədi üçün elə $\delta > 0$ ədədi tapmaq olarsa, $|\Delta x| < \delta$ şərtini ödəyən x-lər üçün $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olur, onda x_0 nöqtəsinin daxil olduğu aralıqda təyin edilmiş $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməzdir (şəkil 3).



Şəkil 3.

Kəsilməzliyin bu tərifini istifadə etmək üçün müəyyən təcrübə lazımdır. Amma bu tərif hər konkret funksiyanın kəsilməz olub-olmadığını araşdırmağa imkan verir. $y=\sin x$ funksiyasının bütün x_0 nöqtələrində kəsilməz olduğunu isbat edək: $\sin x$ funksiyasının bir xassəsindən istifadə edək: hər hansı x üçün $|\sin x| \le |x|$ (bax "Elementar funksiyalar və onların xassələri" məqaləsinə)

$$\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0 = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

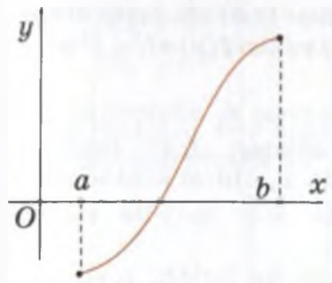
və istənilən x üçün $|\cos x| \le 1$ olduğuna görə, funksiyanın qiymətləri fərqinin modulu belə qiymətləndirilir:

$$|\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0| \le 2|\Delta x/2|\cdot 1 = |\Delta x|$$

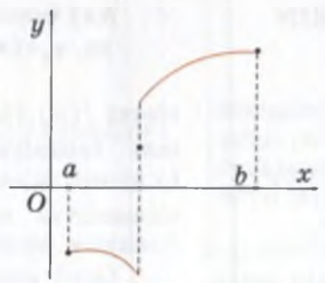
Tutaq ki, istənilən qədər kiçik $\varepsilon > 0$ ədədi verilib. Onda biz $\delta = \varepsilon$ seçə bilərik və aydındır ki, $|\Delta x| < \delta$ olduqda:

$$|\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0| \le \Delta x < \delta = \varepsilon$$

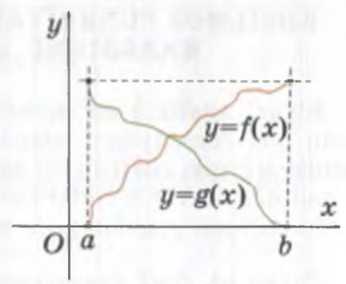
Oxşar mühakimələrlə bütün elementar funksiyaların kəsilməz olduğunu isbat edirlər. Məsələn, x^3 funksiyası bütün ədəd düz xəttində kəsilməzdir, $\log_2 x$ funksiyası $x > 0$ olduqda kəsilməzdir, $\operatorname{tg} x$ funksiyası isə $(-\pi/2, +\pi/2)$ intervalında kəsilməzdir.



Şəkil 4.



Şəkil 5.



Şəkil 6.

KƏSİLMƏZ FUNKSİYALAR

Verilmiş nöqtədə kəsilməz funksiyaların cəmi, fərqi və hasili bu nöqtədə kəsilməz funksiya olur. Kəsilməz funksiyaların qismət isə verilmiş nöqtədə məxrəc sıfra bərabər deyilsə, kəsilməz sayılır. Bu və ya başqa funksiyanın kəsilməz olub-olmadığının araşdırılmasına kömək edən başqa teoremlər də məlumdur.

Parçada kəsilməz olan funksiyalar xüsusi bir sinfə ayrılırlar. Onların bir sıra çox gözəl xüsusiyyətləri var. Məsələn, parçada kəsilməz olan funksiya onun uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, bu parçanın daxilində heç olmasa bir nöqtədə sıfıra çevrilir (şəkil 4). Bu fikir bizə aydın gəlir və arasıkəsilməyən əyri xətlər haqqında intuitiv təsəvvür ilə tamamilə üst-üstə düşür. Bir tərəfindən başqa tərəfinə keçəndə belə bir əyri xətt Ox oxunu mütləq kəsəcək. Əksinə, 5-ci şəkildə təsvir edilmiş arasıkəsilən xətt üçün bunu demək olmaz.

Parçada kəsilməz funksiya haqqında yuxarıda göstərilmiş teoremin ciddi riyazi isbatı ilk dəfə çex riyaziyyatçısı Bernard Boltsano (1781-1848) tərəfindən verilmişdir. O riyaziyyatın gələcək inkişafı üçün belə bir vacib faktı kəşf etdi ki: funksiyanın kəsilməzliyini araşdırmaq üçün funksiyanın verildiyi çoxluğun arasıkəsilməyən olmasını araşdırmaq lazımdır. Ədədi oxun parçası elə arasıkəsilməyən çoxluqdur (onun "deşikləri" yoxdur) və isbat edilən fikirin əsasında elə bu fikir dayanıb.

Boltsano teoreminin köməyi ilə, belə bir əyləncəli və maraqlı məsələni həll etmək olar. Bir səyahətçi səhər saat 9-da dağa dırmaşmağa başladı və axşam saat 6-da zirvəyə çatdı. Zirvədə gecələyərək, o növbəti gün düz səhər saat 9-da eyni yol ilə düşməyə başladı və axşam saat 6-da ətəkdə yerləşən mövqeyinə çatdı. Səyahətçinin birinci və ikinci günün eyni anında eyni bir yerdə yerləşməsi haqqında fikir düzdürmü?

Biz $y=f(x)$ qalxma qrafiki və $y=g(x)$ düşmə qrafikini çəkək (burada y – hündürlük, x – vaxt, şəkil 6) və onların arasıkəsilməyən əyri xəttlər olduğunu nəzərə alaq və o zaman biz müsbət cavab alarıq. Səyahətçinin marşrutunu təsvir edən $f(x) - g(x)$ qiymətlərin fərqi $[a,b]$ parçasının uclarında müxtəlif işarələr alır və Boltsano teoreminə görə, kəsilməz olduğundan $[a,b]$ parçasının hansısa nöqtəsində 0-a çevrilir. Deməli, məhz bu nöqtədə (sutkanın eyni vaxtında) funksiyalar eyni qiymətlərə malik olacaqlar və səyahətçi dırmaşma və düşmə zamanı eyni nöqtədə yerləşəcək.

Oxşar mühakimələr bizə, məsələn, $x - \cos \pi x = 0$ tənliyinin $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ parçasında yerləşən kökünün olduğunu və ya istənilən a, b, c üçün $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ üçdərəcəli tənliyin ən azı bir kökü olduğunu isbat etməyə imkan verir.

Riyazi analizdə araşdırılan funksiyaların əsas sinfini kəsilməz funksiyalar təşkil edirlər və onlar riyaziyyatın tətbiqlərində son dərəcə vacib rol oynayırlar. Onların köməyi ilə bərk cisimlərdə, mayelərdə, qazlarda müxtəlif dəyişilən hallar və proseslər təsvir edilir. Bu prosesləri təhlil edən elmlər – möhkəmlik nəzəriyyəsi, hidrodinamika, aerodinamika – uyğun mühitin kütləsinin onun tutduğu həcmdə boşluqlar olmadan yerləşməsi fərziyyəsinə əsaslanırlar. Adları çəkilən fənlər "Bütöv mühit mexanikası" adı altında birləşdirilir.

KƏSİLMƏZ FUNKSİYALARIN XASSƏLƏRİ

Riyazi analizin ən mühüm anlayışlarından biri funksiyanın limiti anlayışıdır. Bu anlayış riyazi analizin bir çox məsələlərinin həllində ən vacib rollardan birini oynayır. Bu anlayışı yenidən yada salaq.

✓ **Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası (a,b) aralığında təyin olunmuşdur. $\varepsilon>0$ üçün elə $\delta>0$ tapmaq olarsa ki, $|x-x_0|<\delta$ şərtini öbəyən bütün x–lər üçün $(x \neq x_0)$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənərsə, deyilir ki, $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti A–dır.**

Qeyd edək ki, $f(x)$ funksiyasi x_0 nöqtəsində təyin olunmayada bilər. Tərifdən göründüyü kimi $f(x)$ funksiyasının limiti x_0–da A–ya bərabərdirsə həmin nöqtədə $f(x)$ funsiyası təyin olunarsa, belə $f(x_0)$ ədədi A–dan fərqli ola da bilər. Məsələn

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$$

Aydındır ki, $\lim f(x)=0$, cünki $x\neq 0$ olduqda

$$x\to 0$$

$$|f(x)|=\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\le |x|<\varepsilon,$$

$\delta=\varepsilon$ olduqd $|f(x)|<\varepsilon$ bərabərsizliyi $(-\varepsilon,\varepsilon)$ aralığında, $x_0=0$ nöqtəsindən başqa, bütün nöqtələrdə ödənir, lakin $f(x_0)=1$ olduğundan $1<\varepsilon$ bərabərsizliyi istənlən $\varepsilon>0$ üçün (məsələn $\varepsilon=\frac{1}{2}$) ödənmir.

Lakin

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

olan hal xüsusi əhəmiyyət kəsb edir və bu funksiyanın kəsilməzlik anlayışını ifadə edir.

✓ **$f(x)$ funksiyası (a,b)–də təyin olunubsa, $x_0\in(a,b)$ və $\lim f(x)=f(x_0)$ $x\to x_0$**

olarsa $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz funksiya adlanır. $f(x)$ funksıyası (a,b)–nin istənilən $x_0\in(a,b)$ nöqtəsində kəsilməzdirsə onda ona (a,b)–də kəsilməz funksiya deyilir.

Qeyd edək ki, bu tərifdə $x\to x_0$–a yaxınlaşdıqa $x=x_0$ qiymətini də ala bilər.

Funksiyanın x_0 nöqtəsində kəsilməzliyin tərifindən alınır ki, x_0 nöqtəsində onyun hər hansi bir $\Delta x_0=x-x_0$ artımını götürsək, arqumet artımı istənilən qədər kiçik olduqda, onda onun $f(x_0)$ nöqtəsindəki artımi da

$$\Delta f_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

istənilən qədər kiçik olar.

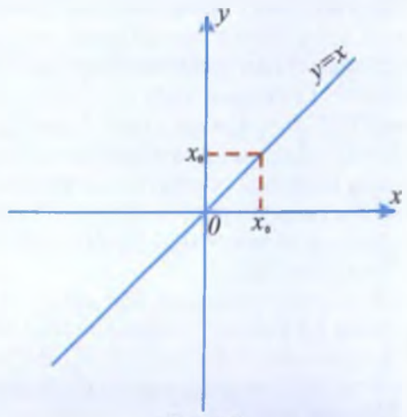
İndi biz kəsilməzliyin tərifini bərabərsizliklərlə verək.

✓ **$\forall\varepsilon>0$ üçün elə $\delta>0$ tapmaq olarsa ki, $|x-x_0|<\delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün x–lər üçün $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ olarsa $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz adlanır.**

$f(x)=x$ funsiyasının istənilən $x_0\in R$–də kəsilməz olduğunu göstərək.

Həqiqətən də $\forall\varepsilon>0$ üçün elə $\delta>0$ tapaq ki, $|x-x_0|<\delta$ olduqda $|f(x)-f(x_0)|=|x-x_0|<\varepsilon$ olsun. Aydındır ki, $\delta=\varepsilon$ götürmək kifayətdir.

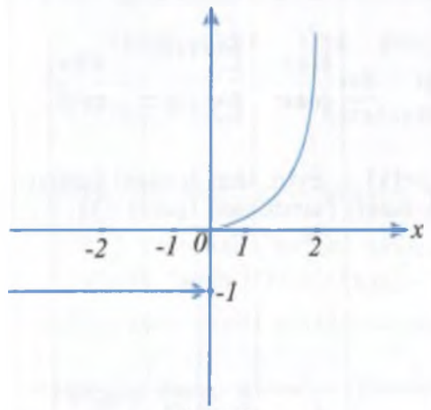
Qrafikdən göründüyü kimi (şəkil 7) onun qrafiki bütöv düz xətdir.



Şəkil 7.

$$f(x)\begin{cases} x^2, & x\ge 0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

Bu funksiya $x=0$ nöqtəsində kəsilməz deyil (kəsiləndir) (şəkil 8).



Şəkil 8.

Həqiqətən də $\forall\varepsilon>0$ götürsək istənilən $\delta>0$ üçün $(-\delta,\delta)$ ətrafından olan x–lər üçün

$$|f(x)-f(x_0)|=|f(x)-0|=|f(x)|<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənmir. Həqiqətən istənilən $(-\delta,\delta)$ intervalından olan istənilən x üçün $|f(x)-0|=|-1|=1<\varepsilon$ bərabərsizliyi $\varepsilon<1$ şərtini ödəyən ε–lar üçün ödənmir. Bu funksiyanın qrafikini qursaq, görərik ki, onun qrafiki $x_0=0$ nöqtəsində "kəsilmişdir", yəni bütov bir xətt təşkil etmir.

$f(x)=x^n$–in istənilən x_0 nöqtəsində kəsilməz olduğunu göstərək

Doğrudanda

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} x^n=\lim_{x\to x_0}(x\cdot x\ldots x)=$$

$$=\lim_{x\to x_0} x\cdot\lim_{x\to x_0} x\ldots\lim_{x\to x_0} x=\underbrace{x_0\ldots x_0}_{n}=x_0^n$$

İstənilən n–dərəcəli çoxhədli

$$p(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,\quad x_0\in R$$

–də kəsilməzdir. Doğrudan da

$$\lim_{x\to x_0} p(x)=\lim_{x\to x_0}(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n)=$$

$$=\lim_{x\to x_0} a_0+\lim_{x\to x_0} a_1x+\ldots+\lim_{x\to x_0} a_nx^n=$$

$$=a_0+a_1x_0+\ldots+a_1x_0^n=p(x_0)$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

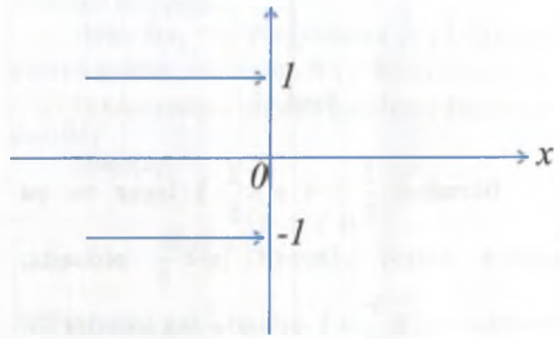
Aydındır ki, $x>0$ olduqda $f(x)=\frac{x}{x}=1$, $x<0$ olduqda isə $f(x)=\frac{-x}{x}=-1$ olur. Bu isə onu göstərir ki $x_0=0$-da $f(x_0)=0$ qiyməti 0–ın istənilən ətrafındakı qiymətindən mütləq qiymətcə 1 vahid fərqlidir. Deməli, $\varepsilon<1$ olarsa

$$x\neq x_0,\ |f(x)-f(x_0)|=|\pm 1-0|=1<\varepsilon$$

bərabərsizliyi ödənməz. Bu funksiya bəzən

$$sign x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases}$$

"signum iks" kimi səslənir, və x–in işarəsını müəyyəri edir (şəkil 9 onun qrafikidir).



Şəkil 9.

Görunduyu kimi $x=0$ nöqtəsində funksiyanın qrafiki "sıçrayısa" malikdir.

$f(x)=\sin x$ funksiyası istənilən $x=x_0$ nöqtəsində kəsilməzdir.

Doğurdan da

$$|\sin x-\sin x_0|=2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|,$$

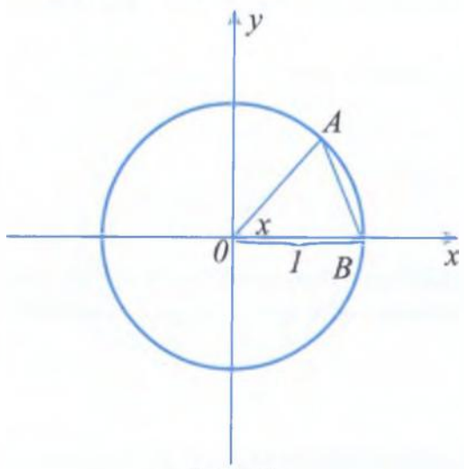
$\left|cos\frac{x+x}{2}\right| \le 1$, $\left|sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le \frac{|x-x_0|}{2}$

olduğundan $|sinx - sinx_0| < 2\frac{|x-x_0|}{2} < \varepsilon$

bərabərsizliyi $\delta=\varepsilon$ olduqda, yəni $|x-x_0|<\varepsilon$ olduqda həmişə doğrudur.

Qeyd. $\forall x\in R$ üçün $|sinx|\le|x|$ olduğu aşağıdakı mühakimələrdən görünür. Tutaq ki, $0 \le x < \frac{\pi}{2}$. Onda

$S_{SEKOAB} > S_{\Delta OAB}$ (şəkil 10).



Şəkil 10.

Buradan $\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot x > \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 sinx$ və ya $sinx<x$ alarıq. Deməli $|x| < \frac{\pi}{2}$ olduqda, $|sinx|\le|x|$. $|x| \ge \frac{\pi}{2} > 1$ olduqda isə $|sinx|\le 1\le|x|$ bərabərsizliyi həmişə doğrudur.

y=cosx funksiyasının kəsilməz funksiya olduğunu göstərək.

Doğrudan da $\forall x_0\in R$ üçün

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \le$$

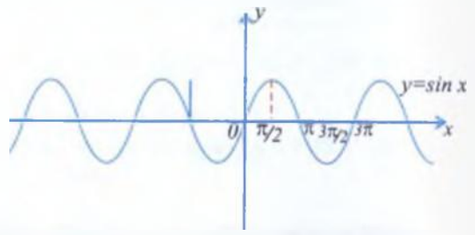
$$\le 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| \le |x-x_0| < \varepsilon.$$

Deməli, verilən $\varepsilon>0$ üçün $\delta=\varepsilon$ götürmək kifayətdir.

$y=tgx$ funksiyası $x_0 \ne \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k\in Z$ nöqtələrində kəsilməzdir. Doğrudan da

$$\lim_{x\to x_0} tgx = \lim_{x\to x_0}\frac{sinx}{cosx} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} sinx}{\lim\limits_{x\to x_0} cosx} = \frac{sinx_0}{cosx_0} = tgx_0$$

$y=[x]$ – x-in tam hissəsi (arqumentin tam hissəsi) funksiyası (şəkil 11). Aydındır



Şəkil 11.

ki, bu funksiya $(n,n+1)$, $(n\in Z)$ aralıqlarında sabit qiymətlər alır, $x_0=n$ nöqtələrində isə "sıçrayısa" malikdir.

Bu onun qrafikindən daha aydın görünür $(n,n+1)$ $\forall n\in Z$ aralıqlarında bu funksiya kəsilməzdir, çünki bu aralıqlarda o sabitdir: $[x]=n$. Lakin $x_0=n$ nöqtəsində $[x_0]=n$, $\delta>0$ kifayət qədər kiçik olduqda $[x_0+\delta]=n=[x_0]$, $[x_0-\delta]=n-1$. Deməli, $x_0=n$ nöqtələrində funksiya kəsilməndir.

$y=\{x\}=x-[x]$ – x-in (arqumentin) kəsr hissəsi) funksiyası. Aydındır ki, $y=\{x\}$ istənilən $(n,n+1)$, $n\in Z$ aralıqlarında kəsilməz, lakin $x_0=n$ nöqtələrində isə kəsiləndir.

Dirixle funksiyası

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x - irrasional\ olduqda \\ 0, & x - rasional\ olduqda \end{cases}$$

Bu funksiya istənilən $x_0\in R$-də kəsilən-dir. Doğrudan da $\delta>0$ ədədi istənilən ədəd olduqda $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ aralığında həm rasional, həm də irrasional ədəd var. Doğrudan da x_0-rasional ədəd isə $x_0 + \frac{\sqrt{2}}{n}$ ədədi $n\in N$, və n-in kifayət qədər böyuk qiymətlərində ($x_0-\delta$, $x_0+\delta$) intervalında yerləşir (Bunun üçün $\frac{\sqrt{2}}{n}<\delta$ götürmək kifayətdir). Lakin $x_0+\frac{\sqrt{2}}{n}$ – irrasionaldır. Ona görə də $\left|D(x_0+\frac{\sqrt{2}}{n}) - D(x_0)\right| = 1 < \varepsilon$ bərabərsizliyi $\varepsilon < \frac{1}{2}$ olduqda ödənmir. x_0-irrasional ədəd olarsa elə $\{r_n\}$ rasional ədədləri ardıcıllığı var ki, $|r_n-x_0|<\delta$. Onda $|D(r_n) - D(x_0)| = 1 < \varepsilon$ bərabərsizliyi, yenə də $\varepsilon<1$ olduqda ödənmir.

Göstərək ki, $y = a^x$ funksiyası $\forall x_0\in R$-də kəsilməzdir.

Doğrudan da $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, olduğunu göstərməliyik. Tutaq ki, $a>1$.

$$a^x - a^{x_0} = a^{x_0}\cdot(a^{x-x_0} - 1),$$

lakin $\lim\limits_{h\to 0} a^h = 1$ olduğundan $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$

$f(x)=xD(x)$ funksiya (burada $D(x)$– Duxle funksiyasıdır) yalnız $x=0$ nöqtəsində kəsilməzdir.

Doğrudan da $x_0=0$-da $f(0)=0\cdot D(0)=0$, və $|D(x)|\le 1$ olduğundan $|f(x)| \le |x|\cdot|D(x)| \le$ $\le |x|$, $|x| < \varepsilon$ olduqda $|D(x)|<\varepsilon$ olar ($\delta=\varepsilon$), yəni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$.

Lakin istənilən $x_0\ne 0$ nöqtəsində bu funksiya kəsiləndir (bunu müstəqil isbat edin).

Funksiyanın kəsilmə nöqtələri üç növə ayrılır

1) Əgər $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ olarsa $A\ne f(x_0)$ isə onda $f(x)$-i x_0-da $f(x_0)=A$ kimi təyin etməklə alınan funksiya x_0 nöqtəsində kəsilməz olar.

Belə nöqtələr aradan qaldıra bilən kəsilmə nöqtələri adlanır.

Məsələn.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sinx}{x}, & x \ne 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

Aydındır ki, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$, və $f(0)=2\ne 1$ əgər $f(0) = 1$ kimi təyin etsək bu funksiya $x_0=0$-da kəsilməz olar.

2) $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0+0)$ (sağ limit)

və

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0-0)$ (sol limit)

varsa və $f(x_0+0)\ne f(x_0-0)$ isə onda x_0 nöqtəsi $f(x)$-in birinci növ kəsilmə nöqtəsi adlanır və $f(x_0+0)-f(x_0-0)=r_0$ ədədinə funksiyanın x_0 nöqtəsində sıçrayışı deyilir .

Buradan alınır ki

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)$$

olarsa x_0 nöqtəsində funksiya ya kəsilməzdir ya da x_0 nöqtəsi aradan qaldırıla bilən kəsilmə nöqtəsidir.

Əgər $f(x_0-0)=f(x_0)$ olarsa $f(x)$ funksiyasına soldan kəsilməz, $f(x_0+0)=f(x_0)$ olarsa $f(x)$ funksiyasına sağdan kəsilməz funksiya deyilir.

Məsələn,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Bu funksiya x_0 nöqtəsində $f(x_0+0)=1$, $f(x_0-0)=-1$ olduğu üçün x_0 birinci növ kəsilmə nöqtəsidir, funksiya x_0 nöqtəsində sağdan kəsilməzdir: $f(x_0+0)=f(x_0)=1$

3) Əgər x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının limiti yoxdursa və ya $\lim f(x) = \pm\infty$ olarsa onda bu nöqtə ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir.

Məsələn, istənilən x_0 nöqtəsində, $D(x)$– Dirixle funksiyasının limiti olmadığına görə x_0 onun üçün ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

funksiyasi üçün $\lim f(x)=\infty$ olduğundan 0 nöqtəsi ikinci növ $^{x\to 0}$ kəsilmə nöqtəsidir.

$f(x)$ funksiyası $[a,b]$–də təyin olunubsa, onun a və b nöqtələrində kəsilməzliyi

$$f(a+0)=f(a)$$
$$f(b-0)=f(b)$$

kimi təyin edilir.

Funksiyanın limitinin tərifində olduğu kimi funksiyanın kəsilməzliyinin də ardıcıllıqlar vasitəsilə tərifini vermək olar.

✓ **x_0–a yığılan və $f(x)$–in təyin oblastından olan istənilən $\{x_n\}$ ardıcılığı üçün $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0)$ olarsa $f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində kəsilməz adlanır.**

Kəsilməzliyin hər iki tərifi ekvivalentdir.

Buradan alınır ki, əgər $f(x)$ və $g(x)$ funksiyaları x_0 nöqtəsində kəsilməzdirsə, onda

1) $f(x)+g(x)$,

2) $f(x)-g(x)$,

3) $\kappa\cdot f(x)$,

4) $f(x)\cdot g(x)$,

5) $\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\neq 0)$

funksiyaları da x_0 nöqtəsində kəsilməzdirlər.

Əgər $y=f(x)$ funksiyası x_0 nöqtəsində, $g(y)$ funksiyası $y_0=f(x_0)$–da kəsilməzdirsə onda $g(f(x))$ funksiyası da x_0 nöqtəsində kəsilməzdir. Buna, bəzən mürəkkəb funksiyanın kəsilməzliyi haqqında teorem də deyilir. Məsələn, $f(x)=\sin x^2$ funksiyası kəsilməzdir, çünki $\sin x$ və x^2 funksiyalarının hər ikisi kəsilməzdir.

KƏSİLMƏZ FUNKSİYALAR HAQQINDA BƏZİ TEOREMLƏR

1^0 Monoton funksiyalar haqqında. $f(x)$ funksiyası $[a,b]$ aralığında təyin olunubsa və istənilən $x_1\le x_2$ şərtini ödəyən nöqtələr üçün $f(x_1)\le f(x_2)$ isə, funksiya monoton azalmayan, $f(x_1)\ge f(x_2)$ şərtini ödəyirsə, monoton artmayan funksiya adlanır.

✓ **Monoton azalmayan (artmayan) funksiyanın yalnız birinci növ kəsilmə nöqtəsi ola bilər.**

Doğurdan da $x_0\in(a,b)$, (a,x_0) intervalından $\forall x$ üçün $f(x)\le f(x_0)$ və $x_n\in(a,x_0)$, $x_n\to x_0$, $f(x_n)\le f(x_0)$ olduğundan Beyerştras aksiomuna görə $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ var və

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0-0)\le f(x_0).$$

Əgər $f(x_0-0)=f(x_0)$ $x\in(x_0,b)$ onda o soldan kəsilməzdir.

Eyni qayda ilə $x\in(x_0,b)$ olduqda,

$f(x)\ge f(x_0)$ və $x_n\to x_0$, $x_n\in(x_0,b)$, $f(x_n)\ge f(x_0)$.

Onda bu $\lim_{n\to 0} f(x_n)=f(x_0-0)$ var.

Əgər $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ olarsa, funksiya x_0-nöqtəsində kəsilməz, əks halda isə kəsilən olar.

Bu teoremdən alınır ki, əgər $[a,b]$ parçasında təyin olunmuş monoton azalmayan (artmayan) funksiyanın qiymətlər çoxluğu hər hansı $[c,d]$ parçasını doldurursa, onda bu funksiya kəsilməzdir.

Doğrudan da $\forall x_0\in(a,b)$ nöqtəsində onun kəsilmə nöqtəsi varsa, o birinci növ olmalıdır. Yəni $f(x_0+0)$ və $f(x_0-0)$ var.

$x\le x_0$ olduqda $f(x)\le f(x_0)$, $x\ge x_0$ olduqda

$f(x)\ge \ge f(x_0)$. Əgər $f(x_0-0)<f(x_0)$

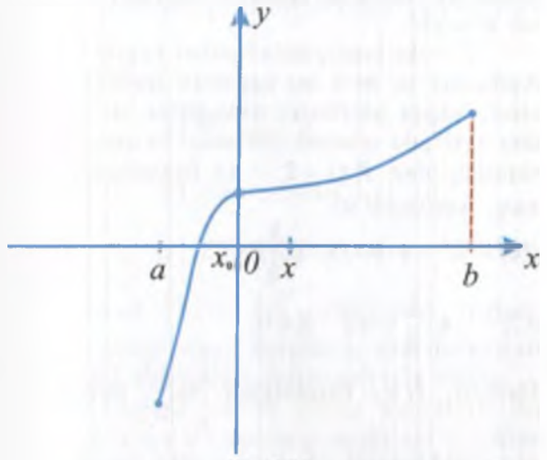
isə, yeni funksiya soldan kəsilməzsə, onda $f(x_0-0)<y<f(x_0)$ şərtini ödəyən y ədədini $f(x)$ funksiyası ala bilməz: bu isə onun qiymətlər çoxluğunun bütün $[c,d]$-ni doldurmağı şərtinə ziddir.

İndi isə çox böyük əhəmiyyəti olan Bolsano teoremini verək. Bolsano Bernard (1781–1848), rahib olmuş, və riyazi analizə ilk olaraq ciddi yanasmaları müəyyən edən alimlərdən biri olmaşdur.

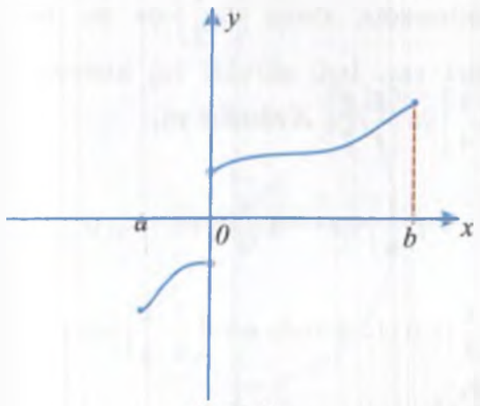
Onun 1850 ci ildə çap olunmuş əvəzsiz "Paradoxien des Unendlichen" kitabında ilk dəfə olaraq, kəsilməz funksiyalara aid bir çox hökmlərin ciddi islaha ehtiyacı olduğu göstərilmişdir.

Məsələn, çox aydın hesab edilən aşağıdakı teoremi göstərək.

✓ **y=f(x) funksiyası $[a,b]$ parçasında kəsilməzdirsə və bu parçanın uclarında müxtəlif işarəli qiymətlər alırsa, onda o, (a,b) aralığına daxil olan hec olmasa bir nöqtədə 0–a çevrilir.**



Şəkil 12.



Şəkil 13.

İntuitiv olaraq biz belə təsəvvür edirik ki $f(a)<0$, $f(b)>0$ isə onda kəsilməz əyri hər hansı $x_0\in(a,b)$–də absis oxunu kəsir $f(x_0)=0$ olur (şəkil 12,13).

Digər şəkildə isə kəsilən funksiya üçün bunun belə olmadığı göstərilir.

İndi isə Bolsano teoremini isbat edək.

$I=[a,b]$ parçasını iki bərabər hissəyə bölək və $x_1=\dfrac{a+b}{2}$ olsun. Bu nöqtədə $f(x_1)=0$ olarsa teorem isbat olunar. $f(x_1)\neq 0$ isə o sıfırdan böyük ya da kiçikdir. Hər iki halda $[a,x_1]$ və $[x,b]$ parçalarının biri üçün uclarda funksiyanın qiyməti müxtəlif işarəli olacaq. Tutaq ki, bu $[a,x_1]$ parçasıdır. Bu parçanı $I_1=[a_1x_1]$ işarə edək və onu da yarıya bölək: Tutaq ki x_2 nöqtəsi onun orta nöqtəsidir. $f(x_2)=0$ olarsa, teorom isbat olunar, $f(x_2)\neq 0$ isə onda $f(x_2)>0$ ya da $f(x_2)<0$. Onda $[a,x_2]$, $[x_2,x_1]$ parçalarının birinin uclarında $f(x)$ əks işarəli qiymətlər alar. Bu parçanı I_2 ilə işarə edək. İndi isə I_2–ni iki hissəyə bölüb bu prosesi davam etdirək. Beləliklə biz

$$I\supset I_1\supset I_2\supset\ldots\supset I_n\supset\ldots$$

parçalarını alırıq. Onda Kantor aksiomuna (əgər $I,I_1,\ldots,I_n\ldots$ parçalar ardıcıllığı $I\supset I_1\supset I_2\supset\ldots\supset I_n\supset\ldots$ şərtini ödəyərlərsə, onda bu parçaların hamısına daxil olan nöqtə var. Əgər $uzunluq\ (I_n)=\delta_n\to 0$, $n\to\infty$, isə bu nöqtə yeganədir) əsasən bu parçaların hamısına daxil olan bir x_0 nöqtəsi var. Göstərək ki, $f(x_0)=0$. Qeyd edək ki, biz, hələ ki, $f(x)$ funksiyasının kəsilməzliyindən istifadə etməmişik.

Tutaq ki, $f(x_0)\neq 0$. Məsələn, $f(x_0)=2\varepsilon>0$. $f(x)$ funksiyası kəsilməz olduğundan biz elə bir $O_\delta(x_0)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ infervalı tapa bilərik ki, bu infervalda

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

yəni

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Deməli $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ – üçün

$$\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

Onda, $[x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]$ parçasında da $f(x)>\varepsilon$ olar. Lakin n kifayət qədər böyük olduqda $[x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]\supset I_n$. Lakin, I_n parçasının uclarında $f(x)$ müxtəlif qiymət aldığından $f(x)$ funksiyası $[x_0-\delta/2, x_0+\delta/2]$ parçasında müsbət ola bilməz. Deməli ziddiyyət aldıq. Eyni qayda ilə $f(x_0)<0$ halına da baxılır.

Teorm isbat olundu.

Bu teoremdən aşağıdakı nəticə alınır.

Nəticə $f(x)$ *funksiyan* $[a,b]$ də kəsilməzdirsə, $f(a)<f(b)$ və $f(a)<c<f(b)$ onda elə $x_0\in(a,b)$ var ki, $f(x_0)=c$.

İsbat üçün $g(x)=f(x)-c$ funksiyasına baxmaq kifayətdir.

İndi isə intutiv aydin olan bir teoremi də isbat edək.

✓ **$f(x)$ funksiyasi $[a,b]$ aralığında təyin olnul kəsilməzdirsə o məhduddur; yəni elə m, M ədədləri varki, $m\le f(x)\le M$.**

Əksini fərz edək: Tutaq ki, elə $x=x_n\in[a,b]$ var ki, $|f(x_n)|\ge n$. Onda Bolsano – Veyerştrass lemmasına əsasən $\exists x_{n_\kappa}\in\{x_n\}$ var ki $x_{n_\kappa}\to x_0$. Buradan funksiyanın kəsilməzliyinə görə $f(x_{n_\kappa})\to f(x_0)$, $\kappa\to\infty$, alınır.

Lakin $|f(x_{n_\kappa})|\ge n_\kappa$ olduğundan $f(x_{n_\kappa})\to\infty$, $\kappa\to\infty$. Ziddiyyət aldıq. Teorm isbat olundu.

✓ **(Veyerştras). $f(x)$ funksiyasi $[a,b]$–də təyin olunub, kəsilməzdirsə özünün ən böyük və ən kiçik qiymətlərin bu parçadakı nöqtələrdə alır, yəni elə $x_0, x_1\in[a,b]$ var ki, $f(x_0)$ onun ən böyük, $f(x_1)$ isə ən kicik qiyməti olur.**

Bu teoremin isbatını da Bolsano teoreminin isbatına analoji vermək olar (bunu sizə tapşırırıq).

Qeyd edək ki, $f(x)$ qapalı $[a,b]$–də təyin olunmasa və ya orada kəsilməz olmasa bu teoremin hökmü doğru deyil.

Məsələn, $y=\frac{1}{x}$ funksiya $0<x\le1$ yarım parçasında kəsilməzdir. Lakin özünun ən böyük qiymətini almır.

[0,1]-də belə funksiyaya baxaq:

$$f(x)=\begin{cases}x, & x-irrasional,\\ \frac{1}{2}, & x-rasional.\end{cases}$$

$f(x)$–in qiymətləri [0,1] parçasına daxildir. Bunların içərisində 0–a və 1–ə istənilən qədər yaxın olan qiymətlər var. Lakin heç bir nöqtədə $f(x)=0$ və $f(x)=1$ ola bilməz. Beləliklə, kəsilən funksiyalar özünün ən böyük və ən kiçik qiymətini almayı bilər.

BOLSANO TEOREMİNİN TƏTBİQLƏRİ HAQQINDA

Bolsano teoremindən istifadə edərək bəzi tənliklərin həllini təqribi tapmaq olar, çünki bu teoremin isbatı konstruktiv xarakter daşıyır.

$2^x=4x$ tənliyinin həllini təqribi tapaq. Aydındır ki $x=4$ bu tənliyin həllidir lakin onun başqa kökünün olduğunu bu teoremdən istifadə edərək görmək və onu təqribi tapmaq olar. $f(x)=2^x-4x$ funksiyasına baxaq. Aydındır ki,

$f(0)=2^x-4\cdot0=1$, $f(\frac{1}{2})=$

$=2^{\frac{1}{2}}-4\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{2}-2<0$.

Deməli, $f(x)$ funksiyasi $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ parçasında müxtəlif işarəli qiymətlər alır, və $\left[0,\frac{1}{2}\right]$–də kəsilməzdir. Onda $\left(0,\frac{1}{2}\right)$–də bu tənliyin kökü var. İndi parçanı iki hissəyə bölək $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ və $\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$. Aydındır ki,

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=2^{\frac{1}{4}}-4\cdot\frac{1}{4}=\sqrt[4]{2}-1>0$$

$f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ olduğunda kök $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ intervalındadır.

$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ parçasını iki hissəyə bölək:

$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right]$, $\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right]$

$$f\left(\frac{3}{8}\right)=2^{\frac{3}{8}}-4\cdot\frac{3}{8}=\sqrt[8]{8}-\frac{3}{2}<0$$

Deməli, kök $\left(\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right)$ intervalındadır. Bu prosesi davam etdirsək, biz aldıcıl olaraq $2^x=4x$ tənliyinin kökünə yaxınlaşarıq.

Başqa bir misala baxaq: $x^4=x+1$ tənliyinin kökünün harada yerləşdiyini axtaraq. $f(x)=x^4-x-1$ funksiyasına baxaq.

Aydındır ki, $f(1)=-1$, $f(2)=13$, Deməli, $[-1,2]$ arasında bir kök var. İndi $f(1,1)=-0,63\ldots$, $f(1,2)=0,12\ldots$, $f(1,3)=0,55\ldots$, Deməli, $[1,1;1,3]$ aralığında kök var.

Lakin

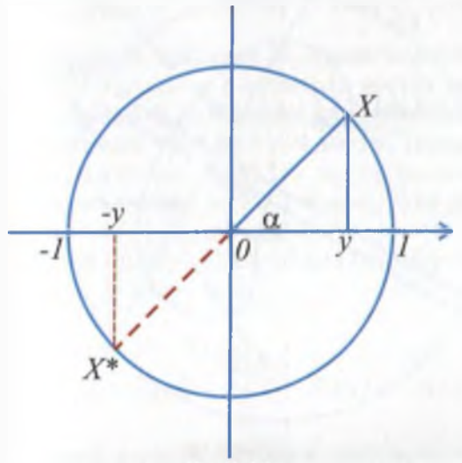
$f(1,21)=-0,6\ldots$,

$f(1,22)=-0,004\ldots$,

$f(1,23)=-0,058\ldots$,

Deməli $[1,22;1,23]$ aralığında verilən tənliyin kökü var. Beləliklə, biz axtarılan kökü 0,01 dəqiqliklə müəyyən edə bildik.

Müstəvidə vahid çevrə üzərində iki nöqtənin x və x^*–un arqumentləri π qədər fərqlənərsə, anlara əks nöqtələr deyəcəyik. Belə bir teorem isbat edək.



Şəkil 14.

✓ **(Borsuk – Ulam) Tutaq ki f: C–cevrəsini R–ə çevirən kəsilməz funksiyadır. Onda çevrə üzərində elə iki əks x və x^* nöqtələri var ki, $f(x)=f(x^*)$**

İsbatı. Tutaq ki, C–vahid radiuslu cevrədir. $[-1,1]=I$ parçasında $g(y)$ funksiyasını təyin edək: $y\in[-1,1]$, x nöqtəsi absis oxundan y nöqtəsindən qaldırılmış perpendikulyarın çevrəni kəsdiyi nöqtə olsun, x^* isə onun əks nöqtəsi olsun. Belə bir funksiyaya baxaq:

$g(y)=f(x)-f(x^*)=f(x)-f(x\pm\pi)$, $y\in[-1,1]$

Aydındır ki,

$g(1)=f(0)-f(\pi)$, $g(-1)=f(\pi)-f(0)$

yəni $g(1)=-g(-1)$

Deməli $g(1)$ və $g(-1)$ əks işarəlidir. Əgər $g(1)=0$ isə teorem isbat olunar. $g(1)\ne0$ isə onda Bolsano teoremindən alınır ki, elə $y_0\in[-1,1]$ var ki, $g(y_0)=0$. Çünki $g(1)$ və $g(-1)$ əks işarəli ədədlərdir.

Bu isə o deməkdir ki, elə x_0 var ki, $f(x_0)=f(x_0^*)$.

Buradan belə bir maraqlı nəticə ala bilərik:

Nəticə. Hal-hazırda yerin istənilən böyük çevrəsi üzərində (məsələn, ekvatorda) iki qarşılıqlı əks nöqtə var ki, orada temperaturlar bərabərdir.

Doğrudan da $f:C\to R$ bu çevrə üzərində olan nöqtələrdə temperatur funksiyası olarsa Borsuk – Ulam teoremindən alırıq ki elə x_0 və x_0^* nöqtərəri var ki $f(x_0)=f(x_0^*)$.

Bolsano teoreminin tətbiqi ilə bir neçə məsələyə baxaq. İlk baxışda bu məsələlər çox qəribə görünür, lakin sonralar dəqiq isbat olunur.

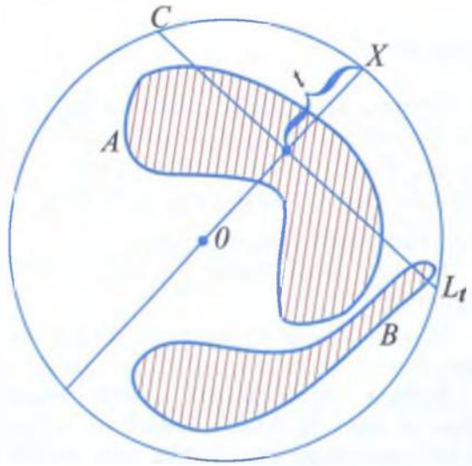
✓ **Tutaq ki A və B müstəvi üzərində sahəyə malik istənilən məhdud fiqurlardır. Onda elə bir düz xətt var ki, bu düz xətt A və B–nin hər ikisini bərabər sahəli fiqurlara bölür.**

İsbatı. Hər iki fiquru daxilində saxlayan bir çevrə götürək. Bu fiqurlar məhdud

olduğundan bunu həmişə etmək olar. Bu çevrənin üzərində onun hər hansı bir x nöqtəsini götürək və onun $D(x)$ diametrini çəkək (şəkil 15). Sonra isə $D(x)$–ə perpendikulyar olan və x nöqtəsindən $D(x)$–üzrə t məsafəsində ($0\le t\le d$ d–cevrənin diametridir) bir perpendikulyar L_t düz xətti keçirək. $f_1(t)$ ilə birinci fiqurun (A) L_t düz xəttindən x nöqtəsinə tərəf olan sahəsini, $f_2(t)$ ilə isə həmin fiqurun (A) qalan hissəsinin sahəsini işarə edək. Burada $f_1(t)$ və $f_2(t)$ funksiyalarının hər ikisi $[0,d]$ parçasında təyin olunmuşdur, hər ikisi t–nin kəsilməz funksiyasıdır. Ona görə də

$$f(t)=f_1(t)-f_2(t), \quad t\in[0,d]$$

funksiyası da $[0,d]$–də kəsilməzdir.



Şəkil 15.

Aydındır ki,

$$f(0)=f_1(0)-f_2(0)=-f(d)=f_2(d)-f_1(d)$$

Deməli, $f(0)$ və $f(d)$ əks işarələrə malikdirlər. Onda Boltsano teoreminə görə elə $t_0\in(0,d)$ var ki $f(t_0)=0$ yəni $f_1(t_0)=f_2(t_0)$

Deməli t_0 nöqtəsindən (x–dən t_0 məsafədə $D(x)$ üzərində olan nöqtədən) kecən L_{t_0} düz xətti A fiqurunu iki bərabər hissəyə bölür. Bu L_{t_0} düz xətti B–ni hər hansı iki hissəyə bölür. Biz $S_2(x)$ ilə bu fiqurun (B–nin)– x–ə yaxın olan sahəsini, $S_2^1(x)$ ilə qalan hissəsini işarə edək. Onda

$$g(x)=S_2(x)-S_2^1(x)$$

funksiyası $\forall x\in C$–çevrəsinin üzərində təyin olunacaq və kəsilməzdir. x nöqtəsi C üzərində kəsilməz olaraq dəyişdikdə özünün əks x^* nöqtəsinə çatdıqda x ilə x^*– yerini dəyişəcək və burada $g(x^*)=-g(x)$ olacaq. Digər tərəfdən Borsuk – Ulam teoreminə görə elə x_0 nöqtəsi tapmaq olar ki, $(x_0\in C)$ $g(x_0)=g(x_0^*)$. Onda

$$\begin{cases} g(x_0^*) = -g(x_0) \\ g(x_0^*) = g(x_0) \end{cases}$$

bərabərliklərindən alırıq ki, $g(x_0)=0$. Deməli, elə bir x_0 nöqtəsi var ki oradan kecək L_{t_0} düz xətti hər iki düz xətti yarıya bölür.

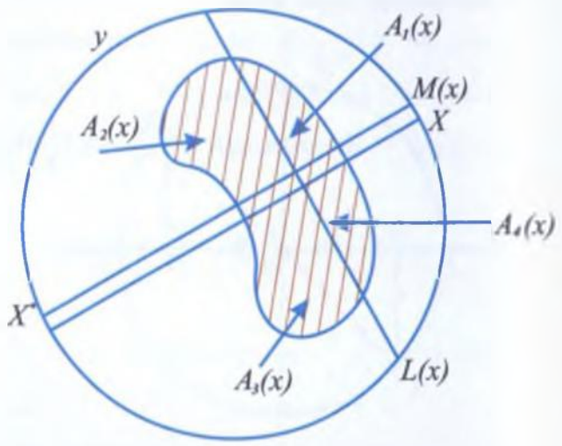
Buradan maraqlı bir nəticə alınır.

Nəticə. Hər hansı qabda olan iki müxtəlif yumurtanın qayğanağını hər birini bir bıçaqla eyni zamanda birdəfəyə iki bərabər hissəyə bölmək olar.

Başqa bir maraqlı teoremə baxaq.

✓ ***A* məhdud, sahəyə malik fiqurdursa, onda elə iki qarşılıqlı perpendikulyar düz xətt var ki, onlar A–nı dörd bərabər sahəli fiqura ayrır.**

İsbatı. *A* məhdud fiqur olduğuna görə, onu, yenə də bir C–çevrəsinin daxili oblastında yerləşdirmək olar (şəkil 16). C–nin istənilən nöqtəsini x $D(x)$ ilə isə x dən və onun əks nöqtəsi olan x^*–dan kecən diametri işarə edək. İndi isə $L(x)$ ilə $D(x)$–ə perpendikulyar və A–ni iki bərabər hissəyə bölən düz xətti işarə edək, $M(x)$ ilə isə A–nın sahəsini iki bərabər hissəyə bölək, lakin $D(x)$ düz xəttinə paralel xətti işarə edək.



Şəkil 16.

(Aydındır ki, belə $L(x)$ və $M(x)$ düz xətlərinin olması bundan əvvəlki teoremdə isbat olunub.) Bu iki düz xəttin ($L(x)$ və $M(x)$) C üzrə saat əqrəbinin əksi istiqamətinə (əksinə) hərəkəti zamanı A–nı dörd hissəyə bölünmüş hissələrini

$$A_1(x), A_2(x), A_3(x), A_4(x)$$

ilə işarə edək.

Tutaq ki, $A_1(x)$–ın sahəsi $S_1(x)$, $A_2(x)$ –ın sahəsi $S_2(x)$, $A_3(x)$–ın sahəsi $S_3(x)$, $A_4(x)$–ın sahəsi isə $S_4(x)$–dır. Aydındır ki,

$$S_1(x)+S_2(x)=S_3(x)+S_4(x),$$
$$S_4(x)+S_1(x)=S_2(x)+S_3(x).$$

Buradan alırıq ki

$$S_1(x)+S_2(x)+S_4(x)+S_1(x)=$$
$$=S_3(x)+S_4(x)+S_2(x)+S_3(x)$$

və ya $2S_1(x)=2S_3(x)$ yəni

$$S_1(x)=S_3(x), \forall x\in C \qquad (1)$$

Onda

$$S_2(x)=S_4(x), \forall x\in C \qquad (2)$$

İndi isə x–i kəsilməz olaraq C üzrə $\frac{\pi}{2}$ radian hərəkət etdirsək o, (saat əqrəbinin əks istiqamətində) y nöqtəsinin yerini tutacaq. Bu zaman $A_1(x)$ fiquru kəsilməz olaraq hərəkət edəcək və $A_2(x)$–nin yerini tutacaq, $A_2(x)$ isə $A_3(x)$–in, $A_3(x)$ isə $A_4(x)$–in, $A_4(x)$ fiquru isə $A_1(x)$–in yerini tutaçaq. Ona görə də $S_1(y)=S_2(x)$, $S_2(y)=S_3(x)$

İndi isə $f(x)=S_1(x)-S_2(x)$ funksiyasını təyin edək. Onda

$$f(y)=S_1(y)-S_2(y)=$$
$$=S_2(x)-S_3(x)=S_2(x)-S_1(x)=-f(x)$$

Deməli x çevrə boyunca saat əqrəbinin əks istiqamətində kəsilməz dəyişdikdə $f(x)$ funksiyası özünün x–dən y nöqtəsinə kecdikdə, işarəsini dəyişir. Onda elə x_0 nöqtəsi var ki, $f(x_0)=0$. Onda $S_1(x_0)=S_2(x_0)$

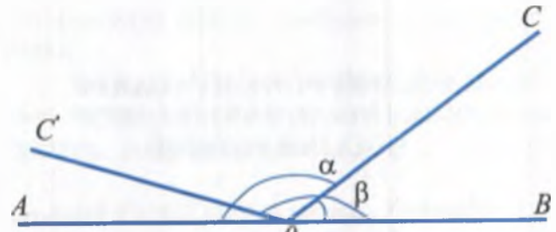
Lakin ((1),(2))–yə görə $S_1(x_0)=S_3(x_0)$, $S_2(x_0)=S_4(x_0)$ olduğundan

$$S_1(x_0)=S_2(x_0)=S_3(x_0)=S_4(x_0)$$

Teorem isbat olundu.

Bolsano teoremindən istifadə edərək göstərək ki, düz xəttin istənilən nöqtəsindən bu düz xəttə perpendikulyar keçirmək olar. Doğrudan da O nöqtəsində istənilən OC şuası keçirək Tutaq ki, α bucağı β–dan böyükdür yəni $\alpha-\beta>0$.

OC şüasını elə firladaq ki, α bucağı kiçilsin. Burada $\alpha-\beta$ fərqi kəsilməz olaraq dəyişəcək $a-\beta$ fərqi əvvəl müsbət idi. (17-ci şəkildəki kimi) İndi OC şuasını fırladıb elə vəziyyətə gətirək ki $\alpha-\beta$ fərqi mənfi olsun. Deməli, $\perp\beta$ var ki $\alpha=\beta$; yəni $\alpha=\beta=90^0$, $OC\perp AB$.



Şəkil 17.

Göstərək ki istənilən qapalı, hamar əyrinin daxilinə düzgün üçbucaq çəkmək olar.

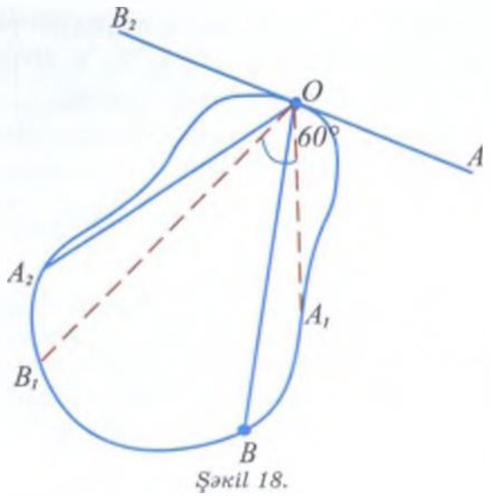
Burada "hamar" əyri dedikdə, özü–özünü kəsməyən və hər bir nöqtəsində toxunanı olan əyri nəzərdə tutulur.

Doğrudan da O nöqtəsini bu əyri üzərində qeyd edək və OA toxunanı keçirək (şəkil 18).

Sonra isə O nöqtəsindən OA ilə 60^0–li bucaq əmələ gətirən OB şüası keçirək.

OA şüasını və OB–ni O nöqtəsi ətrafında elə fırladaq ki, onlar arasında qalan bucaq (60^0) dəyişməsin. Bu halda OA_1-OB_1 (uyğun süaların əmələ gətirdiyi vətərlərin fərqi) fərqinə baxaq.

Aydındır ki, başlanğıcda $d=-OB$ (OA şüası hec bir vətəri kəsmir). Deməli, $d=-OB<0$. Lakin OB gəlib OB_2 vəziyyətini



Şəkil 18.

aldıqda, onda $d=OA_2-OB_2=OA_2>0$. Onda bucaqların elə bir vəziyyəti olacaqdır ki, göstərilən məsafə $d=0$ olacaq. Onda bu haldakı iki vətərin uc nöqtələrini birləşdirsək, biz düzgün üçbucaq alarıq, çünki onun iki tərəfi bərabər, aralarındakı bucaq isə 60^0 olar.

KƏSİLMƏZ FUNKSİYALARIN FUNKSİONAL TƏNLİKLƏRİN HƏLLİNƏ TƏTBİQİ

Məsələ 1. $R=(-\infty,\infty)$–da təyin olunmuş, kəsilməz və istənilən x, $y\in R$ üçün

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (1)$$

şərtini ödəyən funksiyaları tapaq.

Bu tənlik funksional tənliklər tipinə aid ən sadə tənlikdir. Qeyd edək ki, biz bu tənliyin yalnız kəsilməz həllərini axtarırıq.

Aydındır ki, $f(x)=\kappa x$, $\kappa\in R$ verilən tənliyi ödəyir. Doğrudan da $\forall x$, $y\in$R üçün

$$f(x+y)=\kappa(x+y)=\kappa x+\kappa y=f(x)+f(y)$$

Lakin, biz göstərəcəyik ki, kəsilməz funksiyalar sinfində tənliyin istənilən həlli $y=\kappa x$ şəklindədir.

Əvvəla (1) tənliyindən görünür ki,

$f(0+0)=f(0)+f(0)$,

$f(0)=2f(0)$,

$f(0)=0$.

Digər tərəfdən $x_1, x_2,\dots, x_n \in R$ olduqda

$$f(x_1+x_2+\dots+x_n)=f(x_1+(x_2+\dots+x_n))=$$

$$=f(x_1)+f(x_2+\dots+x_n)=f(x_1)+$$

$$+f(x_2+(x_3+\dots+x_n))=f(x_1)+f(x_2)+$$

$$+f(x_3+\dots+x_n)=\dots=f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)$$

Xüsusi halda $x_1=x_2=\dots=x_n=x$ olarsa

$$f(\underbrace{x+x+\dots+x}_{n})=f(nx)=\underbrace{f(x)+\dots+f(x)}_{n}=nf(x)$$

Deməli $f(nx)=nf(x)$ Əgər $x=\frac{1}{n}y$ götürsək

$$f(y)=f\left(n\cdot\frac{1}{n}y\right)=nf\left(\frac{1}{n}y\right)$$

yəni

$$f\left(\frac{1}{n}y\right)=\frac{1}{n}f(y)$$

və ya $\forall x$ üçün $f\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}f(x)$.

İndi isə bu bərabərlikdə x–in yerinə mx yazsaq, $(m\in N)$ $f\left(\frac{m}{n}x\right)=\frac{m}{n}f(x)$ alarıq.

Digər tərəfdən $y=-x$ götürsək

$f(-x+x)=f(0)=0$,

$f(-x)+f(x)=0$,

$f(-x)=-f(x)$

Onda

$f(-nx)=-f(nx)=-nf(x)$, $n\in N$

və

$$f\left(-\frac{m}{n}x\right)=-\frac{m}{n}f(x),\ m\in N$$

Beləliklə $\forall r$–rasional ədədi üçün alırıq ki, $f(rx)=rf(x)$

$x=1$ olduqda $f(r)=rf$ (1),
$f(1)=a$ olarsa $f(r)=ar$ olar.
$\forall x\in R$ götürək və

$$x=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\dots$$

onun onluq say sistemində yazılışı olsun.

Onda $r_n=x_0,x_1,x_2,\dots,x_n$ – rasional ədəddir və

$$f(r_n)=ar_n$$

lakin $r_n\to x$, $n\to\infty$ və $f(r_n)\to f(x)$ olduğundan alırıq ki, $f(x)=ax$.

Bu isə göstərir ki, (1) funksional tənliyinin həlli $y=ax$, $a\in R$ şəkilindədir.

R=$(-\infty,\infty)$–da təyin olunmuş, kəsilməz və

$$f(x+y)=f(x)\ f(y) \qquad (2)$$

bərabərliyini ödəyən istənilən $f(x)$ funksiyasını tapaq.

Aydındır ki $y=a^x$ $(a>0)$ funksiyası (2) tənliyini ödəyir və kəsilməzdir:

$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y.$$

Göstərək ki, (2) funksional tənliyinin ümumi həlli (kəsilməz funksiyalar sinfində)

$$f(x)=a^x$$

şəklindədir. ($f(x)\equiv 0$ həlli nəzərə alınmır).

Aydındır ki, hər hansı $x_0\in R$ üçün $f(x_0)=0$ olarsa,

$$f(x_0+y)=f(x_0)\cdot f(y)=0$$

alınar. Onda istənilən $y\in$R üçün $f(y)=0$ olar. Doğrudan da

$$f(y)=f\big((x_0+y)-y_0\big)=f(x_0+y)\cdot f(-y_0)=0$$

Deməli $f(y)\equiv 0$. Bu hal aradan çıxdığına görə

$$f(x_0)\neq 0,\ \forall x_0\in R.$$

(2)–dən alırıq ki

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)\cdot f\left(\frac{x}{2}\right)=\left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2>0.$$

Onda bu funksiyanı loqorifmləmək olar:

$$ln\big(f(x+y)\big)=ln\big(f(x)\cdot f(y)\big)=lnf(x)+lnf(y)$$

Əgər $\varphi(x)=lnf(x)$ qəbul etsək onda

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$$

Deməli $\varphi(x)=cx$ $(c\in R)$

Onda $lnf(x)=cx$,

$$f(x)=e^{cx}=(e^c)^x=a^x \quad (a=e^c)$$

İndi isə R=$(0,\infty)$ –da kəsilməz $\forall x, y\in R$ üçün və f

$$f(xy)=f(x)+f(y)$$

bərabərliyini ödəyən kəsilməz funksiyaları tapaq.

Tutaq ki, $(0,\infty)$–da kəsilməz $f(x)$ funksiyası bu bərabərliyi ödəyir. $\xi=lnx$ əvəzləməsi aparsaq, $\xi\in(-\infty,\infty)$, onda,

$$x=e^\xi,\ \varphi(\xi)=f(e^\xi),\ \xi=lnx,\ f(x)=\varphi(lnx)$$

olar. Onda $\varphi(\xi)$ funksiyası $(-\infty,\infty)$–da mürəkkəb funksiya kimi kəsilməzdir, və

$$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^\xi\cdot e^\eta)=$$
$$=f(e^\xi)+f(e^\eta)=\varphi(\xi)+\varphi(\eta)$$

Deməli, $\varphi(\xi)=c\xi$, $f(x)=clnx$, $c\neq 0$ qəbul etsək

$$f(x)=log_a x \quad \left(a=e^{\frac{1}{c}}\right)$$

R+=$(0,\infty)$–da təyin olunmamış, kəsilməz

$$f(xy)=f(x)f(y)$$

bərabərliyini ödəyən bütün kəsilməz $f(x)$ funksiyalarını tapaq.

Burada yenə $x=e^\xi$, $\xi=lnx$ əvəzləməsi

aparsaq, onda $f(x)=\varphi(lnx)$, $\varphi(\xi)=f(e^{\xi})$,

$\varphi(\xi+\eta)=f(e^{\xi+\eta})=f(e^{\xi}\cdot e^{\eta})=$

$=f(e^{\xi})\cdot f(e^{\eta})=\varphi(\xi)\cdot\varphi(\eta)$

olar.

Onda $\varphi(\xi)=a^{\xi}$ $(a>0)$

Buradan

$$f(x)=a^{lnx}=x^{\mu},\quad \mu=lna.$$

R=$(-\infty,\infty)$–da təyin olunan və

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y) \qquad (3)$$

bərabərliyini ödəyən kəsilməz funksiyaları tapaq.

Tutaq ki, $f(x_0)\neq 0$. Onda $y=0$ olduqda

$$2f(x_0)=2f(x_0)\cdot f(0).$$

Deməli,

$$f(0)=1.$$

Digər tərəfdən $x=0$ götürsək

$$f(y)+f(-y)=2f(y)\cdot f(0),$$

$$f(y)+f(-y)=2f(y),$$

$$f(y)=f(-y),\quad \forall y\in R.$$

$f(0)=1$ və $f(x)$ kəsilməz olduğundan elə $[0,c]$ parçası var ki, $f(c)>0$. Doğrudan da $\varepsilon>0$ üçün elə $\delta>0$ tapmaq olar ki, $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ üçün $|f(x)-f(0)|<\varepsilon$ Onda

$$f(0)-\varepsilon<f(x)<f(0)+\varepsilon$$

buradan $x\in(-\delta,\delta)$ intervalında $f(x)>1-\varepsilon>0$. İndi isə $c=\frac{\delta}{2}$ götürsək $[0,c]$–də $f(x)>0$. Onda $f(c)>0$. İki hala baxaq:

1) $f(c)\le 1$; 2) $f(c)>1$.

Tutaq ki $0<f(c)\le 1$. Onda elə $\theta\in[0,\pi/2)$ tapmaq olar ki, $f(c)=cos\theta$. Lakin $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$ bərabərliyini

$$f(x+y)=2f(y)\cdot f(x)-f(x-y)$$

kimi yazsaq və

$$y=c,\quad x=c$$

$$y=c,\quad x=2c$$

$$y=c,\quad x=3c$$

$$y=c,\quad x=mc$$

qiymətlərini nəzərə alsaq

$$f(2c)=2cos^2\theta-1=cos2\theta,$$

$$f(3c)=2cos\theta\cdot cos2\theta-cos\theta=cos3\theta,$$

$$f(4c)=2cos\theta\cdot cos3\theta-cos2\theta=cos4\theta,$$

$$f(mc)=cosm\theta.$$

İndi isə (3)–də $y=x=\frac{1}{2}c$ götürək və $f(c)=cos\theta$ olduğunu nəzərə alsaq

$$\left[f\left(\frac{1}{2}c\right)\right]^2=\frac{f(0)+f(c)}{2}=\frac{1+cos\theta}{2}=\left(cos\frac{1}{2}\theta\right)^2$$

Deməli $[0,c]$–də $f(x)>0$, $cosx>0$, $x\in[0,\theta]$.

Onda

$$f\left(\frac{1}{2}c\right)=cos\frac{1}{2}\theta$$

Lakin $x=y=\frac{1}{2^2}c$ götürsək

$$f\left(\frac{1}{2^2}c\right)=cos\frac{1}{2^2}\theta$$

və nəhayət

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right)=cos\frac{1}{2^n}\theta\quad (n=1,2,3\ldots)$$

alarıq. Eyni qayda ilə

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right)=cos\frac{m}{2^n}\theta$$

Beləliklə, $0<x=\frac{m}{2^n}$ olduqda,

$f(cx)=cos\theta x$

Lakin $\forall x$ ədədini ikili say sistemində yazmaq olar və $x=\frac{m}{2^n}$ kimi ədədlərin limiti şəklində göstərilə bilər. $f(x)$–in kəsilməzliyindən alarıq ki,

$$f(cx)=cos\theta x,\quad \forall x>0$$

Lakin $f(x)=f(-x)$ olduğundan bu $x<0$ -da, $f(0)=1$ olduğundan $x=0$–da da doğrudur. Beləliklə

$$f(cx)=cos\theta x,\quad x\in R.$$

Burada x–i–$\frac{x}{c}$ ilə əvəz etsək:

$f(x)cos\frac{\theta}{c}x=cosax$ $\left(a=\frac{\theta}{c}\right)$ alarıq.

İkinci halda $f(c)>1$. Onda elə θ tapmaq olar ki,

$$f(c)=ch\theta\qquad \left(ch\theta=\frac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2}\right)$$

və yuxardakı mühakiməni burada da aparsaq

$$f(x)=chax\quad (a>0)$$

alarıq $\left(chax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right)$.

KƏSİLMƏZ FUNKSİYALAR ÜÇÜN TƏRPƏNMƏZ NÖQTƏ MƏSƏLƏLƏRİ

Tərpənməz nöqtə məsələsi riyaziyyatın bir çox məsələlərində meydana çıxır və geniş tətbiqə malikdir.

Tutaq ki, $I=[0,1]\subset R$ və $f:[0,1]\to[0,1]$, funksiyası verilmişdir, bu, o deməkdir ki, $\forall x\in[0,1]$ üçün $y=f(x)\in[0,1]$. Burada $y=f(x)$ x–in obrazıdır (inikasıdır).

✓ **Əgər elə $x_0\in[0,1]$ varsa ki $f(x_0)=x_0$, onda deyilir ki, x_0 nöqtəsi $f(x)$–funksiyasının tərpənməz nöqtəsidir.**

$f(x)=sinx$ funksiyası $[0,1]\to[0,1]$ inikas edir $x_0=0$ nöqtəsində $sinx_0=x_0$ $(sin0=0)$

$$f(x)=x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2},\quad x\in[0,1]$$

$$f(x)=x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{7}{16}$$

funksiya ən kiçik qiymətini $x=\frac{1}{4}$–də alır:

$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{16}$ və $[0,\frac{1}{4}]$ aralığında azalır,

$[\frac{1}{4},1]$–də isə artır.

$f(0)=\frac{1}{2}$, $f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{16}$, $f(1)=1$,

olduğundan

$f:[0,1]=\left[\frac{7}{16},1\right]\subset[0,1]$.

Burada $f(x)=x$ tənliyinə baxsaq

$$x^2-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}=x,$$

$$x^2-\frac{3x}{2}+\frac{1}{2}=0,$$

$$x_{1,2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\pm\frac{1}{4}$$

$$x_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}.$$

Onda

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

$f(1) = 1$.

Deməli bu funksiyanın iki tərpənməz nöqtəsi var.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in [0,1]$$

Bu funksiya üçün $f(0)=1$, $f(1)=\frac{1}{2}$ və o azalan olduğundan $\frac{1}{2} \le f(x) \le 1$.

Deməli,

$$f(x):[0,1]\to[0,1].$$

Bu funksiyanın tərpənməz nöqtəsi $f(x)=x$, tənliyindən tapılır. Beləliklə, tərpənməz nöqtə

$$\frac{1}{1+x^2} = x,$$

$$x(1+x^2)=1,$$

$$x^3+x-1=0$$

tənliyini ödəməlidir.

$\varphi(x)=x^3+x-1$ funksiyası üçün

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} - 1 < 0,$$

$$\varphi(1)=1+1-1>0$$

olduğundan Bolsano teoreminə görə, $(\frac{1}{2}, 1)$ intervalında $\varphi(x_0) = 0$ şərtini ödəyən x_0 var. Bu nöqtə $f(x)$–in tərpənməz nöqtəsidir.

✓ **$f:[0,1]\to[0,1]$ kəsilməz funksiyadırsa, onun [0,1]-də heç olmasa bir tərpənməz nöqtəsi var.**

Tutaq ki, $f:[0,1]\to[0,1]$. Əgər $f(0)=0$, və ya $f(1)=1$ isə onda teorem isbat olunar. $f(0)\neq 0$, $f(1)\neq 1$ olduqda

$$g(x)=f(x)-x$$

funksiyasına baxaq.

$$g(0)=f(0)-0>0$$

(çünki $f:[0,1]\to[0,1]$, $f(0)\neq 0$), $g(1)=f(1)-1<0$ (çünki, $f(1)\neq 1$, $f[0,1]\subset[0,1]$).

Onda Bolsano teoreminə görə $\exists x_0\in(0,1)$ var ki, $g(x_0)=0$. Deməli $f(x_0)=x_0$ yəni x_0 nöqtəsi f–in tərpənməz nöqtəsidir

$f(x)=\sin x$, $x\in(0,1)$.

Bu halda $f(x)=x$ tənliyin $x=0$ həlli $0\notin(0,1)$. Deməli inikasın tərpənməz nöqtəsi yoxdur. Bu o deməkdir ki, funksiyanın qapalı [0,1] aralığında təyin olunması mühüm şərtdir.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}}, & x - rasional\ olduqda \\ \frac{1}{2}, & x - irrasional\ olduqda \end{cases}$$

Bu funksiya Dirixle funksiyası kimi [0,1]–in hər bir nöqtəsində kəsiləndir. $f(x)=x$ tənliyinin həlli yoxdur.

Doğrudan da x–rasional olarsa,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - irrasionaldır, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \neq x$$

yəni $f(x)\neq x$.

x–irrasional ədəd olarsa və tərpənməz nöqtə isə

$$f(x) = \frac{1}{2} - rasionaldır$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ olmalıdır$$

Lakin $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ irrasionaldır. Deməli kəsilən $f:[0,1]\to[0,1]$ funksiyasının tərpənməz nöqtəsi yoxdur.

$f(x)=x+e^x$ funksiyası $(-\infty,\infty)=R$–də təyin olunub kəsilməzdir və $f:R\to R$. Lakin onun tərpənməz nöqtəsi yoxdur.

Doğrudan da $f(x_0)=x_0$ olarsa,

$$x_0+e^{x_0}=x_0, \text{ yəni } e^{x_0}=0.$$

Bu isə ola bilməz. Deməli funksiyanın təyin olunduğu aralığın sonlu olması zəruridir.

Tutaq ki, $f(x):[0,1]\to[0,1]$. Bu halda

$$f^2(x) = f\big(f(x)\big)$$

kimi təyin edilir.

Əgər $\forall x\in[0,1]$ üçün

$$f^2(x) = x$$

isə onda $f(x)$ funksiyası *involyusiya* adlanır.

$f(x)=x$–involyusiyadır. Buna sadə involyusiya deyilir.

$f(x)=1-x$ funksiyasına [0,1]–də baxaq.

$$f(x)=1-x:[0,1]\to[0,1]$$

$$f^2(x)=f(f(x))=1-f(x)=1-(1-x)=x$$

Deməli f–involyusiyadır.

Başqa bir misala baxaq

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x}, \quad x \neq -1$$

$$f^2(x) = f\big(f(x)\big) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} =$$

$$= \frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\frac{1+x-1+x}{1+x}}{\frac{1+x+1-x}{1+x}} = \frac{2x}{2} = x$$

Deməli $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$ involyusiyadır.

✓ **İstənilən sadə olmayan involyusiyanın yeganə tərpənməz nöqtəsi var.**

İsbatı. Tutaq ki, f–sadə olmayan involyusiyadır; $f:[0,1]\to[0,1]$. Onda $f^2(x)=x$ olduğundan $y=f(x)$ funksiyasının qrafiki özünün $y=x$ oxuna nəzərən simmetriyası ilə üst-üstə düşür.

Doğrudan da (x,y) nöqtəsi $f(x)$–in qrafikinə daxildir: $(x,f(x))\in\Gamma$, onda $y=x$ düz xəttinə nəzərən bu nöqtənin simmetrik nöqtəsi olan $(y,x)=(f(x),x)$–də onun qrafikinə daxildir, çünki $f(f(x))=x$.

Buradan alınır ki, $y=f(x)$ funksiyasının qrafikinin $y=x$ düz xətti üzərində iki müxtəlif nöqtəsi varsa (aydındır ki, bu nöqtələrdə $f(x)=y=x$) bu iki nöqtə iki müxtəlif xətt vasitəsilə birləşdiriləcək. Bu isə $f(x)$ funksiyasının bir qiymətli olmasına ziddir.

Tutaq ki, $f:[a,b]\to[a,b]$ kəsilməz funksiyadır və $f(a)=a$, $f(b)=b$, $g(x)$ isə kəsilməz funksiya olub $g:[a,b]\to[a,b]$. İsbat edək ki, elə $x_0\in[a,b]$ var ki,

$$f(x_0)=g(x_0).$$

İsbatı.

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

$[a,b]$–də kəsilməz funksiyadır və

$$h(a)=f(a)-g(a)=a-g(a),$$

$$h(b)=f(b)-g(b)=b-g(b).$$

$g(a)=a$ və ya $g(b)=b$ olarsa, teorem isbat olunardı.

Deməli, $g(a)\neq a$, $g(b)\neq b$ halına baxmaq lazımdır. Onda $a-g(a)<0$ və $b-g(b)>0$, yəni $g(a)>a$, $g(b)<b$ olduqda $h(x)$ funksiyasının 0–a çevrildiyi nöqtə var. (Bolsano teoreminə görə):

$$h(x_0)=f(x_0)-g(x_0)=0$$

Yəni

$$f(x_0)=g(x_0).$$

Aydındır ki,

$$h(a)=a-g(a)>0,$$

$$h(b)=b-g(b)<0 \ (a<g(a)),$$

$g(b)<b$ isə ola bilməz.

İsbat edək ki, C–vahid radiuslu çevrəni

R–ə daxil olan hər hansı bir parçaya qarşılıqlı bir qiymətli və qarşılıqlı kəsilməz inikas etdirən funksiya ola bilməz.

Doğrudan da əgər belə bir inikas varsa, onda $\forall x \in C$ üçün elə $t \in [a,b]$ var ki, $f(x)=t$, və $f^{-1}(t)=x$ və hər iki funksiya kəsilməzdir. Buradan alınır ki, Barsuk–Ulam teoreminə görə elə iki əks x və x^* nöqtələri var ki, $f(x)=f(x^*)$. Onda bu isə $f:C\to[a,b]$ inikasının bir qiymətli olması şərtinə ziddir.

İndi isə tərpənməz nöqtə üçün sıxan inikas prinsipini verək.

Tutaq ki, $f:[a,b]\to[a,b]$ inikasi üçün, $\forall x_1,x_2 \in [a,b]$ üçün $|f(x_1)-f(x_2)| \le \alpha|x_1-x_2|$, şərti $(0<\alpha<1)$ ödənərsə onun f–ə sıxan inikası deyilir.

Bu o deməkdir ki, x_1 və x_2 nöqtələri inikasdan sonra elə iki nöqtəyə keçir ki, onların arasındakı məsafə $|f(x_1)-f(x_2)|$ əvvəlki $|x_1-x_2|$ məsafəsindən α dəfə kiçik olur $(0<\alpha<1)$.

Bu tərifdən çıxır ki, f inikası kəsilməzdir, çünki $\forall \varepsilon>0$ üçün $|x_0-x_0|\le\frac{1}{\alpha}\varepsilon$ şərtini ödəyən x–lər üçün $(\delta=\frac{1}{\alpha}\varepsilon)$ $|f(x)-f(x_0)|\le\alpha\frac{1}{\alpha}\cdot\varepsilon=\varepsilon$ bərabərsizliyi ödənir.

$f(x)$ kəsilməz inikas olduğundan onun $[a,b]$–də, heç olmasa, bir tərpənməz nöqtəsi var. İndi isbat edək ki, sıxan inikasın yeganə tərpənməz nöqtəsi var.

Doğrudan da $f:[a,b]\to[a,b]$, onda f–in kəsilməzliyindən çıxır ki,

$$f\big([a,b]\big)=[a_1,b_1],$$

çünki $a_1=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $b_1=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ olarsa, onda $a_1<y<b$ şərtini ödəyən istənilən y üçün elə $x\in[a,b]$ var ki, $f(x)=y$. (Bolsano teoremi). Lakin buradan göründüyü kimi hökmən $f(a)=a_1$, $f(b)=b_1$ olmalı deyil. Tutaq ki, $f(x_1)=a_1$, $f(x_2)=b_2$ (Veyerştrass teoremi).

Lakin f–sıxan inikas olduğundan

$$|a_1-b_1|=|f(x_1)-f(x_2)|\le\alpha|x_1-x_2|\le\alpha|a-b|$$

Deməli

$$f[a,b]=[a_1,b_1]\subset[a,b]$$

və

$$|b_1-a_1|\le\alpha\cdot|a-b|.$$

Eyni qayda ilə

$$f[a_1,b_1]=[a_2,b_2]$$

və

$$|a_2-b_2|\le\alpha|a_1-b_1|\le\alpha^2|a-b|.$$

Beləliklə bu prosesi davam etdirsək elə

$$[a,b],[a_1,b_1],[a_2,b_2]..[a_n,b_n],...$$

parcaları alırıq ki,

$$[a,b]\supset[a_n,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset..\supset[a_n,b_n]\supset$$

və

$$|a_n-b_n|\le\alpha|a_{n-1}-b_{n-1}|\le\alpha^2|a_{n-2}-b_{n-2}|\le..\le$$
$$\le\alpha^n|a-b|$$

yəni $b_n-a_n\le\alpha^n|a-b|\to 0,\ n\to\infty$.

Onda $\forall n\in N$ üçün elə yeganə $x_0\in[a_n,b_n]$ var (Kantor aksiomu)

İndi isə $\forall x_1\in[a,b]$ götürək. Onda

$$x_2=f(x_1)\in[a_1,b_1]$$
$$x_3=f(x_2)\in[a_2,b_2],...,\ x_n=$$
$$=f(x_{n-1})\in[a_{n-1},b_{n-1}],\ x_{n+1}=$$
$$=f(x_n)\in[a_n,b_n]...$$

olsun.

Buradan alırıq ki,

$$|x_n-x_0|\le uzunlug[a_{n-1},b_{n-1}]=$$
$$=b_{n-1}-a_{n-1}\le\alpha^{n-1}(b-a)\to 0$$

Deməli, $x_n\to x_0, n\to\infty$ olduqda. Digər tərəfdən f kəsilməz olduğundan

$$x_{n+1}=f(x_n)\to f(x_0)$$

Limitin yeganəliyindən alırıq ki,

$$f(x_0)=x_0.$$

Deməli, x_0 f–in tərpənməz nöqtəsidir.

Göstərək ki, tərpənməz nöqtə yeganədir. Tutaq ki, elə bir x_0' var ki,

$$f(x_0')=x_0',\ x_0'\ne x_0$$

Onda

$$|x_0-x_0'|=|f(x_0)-f(x_0')|\le\alpha|x_0-x_0'|,$$

yəni $\alpha\ge1$. Bu isə $0<\alpha<1$ şərtinə ziddir.

Qeyd edək ki, bu üsulla biz tərpənməz nöqtəni

$$x_2=f(x_1),\ x_3=f(x_2),...,\ x_n=f(x_{n-1}),...,$$

ardıcıllığını qurmaqla tapa bilərik:

$$x_0=\lim_{n\to\infty}x_n \text{ və}$$

$$|x_n-x_0|\le\alpha^n|x_1-x_0|,$$

beləliklə $f(x)=x$ tənliyinin təqribi həlli x_n olacaq, o isə əsl həll olan x_0–dan $\alpha^n|x_1-x_0|$ –dan az fərqlənir.

Qeyd 1. Biz burada $a=-\infty$ və ya $b=\infty$–da götürə bilərdik və bu halda da teorem doğrudur. Lakin, bu halda onu başqa üsulla isbat etmək lazımdır.

Qeyd 2. $\forall x$ və y üçün

$$|f(x)-f(y)|<|x-y|$$

şərti ödənərsə f–in tərpənməz nöqtəsi olmaya bilər.

Məsələn $f:[1,\infty)\to[1,\infty)$ funksiyasını belə təyin edək:

$$f(x)=x+\frac{1}{x}$$

Aydındır ki, $f(x)$ funksiyasi $[1,\infty)$-da kəsilməzdir.

Onda

$$|f(x)-f(x)|=\left|x+\frac{1}{x}-y-\frac{1}{y}\right|=$$
$$=\left|(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right|$$

Tutaq ki, müəyyənlik üçün $x>y$. Onda

$$|f(x)-f(y)|=\left|(x-y)+\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\right|<|x-y|$$

Çünki bu halda $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$. Göstərək ki, elə $0<\alpha<1$ yoxdur ki,

$$|f(x)-f(y)|\le\alpha|x-y|$$

bərabərsizliyi bütün x və $y\in[1,\infty)$ üçün ödənsin.

Doğrudan da, $x_n=n+1, y_n=n$ olsun. Onda

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left|(n+1)-n+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\right|=$$
$$=\left|1+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right|\le\alpha|n+1-n|=\alpha$$

ödənərsə

$$\left|1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right|\le\alpha$$

bərabərsizliyindən $n\in\mathbb{N}$ olduqda, $\alpha=1$ alarıq.

Deməli ikikas sıxan deyil. Onda

$$f(x)=x$$

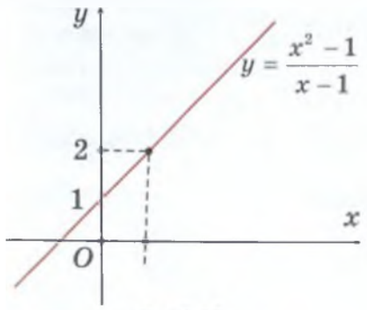
tənliyinin tərpənməz nöqtəsi

$$x+\frac{1}{x}=0$$

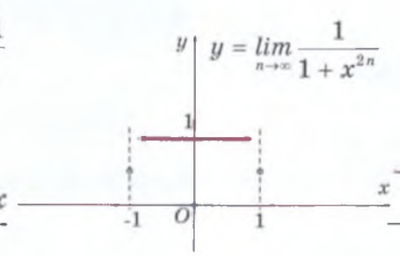
tənliyindən tapılar. Buradan

$$\frac{1}{x}=0$$

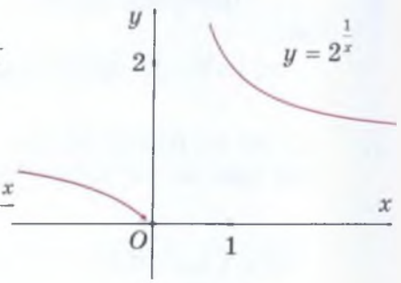
alaraq ki, bunun da $[1,\infty)$–da həlli yoxdur. Deməli $0<\alpha<1$ şərti mühümdür.



Şəkil 19.



Şəkil 20.



Şəkil 21.

KƏSİLƏN FUNKSİYALAR

Kəsilən funksiyalar təbiətdə sıçrayış şəkilli prosesləri təsvir edirlər. Məsələn, zərbə zamanı cismin sürəti ani dəyişir; temperaturun funksiyası kimi suyun sıxlığı "donma nöqtəsində" sıçrayışla artır və elə belə sıçrayış ilə "qaynama nöqtəsində" azalır. Oxşar prosesləri təsvir edən funksiyaların qrafikləri iki və bir neçə arasıkəsilməyən xətlərin fraqmentlərindən ibarətdir və bir neçə sıçrayışa malikdirlər.

XIX əsrin əvvəlində, çox qəribə – "fövqəladə kəsilən" – xətlər icad edilmişdilər. Onlardan birincisi alman riyaziyyatçısı Lejen Dirixle (1805-1859) tərəfindən araşdırılmış funksiya idi:

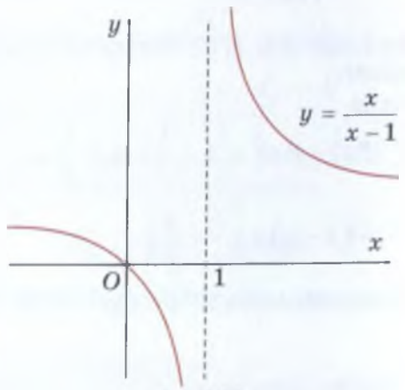
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ əgər } x \text{ irrasionaldırsa,} \\ 1, \text{ əgər } x \text{ rasionaldırsa} \end{cases}$$

Məsələn: $f(1/3) = 1$, $f(\sqrt{2}) = 0$. Dirixle funksiyası bütün nöqtələrdə təyin edilib, amma onun qrafikini qurmaq mümkün deyil: o hər hansı kiçik parçada ya 0, ya da 1 qiymətini alır. Dirixle funksiyası hər bir nöqtədə kəsilməzdir.

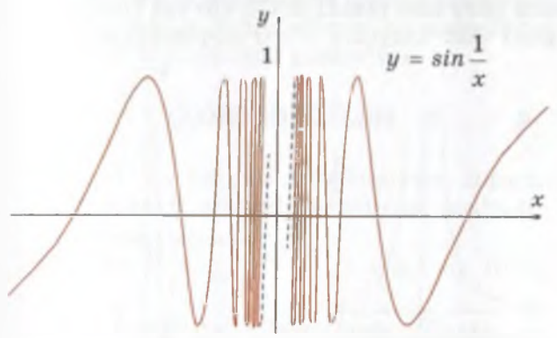
Dirixlenin əsərinin yaranmasından 25 il sonra, kəsilən funksiyaların araşdırılması ilə məşhur alman riyaziyyatçısı Bernhard Riman məşgul olmuşdu. O yazırdı ki, Dirixle funksiyasına oxşar funksiyaların öyrənilməsi riyazi analizin əsas prinsiplərinin aydınlaşdırılması ilə sıx bağlıdır. O, bu prinsiplərə böyük aydınlıq və müəyyənlik vermək üçün kömək edə bilər.

Bir çox riyaziyyatçılar, xüsəsən də, yaşlı nəslin nümayəndələri "real dünyadan çox uzaq olan" kəsilən funksiyaların öyrənilməsinə ciddi yanaşmırdılar. Kəsilən funksiyalar haqqında yeni nəzərriyəni hətta funksiyaların "teratologiyası" (yəni ki, funksiyaların eybəcərlikləri haqqında elm) adlandırırdılar. Amma Rimanın əsərlərindən sonra kəsilən funksiyaların öyrənilməsi artıq ara vermirdi. Bu araşdırmalar kəsilən funksiyaların artıq qəribə bir şey kimi görünmədiyi riyaziyyatın yeni bölmələrinə təməl qoydu.

XIX əsrin axırında gənc fransız riyaziyyatçısı Rene Berin əsərlərində kəsilmə nöqtələrinin təsnifatı verilmişdir. Birinci növ kəsilmə nöqtələrinə funksiyanın qrafikində "deşik" tipli və sonlu sıçrayış tipli "aradan qaldırıla bilən" kəsilmə nöqtələri aid idilər. Belə nöqtələr haqqında təsəvvüru 19-cu və 20-ci şəkillərdəki qrafiklər verir. İkinci növ kəsilmə nöqtələri – funksiya bu nöqtələr üçün: a) bir tərəfdən və ya iki tərəfdən sonsuzluğa yaxınlaşır (şəkil 21 və 22; birinci halda funksiya sol tərəfdən sonlu qiymətə yaxınlaşır); b) ya sağdan, ya da soldan sonlu və ya sonsuz limitə yaxınlaşmır (şəkil 23).



Şəkil 22.



Şəkil 23.

Qeyd edək, qrafikini təsvir etmək mümkün olmayan Dirixle funksiyası üçün hər nöqtə ikinci növ kəsilmə nöqtəsidir.

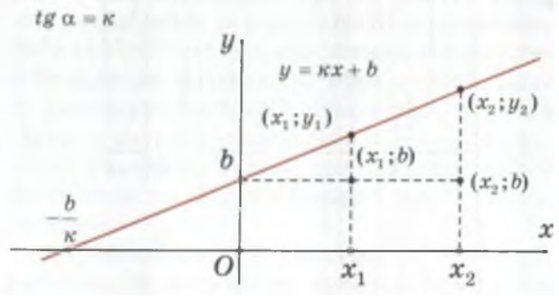
ELEMENTAR FUNKSİYALAR VƏ ONLARIN XASSƏLƏRİ

Elementar funksiyalara qüvvət, eksponent, loqarifmik, triqonometrik, tərs triqonometrik, hiperbolik, tərs hiperbolik və həmçinin, bu funksiyalardan dörd hesab əməli və superpozisiya ilə alınan funksiyalar da aiddir. Burada biz təkcə bir neçə elementar funksiyanı araşdıracağıq.

XƏTTİ FUNKSİYALAR

Əvvəlcə ən sadə funksiyanı, xətti funksiyanı gözdən keçirək: $y(x) = kx + b$, burada κ və b – müəyyən sabitlərdir. Müstəvidə koordinat oxlarına nəzərən 1-ci şəkildə göstərildiyi kimi yerləşən maili düz xətt çəkək.

Düz xətt ordinat xəttini $(0;b)$ nöqtəsində kəsir. Düz xətt üzərində hər hansı iki (x_1,y_1) və (x_2,y_2) nöqtə götürək. Təpə nöqtələri $(0;b)$, (x_1,y_1), (x_1,b) və $(0;b)$, (x_2,y_2), $(x_2;b)$ olan üçbucaqların oxşarlığından alırıq ki, $\frac{y_1-b}{x_1} = \frac{y_2-b}{x_2}$. Alınmış nisbəti κ ilə göstərsək (onu adətən düz xəttin bucaq əmsalı adlandırırlar), onda düz xəttin istənilən (x,y) nöqtəsi üçün $\frac{y-b}{x} = k$ və ya $y=\kappa x+b$ bərabərliyi doğru olur. Deməli, bizim düz xətt $y=\kappa x+b$ xətti funksiyasının qrafikidir.



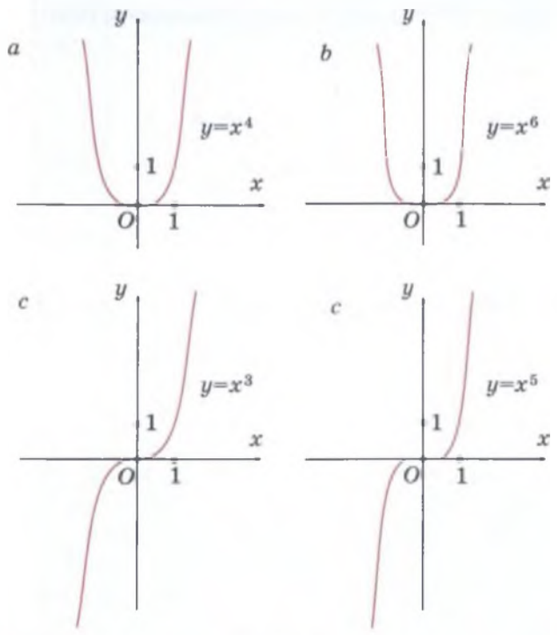
Şəkil 1.

Və tərsinə, tutaq ki, $y=\kappa x+b$ xətti funksiyası verilib. Əgər $\kappa=0$, onda funksiya bütün x nöqtələrində eyni b qiymətini alır, yəni onun qrafiki absis oxuna paralel və $(0,b)$ nöqtəsindən keçən düz xətt olur. Əgər $\kappa \neq 0$, onda funksiyanın qrafiki absis oxunu $(-b/\kappa;0)$ nöqtəsində, ordinat oxunu isə $(0;b)$ nöqtəsində kəsir. Bu iki nöqtədən təkcə bir düz xətt keçir. Burada yuxarıdakı kimi fikirləşərək (oxşar üçbucaqlar ilə haldakı kimi) belə bir nəticəyə gəlirik ki, əgər $(x;y)$ nöqtəsi verilmiş düz xəttin üzərindədirsə, onda $y=\kappa x+b$, yəni bizim düz xəttimiz – xətti funksiyanın qrafikidir. Beləliklə, xətti funksiyanın qrafiki şaquli olmayan düz xətdir.

Şaquli düz xətt halı üçün vəziyyət daha sadədir – o heç bir funksiyanın qrafiki ola bilməz. Həqiqətən də, tutaq ki, bu düz xətt absis oxunu $(c;0)$ nöqtəsində kəsir. Onda eyni $x=c$ y-in çoxlu sayda müxtəlif qiymətlərinə (bütün həqiqi ədədlər) uyğun olacaq.

QÜVVƏT FUNKSİYALARI

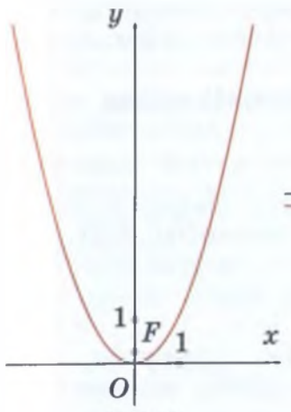
$f(x) = x^n$ $(n \in N)$ qüvvət funksiyası bütün həqiqi oxda təyin olunub. n cüt olduqda $f(x) = f(-x)$ bərabərliyi doğrudur. Belə funksiyalara cüt funksiya deyilir və onların qrafikləri Oy oxuna nəzərən simmetrikdirlər (şəkil $2a,b$). n-tək olduqda $f(x)=x^n$ funksiyası tək funksiyadır, yəni $f(x) = -f(-x)$, onun qrafiki isə koordinat başlanğıcına nəzərən simmetrikdir (şəkil $2c,ç$). Şəkillərdən görünür ki, koordinat



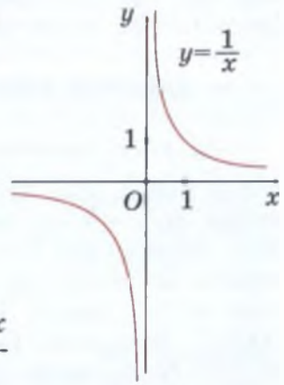
Şəkil 2.

başlanğıcından uzaqlaşdıqca qrafik üzərindəki nöqtə sonsuzluğa yaxınlaşır və n nə qədər böyük olsa, əyri xətt bir o qədər daha dik "qalxır" (ya da düşür).

$n = 2$ olduqda $f(x) = x^n$ funksiyasının qrafiki $F(0;1/4)$ nöqtəsində fokus və $y = -1/4$ direktrisa ilə parabola təşkil edir (şəkil 3; həmçinin bax "Görkəmli əyrilər" məqaləsinə). $n = -1$ olduqda, $y = x^n = 1/x$ funksiyasının qrafiki hiperboladır (şəkil 4).

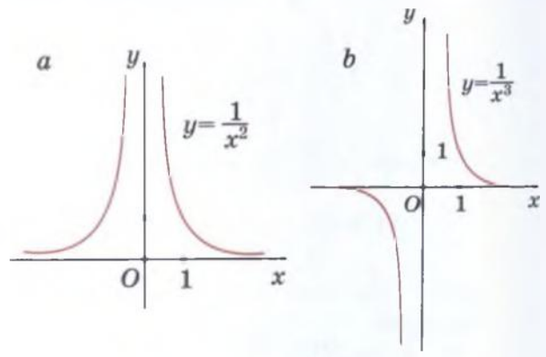


Şəkil 3.



Şəkil 4.

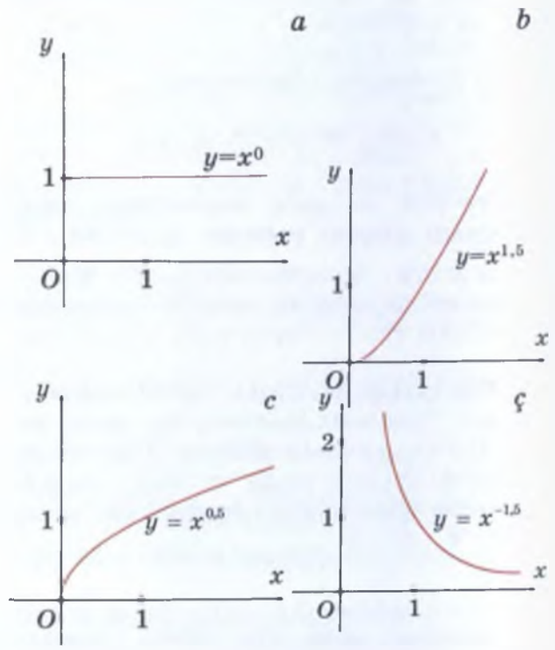
Qüvvətin tərifinə görə, $x^{-n} = 1/x^n$. Və ona görə tam mənfi üstlü qüvvət funksiyası ədəd düz xəttinin $x = 0$ nöqtəsindən başqa



Şəkil 5.

bütün nöqtələrində təyin edilib. Funksiyanın cüt və ya tək olması isə müsbət n-lərdəki kimi təyin olunur. x-in qiymətləri sonsuz böyüdükcə, hiperbola üzərindəki nöqtələr absis oxuna daha sıx yaxınlaşır. Koordinat başlanğıcının yaxın ətrafında isə əyri xətt sonsuzluğa yönəlir (şəkil 5a,b).

Kəsr və ya irrasional a üstlü $f(x) = x^a$ qüvvət funksiyası təkcə müsbət yarımoxda



Şəkil 6.

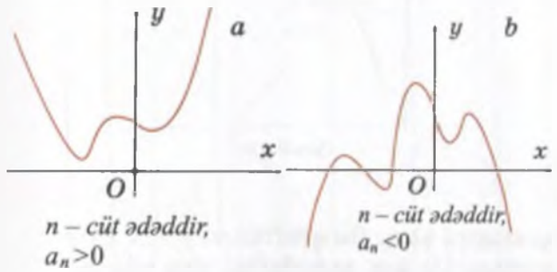
təyin edilmiş sayılır. Əgər $a < 0$, funksiya həmçinin $x = 0$ nöqtəsində təyin olunmayıb. Müxtəlif üstlər üçün qüvvət funksiyaların qrafikləri 6-cı şəkildə göstərilib.

ÇOXHƏDDLİLƏR

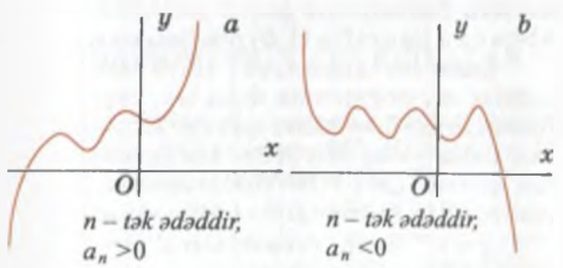
Xətti və natural üstlü qüvvət funksiyalarının təbii ümumiləşdirilməsi çoxhədlilərdir, yəni

$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ funksiyalarıdır.

Çoxhəddlilər – hesablama riyaziyyatının əsas alətidir. Bu riyaziyyatda verilmiş funksiyanı ona yaxın olan çoxhəddlilər ilə əvəz etməyə çalışırlar. Çoxhəddlilərin əsas dəyəri ondadır ki, onların qiymətlərinin hesablanması üçün təkcə üç hesab əməli tələb olunur – toplama, çıxma və vurma. İstənilən çoxhədlinin təyin oblastı – bütün həqiqi ədədlərdir. Çoxhədlinin qrafiki – hamar əyri xəttdir: onun nə kəsilmələri, nə də sınmaları var.



Şəkil 7.



Şəkil 8.

Əgər koordinat müstəvisində sərbəst seçilmiş $n + 1$ nöqtə qeyd etsək, onda dərəcəsi n-dən böyük olmayan və qrafiki verilmiş nöqtələrdən keçən çoxhədli seçmək olar. Belə çoxhədlinin axtarış prosesi interpolyasiya məsələsi adlandırılır və onun metodikası çoxdan və hərtərəfli araşdırılıb. Bundan əlavə, n dərəcəli çoxhədlinin köklərinin sayı n-dan çox deyil. Deməli, çoxhədlinin qrafiki absis oxunu n-dən çox olmayan sayda nöqtədə kəsir.

Çoxhədlinin "sonsuzluqda" davranışı arqumentin ən yüksək dərəcəsi daxil olan toplanan, yəni $a_n x^n$ ilə müəyyən edilir – x-in böyüməsi ilə o bütün qalan toplananlardan "üstün gəlir". $y=x^n$ funksiyasının özünü necə apardığı bizə artıq məlumdur və ona görə aşağıdakı nəticələrə gəlmək çətin deyil:

əgər n – cütdürsə, $a > 0$ üçün $x \to \pm\infty$ olduqda çoxhədli sonsuz böyük qiymətlər alır (qrafikin sağ və sol hissələri yuxarıya gedirlər, şəkil 7a); $a_n < 0$ - üçün tərsinədir (şəkil 7b).

əgər n – təkdirsə, $a > 0$ üçün çoxhədli $x \to +\infty$ olduqda hədsiz böyüyür, $x \to -\infty$ olduqda hədsiz azalır (şəkil 8a); $a_n < 0$ - üçün tərsinədir (şəkil 8b). Şəkildə görünür ki, qrafikin sağ və sol hissələri əks tərəflərə uzaqlaşırlar.

"AYRILMAZ CÜT" – ÜSTLÜ VƏ LOQARİFMİK FUNKSİYALAR

Əgər $y = x^a$ qüvvət funksiyası üçün a qüvvət üstünün hansısa qiyməti müəyyən edilib, qüvvətin əsası x mümkün olan müsbət qiymətləri alırsa, $y = a^x$ üstlü funksiyası üçün əksinədir: qüvvətin əsası müəyyən edilib, amma qüvvət üstü dəyişir. Əgər $a > 0$, onda $y = a^x$ üstlü funksiyası bütün x-lər üçün (təkcə müsbət qiymətlər üçün yox) təyin edilib.

"Qüvvət" anlayışı vasitəsilə "loqarifm" anlayışını təyin edirlər. x ədədini almaq üçün a ədədinin yüksəldildiyi qüvvət üstünə ($\log_a x$ kimi yazılır) x ədədinin a əsasdan loqarifması deyilir. Loqarifmin tərifindən birbaşa alınır ki:

$$a^{\log_a x} = x$$

Beləliklə, $y = a^x$ və $y = \log_a x$ – qarşılıqlı tərs funksiyalardır.

Qüvvət üstünü loqarifmin işarəsinin xaricinə çıxartmaq olar:

$$\log_a x^c = c \log_a x.$$

İki ədədin hasilinin loqarifmi onların loqarifmləri cəminə bərabərdir:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y.$$

Bu bərabərlikləri isbat etmək üçün loqarifmanın, x ədədini almaq üçün a əsasını yüksəltmək lazım gəldiyi p qüvvət üstü olmasını xatırlatmaq və

$$x^c = \left(a^p\right)^c = a^{cp}$$

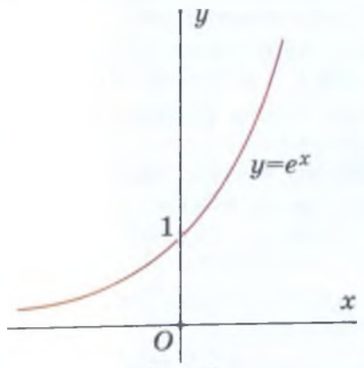
$$x \cdot y = a^p \cdot a^q = a^{p+q}$$

(burada $p = \log_a x$, $q = \log_a y$) bərabərliklərindən istifadə etmək lazımdır, vəssalam!

Əsas e=2,71828... ədədinə bərabər olanda üstlü və loqarifmik funksiyalar hətta öz işarə və adlarını da aldılar: $e^x = \exp x$ funksiyası eksponenta, $\log_e x = \ln x$ funksiyası isə – natural loqarifm adlandırılır.

Eksponentadan başlayaq. Onun hər bir üstlü funksiyadakı kimi təyin oblastı – bütün həqiqi ədədlərdir. Eksponenta təkcə müsbət ədədlər alır. x-in böyüməsi ilə e^x funksiyası monoton olaraq böyüyür və bu böyümə daha böyük x-lər üçün daha sürətli olur. O mütləq şəkildə hər hansı qüvvət funksiyasını ötəcək (məsələn, $y=x^{100000}$). Əgər x-i sola (∞) yönəltsək, onda eksponenta 0-a yaxınlaşar (nəzərə alaraq ki, $e^x = 1/e^{-x}$). Beləliklə, x=0 düz xətti $x \to -\infty$ olduqda eksponentanın üfiqi asimptotudur.

Əgər $x = 0$, onda $e^x = e^0 = 1$. Bu o deməkdir ki, e^x funksiyasının qrafiki ordinat oxunu (0;1) nöqtəsində kəsir. Eksponenta haqqında bizdə olan məlumatlara görə artıq onun qrafikini qurmaq olar (şəkil 9).



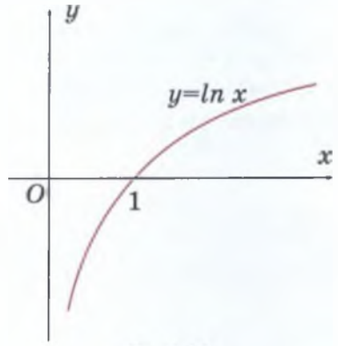
Şəkil 9.

e^x funksiyasının qiymətlərinin hesablanması üçün, onun sonsuz sıraya ayrılışı daha məqsədəuyğundur:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Buradan, xüsusi halda alınır ki, kiçik x-lər üçün $e^x \approx 1 + x$ təqribi bərabərliyi doğrudur.

Qeyd etdiyimiz kimi, natural loqarifm – eksponentaya tərs olan funksiyadır: əgər $y = e^x$, onda $x = \ln y$. Və ona görə $y = \ln x$ funksiyasının qrafikini almaq üçün, biz 9-cu şəkildə sadəcə oxların adlarını dəyişdirməliyik: Ox oxunu Oy adlandırmaq və tərsinə. Rüblərin tənbölənə nəzərən simmetrik çevirək (şəkil 10) və beləliklə də adi koordinat sistemində $y = \ln x$ funksiyasının



Şəkil 10.

qrafikini alaq. Bu qrafikdən $y = \ln x$ funksiyasının bir çox xassələrini əldə edə bilərik.

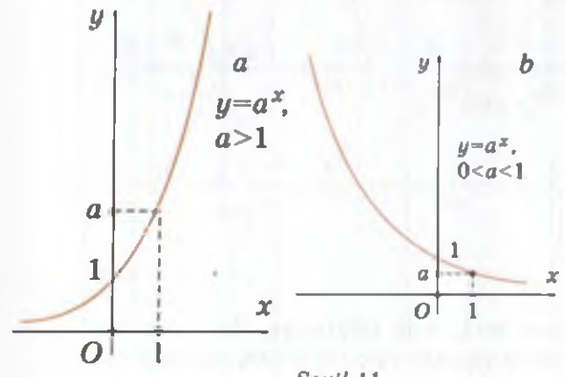
Natural loqarifmin təyin oblastı – bütün müsbət, qiymətlər oblastı isə bütün həqiqi ədədlərdir. x-in böyüməsi ilə $\ln x$ funksiyası hədsiz böyüyür, x-in 0 yaxınlaşması ilə isə - hədsiz azalır. Və ona görə ordinat oxu funksiyanın şaquli asimptotu olur. Absis oxu ilə qrafik (1;0) nöqtəsində kəsişir.

Daha bir xüsusiyyət əlavə edək. Məlumdur ki, eksponenta daha tez, loqarifmik funskiya isə hər hansı qüvvət funksiyasından daha yavaş böyüyür. Hətta axırıncısının qüvvət üstü 0,0000001 olsa da, o gec-tez loqarifmik funksiyanı ötüb-keçəcək.

$y = a^x$ üstlü funksiyasına qayıdaq. a ədədini almaq üçün e ədədini hansı dərəcədən qüvvətə yüksəltmək lazımdır? natural loqarifmin tərifinə görə bu $\ln a$-dır, deməli:

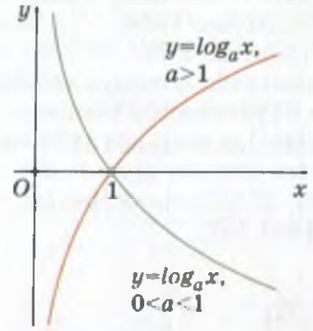
$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \ln a}$$

Və ona görə $a > 1$ olduqda a^x funksiyası özünü eksponenta kimi aparır, ancaq onun qrafiki Ox oxuna ln a dəfə "sıxılıb" (şəkil



Şəkil 11.

11a). Əgər $0 < a < 1$, onda $\ln a = -\ln(1/a)$, yəni mənfidir. Bu halda üstlü funksiya $x \to -\infty$ olduqda hədsiz böyüyür, $x \to \infty$ olduqda isə 0-a yaxınlaşır (şəkil 11b).



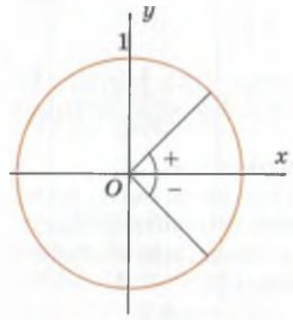
Şəkil 12.

Oxşar olaraq $y = \log_a x$ loqarifmik funksiyası haqqında mühakimələr aparmaq olar (şəkil 12).

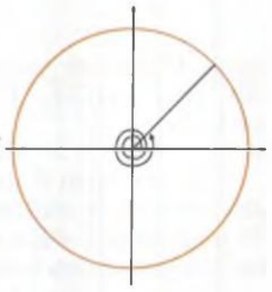
TRİQONOMETRİK FUNKSİYALAR

Biz bilirik ki, bucaqlar adətən dərəcə ilə ölçülür. Düz bucaq – 90°, iti bucaqlar 0° və 90° arasında, kör bucaqlar isə – 90° və 180° arasındadılar. Bucaqların başqa ölçmə üsulu da var: vahid ölçü kimi çevrənin radiusuna bərabər olan qövsə uyğun mərkəzi bucaq götürülür. Belə bucaq radian adlandırılır. Tam bucaq (360°) $2\pi r/r = 2\pi$ radianda, açıq bucaq (180°) π və nəhayət düz bucaq $\pi/2$ radianına bərabərdir. "Radian" sözünü adətən işlətmirlər, məsələn, "π radiana bərabər olan bucağın sinusu" ifadəsinin yerinə sadəcə "sinus π" deyirlər.

Həmçinin mənfi bucaqları da araşdırırlar. Koordinat müstəvisində mərkəzi O nöqtəsində yerləşən vahid çevrə çəkək. Bucaqları Ox oxunun müsbət istiqamətindən hesablayacağıq. Saat əqrəbi hərəkətinin əksinə isətiqamətdə ayrılmış bucağı müsbət, saat əqrəbi istiqamətində ayrılmış bucağı mənfi qəbul edirlər (şəkil 13). Bucağın hesablan-



Şəkil 13.

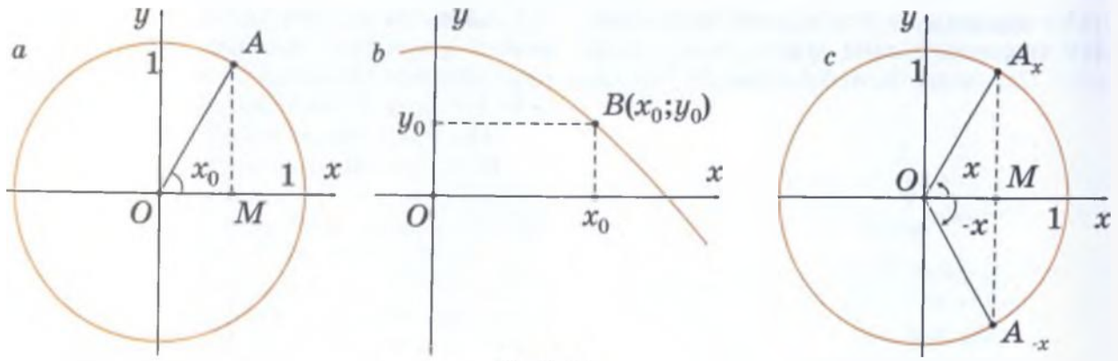


Şəkil 14.

ması zamanı O nöqtəsinin ətrafında hər hansı sayda dövr etmək olar (şəkil 14). Deməli, bucağın qiyməti hər hansı həqiqi ədəd ola bilər. Onda müvafiq olaraq sinus və kosinus düzbucaqlı üçbucağın tərəflərinin nisbətindən bütün ədəd oxunda təyin olunmuş sin x və cos x ədədi funksiyalarına çevrilirlər.

y=cos x funksiyası. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən vahid çevrə quraq. x_0 qiymətini sərbəst şəkildə seçək və Ox oxundan x_0 bucağını ayıraq. Vahid çevrə üzərində bu bucağa hansısa A nöqtəsi uyğundur (şəkil 15a), onun Ox oxuna proyeksiyası isə M nöqtəsi olacaq. Aydındır ki, OM parçasının uzunluğu A nöqtəsinin absisinin mütləq qiymətinə bərabərdir. Arqumentinin verilmiş x_0 qiymətinə A nöqtəsinin absisi kimi $y_0 = \cos x_0$ funksiyası qarşılaşdırılıb. Uyğun olaraq $B(x_0; y_0)$ nöqtəsi $y = \cos x$ funksiyanın qrafikinə aiddir (şəkil 15b).

Əgər A nöqtəsi Oy oxundan sağa yerləşirsə, onda kosinus müsbət olacaq, əgər sol tərəfdə isə – onda mənfi olacaq. Amma hər



Şəkil 15.

halda O nöqtəsi çevrədən çıxa bilməz. Və ona görə kosinus -1-dən 1-ə kimi aralıqda yerləşir:

$$-1 \le \cos x \le 1$$

2π-nin misli olan hər hansı bucaq qədər əlavə dönmə A nöqtəsini eyni yerə qaytarır. Və ona görə $y = \cos x$ funksiyası dövridir, onun dövrü 2π-yə bərabərdir:

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

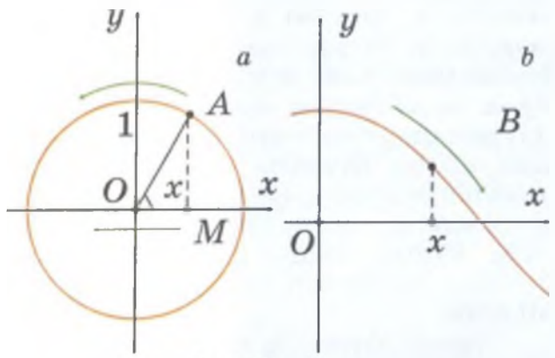
İndi isə arqumentin mütləq qiymətcə eyni, işarəcə əks olan iki qiymətini götürək: x və $-x$. Çevrədə müvafiq A_x və A_{-x} nöqtələrini tapaq. 15*c* şəkildə göründüyü kimi Ox oxuna onların proyeksiyası eyni M nöqtəsidir. Və ona görə:

$$\cos(-x) = \cos x$$

yəni kosinus – cüt funksiyadır.

Deməli, $y = \cos x$ funksiyasının xassələrini $[0, \pi]$ parçasında araşdırmaq olar, sonra isə onun cütlük və periodikliyini nəzərə alarıq.

x=0 olanda, A nöqtəsi Ox üzərində yerləşir, onun absisi 1-ə bərabərdir və ona görə cos 0=1. x-in böyüməsi ilə A nöqtəsi çevrə üzrə yuxarı və sola keçir, onun proyeksiyası, təbii olaraq, təkcə sol tərəfə keçir və $x = \pi/2$ olduqda kosinus 0-a bərabər olur. Bu zaman A nöqtəsi maksimal hündürlüyə qalxır və sonra isə sol tərəfə irəliyəyək, artıq aşağı düşür. Onun absisi azalır və nəhayət $x = \pi$ olduqda -1-ə bərabər olan ən aşağı qiymətə çatır. Beləliklə, $[0,\pi]$ kəsiyində $y = \cos x$ funksiyası 1-dən -1-ə kimi monoton azalır (şəkil 16 *a*,*b*).



Şəkil 16.

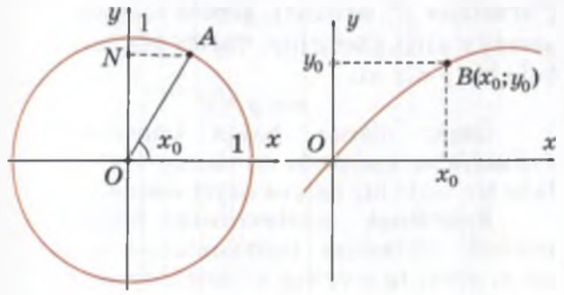
Kosinusun cüt olmasını xatırlasaq, alarıq ki, $[-\pi,0]$ parçasında funksiya monoton olaraq -1-dən 1-ə kimi böyüyür və $x = -\pi/2$ olduqda sıfra bərabər qiymət alır. Əgər bir neçə period götürsək, dalğavari əyri xətt alınacaq (şəkil 17).



Şəkil 17.

Beləliklə, $y = \cos x$ funksiyası $x = \pi/2 + k\pi$ (k – hər hansı tam ədəddir), nöqtələrində sıfra bərabər olan qiymətlər alır. 1-ə bərabər olan maksimumlar, təkcə $x = 2k\pi$ nöqtələrində, -1-ə bərabər olan minimumlar isə $x = \pi + 2k\pi$ nöqtələrində alınır.

$y = \sin x$ funksiya. Mərkəzi koordinat başlanğıcında yerləşən vahid çevrə çəkək və absis oxundan x_0 bucağını ayıraq. Vahid çevrədə ona A nöqtəsi uyğundur (şəkil 18*a*) və Oy oxuna onun proyeksiyası isə N nöqtəsi olacaq. $y_0 = \sin x_0$ funksiyasının qiymətini A nöqtəsinin ordinatı kimi təyin edək. $B(x_0; y_0)$ nöqtəsi $y = \sin x$ funksiyasının qrafikinə aiddir (şəkil 18*b*). Aydındır ki, y=sin



Şəkil 18.

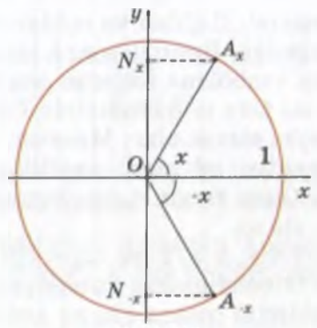
x funksiyası dövridir, onun dövrü 2π-yə bərabərdir:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

İndi isə arqumentin iki qiymətini x və $-x$ götürək. Onlara müvafiq olan A_x və A_{-x} nöqtələrinin Oy oxuna proyeksiyaları O nöqtəsinə nəzərən simmetrik yerləşəcəklər. Və ona görə:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

yəni sinus – tək funksiyadır (şəkil 19).

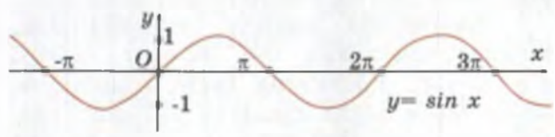


Şəkil 19.

İndi isə qeyd edək ki, əgər A nöqtəsini O nöqtəsinə nəzərən $\pi/2$ bucağı qədər saat əqrəbi əksinə döndərsək (başqa sözlə desək, əgər x bucağını $\pi/2$ bucağı qədər böyütsək), onda onun yeni mövqeyində ordinatı köhnə mövqeyində absisinə bərabər olacaq. Deməli:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$

Başqa sözlə desək, sinus – $\pi/2$ qədər "gecikən" kosinusdur, çünki əgər arqument $\pi/2$ böyüsə, kosinusun hər bir qiyməti sinusda təkrarlanacaq. Və sinusun qrafikini qurmaq üçün, bizə kosinusun qrafikini $\pi/2$ qədər sağ tərəfə sürüşdürmək kifayətdir (şəkil 20).

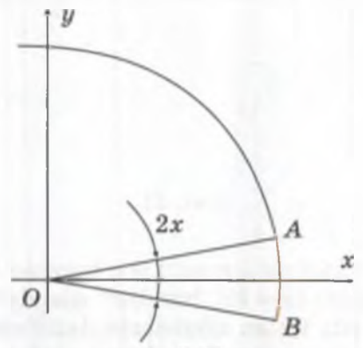


Şəkil 20.

Sinusun son dərəcə vacib xüsusiyyəti belə bir bərabərlik ilə ifadə olunur:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (*)$$

Onun həndəsi mənasını 21-ci şəkildəki təsvirdən başa düşmək olar. Burada $x - AB$ qövsünün yarısıdır, sin x – isə uyğun olan



Şəkil 21.

vətərin yarısıdır. Aydındır ki, A və B nöqtələri bir-birinə yaxınlaşdıqca vətərin uzunluğu da qövsün uzunluğuna yaxınlaşır. Elə bu şəkildən asanlıqla belə bir bərabərsizlik göstərmək olar: istənilən x üçün

$$|\sin x| < |x|$$

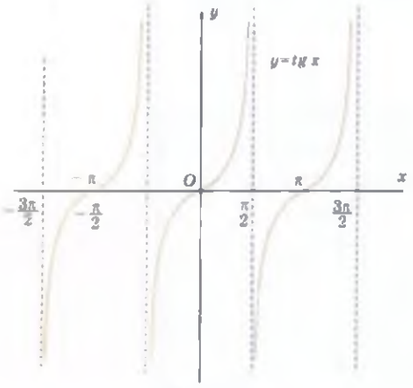
(*) düsturunu riyaziyyatçılar I görkəmli limit adlandırırlar. Ondan, xüsusi halda alınır ki, kiçik x-lər üçün $\sin x \approx x$.

***y = tg x, y = ctg x* funksiyaları.** Tangens və kotangens kimi başqa iki triqonometrik funksiyaları bizə artıq məlum olan sinus və kosinusun nisbəti kimi təyin etmək daha rahatdır:

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

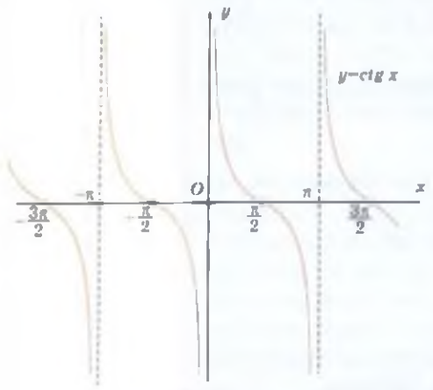
Sinus və kosinus kimi, tangens və kotangens də – dövri funksiyalardır, amma onların dövrləri π-yə bərabərdir, yəni sinus və kosinusun dövründən iki dəfə azdır. Bunu səbəbi bəllidir: ikisi də işarələrini dəyişdirərlər, amma nisbətləri dəyişməyəcək.

Məxrəcində kosinus yerləşdiyindən, tangens kosinusun 0-a bərabər olduğu $x = \pi/2 + k\pi$ nöqtələrdə təyin olunmayıb. Qalan başqa nöqtələrin daxil olduqları aralıqlarda o monoton artır. $x = \pi/2 + k\pi$ düz xətləri tangens üçün şaquli asimptotlardır. $k\pi$ nöqtələrində tangens və bucaq əmsalı uyğun olaraq 0 və 1-ə bərabərdirlər (şəkil 22).



Şəkil 22.

Kotangens sinusun 0-a bərabər olduğu nöqtələrdə ($x = k\pi$ bərabər olanda) təyin olunmayıb. Qalan nöqtələrin daxil olduqları aralıqlarda o monoton olaraq azalır, $x = k\pi$ düz xətləri isə onun şaquli asimptotlarıdır. $x = \pi/2 + k\pi$ nöqtələrində kotangens 0-a çevrilir, bu nöqtələrdə bucaq əmsalı isə -1-ə bərabərdir (şəkil 23).



Şəkil 23.

Tərs triqonometrik funksiyalar. $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$ və $ctg\,x$ üçün tərs funksiyalar təyin etmək olar. Onlar uyğun olaraq $\arcsin x$ ("arksinus x" oxunur), $\arccos x$, $arctg\,x$ və $arcctg\,x$ kimi göstərilir. Tərifə görə $\arcsin x$ belə bir y-dir ki:

$$\sin y = x$$

Oxşar olaraq, başqa triqonometrik funksiyalar haqqında da danışırlar. Amma belə bir tərif bir balaca qeyri-dəqiqdir.

Koordinat müstəvisinin birinci və üçüncü rüblərinin tənbölənlərinə nəzərən $\sin x$, $\cos x$, $tg\,x$ və $ctg\,x$-i əks etdirək. Onların periodikliyindən funksiyalar artıq birqiymətli deyillər: eyni sinusa (kosinusa, tangensə, kotangensə) sonsuz qədər çox bucaq uyğundur.

Birqiymətli olmamasından qurtarmaq üçün, biz π enliyi ilə hər triqonometrik funksiyanın qrafikindən əyri xətli bir kəsik hissəsi seçək. Seçmə zamanı biz arqument və funksiyanın qiyməti arasında qarşılıqlı birqiymətliliyin qorunmasını diqqətlə izləməliyik. Biz koordinat başlanğıcına yaxın hissələr seçəcəyik. Xüsusən, $\sin x$ funksiyası üçün $[-\pi/2, \pi/2]$ götürək, $[0, \pi]$ kəsiyini $\cos x$ üçün, $tg\,x$ üçün $(-\pi/2, \pi/2)$, $ctg\,x$ üçün – $[0, \pi]$ kəsiyini. Sağdan və soldan qalan kəsikləri isə pozaq. Bundan sonra hər əyri xəttin qalığını tənbölənə nəzərən əks etdirək.

İndi isə tərs triqonometrik funksiyaları dəqiq təyin etmək olar. Məsələn, tutaq ki, x_0 arqumentin qiyməti verilib, belə ki $0 \le x_0 \le 1$. Onda $\arcsin x_0$-ın yeganə qiyməti y_0 olacaq, elə ki

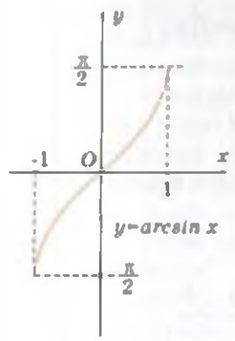
$$-\pi/2 \le y_0 \le \pi/2 \quad \text{və} \quad x_0 = \sin y_0$$

Tərs triqonometrik funksiyaların əsas xüsusiyyətlərini qısaca olaraq sadalayaq:

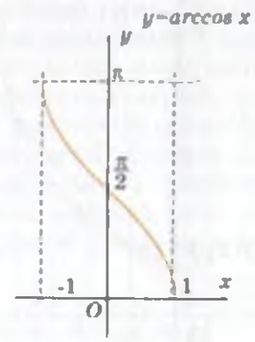
arcsin x (şəkil 24): $[-1, 1]$ parçası – təyin oblastıdır; $[-\pi/2, \pi\ 2]$ – qiymətlər oblastıdır; monoton artan funksiyadır;

arccos x (şəkil 25): $[-1, 1]$ parçası – təyin oblastıdır; $[0, \pi]$ – qiymətlər oblastıdır; monoton azalan funksiyadır;

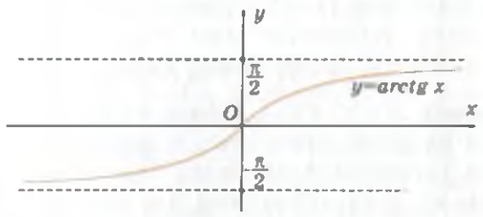
arctg x (şəkil 26): bütüh həqiqi ədədlər – təyin oblastıdır; $(-\pi/2, \pi/2)$ intervalı – qiymətlər oblastıdır; monoton artan funksiyadır; $y = -\pi/2$ və $y = \pi/2$ üfiqi asimptotlarıdır;



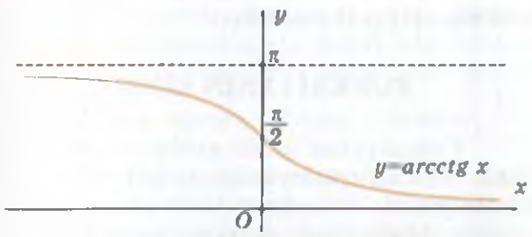
Şəkil 24.



Şəkil 25.



Şəkil 26.



Şəkil 27.

arcctg x (şəkil 27): bütün həqiqi ədədlər – təyin oblastıdır; $(0, \pi)$ intervalı – qiymətlər oblastıdır; monoton azalan funksiyadır; $y = 0$ və $y = \pi$ düz xətləri üfiqi asimptotlardır.

FUNKSİYANIN QRAFİKİNƏ TOXUNAN

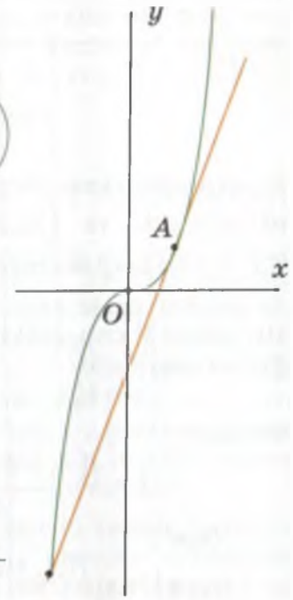
Toxunan xətt anlayışı riyaziyyatda ən qədim anlayışlardan biridir. Həndəsədə çevrəyə çəkilmiş toxunan xətti bu çevrə ilə yeganə ortaq nöqtəsi olan düz xətt kimi təyin edirlər. Qədmilər pərgar və xətkeşin vasitəsilə çevrəyə toxunan xətləri (şəkil 1), sonralar isə konik kəsiklərə: ellipslərə, hiperbolalara və parabolalara toxunanlar çəkirdilər.

Toxunan xəttlərə maraq Yeni zamanda dirçəldi. O vaxt qədim alimlərə məlum olmayan əyir xəttlər kəşf edilmişdir. Məsələn, Qaliley sikloidanı daxil etdi, Dekart və Ferma isə ona toxunan xətt çəkdilər. *XVII* əsrin birinci üçdə bir hissəsində artıq başa düşməyə başladılar ki, əyri xəttə çəkilmiş toxunan xətt toxunma nöqtəsinin yaxınlığında bu əyri xəttin davranışı ilə təyin olunur və toxunan xətt – verilmiş nöqtənin verilmiş ətrafında əyri xəttə "maksimal dərəcədə sıx yanaşı olan" düz xəttdir (baxmayaraq ki, toxunan xəttin əyri xətt ilə toxunma



Şəkil 1.

Şəkil 3.



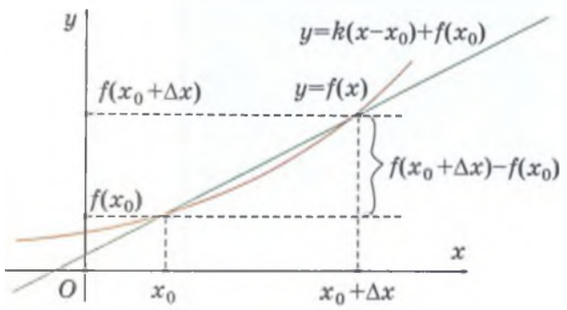
Şəkil 2.

nöqtəsindən başqa nöqtələrdə də kəsişmə nöqtəsi ola bilər; şəkil 2). Həmçinin, verilmiş nöqtədə əyri xəttə toxunan xəttinin çəkilməsinin mümkünsüzlüyünü də təsəvvür etmək olar (şəkil 3).

Differrensial hesabının yaranmasına gətirən məsələlərdən biri də toxunan xəttlərin qurulması idi. Differensial hesabına aid olan ilk çap olunan kitab Leybnisə məxsus idi və "Maksimum və minimumların yeni üsulu və həmçinin nə irrasional, nə də kəsr qiymətlərin əngəl olmadığı toxunan xəttləri

və bunun üçün hesablamanın yeni növü" adlandırılmışdır.

Tutaq ki, 4-cü şəkildə təsvir edilmiş əyri xətt $f(x)$ funksiyasının qrafikidir və biz x_0 nöqtəsində bu əyri xəttə toxunan çəkməliyik. Biz aşağıdakı üsul ilə bunu edəcəyik:



Şəkil 4.

x_0 nöqtəsinə yaxın olan $x = x_0 + \Delta x$ nöqtəsini götürək və $(x_0; f(x_0))$ və $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ nöqtələrindən düz xətt (ya da necə deyirlər kəsən xətti) keçirək. Kəsən xəttin tənliyi (bunu yoxlamaq çətin deyil) aşağıdakı şəkildədir:

$$y = k(x - x_0) + f(x_0)$$

burada:

$$k = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Əgər

$$\lim_{\Delta x \to 0} k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \kappa_0$$

limiti varsa, onda

$$T(x) = k_0(x - x_0) + f(x_0)$$

düz xəttini x_0 nöqtəsində $f(x)$ funksiyasının qrafikinə toxunan adlandırırlar. Başqa sözlə desək, toxunan xətti kəsənlərin $\Delta x \to 0$ olduqda limit vəziyyəti olan düz xətt kimi təyin etmək olar (şəkil 5).

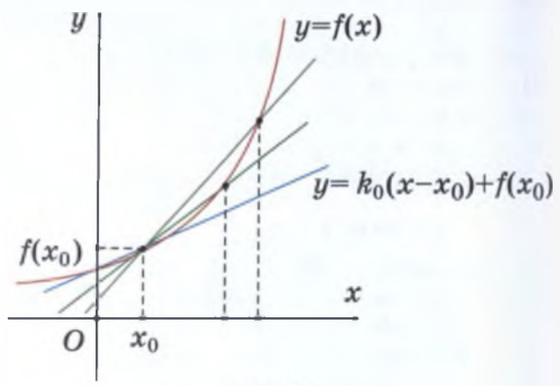
κ_0 qiymətinin tərifindən görünür ki: Δx 0-a yaxınlaşırsa,

$$\alpha(\Delta x) = \frac{f(x_0 + \Delta x_0)}{\Delta x} - k_0$$

funksiyası da 0-a yaxınlaşır. Axırıncı bərabərlik o deməkdir ki:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + k_0 \Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

yəni



Şəkil 5.

$$f(x) - T(x) = \alpha(\Delta x)\Delta x$$

(burada $x = x_0 + \Delta x$). Başqa sözlə desək, x x_0-a nə qədər yaxındırsa, o qədər də kəsən xətt funksiyanın qrafikinə "sıxılır", o mənada ki, $f(x) - T(x)$ fərqi 0-a Δx-dən də tez yaxınlaşır. $(x_0; f(x_0))$ nöqtəsindən keçən bütün bu düz xəttlərdən təkcə toxunana belə xüsusiyyətlər aiddir.

FUNKSİYANIN LİMİTİ

Funksiyanın limiti anlayışı riyazi analizin əsas anlayışlarından biridir və müasir riyaziyyatda əhəmiyyət kəsb edən bir anlayışdır. Məhz limit anlayışı (ardıcıllığın və funksiyanın) riyazi analiz elmini xarakterizə edir. Bu anlayış məktəblilər tərəfindən çətin anlaşılır. Tarixə nəzər saldıqda bu anlayışın özü də birbaşa, heç bir çətinlik olmadan yaranmamışdır.

Qədim dövrün ən böyük riyaziyyatçısı Arximed (287-212.il.b.e.g) bir sıra məsələlərin həllində limit anlayışına yıxınlaşa bilmiş, lakin onun dəqiq tərifini verə bilməmişdir və bu, o dövr üçün mümkün də deyildi. O, bir çox fiqurların sahə və həcmlərini hesabladıqda müəyyən üsullar tətbiq etmişdir ki, onların da ciddi əsaslandırılması limit anlayışı ilə bağlıdır. Uzun müddət, riyaziyyat inkişaf etdikcə, bu anlayışın tərifini verməyə cəhdlər olmuşdur. Lakin ilk ciddi tərifə XVII əsrin ortalarında ingilis riyaziyyatçısı Vallisin (1616-1703) işlərində rast gəlinir. Lakin bu anlayışın, riyazi analizin əsasını təşkil edən bir anlayış kimi XIX əsrin görkəmli riyaziyyatçısı fransız

Koşi (1789-1857) tərəfindən onun "Analiz kursu" (1821) və "Diferensial hesab"ı haqqında (1829) əsərlərində, əsasən dəqiq tərifi verilmişdir. O ikinci kitabında bunu belə yazır: Əgər hər hansı bir kəmiyyətin qiymətləri, qeyri-məhdud olaraq qeyd olunmuş bir qiymətə (ədədə) yaxınlaşırsa və müəyyən mərhələdən sonra ondan istənilən qədər az fərqlənirsə, onda bu qiymət (ədəd) qalanların limiti adlanır".

Qeyd edək ki, bu kitablar nəşr olunana qədər Çex riyaziyyatçısı Boltsana (1781-1848) tərəfindən də çox böyük və əsaslı nəticələr alınmışdır. Sual oluna bilər ki, niyə limit anlayışı riyaziyyatda öz yerini çox gec tapmış və onun tərif edilməsində çatışmamazlıqlar nə ilə əlaqədardır? Məsələ burasındadır ki, sonlu kəmiyyətlərdən sonsuz kəmiyyətlərə keçid, diskret kəmiyyətlərdən kəsilməz kəmiyyətlərə keçid yeni abstrakt-məntiqi təfəkkürlərin yaranması və inkişaf etdirilməsi nəticəsində baş verir. Sonlu və diskret kəmiyyətlərə aid hökmlərin birbaşa sonsuz və kəsilməz kəmiyyətlərə keçirilməsi çoxlu sayda səhvlərə gətirir. Məsələn, istənilən sonlu sayda ədədlərin ən kiçiyi və ən böyüyü var. Lakin bunu sonsuz çoxluqlarda demək olmaz. Məsələn $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $n \in N$ çoxluğunun ən kiçik qiymətli həddi yoxdur, (0,1) intervalındakı ədədlərin ən böyüyü və ən kiçiyi yoxdur. Sonlu çoxluqlar öz hissəsindən çox element saxlayır, sonsuz çoxluqlar da isə bu belə deyil, məsələn (0,1) ilə $(-\pi/2, \pi/2)$ arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğu $y = -\frac{\pi}{2} + \pi x$ vasitəsilə, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ilə $R = (-\infty, \infty)$ arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğu isə $z = tgy$ ilə və beləliklə (0,1) ilə $(-\infty, \infty)$ arasında qarşılıqlı birqiymətli əlaqəni $z = tg\left(-\frac{\pi}{2} + \pi x\right)$ ilə yaratmaq olar. Deməli, baxmayaraq ki, bu çoxluqlardan biri digərinin alt hissəsidir, lakin onların elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var, deməli "elementlərinin sayları" bərabərdir.

Bu anlayışın riyazi analizə nə qədər çətin daxil olduğunu göstərmək üçün qeyd edək ki, ən görkəmli alimlər, abstrakt məntiqi təfəkkürdən yan keçərək bunu izah etmək üçün, bəzən mistik izahlardan istifadə etmişlər. (Məsələn, sonsuz kiçik kəmiyyətlər – köçən kəmiyyətlərin ruhu kimi qələmə verilmiş və bundan riyazi analizin tənqidi üçün istifadə etmişlər. Leybnisdə sonsuz kiçik kəmiyyətlərə, heç nə ilə müqayisə edilməyən kiçik kəmiyyətlər (məsələn sabun köpüyünün Yerlə münasibəti kimi), Nyüton isə limitə dəyişənin "ən son" qiyməti kimi baxmışdır. Sonralar, görkəmli fransız riyaziyyatçısı Dalamber (1717-1783) də bəzi səhvlərə yol vermişdir. O, limitə ən yaxşı təriflərdən birini vermiş, lakin hesab etmişdir ki, dəyişən bu limit qiyməti ala bilməz. Ümumiyyətlə Koşının özü də kəsilməz funksiyalar ardıcıllığının limitinin xassəsini verdikdə səhvlərdən yan keçə bilməmişdir.

FUNKSİYANIN LİMİTİNİN TƏRİFİ

Funksiyanın limitinin tərifini vermək üçün əvvəlcə ardıcıllığın limitinin tərifini yada salaq. Bunun üçün əvvəlcə Koşinın verdiyi tərifini ümumi şəkildə ifadə edək.

a ədədi dəyişən y kəmiyyətinin hər hansı prosesdə limiti adlanır, o deməkdir ki, istənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün bu prosesde elə bir mərhələ əmələ gəlir ki, bundan sonra $|y - a| < \varepsilon$ bərabərsizliyi doğru olur.

Bu tərifin üstünlüyü ondan ibarətdir ki, burada "proses", "mərhələ" sözlərinin dəqiq riyazi mənası verilmir. Ona görə də yuxarıdakı tərifdə limitin təxmini tərifi verilir. Əgər bunlara dəqiq riyazi məna verilərsə, onda limitin dəqiq tərifinə gəlmək olar. Məsələn, tutaq ki, $\{y_n\}$ –ardıcıllıqdırsa, onda y_n-in limitinin a olması o deməkdir ki, n qeyri-müəyyən olaraq artdıqda y_n-lər a-ya istənilən qədər yaxınlaşır. Bu halda "hadisə" sözünün altında n-in natural ədədlər çoxluğunda artması (bu vaxt y_n bu qiymətləri alır, $y_1, y_2, y_3, \ldots$) "müəyyən mərhələ isə elə bir N nömrəsinin olduğunu göstərir ki, $n \geq N$ olduqda $|y_n - a| < \varepsilon$ olur.

Beləliklə aşağıdakı tərifi alırıq.

İstənilən $\varepsilon > 0$ ədədi üçün elə N nömrəsi tapmaq olarsa, $n \geq N$ şərtini ödəyən bütün

n-lər üçün $|y_n - a| < \varepsilon$ bəra- bərsizliyi ödənərsə, onda a ədədi $\{y_n\}$ ardıcıllığının limiti adlanır.

Qeyd edək ki, bu tərifdən görünür ki, $\varepsilon > 0$ ədədi kiçildikcə y_n-in qiymətləri müəyyən nömrədən sonra a-ya daha yaxın olur, lakin bu zaman N ədədinin qiyməti böyüyə bilər.

İndi isə x arqumenti x_0-a yaxınlaşdıqda $f(x)$ funksiyasının limitinin A olmasanı biz belə ifadə edirik. $|x - x_0|$ sıfra yaxın olduqca $|f(x) - A|$ ifadəsi də sıfra yaxınlaşır. Burada "proses" sözü altında x-kəmiyyəti x_0-a yaxınlaşdıqca $|x - x_0|$ kəmiyyətinin qeyri məhdud olaraq azalmasıyla, $f(x)$-ın qiymətinin A-ya yaxınlaşması nəzərdə tutulur, "mərhələ" isə $|x - x_0|$-nin kifayət qədər kiçik olmasıdır, yəni elə $\delta > 0$ ədədi olmalıdır ki, $0 < |x - x_0| < \delta$ olduqda $|f(x) - A|$ kiçik olsun. Beləliklə belə bir tərifə gəlirik.

Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası (a, b)-də təyin olunub. $x_0 \in (a, b)$. $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ tapmaq olarsa ki, $|x - x_0| < \delta$ şərtini ödəyən $x \in (a, b)$, $x \neq x_0$ üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənərsə, onda A ədədinə $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti deyilir və simvolik olaraq belə yazılır.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A, \qquad f(x) \to A, \qquad x \to x_0$$

olduqda.

Bu tərifdən görünür ki, $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi $x = x_0$ nöqtəsində ödənməyə də bilər. Bu bir də ondan irəli gəlir ki, $f(x)$ funksiyası x_0-da təyin olunmaya da bilər.

✓ **$f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti varsa o yeganədir.**

Doğrudan da tutaq ki, bu funksiyanın x_0 nöqtəsində iki limiti var: A və B Onda $\forall \varepsilon > 0$ üçün elə $\delta_1, \delta_2 > 0$ ədədləri var ki, $|f(x) - A| < \varepsilon / 2$ bərabərsizliyi $|x - x_0| < \delta_1$ olduqda, $|f(x) - B| < \varepsilon / 2$, bərabərsizliyi $|x - x_0| < \delta_2$ $(x \neq x_0)$ olduqda ödənir. Onda $\min(\delta_1, \delta_2) = \delta$ olduqda

$$|A - B| = |f(x) - A - f(x) - B| \le |f(x) - A| + |f(x) - B| < \varepsilon / 2 + \varepsilon / 2 = \varepsilon$$

bərabərsizliyi $|x - x_0| < \delta$ olduqda $(x \neq x_0)$ ödənər. Lakin $\varepsilon > 0$ istənilən ədəd olduğundan $\varepsilon = \dfrac{|A - B|}{2}$ olduqda bu bərabərsizlik ödənməz. Bu isə yalnız $A = B$ olduqda doğrudur.

$f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 2$, $x \in [0,3]$, funksiyasının $x_0 = 2$ nöqtəsində limitini hesablayaq. $x \to 2$ yaxınlaşdıqda $f(x)$-inqiymət 4-ə yaxın qiymətlər olur. İndi göstərək ki, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$. $\varepsilon > 0$ istənilən ədəddir. İndi $\delta > 0$ ədədini elə seçək ki, $|f(x) - 4| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin.

$$|f(x) - 4| = \left|\frac{1}{2}x^2 + 2 - 4\right| = \frac{1}{2}|x^2 - 4| = \frac{1}{2}, |x - 2|$$

$$|x + 2| < \frac{1}{2}\delta \cdot 5$$

Deməli $\dfrac{5}{2}\delta = \varepsilon$, yəni, $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{5}$ götürsək $|x - 2| < \dfrac{2\varepsilon}{5}$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x) - 4| < \varepsilon$ olar. Qeyd edək ki, burada $x = 2$ olduqda da $|f(2) - 4| = 0 < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənir.

$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3}{x - 3}, & x = 3 \end{cases}$ funksiyasının $x \to 3$ olduqda limitini hesablayaq. $x \neq 3$ olduqda $f(x) = \dfrac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = x + 3$, lakin $x \neq 3$ olduqda x-in 3-ə yaxın qiymətlərində $f(x)$-in qiymətləri 6-ya yaxın olur. Göstərək ki $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 6$. Doğurdan da $\varepsilon > 0$ istənilən, onda $|f(x) - 6| = |x - 3| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənir, deməli $\delta = \varepsilon$ götürmək $x \neq 3$ olduqda kifayətdir.

İsbat edək ki, $\lim(\kappa x + b) = \kappa a + b, \kappa \neq 0$. Aydındır ki, $0 < |x - a_0| < \delta$ olduqda

$$|(\kappa x + b) - (\kappa a + b)| < \varepsilon$$

bərabərsizliyinin ödənildiyini yoxlamaq lazımdır. Bunun üçün verilən $\varepsilon > 0$ üçün tələb olunan δ-ni tapaq. Aydındır ki,

$$|(\kappa x + b) - \kappa a + b)| = |\kappa||x - a| < \varepsilon$$

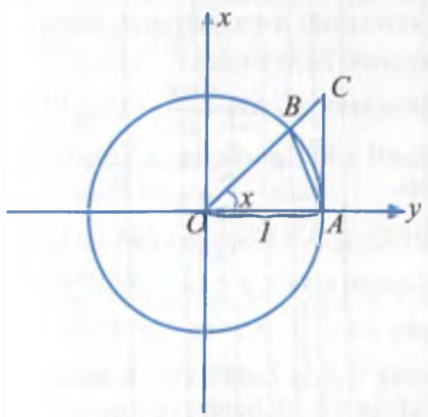
bərabərsizliyi $|x - a| < \dfrac{\varepsilon}{|\kappa|}$ olduqda ödənir. Deməli, $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|\kappa|}$ götürmək kifayətdir.

Göstərək ki, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$ və $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos_0$

$\forall \varepsilon > 0$ ədədini qeyd edək və elə $\delta > 0$ seçək ki, $|x - x_0| < \delta$ olduqda $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin. Məlumdur ki, $|x| \ge |\sin x|$ bərabərsizliyi həmişə doğrudur. Doğurdanda $|x| \ge 1$ olduqda bu bərabərsizlik həmişə doğrudur. Lakin $|x| \le 1$ olduqda bu bərabərsizliyi belə göstərmək olar $0 < x < \pi / 2$ olduqda şəkil 1-dən göründüyü kimi $S_{\Delta AOB} < S_{\text{sek}AOB}$ deməli,

$\dfrac{1}{2} 1 \cdot 1 \cdot \sin x < \dfrac{1}{2} x \cdot 1^2$ yəni

olur. Onda



Şəkil 1.

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\sin\frac{x + x_0}{2} \cdot \sin\frac{x - x_2}{2}\right| \le$$

$$= 2\sin\left|\frac{x - x_0}{2}\right| < 2\left|\frac{x - x_0}{2}\right| < |x - x_0|.$$

Deməli, $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ olması üçün $\delta = \varepsilon$ götürmək kifayətdir. Çünki $|x - x_0| < \varepsilon$ olduqda $|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon$ olar.

Deməli, $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$. Xüsusi halda $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x \to \pi/2} \sin x = 1$ olar.

Digər misalda isə

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x + x_0}{2} \sin\frac{x - x_0}{2}\right| \le$$

$$\le 2\sin\left|\frac{x - x_0}{2}\right| \le |x - x_0| < \varepsilon$$

Deməli $\varepsilon = \delta$ götürdükdə $|\cos x - \cos x_0| < \varepsilon$ bərabərsizliyi $|x - x_0| < \varepsilon$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün ödənir.

Göstərək ki,

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0, \end{cases}$$

funksiyanın $x_0 = 0$-da limiti yoxdur. Doğurdan da $x = 0$ nöqtəsinin istənilən δ ətrafını götürək $|x| < \delta$, $x \neq x_0 = 0$. Elə bir A ədədi olsa idi, $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənsin, A ədədi $f(x)$-in o nöqtəsində limiti olardı. Lakin bu funksiya bu ətrafda 1 və -1 qiymətlərini alır. Ona görə istənilən $\varepsilon > 0$ üçün $|A - 1| < \varepsilon$, $|A + 1| < \varepsilon$ bərabərsizlikləri ödənməlidir. Bu isə mümkün deyildir, çünki bu bərabərsizliklərdən $A = 1$ və $A = -1$ alırıq. Bu isə limitin yeganəliyinə ziddir.

$f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$ funksiyasının $x_0 = 0$ nöqtəsində limitin tapaq. Aydındır ki, $|f(x)| = |x|\left|\sin\dfrac{1}{x}\right| \le |x|$. Onda $\forall \varepsilon > 0$ üçün $|f(x) - 0| \le |x - 0| < \varepsilon$ bərabərsizliyi $\delta = \varepsilon$ olduqda ödə-

nir. Deməli, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$.

Funksiyanın limitinin ardıcıllıq dilində tərifi. Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası hər hansı (a,b) intervalında təyin olunmuşdur və $x_0 \in (a,b)$. Əgər $\forall\{x_n\} \subset (a,b)$ və $x_n \to x_0$ $(x_n \neq x_0)$ ardıcıllıqları üçün $\{f(x_n)\}$ ədədi ardıcıllıqlarının $n \to \infty$ limiti A ədədi olarsa, onda A ədədi $f(x)$ funksiyasının x_0 nöqtəsində limiti adlanır.

Bu tərifə funksiya limitinin ardıcıllıq və ya Heyne tərifi deyilir.

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiyasının $x_0 = 0$ nöqtəsində limitinin olmadığını göstərək.

$x_n = \frac{1}{2\pi n}$ ardıcıllığı 0-a yığılır. $f(x_n) = \sin\frac{1}{x_n} = \sin 2\pi n = 0$ olduğundan $f(x_n)$ ardıcıllığının limiti $n \to \infty$ olduqda 0-dır. Lakin, $x_n = \frac{2}{\pi + 4\pi n} \to 0, n \to \infty$, amma $f(x_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ Deməli $f(x_n) \to 1, n \to \infty$. İki ardıcıllıq üçün müxtəlif limitlər alındığından $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ funksiyasının $x=0$ nöqtəsində limiti yoxdur.

$f(x) = x\cos\frac{1}{x}$ funksiyasının x=0 nöqtəsində limitinin olduğunu göstərək.

Aydındır ki, $\cos\frac{1}{x}$ funksiyasının $x = 0$ nöqtəsində limiti yoxdur.

Doğrudan da

$x_n = \frac{1}{2\pi n} \to 0,\ \cos\frac{1}{xn} = \cos 2\pi n = 1 \to 1,$

$x_n' = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \to 0,\ \cos\frac{1}{x_n'} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 0 \to 0, n \to \infty$

Deməli, $\cos\frac{1}{x}$ funksiyasının $x=0$ nöqtəsində limiti yoxdur.

Lakin $x_n \to 0$ olduqda

$|f(x_n) - 0| = \left|x_n \cos\frac{1}{x_n}\right| < |x_n| \to 0$

olduğundan 0-a yığılan istənilən x_n ardıcıllığı üçün $f(x_n) \to 0$.

✓ **Funksiyaların limitlərinin hər iki tərifi ekvivalentdir.**

Doğrudan da, tutaq ki, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, yəni $\forall\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $x \neq x_0$ və $|x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən bütün x-ləri üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$. Onda $|x_n - x_0| < \delta$ $(n \geq N)$ olar və $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənər.

İndi tutaq ki,

$\forall\{x_n\}$, $x_n \to x_0 (x_n \neq x_0)$, və $f(x_n) \to A$, $n \to \infty$, göstərək ki, $\forall\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki, $x \neq x_0$, $|x - x_0| < \delta$ bərabərsizliyini ödəyən $\forall x$ üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$

Əksini fərz edək. Tutaq ki, elə $\varepsilon_0 > 0$, var ki, istənilən $\delta > 0$ üçün $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ bərabərsizliyi ödənir, lakin $|f(x)| - A \geq \varepsilon_0$

Əgər, xüsusi halda $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \frac{1}{2}$,..., $\delta_n = \frac{1}{n}$,... olarsa elə $\{x_n\}$ ardıcıllığı alarıq ki, $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$, lakin

$$|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0 (n \geq N).$$

Bu isə o deməkdir ki, $x_n \to x_0$, lakin $f(x_n)$ ardıcıllığı A-ya yığılmır. Ziddiyyət aldıq. Teorem isbat olundu.

Göstərək ki, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Şəkil 1-dən göründüyü kimi $0 < x < \pi/2$ olduqda $S_{\Delta AOB} < S_{\text{sek}AOB} < S_{\Delta AOC}$, yəni $\frac{1}{2}\cdot 1^2 \sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \operatorname{tg} x$

Deməli $\sin x < x < \operatorname{tg} x$. Onda $0 < x < \pi/2$ olduqda $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$ və $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$ alırıq. Lakin $\forall\varepsilon > 0$ üçün elə $\delta > 0$ var ki $|x| < \delta$ olduqda $|1 - \cos x| < \varepsilon$, onda

$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \delta$ olar. $\frac{\sin x}{x}$ cüt funksiya olduğundan bu bərabərsizlik $x < 0$ olduqda da doğrudur.

Bu faktdan istifadə edərək aşağıdakı misalı həll edək:

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, $\alpha \neq 0$

olduğunu isbat edək.

Aydındır ki, $\sin\alpha = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$,

$\sin\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\ldots\ldots$

$\sin\frac{\alpha}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{\alpha}{2^n}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^n}$.

Deməli,

$$\sin\alpha = 2^n \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n}\cdot\sin\frac{\alpha}{2^n}.$$

Buradan $\frac{\sin\alpha}{2^n \sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\alpha/2^n}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}$, lakin $x_n = n\cdot\frac{\alpha}{2^n} \to 0,\ n \to \infty$. Onda $\frac{\sin\frac{\alpha}{2^n}}{\alpha/2^n} \to 1$

Deməli,

$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\frac{\cos\alpha}{2^n} = \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}}$, və

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\alpha}{2^n\sin\frac{\alpha}{2^n}} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}\cdot 1$ olduğundan nəticədə

$\lim\limits_{n\to\infty} \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\ldots\cos\frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$.

İndi isə funksiyanın limitinin tərifini ümumiləşdirək.

1^0. Əgər istənilən $M > 0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ tapılarsa ki, $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$ şərhini ödəyən bütün x-lər üçün $f(x) > M$ olarsa deyəcəyik ki, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$

Məsələn $f(x) = \frac{1}{x^2}$, funksiyası üçün $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$, çünki, $\frac{1}{x^2} > M$ bəbərabərsizliyi $|x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta$ olduqda ödənir.

2^0. İstənilən $M>0$ ədədi üçün elə $\delta > 0$ varsa ki, $|x - x_0| < \delta$ olduqda $f(x) < -M$ bərabərsizliyi ödənərsə onda deyilir ki,

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$

$f(x) = -\frac{1}{x^2}$ funksiyası üçün

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ çünki $-\frac{1}{x^2} < -M$ və ya $\frac{1}{x^2} > M$ bərabərsizliyi

$|x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = \delta, x \neq 0$ olduqda ödənir.

3^0. İstənilən $M > 0$ ədədi üçün elə $K > 0$ varsa ki, $\forall x > K$ olduqda $f(x) > M$ bərabərsizliyi ödənərsə onda deyilir ki,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$

$a > 1$ olduqda $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$ olduğunu göstərək.

Tutaq ki, $M > 0$ istənilən ədəddir, onda $a^x > M$ bərabərsizliy, $K = \log_a M$ və $x > K$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün doğrudur.

4^0. İstənilən $M > 0$ ədədi üçün elə $K > 0$ ədədi varsa ki,

$f(x) < -M$ bərabərsizliyi $x < -K$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün ödənərsə onda deyilir ki, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$. $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

✓ **$\forall\varepsilon > 0$ isə elə $M > 0$ ədədi varsa ki, $x > M$ şərtini ödəyən bütün x-lər üçün $|f(x) - A| < \varepsilon$ olarsa deyilir ki, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$**

Məsələn, $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$. Doğrudan da $\varepsilon > 0$ isə $x > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = M$ olduqda $0 < \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənir.

✓ **$\forall\varepsilon > 0$ üçün elə $M > 0$ ədədi varsa ki, $x<-M$ olduqda $|f(x) - A| < \varepsilon$ bərabərsizliyi ödənərsə onda deyilir ki, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$.**

Məsələn, $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$

Aydındır ki, $x < -tg\left(-\frac{\pi}{2}+\varepsilon\right)$ olduqda $-\varepsilon < arctgx - \frac{\pi}{2} < \varepsilon$ ödənir.

Göstərək ki, $a > 1$ olduqda $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$

Doğrudan da tutaq ki, $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$), əgər $M = \log_a \frac{1}{\varepsilon} = -\log_a\varepsilon$ götürsək $x < -M = -\log_a\varepsilon$ olduqda $a^x < \varepsilon$ olur.

$0 < a < 1$ olduqda $\lim\limits_{x\to\infty} a^x$ və $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x$-i tapaq.

$0 < a < 1$ olsun. $a^x = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$, $\left(\frac{1}{a} > 1\right)$ onda

$\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{a}\right)^2 = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = +\infty$.

Eyni qayda ilə göstərmək olar ki,

$\lim\limits_{x\to 0} \log_a x = \infty$ $(0 < a < 1)$, $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a^x = \infty (1 < a < \infty)$.

Göstərək ki, $a>1$ olduqda $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$.

Aydındır ki, $a > 1$ olduqda, $a = 1 + q$, $q > 0$ və istənilən $n \in N$ üçün

$a^n = (1+q)^n = 1 + n\cdot q + \frac{n(n-1)}{2!} q^2 + \ldots + q^n$.

Buradan $a^n > \frac{n(n-1)}{2!} q^2 > \frac{n^2}{2}\cdot q^2$.

Onda $\frac{a^n}{n} > \frac{n}{2} q$.

Deməli, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$. Buradan alırıq ki,

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = +\infty$

Deməli verilən $M > 0$ ədədi üçün elə N natural ədədi var ki, $n > N$ olduqda $\frac{a^n}{x+1} > M$

Tutaq ki, $x > N - 1$, $n = [x]$ onda, $n > N$ və $n \le x < n + 1$ və

$\frac{a^x}{n} > \frac{a^n}{n+1} > M$ olur.

Deməli, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a^x}{x} = +\infty$

Göstərək ki, $a > 1, \kappa > 0$ olduqda $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\kappa} = +\infty$

Doğrudan da $\frac{a^x}{x^\kappa} = \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{\kappa}}\right)^x}{x}\right)^\kappa$ olduğundan

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^\kappa} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{\left(a^{\frac{1}{\kappa}}\right)^x}{x}\right)^\kappa = \infty$

İsbat edək ki, $a > 1$ olduqda

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$.

Doğrudan da $\forall n > N$ üçün

$\sqrt[n]{n} - 1 = q_n > 0$.

Onda $(1+q)^n = n$, $n > 1$.

Lakin $1 + nq_n + \frac{n\cdot(n-1)}{2} q_n^2 + \ldots + q^n = n$.

Deməli, $\frac{n(n-1)}{2} q_n^2 < \frac{2}{n}$.

Onda $q_n^2 < \frac{2}{n-1} < \frac{2}{n}$.

Deməli, $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$ yəni, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Buradan alınır ki, $\forall\varepsilon > 0$, $n > N$ olduqda $\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$.

Bu bərabərsizliyi a əsasına görə loqarifmləsək $\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$

Bu isə o deməkdir ki, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$

Bu limitdən istifadə edərək göstərək ki, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$

$\varepsilon > 0$, $N > 0$ ədədini elə seçək ki, $n > N$ olduqda $\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$

Onda əvvəlki qayda ilə N-ilə seçək $n > N$ olduqda

$\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$, və $\frac{\log_a (n+1)}{n} < \varepsilon$

$x > N + 1$, $n = [x]$, onda $n > N$, $n \le x \le n + 1$

$\frac{\log_a n}{n+1} < \frac{\log_a x}{x} < \frac{\log_a (n+1)}{n}$

Deməli, $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0$

Buradan alınır ki, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a x}{x^\kappa} = 0$

Doğurdan da, $x^\kappa = y$ olarsa, $x = \sqrt[\kappa]{y}$

Onda $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log_a \sqrt[\kappa]{y}}{y} = \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\frac{1}{\kappa}\log_a y}{y} = 0$

İsbat edək ki, $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$, $a > 0$ $a>1$ olduqda

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ olduğunu göstərək

$\sqrt[n]{a} - 1 = q_n$, $a = (1+q)^n$, $a = (1+q_n^n)^n = 1 + nq_n + \frac{n(n-1)}{2} q_n^2 + \ldots + q_n^n \ge nq_n$

Deməli, $0 < q_n < \frac{a}{n}$, onda $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$, yəni $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Eyni qayda ilə $0<a<1$ isə $\frac{1}{a} = b > 1$ onda

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{b}} = 1$

Digər tərəfdən $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = 1$

Onda $\forall\varepsilon > 0$ üçün elə n_0 ədədi var ki, ($\varepsilon < 1$ halına baxaq)

$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \varepsilon$.

Onda $|x| < \frac{1}{n_0}$, yəni $-\frac{1}{n_0} < x < \frac{1}{n_0}$ olan x-lər üçün

$a^{-\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n_0}}$.

Deməli, $1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon$, və ya $|a^x - 1| < \varepsilon$ alarıq. Buradan da $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1$.

İndi isə göstərək ki, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

Biz bilirik ki, e ədədinin tərifinə görə $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Aydındır ki,

$n_\kappa \to \infty$, $n_\kappa > N$, $\kappa \to \infty$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_\kappa < \ldots$

$e = \lim\limits_{\kappa\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_\kappa}\right)^{n_\kappa}$

İndi limitin ardıcıllıq tərəfindən istifadə edərək, $x_\kappa \to \infty$ üçün $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x_\kappa}\right)^{x_\kappa} = e$ olduğunu göstərək. Tutaq ki $\{x_n\} \in R+ = (0,\infty)$, $x_\kappa \to +\infty$ hesab edək ki, $x_\kappa > 1$. $[x_\kappa] = n_\kappa$ qəbul edək. Onda $n_\kappa \le x_\kappa < n_{\kappa+1}$, $\kappa \to \infty$

Onda $\frac{1}{n_\kappa + 1} < \frac{1}{x_\kappa} \le \frac{1}{n_\kappa}$ bərabərsizliyindən alınır ki,

$\left(1+\frac{1}{n_\kappa+1}\right)^{n_\kappa} < \left(1+\frac{1}{x_\kappa}\right)^{x_\kappa} < \left(1+\frac{1}{n_\kappa}\right)^{n_\kappa+1}$.

Lakin $\left(1+\frac{1}{n_\kappa+1}\right)^{n_\kappa} = \frac{\left(1+\frac{1}{n_\kappa+1}\right)^{n_\kappa+1}}{1+\frac{1}{n_\kappa+1}}$,

$\left(1+\frac{1}{n_\kappa+1}\right)^{n_\kappa+1} = \left(1+\frac{1}{n_\kappa}\right)^{n_\kappa}\cdot\left(1+\frac{1}{n_\kappa}\right)$.

Lakin

$1+\frac{1}{n_\kappa} \to 1$, $1+\frac{1}{n_\kappa+1} \to 1$, $\kappa \to \infty$,

$\left(1+\frac{1}{n_\kappa}\right)^{n_\kappa} \to e, \left(1+\frac{1}{n_\kappa+1}\right)^{n_\kappa+1} \to e,\ \kappa \to \infty$

olduğundan, alırıq ki, $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\left(1+\frac{1}{x_\kappa}\right)^{x_\kappa} = e$

alarıq. Burada $\{x_\kappa\}$ ixtiyari $x_\kappa \to +\infty$ olan ardıcıllıq olduğunnan, o deməkdir ki, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

İndi isə isbat edək ki, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Tutaq ki, $\{x\} \in R,\ x_\kappa - \to \infty,\ x_\kappa < -1$ Onda $y_\kappa = -x_\kappa$,

$y_\kappa \to \infty\ \kappa \to \infty.$

Deməli, isbat etdiyimizə görə $\lim\limits_{\kappa\to\infty}\left(1+\frac{1}{y_\kappa}\right)^{y_\kappa} = e.$

Lakin

$$\left(1+\frac{1}{x_\kappa}\right)^{x_\kappa} = \left(1-\frac{1}{y_\kappa}\right)^{-y_\kappa} = \left(\frac{y_\kappa-1}{y_\kappa}\right)^{-y_\kappa} =$$

$$= \left(\frac{y_\kappa}{y_\kappa-1}\right)^{y_\kappa} = \left(1+\frac{1}{y_\kappa-1}\right)^{y_\kappa} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{y_\kappa-1}\right)^{y_\kappa-1}\cdot\left(1+\frac{1}{y_\kappa-1}\right).$$

Burada

$$1+\frac{1}{y_\kappa-1} \to 1,\ \kappa\to\infty,$$

$$\left(1+\frac{1}{y_\kappa-1}\right)^{y_\kappa-1} \to e,\ \kappa\to\infty$$

Deməli, $\left(1+\frac{1}{x_\kappa}\right)^{x_\kappa} \to e$, yəni $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$

Qeyd edək ki, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ və $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$ olduğundan $\frac{1}{x} = \alpha$ əvəzləməsi aparsaq alarıq ki, $x \to \pm\infty$ olduqda $\alpha \to 0$ və

$$\lim_{\alpha\to0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Göstərək ki, $x \to +\infty$ olduqda $f(x) = \sin x$ funksiyasının limiti yoxdur. Doğurdan da $x'_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x''_n = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ardıcıllıqları üçün $x'_n \to \infty,\ x''_n \to \infty$.

Lakin $\sin x'_n = 1,\ \sin x''_n = -1.$ Deməli $f(x_n)$ ardıcıllıqların x'_n və x''_n -dəki qiymətləri müxtəlif ədədlərə yığıldığından limit yoxdur.

LİMİTLƏR HAQQINDA ƏSAS TEOREMLƏR

✓ **$f(x)$, $g(x)$ funksiyalarının $x = x_0$ nöqtəsində limitləri varsa onda**

$a)\ f(x)+g(x);\ b)\ f(x)-g(x);$

$c)\ f(x)\cdot g(x),\ d)\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$ isə $\frac{f(x)}{g(x)}$

funksiyalarının da x_0 nöqtəsində limitləri var və

$a)\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x),$

$b)\ \lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)-g(x)\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0} g(x),$

$c)\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x),$

$d)\ \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$

Bu teoremlər eyni qayda ilə isbat olunur və ardıcıllıqlar üçün doğru olduğundan burada doğrudur.

Qeyd edək ki, xüsusi halqa $g(x) = \kappa$ olarsa $\lim\limits_{x\to x_0} \kappa\cdot f(x) = \kappa \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Bəzi misallara baxaq:

$p(x) = a_0x^\kappa + a_1x^{\kappa-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$

$q(x) = b_0x^m + bx^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m$

olduqda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{a_0x^\kappa + a_1x^{\kappa-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_\kappa}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

hesablayaq.

1) hal. Tutaq ki, $\kappa > m$. Onda

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0x^\kappa + a_1x^{\kappa-1} + \ldots + a_{\kappa-1}x + a_\kappa}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b} =$$

$$= \frac{a_0x^{\overset{\kappa}{m}} + a_1x^{\overset{\kappa-1}{m}} + \ldots + a_{\kappa-1}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{a_\kappa}{x^m}}{b_0 + b_1\frac{1}{x} + \ldots + b_{m-1}\frac{1}{x^{m-1}} + \frac{b_m}{x_m}}.$$

Buradan görünür ki, $\kappa > m$ olduqda $a_0x^{\overset{\kappa}{m}} \to \pm\infty$ (a_0-ın işarəsindən asılı olaraq), ona görə də

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \pm\infty.$$

2) $\kappa = m$ olduqda (x^κ-ya böldükdə)

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + a_1\frac{1}{x} + \ldots + \frac{a_\kappa}{x^\kappa}}{b_0 + b_1\frac{1}{x} + \ldots + \frac{b_\kappa}{x^\kappa}} \to \frac{a}{b_0} \quad (x\to\infty)$$

Eyni qayda ilə $m < \kappa$ olduqda

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,\ \alpha = \frac{n}{m}$ – rasional ədəddir olduğunu göstərək. Doğurdanda $\alpha = n \in N$ olduqda

$$\frac{(1+x)^n - 1}{x} =$$

$$= \frac{\left(1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^n\right) - 1}{x} =$$

$$= n + \frac{n(n-1)}{2}x + \ldots + x^{n-1}.$$

Onda

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$

İndi tutaq ki, $\alpha = \frac{1}{m}\cdot(m \in N)$. Onda $\frac{\sqrt[m]{1+x}}{x}$ ifadəsində $\sqrt[m]{1+x} = y$ qəbul etsək, $x = (1+y)^m - 1$ Lakin

$$1 - |x| < \sqrt[m]{1+x} < 1 + |x| \qquad (|x| < 1)$$

olduğundan

$\lim\limits_{x\to0}\sqrt[m]{1+x} = 1$

Lakin $x \to 0$ olduqda $y \to 0$ olar.

Onda

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[m]{1+x}-1}{x} = \lim_{y\to0}\frac{y}{(1+y)^m - 1} = \frac{1}{m}.$$

İndi isə $\alpha = \frac{n}{m}$ halına baxaq. $y = \sqrt[m]{1+x} - 1$ götürək. Onda

$$\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}} - 1}{x} = \frac{(1+y)^n - 1}{(1+y)^m - 1} =$$

$$= \frac{(1+y)^n - 1}{y}\cdot\frac{y}{(1+y)^m - 1}$$

Onda əvvəlki halları nəzərə alsaq

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^{\frac{n}{m}} - 1}{x} =$$

$$= \lim_{y\to0}\frac{(1+y)^n - 1}{y}\lim_{y\to0}\frac{y}{(1+y)^m - 1} = \frac{n}{m}$$

Bərabərsizlik istənilən α həqiqi ədədi üçün də isbat etmək olar.

Doğrudan da istənilən α ədədi üçün elə r_n rasional ardıcıllıq tapmaq olar ki, $r_n \to \alpha$.

Onda x^α üstlü funksiyanın kəsilməzliyindən

$\frac{(1+x)^{r_n}-1}{x} \to \frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$, $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{r_n}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$$

Lakin

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{r_n}-1}{x} = r_n$$

olduğundan

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha.$$

Qeyd edək ki, kəsilməzlik anlayışından istifadə edib bir çox limitləri asanlıqla hesablamaq olar.

Göstərək ki, $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$,

Doğrudan da

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x, \quad x \neq 0$$

Lakin $\frac{x}{n} \to 0$, olduğundan və qüvvət funksiyasının kəsilməzliyindən alırıq ki,

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x$$

İndi isə,

$$\lim\left(\sqrt[\kappa]{(x+a_1)(x+a_2)..(x+a_\kappa)} - x\right) =$$

$$= \frac{1}{\kappa}(a_1+....+a_\kappa)$$

olduğunu isbat edək.

Məlumdur ki, $y, z \in R$ üçün

$$y^\kappa - z^\kappa = (y-z)\left(y^{\kappa-1} + y^{\kappa-2}z+...+z^{\kappa-1}\right)$$

və ya

$$y - z = \frac{y^\kappa - z^\kappa}{y^{\kappa-1} + y^{\kappa-2}z+...+z^{\kappa-1}}.$$

Tutaq ki,

$y = \sqrt[\kappa]{(x+a_1)(x+a_2)..(x+a_\kappa)}$, $z = x$.

Onda

$$\sqrt[\kappa]{(x+a_1)(x+a_2)..(x+a)} - x =$$

$$= \frac{(x+a_1)(x+a_2)..(x+a_\kappa) - x^\kappa}{\sqrt[\kappa]{(x+a_1)..(x+a_\kappa)} + x\sqrt[\kappa]{(x+a_1)+...+x^{\kappa+1}}} =$$

$$= \frac{(a_1+a_2+...a_\kappa) + \frac{a_1a_2+...+a_{\kappa-1}a_\kappa+...}{x}}{\sqrt[\kappa]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)..\left(1+\frac{a_\kappa}{x}\right)}^{\kappa-1} +...+1} \to$$

$$\to \frac{a_1+a_2+...a_\kappa}{\kappa},$$

$\lim_{x_1\to\infty} x_n = a$ olduqda

$\frac{x_1+x_2+...x_n}{n} \to a$, $n \to \infty$ və

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2...a_n} = a$, $a_i > 0$

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} - a =$$

$$= \frac{(x_1-a)+(x_2-a)+...+(x_n-a)}{n}$$

Lakin $x_n \to a, \forall \varepsilon > 0$ üçün elə n_0 var ki, $n \geq n_0$ olduqda $|x_n - a| < \varepsilon/2$

Onda

$$\frac{(x_1-a)+..+(x_{n_0-1}-a)+(x_{n_0}-a)+..+(x_n-a)}{n} =$$

$$= \frac{(x_1-a)+...+(x_{n_0-1}-a)}{n} +$$

$$+ \frac{(x_{n_0}-a)+...+(x_n-a)}{n}$$

n-i $(n \geq n_0)$ o qədər böyük götürək ki,

$$\frac{|(x_1-a)+...+(x_{n_0-1}-a)|}{n} < \varepsilon/2.$$

Digər tərəfdən

$$\frac{(x_{n_0}-a)+...+(x_n-a)}{n} <$$

$$< \frac{(n-n_0)\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2} - \frac{n_0}{2^n}\varepsilon < \varepsilon/2$$

Onda $\lim_{n\to\infty}\frac{x_1x_2+...+x_n}{n} = a.$

Digər tərəfdən $a_i > 0$ olarsa

$$\ln\sqrt[n]{a_1...a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2+...+\ln a_n}{n}$$

$a_n \to \alpha$, $n \to \infty$ olduqda $y = \ln x$ funksiyasının kəsilməzliyindən $\ln a_n \to \ln a$. Onda

$$\frac{\ln a_1 + \ln a_2+...+\ln a_n}{n} \to \ln a.$$

Buradan

$\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} = e^{\ln\sqrt[n]{a_1...a_n}} \to e^{\ln a} = a.$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ isə

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a$ olduğunu göstərək.

Doğrudan da

$$\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = \frac{a_2}{a_1}, \alpha_3 = \frac{\alpha_3}{a_2},...,\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$$

götürsək

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_1 \cdot \alpha_2...\alpha_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_{n-1}} = a.$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ olduğunu göstərək.

$a_n = \frac{n!}{n^n}$ olarsa

$$\frac{a_n+1}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$$

$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a e$ olduğunu göstərək.

Aydındır ki, $\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

Lakin $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to e$, $\alpha \to 0$. Deməli,

$$\frac{\log_a(1+\alpha)}{\alpha} = \log_a(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \to \log_a e, \ \alpha \to 0.$$

Buradan xüsusi halda alırıq ki $(a = e)$

$\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} \to 1$, $\alpha \to 0$, yəni $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1.$

Göstərək ki, $\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \ln a$

Doğrudan da $a^\alpha - 1 = \beta$ qəbul etsək, $a^\alpha = 1+\beta$, $\alpha \to 0$ isə $\beta \to 0$. Onda $\alpha = \log_a(1+\beta)$ olar və

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{a^\alpha - 1}{\alpha} = \lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\log_a(1+b)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a.$$

Xüsusi halda $\alpha = \frac{1}{n}$ olarsa

$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{a} - 1\right) = \ln a.$

$\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^m - 1}{\alpha} = \mu$ olduğunu göstərək.

$(1+\alpha)^\mu - 1 = \beta$ qəbul etsək $\alpha \to 0$ olduqda $\beta \to 0$,

$$(1+\alpha)^\mu = 1+\beta,$$

$$\mu\ln(1+\alpha) = \ln(1+\beta), \ \mu = \frac{\ln(1+\beta)}{\ln(1+\alpha)}.$$

Onda

$$\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \frac{\beta}{\ln(1+\beta)} \cdot \mu \frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha}.$$

Lakin $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\ln(1+\alpha)}{\alpha} = 1$, $\lim_{\beta\to 0}\frac{\beta}{\ln(1+\beta)} = 1$

olduqdan $\lim_{\alpha\to 0}\frac{(1+\alpha)^\mu - 1}{\alpha} = \mu$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+n\cdot mx+\frac{n(n-1)}{20}m^2x^2+...+(mx)^n}{x^2} -$$

$$- \frac{1+nmx+\frac{m(m-1)}{2}n^2x^2+...+(nx)^m}{x^2} =$$

$$= \frac{mn}{2}\left[(n-1)m-(m-1)n\right] = \frac{mn}{2}(n-m)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}\cdot(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(2x-3)^2(3x+2)^3}{(2x+1)^5}\right]^{10}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)^2\cdot\left(3+\frac{2}{x}\right)^3}{\left(2+\frac{1}{x}\right)^5}\right]^{10}=\left(\frac{2^2\cdot3^3}{2^5}\right)^{10}=\left(\frac{3}{2}\right)^{30}$$

$\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$-i tapaq $\lim_{x\to1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)\left(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+1\right)}{(x-1)\left(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1\right)}=\frac{m}{n}.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(x+\frac{a}{n}\right)+\left(x+\frac{2a}{n}\right)+\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)$$-i

tapaq $y_n=x+\frac{a}{n}+x+\frac{2a}{n}+\ldots+x+\frac{(n-1)a}{n}=$

$$=nx+\frac{1}{n}\left(a+2a+\ldots+(n-1)a\right)=nx+$$

$$+\frac{1}{n}\frac{a+(n-1)a}{2}(n-1)=nx+\frac{(n-1)a}{2}.$$

Onda $\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(x+\frac{n-1}{2n}a\right)=\left(x+\frac{a}{2}\right).$

$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$-i tapaq $(a>0)$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x-a}\sqrt{x+a}}=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)}{\sqrt{x^2-a^2}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x+a}}=$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}\left(\sqrt{x}+\sqrt{a}\right)}+\frac{1}{\sqrt{2a}}=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}$, b) $\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}$,

c) $\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3x}$-i tapaq.

a) $\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}\cdot5=$

$$=5\lim_{x\to0}\frac{\sin5x}{5x}=5$$

b) $\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin mx}{mx}\cdot mx}{\frac{\sin nx}{nx}\cdot nx}=$

$$=\frac{m}{n}\lim_{x\to0}\frac{\sin mx}{mx}\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin nx}{nx}}=\frac{m}{n}$$

c) $\lim_{x\to0}\frac{tgx-\sin x}{\sin^3x}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin x}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)\cdot\frac{1}{\sin^2x}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x\cdot\sin^2x}=2\lim_{x\to0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x/2}{\sin^2x}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{\sin^2x}{x}\right)^2\cdot x^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to0}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$-i tapaq

$$\lim_{x\to1}(1-x)\frac{\sin\pi x}{2}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to1}\sin\frac{\pi x}{2}\cdot\lim_{x\to1}(1-x)\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{2}}=$$

$$=\lim_{x\to1}(1-x)\frac{1}{\cos^2\frac{\pi x}{4}-\sin^2\frac{\pi x}{4}}=\lim_{x\to1}(1-x)\times$$

$$\times\frac{1}{\left(\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi x}{4}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{4}-\sin\frac{\pi x}{4}}\times$$

$$\times\lim_{x\to1}\frac{1}{\cos\frac{\pi x}{4}+\sin\frac{\pi x}{4}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi x}{4}-\frac{\pi x}{4}\right)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{1-x}{\sin\frac{\pi}{4}(1-x)}=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to1}\frac{\pi/4(1-x)}{\pi/4\sin\left(\frac{\pi}{4}(1-x)\right)}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{\pi}.$$

Limiti tapaq:

$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$,

Aydındır ki, $x\in(0,\infty)$ üçün

$$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=$$

$$2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=2\sin\frac{(x+1)-x}{2\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=$$

$$=2\sin\frac{1}{2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$$

doğrudur.

Lakin $\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\to0,\ x\to\infty$.

Onda

$\lim_{x\to\infty}\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$

Lakin

$$\left|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\le1$$

olduğu üçün

$$\lim_{x\to+\infty}2\sin\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\cdot\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}=0$$

Limiti hesablayaq: $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}$

$$\frac{1-\cos2x}{x^2}=\frac{2\sin^2x}{x^2}=2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

olduğundan

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos2x}{x^2}=2\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=2$$

Limiti hesablayaq:

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-tgx)$$

Burada $y=\frac{\pi}{2}-x$ əvəzləməsi aparsaq

$$x\to\pi/2,\ y\to0$$

Onda

$$\sec x-tgx=\sec\left(\frac{\pi}{2}-y\right)-tg\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=$$

$$=\operatorname{cosec}y-ctgy=\frac{1}{\sin y}-\frac{\cos y}{\sin y}=\frac{1-\cos y}{\sin y}=$$

$$=\frac{2\sin^2y/2}{2\sin y/2\cdot\cos y/2}=\frac{\sin y/2}{\cos y/2}.$$

Deməli

$$\lim_{x\to\pi/2}(\sec x-tgx)=\lim_{y\to0}(\operatorname{cosec}y-ctgy)=$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{\sin y/2}{\cos y/2}=0$$

İndi isə $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$ kimi funksiyaların limitinin tapılmasına aid üsulları öyrənək.

Tutaq ki $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$ funksiyası təyin olunmuşdur, $f(x)>0$.

Onda

$y=\left(f(x)\right)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$

Tutaq ki, $x\to x_0$ olduqda

$\lim_{x\to x_0}g(x)=b,\ \lim_{x\to x_0}\ln f(x)=\ln a$

Onda

$\lim_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)=b\ln a$

Buradan isə üstlü funksiyasının kəzilməzliyindən

$$\lim_{x\to x_0} y(x) = \lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = e^{b\ln a} = a^b.$$

Qeyd edək ki, $y(x) = \big(f(x)\big)^{g(x)}$ funksiyasının limitini $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x)$-ın sonlu və sonsuz qiymətlərini bildikdə də hesablamaq olar.

Əgər $\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = \kappa$ isə

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{g(x)\ln f(x)} = 0,$$

$\lim_{x\to x_0} g(x)\ln f(x) = +\infty$ isə $\lim_{x\to x_0} \big(f(x)\big)^{g(x)} = \infty$

İndi isə bəzi misallara baxaq

$\lim_{x\to x_0} (\ln x)^{1/x}$-i tapaq.

$$y(x) = (\ln x)^{1/x},\ \ln y(x) =$$

$$= \frac{1}{x}\ln(\ln x) = \frac{\ln\ln x}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}$$

Lakin $\ln x = t$ göstürsək $x\to\infty, t\to\infty$ onda

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln t}{t} = 0,\ \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$$

olduğundan $\lim_{x\to\infty} \ln y(x) = 0.$

Deməli $\lim_{x\to\infty} y(x) = e^0 = 1$

$\lim_{x\to 0} x^{\sin x}$-i tapaq.

$y = x^{\sin x}$-i loqorifmləyək:

$$\ln y = \ln x\cdot\sin x$$

Onda

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot(x\ln x)$$

Lakin

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{və} \quad \lim_{x\to 0} x\ln x = 0$$

olduğundan alırıq ki,

$$\lim_{x\to 0}\ln y = 0,\ \lim_{x\to 0} y(x) = 1.$$

Bəzi misalları isə məlum ifadələrə gətirməklə də həll etmək olar.

$x\in R$ olduqda $x_n\to x,\ n\to\infty$

$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^x$ olduğunu göstərək.

Doğrudan da

$$\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n}$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^{\frac{n}{x_n}}\right]^{x_n} = e^x$$

$x\in R$ olduqda

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = e^{\lambda x}$$

olduğunu göstərək

$$\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n} = 1+\frac{x_n}{n}$$

qəbul etsək

$$x_n = n\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)-n =$$

$$= n\left(\cos\frac{x}{n}-1+\lambda\sin\frac{x}{n}\right) =$$

$$\frac{\lambda\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}\cdot x - x\cdot\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}}.$$

Lakin $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = 1,$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{\sin^2\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}\cdot 2} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{x}{2n}}{\frac{x}{2n}}\right)\cdot\sin\frac{x}{2n} = 0$$

olduğundan

$$x_n\to\lambda x,\ n\to+\infty.$$

Onda

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{n}+\lambda\sin\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x_n}{n}\right)^n = e^{\lambda x}$$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = \left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2\cos^2 x/2}}$$

olduğundan $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} = e^{-\frac{1}{2}}.$

TÖRƏMƏ VƏ İNTEQRAL

TÖRƏMƏ

"Hərəkətin verilmiş anda sürəti" və "verilmiş nöqtədə əyri xəttə çəkilmiş toxunan" kimi ifadələrə dəqiq məna verməyə çalışan zaman nəticədə törəmə anlayışı yarandı. Çoxlu təbii-elmi məsələlərin baxılması da belə anlayışlara gətirir. Məsələn, bu və ya digər qüvvələrin təsiri altında hansısa cisimin hərəkəti adətən bir birinin arasında cisimin koordinatlarını, onların dəyişiklik sürətlərini və bu sürətlərin dəyişiklik sürətlərini birləşdirən tənliklər sistemi ilə verilir.

Təsəvvür edək ki, yol boyu maşın hərəkət edir. t vaxtına qədər keçdiyi məsafəni $S(t)$ ilə göstərək. Tutaq ki, Δt – t zaman anından sonra keçən hansısa vaxt müddətidir. Onda aydın olur ki $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ fərqi – maşının Δt vaxtında keçdiyi məsafədir. Əgər Δt çox azdırsa, onda maşının sürəti bu vaxta görə elə də çox dəyişməyib. Və deməli, t anında maşının hərəkət sürəti onun Δt zamanında orta sürətinə, yəni belə bir qiymətə:

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$ yaxındır.

Δt nə qədər az olsa, bu yaxınlaşma bir o qədər yaxşıdır və o zaman təbii olaraq t anında $v(t)$ sürətini Δt-nin 0-a yaxınlaşması şərti ilə $\Delta S/\Delta t$ nisbətinin limiti kimi təyin etmək olar:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} \qquad (*)$$

Beləliklə, əgər bizə hər hansı cisimin t zamanında getdiyi məsafəni göstərən $S(t)$ funksiyası məlum olarsa, onda (*) düsturunun köməyilə istənilən an onun hərəkət sürətini müəyyən edə bilərik.

Nümunə kimi biz yerdən müəyyən məsafədə əldə tutulmuş, amma sonradan yerə buraxılımış daşın sərbəst düşməyinin sürətini tapaq. İtalyan alimi Qalileo Qaliley tərəfindən kəşf olunmuş qanuna görə t vaxtında daşın keçdiyi $S(t)$ məsafəsi belə bir düstur ilə ifadə olunur:

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Burada g – sabitdir (əgər t vaxtını saniyələr ilə, S məsafəsini isə metr ilə ölçsək, onda $g\approx 9{,}8\,m/san^2$). (*) düsturundan istifadə etmək üçün bizə $\Delta S = S(t+\Delta t) - S(t)$ fərqini tapmaq lazımdır:

$$S(t+\Delta t) - S(t) = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 =$$

$$= \frac{1}{2}gt^2 + gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 =$$

$$= gt\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

Deməli:

$$\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t} = gt + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Bərabərliyin sağ hissəsində birinci toplanan Δt-dan asılı deyil, ikincisinin limiti isə $\Delta t\to 0$ olduqda, 0-a bərabərdir. Və ona görə:

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\left(gt + \frac{1}{2}g\Delta t\right) = gt$$

Beləliklə, biz cisimin sərbəst düşməsinin sürətini tapdıq və o zamanla düz mütənasibdir.

"Funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunan" məqaləsində göstərildi ki, $f(x)$ funksiyasının qrafikinə x_0 nöqtəsində çəkilmiş toxunanın tənliyi $T(x) = k_0(x-x_0) + f(x_0)$, şəklindədir. k_0 bucaq əmsalı belə düstur ilə tapılır:

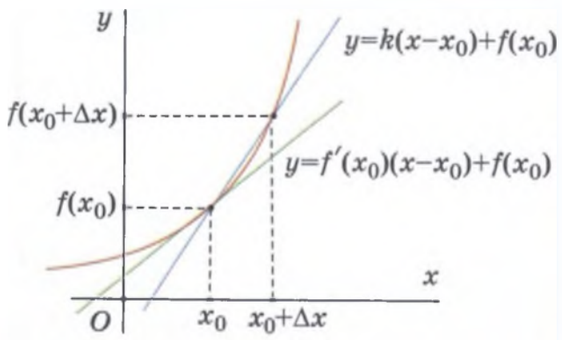
$$k_0 = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (**)$$

(*) və (**) ifadələrini müqayisə edərkən, biz görürük ki, mənaca müxtəlif olan qiymətləri təyin etmək üçün eyni prosedurdan istifadə edilir: verilmiş x_0 nəqtəsində $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ funksiyanın artımının arqumentin $\Delta x = (x_0+\Delta x) - x_0$ artımına nisbətlərin limitini tapırlar, amma belə bir şərtlə ki, arqumentin artımı 0-a yaxınlaşır. Aydındır ki, bu limit onun həndəsi və ya fiziki interpretasiyadan asılı olmayaraq tapıla bilər.

Beləliklə, hər hansı f funksiyası üçün

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$ qiyməti. (***)

x_0 nöqtəsində f funksiyasının törəməsi adlandırılır və $f'(x_0)$ kimi göstərilir ("efştrix iks sıfır" oxunur). (**) və (***) ifadələrini müqayisə etməkdən x_0 nöqtəsində f törəmə funksiyanın həndəsi mənası aydın olur. Bu funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunan xəttin x_0 nöqtəsində bucaq əmsalıdır. Törəmə nə qədər böyük qiymət alsa, verilmiş nöqtədə funksiyanın qrafiki o qədər də "dik" olacaq (şəkil 1).



Şəkil 1.

Əgər f funksiyasının x nöqtəsində törəməsi varsa, yəni sonlu (***) limiti var, onda f funksiyası x nöqtəsində differensiallanandır. Əgər funksiya hansısa intervalın hər bir nöqtəsində differensiallanandırsa, onda deyirlər ki, funksiya bu intervalda differensiallanandır. Belə halda verilmiş intervaldan hər bir nöqtəyə $f'(x)$ ədədini qarşılaşdıran yeni $f'(x)$ funksiyasını təyin etmək olar. Onu təbii olaraq verilmiş intervalda f funksiyanın törəməsi adlandırmaq olar.

Əgər f' funksiyasının hansısa x nöqtəsində törəməsi varsa, onda bu törəməni f funksiyasının x nöqtəsində ikinci tərtib törəməsi adlandırırlar və $f''(x)$, yəni $f''(x)=(f'(x))'$ kimi göstərirlər. Aydındır ki, bu prosesi davam etmək olar və üçüncü, dördüncü tərtib və s. törəmələri müəyyən etmək olar.

Təkcə tərifdən istifadə edərək, bir çox elementar funksiyaların törəmələri (məsələn, x^n, sin x, cos x və s.) birbaşa tapıla bilər. Xüsusi halda:

DİFFERENSİAL NƏDİR?

Törəmə anlayışına bir qədər başqa nəzər nöqtəsindən baxaq. Biz asandlıqla görə bilərik ki, əgər $f'(x_0)$ varsa, onda Δx 0-a yaxınlaşdıqda

$$\alpha(\Delta x)=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)$$

funksiyasının limiti 0-a bərabərdir. Beləliklə,

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x \quad (*)$$

Onda çox kiçik Δx şərti ilə Δx arqumentli $f(x_0+\Delta x)$ funksiyası $f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$ xətti funksiyadan təkcə $\alpha(\Delta x)\Delta x$ qədər fərqlənir. Axırıncı qiymət isə Δx-dən də tez 0-a yaxınlaşır:

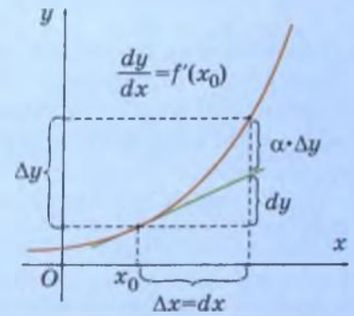
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$$

Başqa sözlə desək, x_0 nöqtəsində differensiallanan funksiya arqumentin x_0-a yaxın olan qiymətlərində xətti funksiyaya kifayət qədər yaxın ola bilər (ya da, deyirlər ki, approksim ediləndir).

(*) düsturunda Δx arqumentli $f'(x_0)\Delta x$ xətti funksiyası x_0 nöqtəsində f funksiyasının differensialı adlandırılır və $df(x_0)$ və ya sadəcə df kimi göstərilir. Bu işarələrin məntiqinə uyğun olaraq Δx xətli funksiyanı (bu funksiya Δx arqumentin qiymətinə Δx-in özünü qarşılaşdırır) dx kimi göstərirlər və sərbəst dəyişənin differensialı adlandırırlar. Beləliklə, $df=f'(x_0)dx$. Buradan biz törəmə üçün iki differensialın nisbəti kimi başqa ifadə tapırıq:

$$f'(x)=\frac{df}{dx}$$

Törəmənin belə bir yazılışı (Leybnisdən başlayaraq) bəzən daha rahat olur. Xüsusın də, əgər biz $f(x)=g(h(x))$ mürəkkəb funksiyanın törəməsini alırıqsa, onda $df=g'dh$.



$$(x^n)'=nx^{n-1},$$

$$(\sin x)'=\cos x,$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

Törəmənin tapılma prosesini differensiallama adlandırırlar. Bundan başqa iki $f(x)$ və $g(x)$ funksiyasının cəmini, hasilini və qismətini differensiallama qaydaları vardır:

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x),$$

$$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^2(x)}(g(x)\neq 0)$$

Onlar bizə bir neçə əsas funksiyanın kombinasiyasından təşkil olunmuş çoxlu sayda funksiyaların törəməsini tapmağa imkan verir. Məsələn:

$$(tg\,x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=$$

$$=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

Mürəkkəb funksiyanın differensiallama qaydaları kifayət qədər asan differensiallanan funksiyaların sayını daha da artırır. $y=g(t)$ və $t=h(x)$ – hansısa funksiyalar olmaqla, əgər f funksiyasını $y=f(x)=g(h(x))$ şəklində ifadə etmək olarsa, bu funksiya mürəkkəb funksiya adlanır. Həmçinin deyirlər ki, f funksiyası h və g funksiyalarının superpozisiyasını (ya da kompozisiyanı) təşkil edir. Mürəkkəb funksiyanın törəməsini aşağıdakı qayda ilə hesablayırlar:

$$f'(x)=g'(h(x))\cdot h'(x)$$

burada sağ tərəfdə birinci vuruq $t=h(x)$ nöqtəsində g funksiyasının törəməsidir. Məsələn, tgx^3 funksiyasını $t=h(x)=x^3$ və $y=g(t)=tg\,t$ funksiyaların superpozisiyası kimi göstərmək olar. Onda verilmiş qaydaya uyğun olaraq:

$$(tgx^3)'=\frac{3x^2}{\cos^2 x^3}$$

Əgər qarşımızda əsas elementar funksiyaların törəmələri cədvəli olsa, onda hər hansı funksiyanın törəməsini tapmaq heç də çətin olmayacaq: təkcə yuxarıda göstərilmiş differensiallama qaydalarına səliqə ilə əməl etmək qalır.

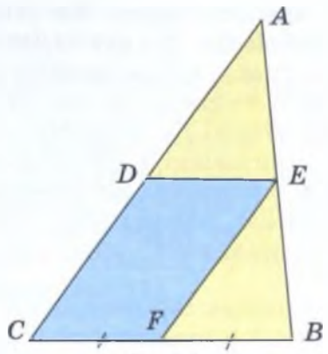
EKSTREMAL MƏSƏLƏLƏR

Maksimum və minimumlar haqqında məsələlər haqqında biz məktəbdə öyrənirik. Onlardan biri: katetlərin uzunluqlarının verilmiş cəmi ilə düzbucaqlı üçbucağın ən maksimal sahəsini tapın. Bu maksimum haqqında məsələdir. Bir çox hallarda minimumu axtarırlar – nəinsə ən kiçik qiymətini. Maksimum və minimum kimi iki anlayış ekstremum termini ilə birləşirlər (latın extremum – "qıraqdakı"). Maksimumun və minimumun tapılmasına aid məsələləri ekstremal məsələlər adlandırırlar. Elə "optimallaşdırma məsələləri" terminə də eyni məna verilir.

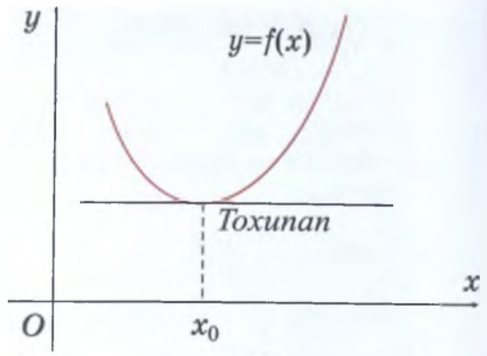
Ekstremumun tapılmasına aid məsələləri həll etməyə insanları müxtəlif səbəblər vadar edir. Verilmiş şərtlərə əsaslanaraq maksimal nəticə almaq (gəlir, qüvvət, sürət) və ya minimal itkilərə uğramaq (vaxt, material, enerji) – başa düşülən və təbii olan istəklərdir. Və ona görə optimallaşdırma məsələləri iqtisadiyyatda və texnikada böyük əhəmiyyət daşıyırlar.

Başqa səbəb isə gözlənilməz görünə bilər: məlum olduğuna görə, təbiətin çoxlu qanunları ekstremal prinsiplərə əsaslanır. Məsələn, işiq şüası ən tez yol üzrə yayılır. Belə bir ifadə Pifaqora məxsusdur: "Ən gözəl cisim kürədir, ən gözəl müstəvi fiqur isə dairədir". Niyə məhz dairə və kürə ən gözəlləridir? Öz "Göy cisimlərinin dövr etməsi haqqında" adlı əbədi kitabında Nikolay Kopernik belə cavab verir: "Dünya kürəşəkillidir, ona görə ki, bu forma ən maksimal tutuma malikdir. Və bu hər şeyi əhatə etmək üçün ən müvafiq formadır". Başqa sözlə desək, dünyanın quruluşundan danışaraq, Kopernik hesab edirdi ki, onun "arxitekturası" ekstremallıq və mükəmillik prinsiplərinə tabedir.

Maksimumun və minimumun tapılmasına aid məsələlər daim riyaziyyatçıları maraqlandırırdı. Onlara həmçinin qədim dövrün üç böyük həndəsə alimlərinin – Evklid, Appoloniy Perqli və Arximed – əsərlərində də rast gəlmək olar. Evklidin "Başlanğıcında" belə bir məsələ var: ABC üçbucağının daxilinə biz maksimal sahəsi olan $CDEF$ paraleloqramı çəkməliyik (şəkil 1). Arximed isə kürənin eyni sferik səthə malik olan bütün seqmentləri arasında maksimal həcmə malik olan seqmenti tapdı (yarışar idi). Apolloniy isə nöqtədən ellipsə, hiperbolaya, parabolaya kimi ən qısa məsafələri axtarırdı. Həndəsi məzmunlu çoxlu gözəl ekstremum məsələləri İntibah dövründə həll edilmişdir.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

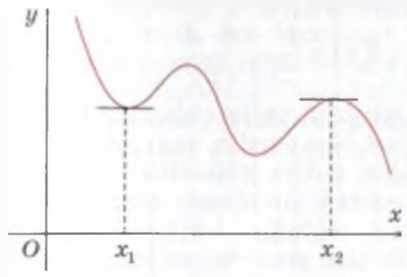
XVII əsrin 30-cu illərində ekstremal məsələlərin həllərinin ümumi üsullarının tapılmasına ehtiyac yarandı. İlk analitik üsul Pyer Ferma tərəfindən tapılmışdı. Güman ki, kəşf 1629-cu ildə baş verib, amma müəllif bu üsulu bütövlüklə ilk dəfə 1636-cı ildə izah etdi. Fermanın üsulu aşağıdadır: əgər $y = f(x)$ funksiyası x nöqtəsində öz ekstremumunu alırsa, onda verilmiş nöqtədə funksiyanın törəməsi sıfra bərabər olmalıdır, yəni belə bir bərabərlik olmalıdır: $f'(x_0) = 0$. Bu üsulun izlərinə hələ İohann Keplerin "Şərab çəlləklərinin yeni stereometriyası" kitabında (1615-ci il) rast gəlmək olar. Burada alim maksimumun və minimumun tapılmasına aid çoxlu sayda maraqlı məsələlər həll edib. Kepler yazırdı: "maksimumun yanında < funksiyanın > dəyişilməsi hiss olunmur". Keplerin fikirini və Fermanın nəticəsini həndəsi dildə belə ifadə etmək olar: ekstremum nöqtəsində funksiyanın qrafikinə çəkilmiş toxunan üfiqi olmalıdır (əgər toxunan xətt üfiqi deyilsə, onda dəyişikliklər hiss olunandılar). Nyuton eyni fikri başqa şəkildə ifadə etdi: "Qiymət maksimal və ya minimal olanda, o nə qabağa, nə də geriyə axmır" (şəkil 2).

Öz üsulunu Ferma hekayənin əvvəlində göstərilən həndəsi məsələnin nümunəsində göstərmişdi. Əgər a ilə katetlərin cəmini x ilə isə – onlardan birinin uzunluğunu göstərsək, onda düzbucaqlı üçbucağın sahəsi $x(a-x)$ ilə mütənasibdir. $S'(x) = 0$ tənliyinin yalnız $x_0 = a/2$ kökü var. Elə bu, məsələnin həllidir: maksimal sahəli düzbucaqlı üçbucaqda katetlər bərabərdirlər. Maraqlıdır ki, Evklidin də məsələsi elə eyni üsul ilə formalaşır: əgər BC tərəfinin uzunluğunu a ilə göstərsək, onda $CDEF$ paralelelogramın sahəsi $S(x) = x(a-x)$. Deməli, maksimal sahəli paralelelogramda F nöqtəsi – BC tərəfinin ortasıdır.

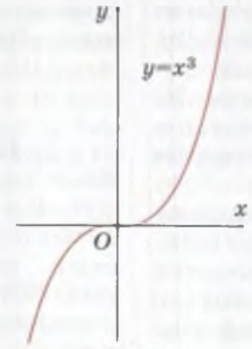
Fermanın ideyası dəqiq mənanı təkcə bir neçə onillik sonra əldə etdi. 1684-cü ildə riyazi analizin əsasları qoyulduğu Qotfrid Vilqelm Leybnisin "Maksimal və minimal qiymətlərin tapılmasının yeni üsulu..." adlı kitabı çap olundu. Artıq əsərin adı müasir riyaziyyatın əsasında ekstremumun tapılmasının böyük rolunu göstərir. Leybnis tərəfindən kitabda araşdırılan faktların çoxu artıq Nyutona məlum idi, amma o bu mövzuda 1736-cı ilə qədər heç nə çap etmirdi.

Ekstremum nəzəriyyəsində növbəti addım bu və ya digər cəhətdən ən yaxşı olan əyri xətlərin axtarılması idi. Belə tipli birinci məsələni Nyuton həll etdi. Bu, hansısa "seyrək" mühitdə minimal müqavimət hiss edən fırlanma səthi haqqında məsələdir (amma "Natural fəlsəfənin riyazi əsaslarında" (1687) Nyutonun verdiyi həlli *XX* əsrin ortalarına, ekstremum nəzəriyyəsində optimal tənlik adlanan yeni istiqamət yaranana – onun yaradıcılarından biri rus riyaziyyatçısı Lev Semenoviç Pontraqin idi – qədər başa düşə bilmirdilər).

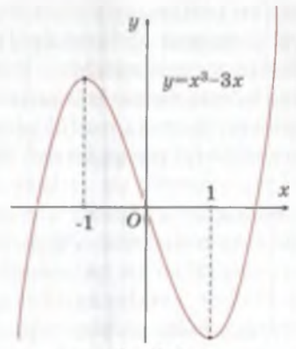
Ekstremuma aid məsələləri necə həll etmək olar? Tutaq ki, $f(x)$ funksiyası hansısa x_0 nöqtəsinin daxil olduğu (a,b) intervalında təyin olunub. Əgər (a,b)-yə daxil olan və x_0 nöqtəsini də daxilində saxlayan elə (a_0,b_0) altintervalı varsa ki, bu intervaldan olan bütün x-lər üçün $f(x) \geq f(x_0)$ $\left(f(x) \leq f(x_0)\right)$ olsun, onda deyirlər ki,



Şəkil 3.



Şəkil 4.



Şəkil 5.

x_0–$f(x)$ funksiyasının lokal minimum (maksimum) nöqtəsidir. Başqa sözlə desək, $f(x)$ funksiyası (a_0, b_0) intervalı çərçivəsində x_0 nöqtəsində öz minimal (maksimal) qiymətini alır. 3-cü şəkildə x_1 nöqtəsi – lokal minimum, x_2 nöqtəsi isə – lokal maksimum nöqtəsidir. Lokal minimum və lokal maksimum lokal ekstremum termini ilə ümumiləşdirilir.

Yuxarıda ifadə olunmuş Ferma teoremi məhz lokal ekstremuma aiddir, çünki nöqtədə funksiyanın törəməsi anlayışı verilmiş nöqtəni daxil edən kiçik intervalda funksiyanın davranışını təsvir edir. Qeyd edək ki, Ferma teoremi ekstremumun yalnız zəruri şərtidir, yəni əgər hansısa nöqtədə törəmə sıfra bərabərdirsə, onda bu nöqtə mütləq şəkildə lokal ekstremum deyil. Doğrudan da, $f(x) = x^3$ funksiyasının törəməsi x=0 nöqtəsində sıfra bərabərdir. Amma bu nöqtə verilmiş funksiyanın lokal ekstremum nöqtəsi deyil.

Və beləliklə, Ferma teoreminə uyğun olaraq $f(x)$ funksiyasının lokal ekstremumları $f'(x) = 0$ tənliyin kökləri arasındadır. Bu tənliyin köklərini bəzən $f(x)$ funksiyasının stasionar nöqtələri adlandırırlar. Tutaq ki, x_0 – stasionar nöqtədir. Lokal ekstremum olduğu ya da olmadığını necə yoxlamaq olar? 3-cü şəkilə bir də baxaq. x_1 nöqtəsinə yaxın olan nöqtələrdən solda törəmə müsbətdir, sağda isə mənfidir. Əgər stasionar nöqtə bu şərtləri təmin edirsə, onda o minimum və ya maksimum nöqtəsi ola bilər. Adətən kafi şərti belə ifadə edirlər: əgər x_0 stasionar nöqtədirsə və törəmə x_0-dan keçərkən işarəsi "–"-dən "+"-ə keçirsə, onda x_0 – lokal minimum, əgər "+"-dən "–"-yə keçirsə, onda x_0 – lokal maksimum nöqtəsidir. Əgər törəmə işarəsini dəyişimirsə, onda x_0 lokal ekstremum deyil.

Ədəd oxunda təyin olunmuş $f(x) = x^3 - 3x$ funksiyasını araşdıraq (şəkil 5). Onun $f'(x) = 3x^2 - 3$ törəməsi sıfra təkcə –1 və 1 nöqtələrində bərabər olur. Yoxlama zamanı, aydın olur ki, –1 nöqtəsindən keçəndə törəmə işarəsini "+"-dən "–"-yə dəyişir, 1-dən keçəndə isə "–"-dən "+"-ə dəyişir. Deməli, -1 nöqtəsində lokal maksimumdur, 1 nöqtəsində isə lokal minimumdur.

Əgər $f(x)$ funksiyasında stasionar nöqtədə ikinci tərtib törəməsi varsa, onda lokal ekstremumun kafi şərtlərini daha da qısa ifadə etmək olar: əgər x_0 – $f(x)$ funksiyasının stasionar nöqtəsidirsə və $f''(x) > 0$ onda x_0 nöqtəsində – lokal minimumdur, amma əgər $f''(x) < 0$, onda x_0 nöqtəsində – lokal maksimumdur. İndi elə araşdırdığımız nümunədə $f''(x) = 6x$. Deməli, $f''(-1) = -6 < 0$, $f''(1) = 6 > 0$, yəni biz əvvəlki nəticəni aldıq.

İndiyə kimi söhbət lokal ekstremumlar haqqında gedirdi. Bəs, məsələn, parçada verilmiş funksiyanın qlobal ekstremumunu və ya qlobal maksimumunu necə tapmaq olar? Fərz edək ki, funksiya bu parçada kəsilməzdir. Onda maksimal və minimal qiymətləri qəbul edən nöqtələr var. Əgər əlavə olaraq fərz etsək ki, funksiya parçanın daxilində də differensiallanandır, onda ən azı funksiyanın qlobal maksimumunu tapmaq üçün proseduru asandlıqla təsvir etmək olar. Onun stasionar nöqtələrindən lokal maksimum olan nöqtələri seçirlər (əgər belələri

varsa) və ondan sonra isə seçilmiş nöqtələrdə və parçanın uclarında funksiyanın qiymətlərini hesablayırlar. Bütün alınan qiymətlər arasında ən maksimalını seçirlər. Bu maksimal qiymətə malik olan nöqtədə funksiya verilmiş parçada ən böyük qiymətini alır.

Həkayənin əvvəlində verdiyimiz məsələni bir də həll edək. Əgər düzbucaqlı üçbucağın katetlərinin uzunluqlarının cəmini a ilə, x ilə isə – onlardan birinin uzunluğunu göstərsək, onda düzbucaqlı dördbucağın sahəsi $S(x) = x(a-x)/2$ olur. x dəyişəni 0-dan a-ya kimi dəyişir və ona görə $S(x)$-i təkcə $[0, a]$ parçasında araşdırırıq. Verilmiş funksiya $[0, a]$-da kəsilməzdir və $(0, a)$-da isə differensiallanandır. $S'(x) = 0{,}5a - x$ tənliyin yalnız bir $x_0 = a/2$ həlli var. $S''(x_0) = -1 < 0$ olduğuna görə $x_0 = a/2$ nöqtəsi $S(x)$ funksiyanın $(0, a)$ intervalında lokal maksimumudur. $S(0) = 0$, $S(a/2) = a^2/8$, $S(a) = 0$, olduğundan $S(a/2)$ maksimaldır və ona görə $[0, a]$ parçasının $x_0 = a/2$ nöqtəsində funksiya ən böyük qiymət alır. Bu o deməkdir ki, katetlərin uzunluqları cəmi verilmiş düzbucaqlı üçbucaq bərabəryanlı olduqda sahəsi ən böyük olur.

FUNKSİYANIN QRAFİKİNİ NECƏ QURMALI

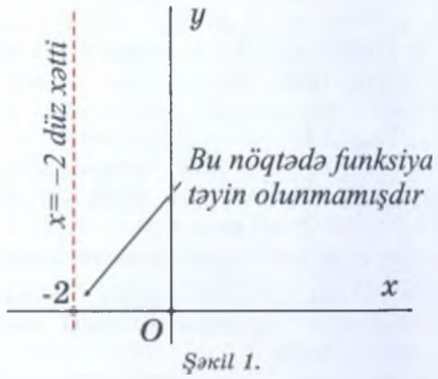
Fərz edək ki, biz hansısa konkret funksiyanın qrafikini qurmaq istəyirik. Əgər funksiya artıq öyrənilibsə, deməli, onun həm qrafikini, həm də xüsusiyyətlərinin ətraflı təsvirini kitablarda tapmaq olar. Əgər belə deyilsə? O zaman qrafiklərin qurulmasının standart üsullrından istifadə etmək qalır. Biz burada elə onlar haqqında danışacağıq.

Müasir zamanda çoxlu funksiyaların qrafiklərini yüksək dəqiqlik ilə qurmağa imkan verən çox gözəl kompyuter proqramları icad edilib. Amma hamının və həmişə yanında kompyuter olmur. Bununla belə onsuz necə etməyi də bilmək pis olmazdı. Və ona görə eskizlər və hesablamalar üçün bir neçə vərəq kağız, karandaş və kalkulyator götürək. Funksiyanın analitik ifadəsini yazaq və araşdırmanı başlayaq. Onun "əsas" planını biz elə indicə göstərərik. Nümunə üçün biz eyni zamanda aşağıdakı funksiyanın qrafikini quracağıq:

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2(x+2)} \qquad (*)$$

1. Funksiyanın təyin oblastını tapaq. Bəzən bu oblast bizə verilir, yəni x-in hansı qiymətlər qəbul etdiyi göstərilir. Belə bir şərtlər olmayanda təyin oblastı kimi funksiyanın mənası olduğu bütün nöqtələr götürülür. Və ona görə funksiyanın təyin olunmadığı nöqtələri ixtisar etməliyik. Belə prosesin texnoloqiyası aydındır: əgər verilmiş funksiya iki funksiyanın nisbətini təşkil edirsə – məxrəc 0-a bərabər olmamalıdır; əgər ona cüt dərəcənin kökü daxildirsə – kök altında olan ifadə mənfi olmamalıdır və s. (*) funksiyasının məxrəcində $(x+2)$ vuruğu var. Deməli, $x + 2 \neq 0$, yəni $x \neq -2$ mütləq şərtdir.

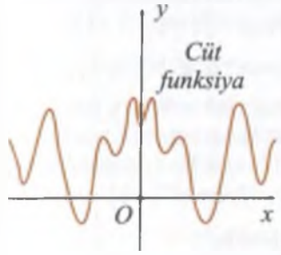
Eskizdə "qadağan olunmuş" yerləri seçək. Əgər təcrid olunmuş oblast bir interval təşkil edirsə, onda onun qıraqları boyu iki punktirli şaquli düz xətt keçirirlər; əgər bu ayrıca nöqtədirsə – onda verilmiş nöqtədən



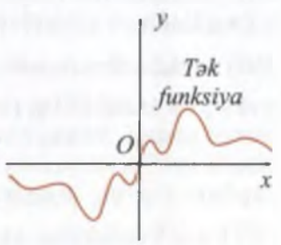
Şəkil 1.

şaquli punktirli düz xətt çəkirlər. Punktirin yerinə rəngli xəttlərdən də istifadə edirlər. Beləliklə, (*) funksiyasının qrafikinin eskizində "birinci qaranquş" əmələ gəlir – $x = -2$ punktirli düz xətt (şəkil 1).

2. Funksiyanın tək cütlüyünü və dövriliyini müəyyən edək. Belə bir məlumatlar bizə gələcəkdə lazım olacaq. Əgər funksiya cütdürsə (şəkil 2), adətən təkcə qrafikin yarısının məsələn, təkcə mənfi olmayan x-lər üçün qurulması və araşdırılması ilə məhdudlaşırlar – sonra isə onu simmetrik olaraq Oy oxuna nəzərən əks etdirirlər. Əgər funksiya təkdirsə (şəkil 3), burada da həmçinin yalnız qrafikin yarısın – məsələn, mənfi olmayan x-lər üçün qurmaq lazım olur və sonra isə koordinat başlanğıcına simmetrik olaraq onu əks etdirirlər. Bununla belə (*) funksiyası nə cütdür, nə də təkdir, ən azı ona görə ki, onun təyin oblastı Oy oxuna nəzərən qeyri- simmetrikdir.



Şəkil 2.



Şəkil 3.

Əgər funksiya dövridirsə, onda onun qrafikini təkcə bir dövrün çərçivəsində qururlar (sərbəst seçilmiş x_0-dan x_0+T-ə kimi), sonra isə onu T-nin misli qədər məsafələrə sağa və sola çəkmək ilə "çoxaldırlar". Amma (*) funksiyası dövri deyil.

3. Funksiyanın qrafikinin koordinat oxları ilə kəsişmə nöqtələrini müəyyən edək. Ox və Oy oxları ilə kəsişməyən də qrafiklər var, amma (*) funksiyasının qrafikinə bu aid deyil.

(*) funksiyasının qrafikinin OY oxu ilə kəsişdiyi nöqtənin absisi 0-a bərabərdir. Onda

$$y = f(0) = \frac{0^2 - 0 - 2}{2 \cdot (0+2)} = -\frac{1}{2}$$

yəni, qrafik ordinat oxu ilə $(0; -1/2)$ nöqtəsində kəsişir.

Absis oxunun nöqtələri üçün $y=0$. Və ona görə Ox ilə kəsişmə nöqtələrinin axtarışı təkcə $y(x)=0$ tənliyin həllinə gətirilir. Belə tənliyin müxtəlif sayda kökləri ola bilər. (*) funksiyası üçün $f(x) = 0$ tənliyini yazırıq:

$$\frac{x^2 - x - 2}{2(x+2)} = 0$$

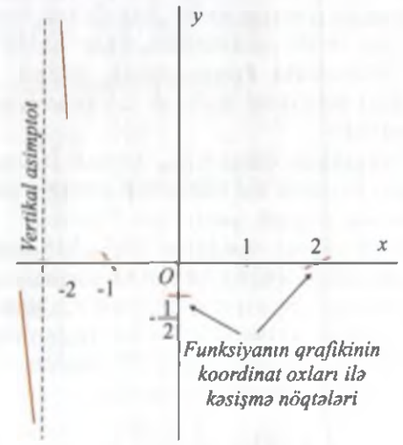
Bu bərabərlik təkcə $x^2 - x - 2 = 0$ olduqda mümkündür. Axırıncı tənliyin kökləri -1 və 2-dir. Beləliklə, qrafik Ox oxu ilə $(-1;0)$ və $(2;0)$ nöqtələrində kəsişir.

4. Kəsilmə nöqtələrinin (əgər onlar varsa) yaxın ətrafında funksiyanın davranışını araşdıraq. Ola bilər ki, kəsilmə nöqtəsinə yaxınlaşdıqca funksiya hədsiz surətdə ya böyüyür, ya da azalır, və deməli, əyri xətt ya hədsiz yuxarıya, ya aşağıya istiqamətlənir. O, kəsilmə nöqtələrindən keçən şaquli düz xəttə daha da sıxlaşır, elə bil ki, onunla qovuşmaq istəyir. Əyri xəttin yaxınlaşdığı belə düz xətlər asimptotlar adlandırılır. Və ona görə, kəsilmə nöqtələrini taparkən və onların yaxın ətrafında funksiyanın davranışını təhlil edərkən, biz eyni zamanda şaquli asimptotları da axtarıb tapırıq.

(*) funksiyasının təyin olunmadığı yeganə nöqtəsi var – elə bu nöqtədə kəsiləndir: bu $x = -2$-dir. Qeyd edək ki,

$$\frac{x^2 - x - 2}{2(x+2)}$$

ifadəsinin surəti $x = -2$ olduqda, 4-ə bərabərdir. Və ona görə sağdan və soldan limitlər məxrəcin işarəsi ilə təyin olunur. Məsələn, əgər x həmişə -2-dən kiçik olmaqla -2-yə yaxınlaşırsa, onda məxrəc daima mənfi olaraq 0-a yaxınlaşır. Deməli, əgər x -2-yə soldan yaxınlaşırsa, funksiya $-\infty$-a yaxınlaşır, əgər -2-yə sağdan yaxınlaşırsa, onda $+\infty$-a yaxınlaşır. Deməli, $x = -2$ düz xətti axtarılan əyri xətt üçün həm soldan, həm də sağdan şaquli asimptotdur (şəkil 4).



Şəkil 4.

Əldə olan məlumatlara görə biz artıq təxmin edə bilərik ki, $x = -2$ nöqtəsindən sağda əyri xətt "buludların üstündəki hün-

dürlüklərdən" düşür, (–1, 0) nöqtəsində absis oxu ilə kəsişir, sonra isə (0, –1/2) nöqtəsində ordinat oxu ilə kəsişir, amma artıq $x = 1$ və $x = 2$ arasında o yenə də qalxır Ox ilə (2;0) nöqtəsində kəsişərək artıq "uçuşdadır". Sonrası nə olacaq – hələ məlum deyil, amma əyri xətt qəti surətdə absis oxuna "enməyəcək", o daima ondan yuxarıda olacaq. $x = -2$ nöqtəsindən solda və onunla yaxınlaşma zamanı əyri xətt aşağıya istiqamətlənir.

5. Törəməni tapaq. Onu sıfra bərabərləşdirərək və alınan tənliyi həll edərək, biz funksiyanın lokal ekstremumlarının təxmini yerini taparıq. Ehtimal edilən ekstremumların koordinatlarını təyin etmək üçün bütün bu nöqtələrdə funksiyanın qiymətlərini hesablayaq. Həmçinin ikinci tərtib törəmənin qiymətini hesablayaq – belə üsul ilə biz bu nöqtələrdə ekstremumların yerləşdiyini dəqiqliklə aydınlaşdıraraq, orada maksimum və ya minimum olduğunu müəyyən edərik.

Bundan başqa törəmənin təyin olunmadığı nöqtələri tapaq. Lokal ekstremumlar nöqtələri ilə birlikdə onlar təyin oblastını hissələrə bölürlər. Belə bir hissələrin hərəsində funksiyanın özünü necə apardığını müəyyən edək, "Nümunə" üçün onların daxili nöqtələrini götürüb və onlar üçün törəmələri hesablamaq mütləq deyil (baxmayaraq ki, qadağan da deyil). Belə bir qaydadan istifadə etmək olar: lokal maksimumdan solda funksiya həmişə artır, sağda isə – azalır (minimum üçün əksinədir). Hər halda monoton hissələrdə funksiyanın özünü necə apardığını minimal xərclər ilə müəyyən etmək lazımdır.

Törəmənin olmadığı, amma funksiyanın təyin olunub və kəsilməz olduğu nöqtələrə xüsusi diqqət yetirmək lazımdır. Belə nöqtələrdə sınma ola bilər. Belə bir nöqtəni taparkən, onda sağda və solda törəmənin limitini müəyyən etmək lazımdır. Nəticədə qrafikin hansı əyilmələr ilə verilmiş nöqtəyə iki tərəfdən yaxınlaşdığı bəlli olacaq.

(*) funksiyasının törəməsi:

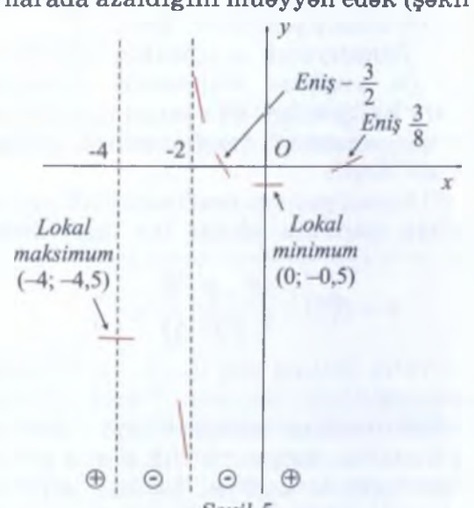
$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x}{2(x+2)^2}$$

Onu 0-a bərabərləşdirərək, biz $x^2 + 4x = 0$ ikidərəcəli tənlik alarıq, bu tənliyi həll edərək iki kök alınacaq: $x_1 = 0$ və $x_2 = -4$. Bu nöqtələrdə lokal ekstremumlar mümkündürlər. İkinci tərtib törəməni alaq:

$$f''(x) = \frac{4}{(x+2)^3}$$

$f''(-4) = -0{,}5 < 0$ və $f''(0) = 0{,}5 > 0$ olduğuna görə nöqtələrdən birincisində lokal maksimumdur, ikincisində isə – minimumdur. Ekstremum nöqtələrində funksiyaların qiymətlərini hesablayaq: $f(-4) = -4{,}5$ və $f(0) = -0{,}5$. Sonra isə eskizdə bu nöqtələri quraq və nazik üfiqi parçalar – toxunan xətlərini çəkək. Absis oxu ilə kəsişmə nöqtələrində əyri xəttin meyl bucağını göstərmək faydalı olardı, bunun üçün $f'(-1) = -3/2$, $f'(2) = 3/8$ oduğunu tapırıq.

Törəmənin təyin olunmadığı nöqtə təkcə bir dənədir, bu $x=-2$ nöqtəsidir. Bu nöqtənin ətrafində funksiyanın davranışını biz artıq gözdən keçirmişdik. x-in -4, -2,0 qiymətləri funksiyanın təyin oblastını dörd hissəyə bölürlər, hərəsinin daxilində o monotondur. Lokal ekstremumların nöqtələrinə əsaslanaraq, harada funksiyanın artdığını və harada azaldığını müəyyən edək (şəkil 5).



Şəkil 5.

6. Əyilmə nöqtələrini müəyyən edək. Əvvəlcə ikinci tərtib törəməsi 0-a bərabər olanları tapaq. Hər bir nöqtəni taparaq, bu nöqtədə funksiyanın qiymətini və törəmənin qiymətinə bərabər olan toxunanın bucaq əmsalını hesablayaq. Eskizə bu nöqtələri qeyd edək və toxunanların balaca hissələrini

çəkək. Əgər istək varsa, biz həmçinin üçüncü törəməni tapıb, əyilmənin xüsusiyyətini müəyyən edə bilərik (hansı qabarıqlığın hansı qabarıqlığı əvəz etdiyini), amma adətən artıq məlum olan məlumatlar ilə məhdudlaşırlar: onların əsasında birmənalı olaraq harada funksiyanın yuxarıya qabarıq olduğunu və harada aşağıya qabarıq olduğunu müəyyən etmək olur.

(*) funksiyası üçün bilirik ki, $f''(x) = 4/(x+2)^3$. Bir tərəfdən bu funksiya heç bir nöqtədə 0-a bərabər ola bilməz, ona görə qrafikin əyilmə nöqtəsi yoxdur. Başqa tərəfdən, dərhal görünür ki, $x < -2$ olduqda $f''(x) < 0$ və $x > -2$ olduqda $f''(x) > 0$ olur, yəni $x = -2$ nöqtəsindən solda əyri xətt hər yerdə yuxarı qabarıq olacaq, sağda isə - aşağıya.

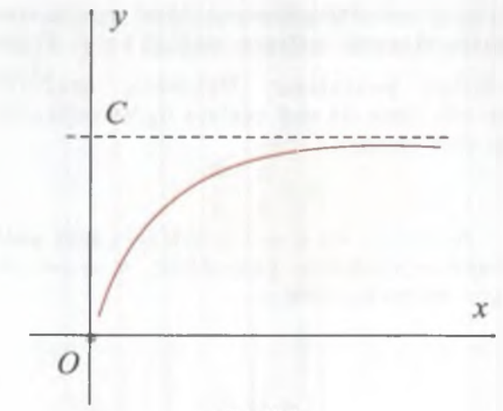
7. İndi isə bizə $x \to +\infty$ və $x \to -\infty$ olduqda funksiyanın özünü necə aparmasını aydınlaşdırmaq qalır. Bu hallardan hər birində aşağıdakı variantlar ola bilər:

1) funksiya hansısa müəyyən olunan qiymətə yaxınlaşır;

2) funksiya hədsiz şəkildə böyüyür və ya azalır, yəni ya $+\infty$-a, ya da $-\infty$-a yaxınlaşır;

3) funksiya heç nəyə yaxınlaşmır.

Əgər funksiya $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ şərti ilə hansısa müəyyən olunmuş C qiymətinə yaxınlaşırsa, onda o koordinat başlanğıcından sağa uzaqlaşarkən $y=C$ üfiqi düz xəttə daha da sıx yaxınlaşır, ona görə belə üfiqi düz xətt funksiyanın asimptotu olacaq (şəkil 6). İkinci hal daha maraqlıdır – funksiya hədsiz şəkildə ya böyüyür, ya da azalır. Onda o maili asimptota yaxınlaşa bilər. Deməli, mütləq qiymətinə görə kifayət qədər böyük x-lərdə (müsbət ya da mənfi) o özünü praktiki olaraq $y = kx + b$ kimi aparır, yəni $f(x)/x$ nisbəti $(kx + b)/x = k + b/x$ nisbətinə yaxınlaşır. x-in böyüməyi ilə axırıncı ifadə k-ya yaxınlaşır, deməli $f(x)/x$ nisbəti də k-ya yaxınlaşmalıdır. Elə bu maili asimptotların axtarış qaydasını tapmağa kömək edir: $x \to +\infty$ olduqda $f(x)/x$ ifadəsinin limitini tapmaq lazımdır. Əgər belə bir limit varsa və hansısa k ədədinə bərabərdirsə, onda maili asimptotu ola bilər və onun bucaq əmsalı k-dır.



Şəkil 6.

Əgər k tapılıbsa, b-ni necə tapmaq olar? Əgər $f(x)$ funksiyası x-in böyüməsi ilə $y = kx + b$ düz xəttinə yaxınlaşırsa, onda bu düz xətlə $y = kx$ düz xətti arasında şaqul boyu məsafə b-yə yaxınlaşacaq. Və ona görə $x + \infty$-a və ya $x - \infty$-a yaxınlaşmaq şərti ilə $f(x) - kx$ ifadəsinin limitini hesablamaq lazımdır. Əgər belə bir limit yoxdurma, onda asimptot da yoxdur.

Asimptot tapılan kimi onu eskizdə göstərib və ona yanaşı olaraq əyri xəttin necə – yuxarıdan və ya aşağıdan istiqamətləndiyini müəyyənləşdirərək bu əyri xəttin balaca hissələrini qrafikin sağ (və ya sol) hissəsində çəkmək lazımdır.

$f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{2(x+2)}$ funksiyasının qrafiki üçün asimptotları tapaq:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{2(x^2 + 2x)} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 + \frac{4}{x}}$$

olduğundan, $x \to +\infty$ kimi, $x \to -\infty$ olduqda limit vardır və $k = 1/2$ bərabərdir. İndi isə b-ni tapaq:

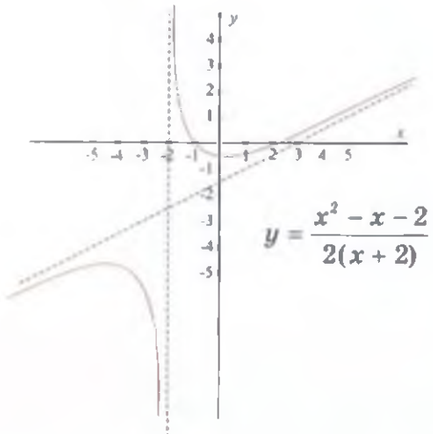
$$f(x) - kx = \frac{x^2 - x - 2}{2(x+2)} - \frac{x}{2} =$$

$$= \frac{-3x - 2}{2(x+2)} = \frac{-3 - \frac{2}{x}}{2 + \frac{4}{x}}$$

$x \to \pm\infty$ olduqda surət -3-ə, məxrəc isə 2-yə və deməli, onların nisbəti $b = (-3)/2 = -3/2$-yə yaxınlaşır. Beləliklə, qrafikin həm sol, həm də sağ qolları üçün asimptot eyni düz xətdir:

$$y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$

Aydındır ki, $x \to +\infty$ olduqda əyri xətt asimptota aşağıdan yaxınlaşır, $x \to +\infty$ olduqda isə yuxarıdan.



Şəkil 7.

8. Əgər nəticədə alınmış məlumatlar bizə qrafik çəkmək üçün kifayət deyilsə, onda x-in bir neçə əlavə qiymətini götürmək olar. Onlar üçün funksiyanın qiymətini tapmaq və müvafiq nöqtələri toxunan xəttlərin parçaları ilə birlikdə eskizə əlavə etmək lazımdır.

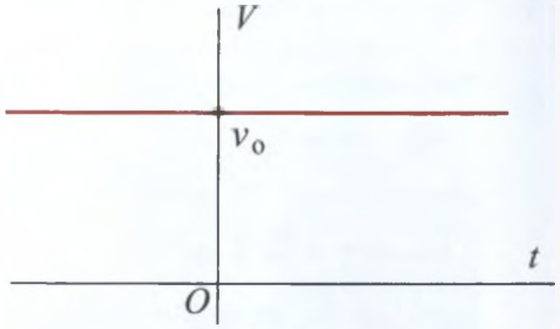
Beləliklə, funksiyanın təhlili bitib. Göstərilmiş nöqtələrdən asimptot və toxunan xətləri nəzərə alaraq rahatcasına əyri xətt çəkirik (şəkil 7).

* * *

Qeyd etmək lazımdır ki, biz bütün 8 mərhələni həmişə tam həcmdə istifadə etmirik. Bəzən təhlil artıq 1-ci bənddən sonra bitir. Məsələn, $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{-x}$ funksiyasının qrafikini çəkək. Onun təyin oblastı $x \geq 0$ və $-x \geq 0$ bərabərsizliklər ilə verilir: buradan eyni zamanda $x \geq 0$ və $x \leq 0$. Elə alınır ki, təyin oblastı təkcə bir nöqtədən ibarətdir: $x=0$. $f(0) = 0$ olduğuna görə, bu funksiyanın qrafiki koordinat başlanğıcıdır.

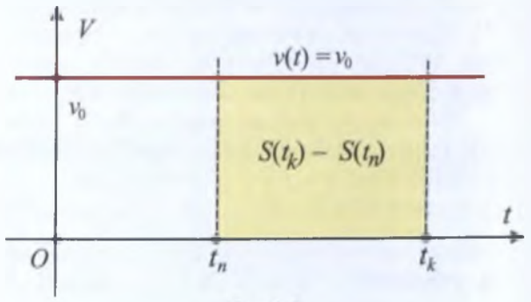
İNTEQRAL VƏ İBTİDAİ FUNKSİYA

Təsəvvür edək ki, yol boyu maşın gedir. Spidometrin əqrəbi 100 km/saat göstəricisində donub, keçilən məsafənin hesablayıcısı isə... tutqun bir kağız ilə yapışdırılıb. Hesablayıcının göstəriciləri haqqında nəsə demək olarmı? Əlbəttə. Aydındır ki, hər an o bir saat əvvəlkindən düz 100 km çox göstərir. Sürətin zamandan asıllığının qrafikini çəkək $(v(t) = v_0 = const)$ (şəkil 1). Əgər $S(t)$ – hansısa t_0 vaxtından başlayaraq keçən məsafədirsə, onda t_n-dən t_k-ya qədər vaxta gedilən məsafə $S(t_k) - S(t_n) = v_0(t_k - t_n)$.



Şəkil 1.

Diqqət edin ki, bu qiymət aşağıdan absis oxu, yuxarıdan $v(t) = v_0$ funksiyasının qrafiki, soldan və sağdan isə – t_n və t_k şaquli xəttlər ilə hüdudlanmış düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir (şəkil 2).

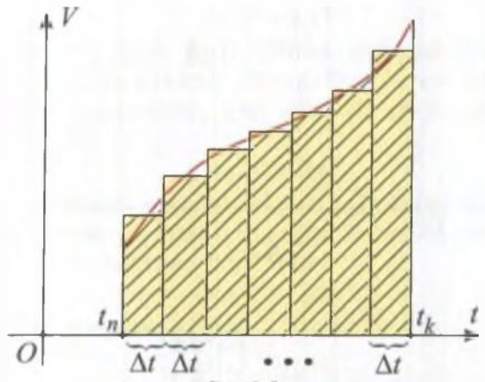


Şəkil 2.

Əgər sürət dəyişəndirsə, bəs o zaman nə etməli? t_n-dən t_k-ya kimi vaxt intervalında hansısa Δt vaxt müddətini seçək. Amma elə az müddət seçək ki, bu vaxt müddətində maşının sürəti elə də çox dəyişə bilməsin. Δt zaman kəsiyinin orta sürət verilmiş müddət

zamanı hər hansı anındakı sürətdən elə də çox fərqlənmir. Və ona görə maşının Δt müddətinə keçdiyi məsafə təxminən $v(t)\Delta t$-yə bərabərdir.

İndi isə, əgər t_n-dən t_k-ya kimi müddəti bir neçə Δt müddətli hissələrə bölsək, sonra isə onlar üçün tapılan $\Delta S = v(t)\Delta t$ məsafələrini toplasaq, onda yaxşı dəqiqlik ilə $S(t_k) - S(t_n)$ məsafəsini hesablamaq olar. Bununla belə Δt müddəti nə qədər kiçik olsa (yəni $[t_n, t_k]$ parçası nə qədər çox hissəyə bölünsə), o qədər də tapılan cəm $S(t_k) - S(t_n)$-nin həqiqi qiymətinə yaxın olacaq. 3-cü şəkildə ona ştrixlənmiş pilləli fiqurun sahəsi uyğundur. Δt 0-a yaxınlaşarkən, fiqur funksiyanın qrafikinin altındakı əyrixətli trapesiyaya yaxınlaşır (sarı rəng ilə göstərilib), onun sahəsi isə – trapesiya-



Şəkil 3.

nın sahəsinə yaxınlaşır. Bu qiymət $v(t)$ funksiyasının $[t_n, t_k]$ parçasında müəyyən inteqralı adlandırılır və belə göstərilir:

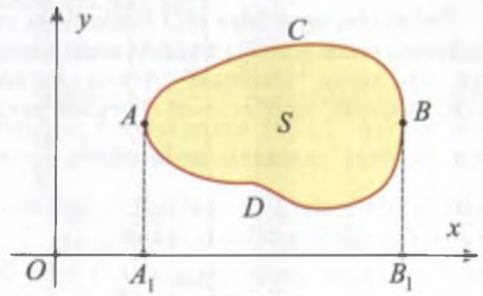
$$\int_{t_n}^{t_k} v(t)dt$$

inteqral t_n-dən t_k-ya kimi *ve te de te* kimi oxunur.

Müəyyən inteqralın hesablanmasına çoxlu məsələlər gətirilir. Onlardan bir neçəsinə baxaq:

1. Tutaq ki, koordinat müstəvisində $f(x)$ və $g(x)$ funksiyalarının qrafikləri ilə məhdudlaşmış qabarıq əyrixəttli fiqur verilib. Onun sahəsini tapmaq tələb olunur.

İki AA_1 və BB_1 şaquli xəttini çəkək (şəkil 4). Aydındır ki, axtarılan sahə iki əyrixətli trapesiyanın (A_1ACBB_1 və A_1ADBB_1) sahələrinin fərqinə bərabərdir. A nöqtəsinin absisi x_1-ə, B nöqtəsinin absis – x_2-dirsə, onda



Şəkil 4.

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)dx$$

2. Nazik qeyri-bircins çubuq götürək və onun uclarından birini başlanğıc kimi qəbul edək. Tutaq ki, çubuğun materialının xətli sıxlığı başlanğıcdan x məsafəsində $p(x)$-ə bərabərdir. Bizə çubuğun kütləsini tapmaq lazımdır.

Çubuğu xəyalən qısa Δx hissələrinə bölək. Hər hissənin kütləsini müəyyən edək (o təxminən $p(x)\Delta x$-ə bərabərdir) və bu kütlələri toplayaq. Biz sürətə görə məsafəni tapdığımız məsələdəki kimi həll edirik. Elə deyilmi? Və ona görə axtarılan qiymət də funksiyanın qrafiki altında əyrixəttli trapesiyanın sahəsinə, yəni:

$\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$ inteqralına bərabərdir.

3. İş, bildiyimizə görə, qüvvənin yerdəyişməyə hasilinə bərabərdir. Əgər qüvvə məsafəyə görə dəyişirsə, onda bütöv yolu balaca Δs kəsiklərinə bölməliyik. Və bu kəsiklərin daxilində F qüvvəsi heç də dəyişmir. Onda hər bir belə kəsikdə iş $F\Delta s$-ə bərabərdir, ümumi iş isə – bütün "mikroişlərin" cəminə bərabərdir:

$$\int_{s_1}^{s_2} F(s)ds$$

İBTİDAİ FUNKSİYA

Hərəkət edən maşın ilə məsələ bizə müəyyən inteqralların tapılmasında kömək edir. Həqiqətən, əgər $S(t)$ – maşın ilə t vax-

tına keçən yoldursa, onda onun $v(t)$ sürəti – bu yolun törəməsidir:

$$v(t) = S'(t)$$

Beləliklə, əgər bizə $v(t)$ funksiyası məlumdursa, onda elə $S(t)$ funksiyasını seçməliyik ki, onun törəməsi $v(t)$-yə bərabər olsun. Məsələn, əgər $v(t)=at$ (bərabər yeyinləşən hərəkət zamanı), onda $S(t) = \frac{at^2}{2} + C$ şəklində (burada C – sabitdir) hər hansı funksiyanı götürə bilərik, çünki:

$$\left(\frac{at^2}{2} + C\right)' = \frac{2at}{2} = at$$

$S(t)$-ni bilərək, artıq inteqralı hesablamaq çətin deyil.

$$\int_{t_n}^{t_k} v(t)dt = S(t_k) - S(t_n) \quad (*)$$

Xüsusi halda

$$\int_{t_n}^{t_k} atdt = \frac{at_k^2}{2} - \frac{at_n^2}{2} = \frac{a}{2}\left(t_k^2 - t_n^2\right)$$

Törəməsi verilmiş $f(x)$ funksiyasına bərabər olan $F(x)$ funksiyası onun ibtidai funksiyası adlandırılır. Belə ki, $F(t) = at^2/2$ funksiyası $f(t)=at$ funksiyası üçün ibtidai funksiyadır. Sabitin törəməsi sıfra bərabər olduğundan funksiyanın ibtidai funksiyası sabit dəqiqliyi ilə müəyyən edilib, yəni $F(x)$ funksiyası $f(x)$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdırsa, onda $G(x) = F(x) + C$ də onun ibtidai funksiyasıdır. $f(x)$ funksiyasının hər hansı $F(x)$ ibtidai funksiyası üçün Nyuton-Leybnis düsturu doğrudur:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Əslində, bu hərəkət edən maşın haqqında məsələnin gətirildiyi (*) düsturudur. Nyuton-Leybnis düsturu differensial və inteqral hesabları arasında və deməli, toxunan və sahə haqqında məsələlər arasında da əlaqəni müəyyən edir.

Verilmiş funksiyanın bütün ibtidai funksiyaları ailəsi onun qeyri-müəyyən inteqralı adlandırılır və belə göstərilir:

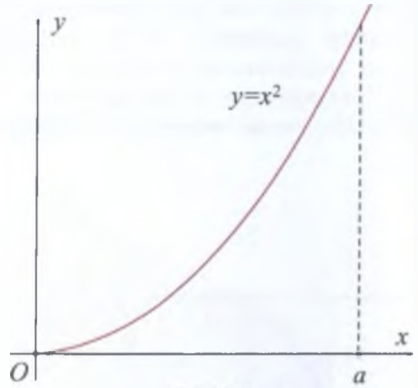
$$\int f(x)dx$$

Əgər hər hansı funksiyanın qeyri-müəyyən inteqralının düsturunu yazmaq istəsələr, onda mütləq şəkildə $+C$ əlavə edirlər, yəni, bu, hansısa ibtidai funksiya deyil, verilmiş funksiyanın bütün ibtidai funksiyaları çoxluğudur. Məsələn:

$$\int axdx = \frac{ax^2}{2} + C$$

İNTEQRALI NECƏ TAPMALI

Fərz edək ki, biz $[0, a]$ parçasında $y=x^2$ parabolasının qrafiki altında qalan əyrixətli trapesiyanın sahəsini hesablamaq istəyirik. Burada a – hər hansı həqiqi ədəddir (şəkil 5). Yuxarıda baxılan misallardan aydındır ki, axtarılan sahə



Şəkil 5.

$$\int_0^a x^2dx$$

inteqralına bərabərdir. Nyuton – Leybnis düsturuna görə həmin inteqral

$$F(a) - F(0)$$

fərqidir, burada $F(x)$ $f(x)=x^2$ funksiyasının ibtidai funksiyasıdır. Bəs bu ibtidai funksiyanı necə tapmalı?

Sadəcə sorğu kitabına (və ya bizim məqalədəki qeyri-müəyyən inteqrallar cədvəlinə) baxmaq olar. Lakin biz başqa cür hərəkət edəcəyik. Yada salaq ki, əgər $F(x)$ $f(x)$-in ibtidai funksiyasıdırsa, onda $F'(x) = f(x)$. Başqa sözlə, inteqrallama (yəni verilmiş halda qeyri-müəyyən inteqralın tapılması)-diferensiallamaya tərs olan məsələdir. Buna görə də biz törəmələr cədvəlinə müraciət edəcək ("Törəmə" məqaləsinə bax), lakin ondan adi qaydada istifadə etməyəcəyik. Tərsinə, törəməsi $f(x)=x^2$ funksiyasına

BƏZİ FUNKSİYALARIN İNTEQRALLARI

Sabit: $\int adx = ax + C.$

Xətti funksiya: $\int (ax + b)dx = \frac{ax^2}{2} + bx + C.$

Qüvvət funksiyası: $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,$ burada $a \neq -1.$

$1/x$ funksiyası: $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C.$

Eksponent: $\int e^x dx = e^x + C.$

Natural loqarifm: $\int \ln x dx = x\ln x - x + C.$

Triqonometrik funksiyalar:

$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C,$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \quad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$

"oxşayan" bir funksiya tapaq. Orada olanlardan sanki

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

düsturu uyğun gəlir. Onun sağ tərəfində x-in $(a-1)$-ci qüvvəti durur. Bizi ikinci qüvvət maraqlandırır, ona görə də $a=3$ qəbul edəcəyik:

$$(x^3)' = 3x^2$$

İndi isə 3 əmsalından xilas olmaq üçün yada salaq ki, sabit vuruğu törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq olar, yəni

$$(\kappa x^3)' = 3\kappa x^2$$

$\kappa=1/3$ yazaraq alırıq

$$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$$

Beləliklə, $f(x)=x^2$ funksiyasının ibtidai funksiyalarından biri $F(x)=x^3/3$-dür, bütün ibtidai funksiyalar isə

$$\int x^2dx = \frac{x^3}{3} + C \text{ olur.}$$

Hesablamalarımızı apararkən biz inteqrallamanın belə bir qaydasını aldıq:

✓ **Sabit vuruğu inteqral işarəsi xaricinə çıxarmaq olar:**

$$\int \kappa f(x)dx = \kappa \int f(x)dx$$

Başqa qaydalar da var, məsələn:

✓ **İki funksiyanın cəminin inteqralı bu funksiyaların inteqralları cəminə bərabərdir:**

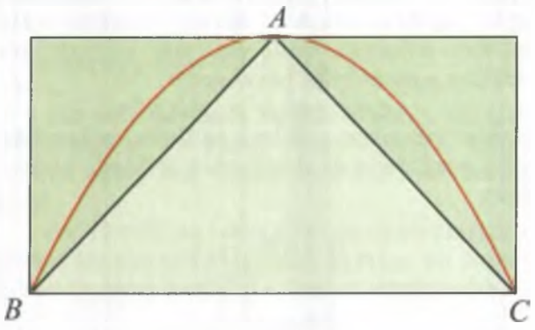
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Lakin öz məsələmizə qayıdaq. Biz $F(x)$ funksiyasının $x=0$ və $x=a$ nöqtələrində qiymətlərini hesablayıb, sonra da ikincidən birincini çıxmalıyıq:

$$\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{a^3}{3}$$

Beləliklə, $y=x^2$ parabolasının qrafiki altındakı trapesiyanın $[0, a]$ parçasındakı sahəsi $a^3/3$-ə bərabərdir.

"Parabolanın kvadraturası" məsələsini b.e.ə. *III* əsrdə qədim yunan alimi Arximed həll edib ("Arximed" məqaləsinə bax). Bizdən fərqli olaraq o, ümumi parabola halına



Şəkil 6.

baxıb və sübut edib ki, "düz xətt və parabola ilə məhdudlaşan ixtiyari seqment eyni oturacağa və hündürlüyə malik üçbucağın 4/3-nə bərabərdir" (şəkil 6). Onun dövrünün riyaziyyatında inteqral və törəmə anlayışları olmasa da, Arximed digər fiqurların da sahə və həcmlərini uğurla tapırdı. İnteqral hesabı bütün oxşar məsələlərin həllinin ümumi üsulunu verir.

QÜVVƏT SIRALARI

Əvvəllər biz

$$a_0+a_1+\ldots+a_n+\ldots$$

ədədi sıralarına baxmışıq.

Bəs niyə toplananları funksiyalar olan sıra

$$a_0(x)+a_1(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots$$

tərtib etməyək? Belə sıralar funksional sıra adlanır. $a_0(x)$, $a_1(x),\ldots,a_n(x)$ funksiyalarının təyin oblastından götürülən hər bir qeyd olunmuş x üçün funksional sıra ədədi olaraq ya yığıla, ya da dağıla bilir. Müvafiq ədədi sıranın yığıldığı x-lər çoxluğu funksional sıranın yığılma oblastı adlanır.

Funksional sıralar içərisində $a_n(x)=c_nx^n$ olan qüvvət sıralarını fərqləndirirlər, burada c_n qeyd olunmuş ədədlərdir. Vuruğu x olan $(|x|<1)$ olan sonsuz azalan həndəsi silsilənin cəmi qüvvət sırasının ən sadə nümunəsidir:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad (*)$$

Qüvvət sırasının yığılma oblastı həmişə müəyyən $(-R, R)$ intervalıdır ki, bu intervalın da bir və ya hər iki ucu ona daxil ola bilər. Bəzən o, $x=0$ nöqtəsinə cırlaşır, bəzən isə bütün düz xətlə üst-üstə düşür. R ədədi qüvvət sırasının yığılma radiusu adlanır. Əgər yığılma intervalı bütün ədəd oxu ilə üst-üstə düşərsə, onda deyirlər ki, yığılma radiusu sonsuzluğa bərabərdir.

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n+\ldots$$

qüvvət sırasının yığılma radiusunu tapmaq üçün aşağıdakı düsturlardan istifadə etmək olar:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|},$$

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|c_n|}}$$

(əgər uyğun limitlər mövcuddursa).

Qüvvət sıraları riyaziyyatın müxtəlif sahələrində, xüsusi halda, funksiyaların təqribi hesablamalarında mühüm rol oynayır. Hər hansı funksiyanı

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$$

qüvvət sırası şəklində təqdim etmək mümkün olarsa ("qüvvət sırasına ayırmaq" deyirlər), onda $f(x)$-in təqribi hesablanması üçün sonlu sayda toplanandan

$$f(x)\approx c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$$

istifadə etmək olar. Başqa sözlə, bu halda funksiyanı çoxhədli ilə əvəz edirlər və belə çoxhədlinin qiymətini hesablamaq artıq çətin deyil.

Bəs funksiyanı hansı şərtlər daxilində qüvvət sırasına ayırmaq olar? Bu şərtlərin biri sıfır ətrafında bütün törəmələrin məhdudluğudur. Yəni elə bir sabit M olmalıdır ki, sıfırın hər hansı ətrafındakı bütün x-lər üçün və bütün $n=1, 2, \ldots$ üçün

$$\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$$

bərabərsizliyi ödənilsin. Onda $f(x)$ funksiyası aşağıdakı qüvvət sırasına ayrılır:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

O, verilmiş funksiyanın Teylor (və ya Makloren) sırası adlanır.

Beləliklə, sıfırın ətrafında bütün törəmələrin məhdudluğu şərti ödənilən zaman bu ətrafda funksiyanın qiymətləri onun bütün törəmələrinin yeganə $x=0$ nöqtəsindəki qiymətləri ilə müəyyən olunur (ətraf özü çox böyük ola, xüsusi halda bütün ədəd oxu ilə üst-üstə düşə bilər).

Bir sıra elementar funksiyalar üçün Teylor sırasına ayrılışı asanca tapmaq olar. Məsələn, $f(x)=e^x$ funksiyasına baxaq. Bu funksiyanın ixtiyari törəməsi yenə e^x olduğundan, $f^{(n)}(0)=e^0=1$. Sıfırın ixtiyari ətrafında törəmələrin məhdudluğu şərtini də asanca yoxlamaq olar. Beləliklə, e^x funksiyası üçün Teylor sırası

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

şəklindədir və o bütün x-lər üçün yığılır. Burada, $x=1$ qoyub, alırıq

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\ldots$$

Bu sıranın altı birinci həddi e ədədinin birinci üç doğru rəqəmi ilə təqribi qiymətini verir.

sin x və *cos x* funksiyalarının sıfırda törəmələrini təyin edərək, onların Teylor sırasına ayrılışını alırıq:

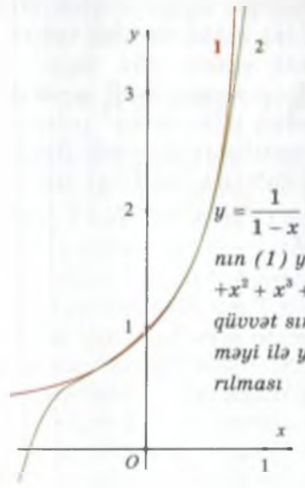
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Müxtəlif proseslərin təqribi riyazi modellərinin qurulması zamanı tez-tez kiçik x-lər üçün

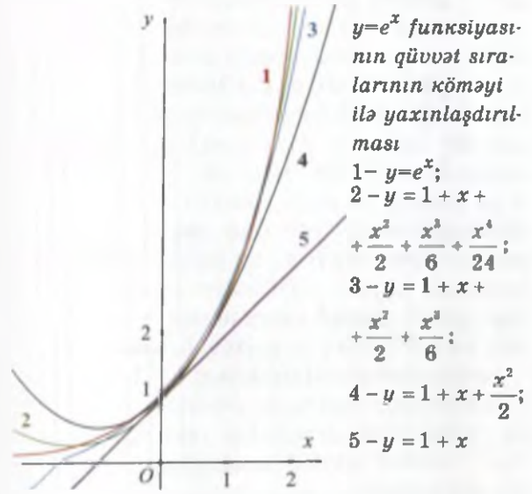
$$e^x\approx 1+x,$$
$$\sin x\approx x,$$
$$\cos x\approx 1-\frac{x^2}{2}$$

yazırlar.



$y=\frac{1}{1-x}$ funksiyasının (1) $y=1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$ (2) qüvvət sırasının köməyi ilə yaxınlaşdırılması

Funksiyaların sonlu cəminin törəməsi və ya inteqralı toplananların törəmə və ya inteqrallarının cəmidir ki, bunu "sonsuz" cəmlər haqqında demək olmaz. Lakin bu barədə qüvvət sıralarınkı "gətirib" – yığılma



$y=e^x$ funksiyasının qüvvət sıralarının köməyi ilə yaxınlaşdırılması

oblastı daxilində onları hədbəhəd diferensiallamaq və inteqrallamaq olar. Məsələn, (*) ifadəsini hədbəhəd diferensiallasaq, alınan sıranın cəmi verilmiş sıranın cəminin törəməsinə bərabər olacaq:

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$$

İndisə (*) –da x-i $-t$ ilə əvəz edək:

$$\frac{1}{1+t}=1-t-t^2-\ldots+(-1)^nt^n+\ldots$$

Bu sıranı 0-dan x-ə dək olan aralıqda $(|x|<1)$ inteqrallasaq, aşağıdakı qüvvət sırası alınar:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+\ldots$$

$$\frac{1}{1+t^2}=1-t^2+t^4-\ldots+(-1)^nt^{2n}+\ldots$$

Sırası ilə də eyni əməliyyatı aparsaq,

$$arctgx=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

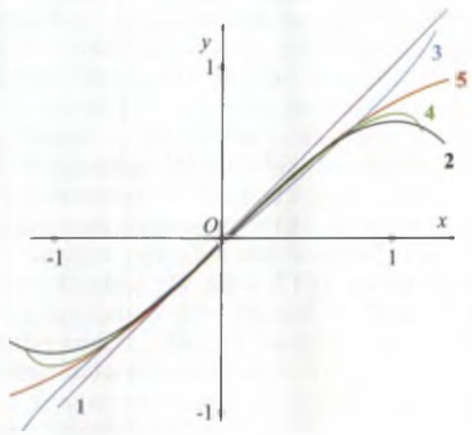
taparıq.

Təkcə e ədədini deyil, eləcə də π ədədini sıraların köməyi ilə təqribi hesablamaq olar. $arctg\ x$-in ayrılışında $x=1$ yazıb alırıq:

$$\frac{\pi}{4}=arctg1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}+\ldots$$

Bu sıra Leybnis sırası adlanır. O, çox yavaş yığılır və yaxşı yaxınlaşmalar üçün həddən artıq çox toplanan götürmək lazım gəlir.

ln $(1+x)$ və *arctg* x funksiyalarının qüvvət sıralarına aldığımız ayrılışı bu funksiyaların eyni zamanda Teylor sıralarıdır.



y=arctg x funksiyasının sıralarının köməyi ilə yaxınlaşdırılması.

1 – y=x; *2 – $y=x-\frac{x^3}{3}$;* *3 – $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}$;*

4 – $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}$; *5 – y=arctgx*

Daha ümumi şəkilli qüvvət sıralarına da baxılır:

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0^2)+\ldots+c_n(x-x_0)^n+\ldots$$

Onlar haqqında mərkəzi x_0 nöqtəsində olan qüvvət sırası deyirlər. $f(x)$ funksiyasının

mərkəzi x_0 nöqtəsində olan sırası analoji şəkildə təyin olunur:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

Kompleks dəyişənli funksiyalar üçün qüvvət sıraları xüsusi əhəmiyyət kəsb edir. $y=e^{ix}$ funksiyası üçün Teylor sırasını yazsaq, sonra isə sinus və kosinusun sıralarından istifadə etsək, biz Eyler düsturuna gələrik ("Kompleks ədədi qüvvətə yüksəltmək və ondan kök almaq" məqaləsinə bax). Belə ki, kompleks dəyişənli $f(z)$ funksiyasının sıfır ətrafında kəsilməz törəməsi varsa, onun bütün törəmələri var və o, qüvvət sırasına ayrılır.

TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR

HƏR ŞEY ZƏR ATMAQDAN BAŞLADI

Təsadüf, təsadüfilik – bunlarla biz hər gün rastlaşırıq: təsadüfi görüş, təsadüfi sınma, təsadüfi tapıntı, təsadüfi səhv. Bu sıranı sonsuzluğa qədər davam etdirmək olar. Adama elə gəlir ki, bura riyaziyyatın yeri deyil – təsadüflər səltənətində nə qanun! Lakin burada da elm maraqlı qanunlar aşkarlayıb – onlar insana təsadüfi hadisələrlə rastlaşdıqda özünü inamlı hiss etməyə imkan verir.

Lakin təsadüfiliyin zərurətlərindən danışmazdan öncə belə bir suala cavab verməyə çalışaq: qumar oyunu nədir? Əminik ki, əksəriyyət bunu pulla oynanılan oyun hesab edir. Lakin pulla tennis, hətta şahmat da oynamaq olar. Tennisçilər və şahmatçılar turnirlərdəki qələbələrinə görə böyük qonorarlar alırlar. Kart oyunları isə azartlı oyundur. Niyə? Çünki onda əsas rolu təsadüf oynayır – rəqiblərin əlinə hansı kartın düşəcəyi məhz təsadüfdən asılıdır. Doğrudur, kart oyununda oyunçunun bacarığı da çox şey deməkdir. Lakin elə oyunlar var ki, oyunçudan heç nə tələb edilmir. Məsələn, "xəritə-rəqəm" oyunu: sikkəni yuxarı atırlar və onun hansı üzü üstə yerə düşməsindən asılı olaraq, bu və ya digər rəqib udmuş olur. Və yaxud təsadüfün hakim kəsildiyi digər oyuna – zər atmağa baxaq. Onun üzərində müfəssəl dayanaq: riyaziyyatçılar əlahəzrət Təsadüfü məhz ondan öyrənmişlər.

Bir çox stolüstü oyunların əvəzedilməz atributu olan zər, üzlərində rəqəmlər və ya nöqtələr həkk olunmuş balaca kubdur. Zərləri atan zaman onun yuxarı üzündə üzlərin sayına uyğun, 1-dən 6-yadək hər hansı bir ədəd alınır.

Çoxlu zər oyunu var. Onların ən sadəsi belədir: İki nəfər zəri növbə ilə atır. Daha böyük ədəd atan udmuş olur. Uduş ya əvvəlcədən təyin olunmuş məbləğə, ya da zərdə düşən xalların fərqinə bərabər ola bilər. Çox vaxt bir yox, iki, üç, hətta dörd zər də atırlar. Təbiidir ki, hər bir oyunçu, zərində altı düşməsini arzulayır, ona görə də oyunların çoxu məhz altının peyda olmasına əsaslanıb.

Zər atılan zaman altının düşməsini izləyək. Fərz edək ki, zər dübbədüzdür – onun bütün üzləri tamamilə eynidir. Zəri on dəfə atsaq, ədədlər, məsələn, belə ardıcıllıqlarla düşə bilər: 1, 5, 2, 2, 3, 4, 1, 6, 3, 5 və ya 6, 5, 6, 3, 1, 1, 4, 2, 3, .6. Birinci halda altı bir dəfə, ikinci halda isə üç dəfə düşüb. Ola da bilər ki, altı bir dəfə də düş- məsin və ya on dəfənin hamısında düşsün.

Bəs zəri on yox, on min dəfə atsaq necə? Onda hər bir üz təxminən eyni tezliklə düşəcək. Bu nə deməkdir? Fərz edək ki, N_k – zəri N dəfə atdıqda k rəqəmli üzün düşmələri sayıdır. Onda k üzünün düşmə tezliyi adlanan N_k/N nisbəti zərin bütün üzləri üçün təxminən eyni olacaq.

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 = N$$

olduğundan bütün tezliklər 1/6-ya yaxın olacaq. 1/6 nisbətinin özü istər altı, istər beş, istər dörd və sairin düşməsi ehtimalı adlanır. Sikkəni atdıqda isə xəritə ya rəqəmin düşməsi ehtimalı 1/2 –yə bərabərdir. Bir az sonra biz hadisənin ehtimalının dəqiq tərifini verəcəyik.

Məişətdə hadisə sözünü əhəmiyyətli hadisələrə, riyaziyyatda isə baxılan situasiyanın bütün mümkün nəticələrinə tətbiq edirlər. Hadisələri böyük latın hərfləri ilə işarə edəcəyik: məsələn, zər atarkən 6-nın düşməsini A ilə, 4-dən 6-ya qədər bir rəqəmin düşməsini B ilə, 1-dən 5-ə dək bir rəqəmin düşməsini C ilə işarə edək. İxtiyari X hadisəsinin ehtimalını $\mathbf{P}\{X\}$ ilə işarə edək.

Qumar oyunlarında təsadüfi hadisələrin ehtimalını ilk dəfə *XVII* əsrdə fransız riyaziyyatçıları Blez Paskal və Pyer Ferma hesablayıblar. Onlar bərabər nəticələrin ümumi mümkün sayından hadisələrin şansları (fransızca chance – "uğur", "hadisə") sayını hesablayıblar.

A hadisəsində ifadə olunan hər hansı sınağın, təcrübənin və ya oyunun nəticəsini A hadisəsinin şansı adlandıraq. Məsələn, zər atarkən altı bərabər ehtimallı nəticə $A_1, A_2, \ldots, A_6$ mümkündür ki, bunlar da 1,2,...,6 xalın düşməsidir. Fərz edək ki, A hadisəsi cüt saylı xalların, yəni 2, 4 və ya 6-nın düşməsini bildirir. Bu halda $\mathbf{P}\{A\}=3/6=1/2$, yəni $\mathbf{P}\{A\}$ A hadisəsinin şansının bərabər ehtimallı hadisələrin ümumi sayına nisbətinə bərabərdir. Belə tərif ehtimalın klassik tərifi adlanır.

Beləliklə,

✓ **əgər hər hansı şərtlər daxilində r eyni ehtimallı nəticə varsa və onların s-i A hadisəsinə gətirirsə, onda A hadisəsinin $\mathbf{P}\{A\}$ ehtimalı s/r-ə bərabərdir.**

Sadə hallarda ehtimalın hesablanması çətinlik törətmir. Məsələn, sikkəni yuxarı atarkən biz bilirik ki, ya xəritə, ya da rəqəm düşəcək. Fərz edək ki, A hadisəsi xəritənin peyda olmasını bildirir. Oxşar hallarda bundan sonra A=[xəritənin düşməsi] yazacağıq. Aydındır ki, $\mathbf{P}\{A\}=1/2$.

36 kartlı dəsti yaxşıca qarışdırıb 1 təsadüfi kart çıxaraq. A hadisəsi = [qırmızı rəngli ürək kart çıxarılıb] və B = [tuz çıxarılıb] hadisələri 36 hadisədən müvafiq olaraq 9 və 4 şansa malikdirlər. Buna görə də

$$\mathbf{P}\{A\}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4},\quad \mathbf{P}\{B\}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

Bir sıra hallarda hadisələrin ehtimalını hesablamaq o qədər də asan deyil. Fərz edək ki, B_κ hadisəsi iki zərin atılması zamanı onlardakı xalların cəminin κ – ya bərabər olmasıdır. Cəmi 11 belə hadisə var: $B_2,B_3,\ldots,B_{12}$, lakin onların ehtimalları eyni deyil. Bərabər ehtimallı nəticələrə (i, j) ədədlər cütləri uyğun gəlir, burada i birinci zərdə, j ikinci zərdə düşən xalların sayıdır. Belə nəticələr cəmi 36 – dır. B_κ hadisəsinin şansları $i+j=\kappa$ şərtini ödəyən şanslar olacaq. Onların hər birinin şansını aşağıdakı cədvəlin köməyi ilə hesablamaq olar:

j \ i	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Cədvəldə hər sətir 1-ci zərdəki xalların i sayına, hər bir sütun isə 2-ci zərdəki xalların j sayına uyğundur, i saylı sətrin j saylı sütunla kəsişməsində isə $i+j=\kappa$ cəmi dayanır. Bütün (i, j) nəticələrini bərabər ehtimallı hesab etmək olar – onlar 36 dənədir və B_κ hadisələrinin şansları sayı cədvəlin κ ədədli xanalarının sayına bərabərdir. Buna görə də, ehtimalın klassik tərifinə əsasən, alırıq

$$\mathbf{P}\{B_2\}=\mathbf{P}\{B_{12}\}=\frac{1}{36},$$
$$\mathbf{P}\{B_3\}=\mathbf{P}\{B_{11}\}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18},$$
$$\mathbf{P}\{B_4\}=\mathbf{P}\{B_{10}\}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12},$$
$$\mathbf{P}\{B_5\}=\mathbf{P}\{B_9\}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9},$$
$$\mathbf{P}\{B_6\}=\mathbf{P}\{B_8\}=\frac{5}{36},$$
$$\mathbf{P}\{B_7\}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

Bütün baxılan misallar qutu sxemi adlanan sxemin xüsusi hallarıdır. Fərz edək ki, qutuda r kürə var. Onlar toxunmaqla deyil, rənglərinə və işarələrinə görə fərqlənirlər. Onları $u_1,u_2,\ldots,u_r$ –lə işarə edək. Fərz edək ki, $u_1,u_2,\ldots,u_s$ kürələri ağ, qalan $r-s$ şar isə qara rəngdədir. Qutudan təsadüfən $i \le s$ saylı u_i kürə çıxartsaq, deyirlər: A=[ağ kürə çıxarılıb] hadisəsi baş verib. Bu halda r bərabər ehtimallı $u_1,u_2,\ldots,u_s$ nəticələri mövcuddur. Onlardan A hadisəsi s $u_1,u_2,\ldots,u_s$ şansına malikdir. Ehtimalın klassik tərifinə əsasən, $\mathbf{P}\{A\}=s/r$.

Sikkə atmağı G və R hərfləriylə işarə etdiyimiz iki kürəli qutu sxemi ilə əvəz etmək olar. Sikkə atılarkən xəritə üzünün düşməsi və qutudan O hərfli kürənin çıxarılması eyni S ehtimalına malikdir. Kart dəstindən 1 kartı götürməyi (a, b) işarələr cütü ilə işarə edilmiş 36 kürəli qutu ilə əvəz etmək olar ki, burada a - mastları işarə edən Q, X, K, T hərfləri (Q – qaraürək, X – xaç, K – kərpic, T – qırmızıürək), b isə kartın dəyəridir: b = 6-altılıq, b = 7-yeddilik, b = 11 – valet,..., b=14 – tuz. A = [qırmızıürək mastlı kart çıxarılıb] hadisəsinə qutudan A = ={(T,6), (T,7),..., (T,14)} alt çoxluğuna məxsus kürənin çıxarılması uyğun gəlir. B=[tuz çıxarılıb] hadisəsinə B = {(Q, 14), (X, 14), (K, 14), (T, 14)} alt çoxlugu uyğun gəlir. Ümumi halda qutu sxemində U = $\{u_1,u_2,\ldots,u_r\}$ kürələr çoxluğu fərz olunur; hər hansı $A \subset U$ alt çoxluğuna A alt çoxluğuna məxsus u_i kürəsinin çıxmasından ibarət olan A

KAVALER DE MERENİN MƏSƏLƏSİ

Fransız əyanlarından olan Kavaler de Mere ehtiraslı qumarbaz idi. Zər oyununda pul uduşu adətən düşən ədədlərin kombinasiyasından asılıdır. Belə kombinasiyalardan biri – dörd dəfə zər atarkən heç olmazsa bir altılığın düşməsidir. De Mere bu kombinasiyanın şanslarının sayını hesablamağı bacarmışdı.

Dörd dəfə zər atarkən nəticələrin ümumi sayı 6^4 = 1296-dır. Heç olmazsa bir altılıq düşməsi şansı $6^4 - 5^4$ = 671 edir, belə ki, 5^4 halda bir dəfə də altı düşmür. Deməli, dörd atılmada heç olmasa bir altılığın düşməsi şansı 671 / 1296 ≈ 0,518 > 1 / 2 olacaq. Buna görə də dörd dəfə zər atanda bir altılıq belə düşməyəcəyinə yox, heç olmazsa bir dəfə altı düşəcəyinə istinad etmək lazımdır.

Eyni zamanda iki zər atarkən daha mürəkkəb kombinasiyalar meydana gəlir. De Mere altı qoşanın heç olmazsa bir dəfə düşməsi ehtimalının $\frac{1}{2}$-dən böyük olması üçün cüt zəri neçə dəfə atmaq lazım olduğunu təyin etməyə çalışdı. O bunun üçün 24 atılış lazım olduğunu hesabladı. Lakin təcrübə de Mereni öz hesablamalarına şübhə ilə yanaşmağa vadar etdi. Onda Kavaler bu məsələ ilə riyaziyyatçı Blez Paskala müraciət etdi və o, məsələnin düzgün həllini verdi. Alim təyin etdi ki, cüt zəri 24 dəfə atarkən altı qoşa ½- dən kiçik ehtimalla, 25 atılış zamanı isə 1/2 -dən böyük ehtimalla heç olmazsa bir dəfə peyda olur.

Doğrudan da, əgər cüt zəri bir dəfə atsaq, qoşa altı 1/36 ehtimalla düşəcək və 1 – 1/36 = 35/36 ehtimalla düşməyəcək. n atılış zamanı altı qoşanın düşməməsi ehtimalı 35^n -ə bərabər olacaq, nəticələrin ümumi sayı isə 36^n təşkil edəcək.

A_n = [heç olmazsa bir dəfə altı qoşa düşür],
A_n = [altı qoşa bir dəfə də düşmür]

hadisələrini qeyd edək.

Onda $\mathbf{P}\{A_n\} = 35^n / 36^n$, $\mathbf{P}\{A_n\} = 1 - 35^n/36^n$, buradan alınır ki,

$$\mathbf{P}\{A_{24}\} \approx 0{,}491 < 1/2,\ \mathbf{P}\{A_{25}\} \approx 0{,}505 > 1/2$$

Fərz edək ki, N - oyunların sayı, $N(A_n)$ - heç olmasa bir dəfə altı qoşa düşən oyunların sayıdır. Tezliklərin statistik dayanıqlıq xassəsinə əsasən, böyük N – lərdə

$$\frac{N(A_n)}{N} \approx P\{A_n\} \text{ və } N(A_n) \approx P\{A_n\}N$$

Buna görə də A_{25} hadisəsinə pul qoyan oyunçu oyunların təxminən 50,5 %– ini, A_{24} hadisəsinə pul qoyan isə təxminən 49,1%-ini udur.

Kavaler de Merenin bu məsələsi Paskalı vadar etdi ki, təsadüfi hadisələri öyrənsin. Blez Paskalın və Pyer Fermanın yazışmalarında isə ilk dəfə ehtimal nəzəriyyəsinin anlayışları xatırlanmağa başladı.

hadisəsi uyğun gəlir. A hadisəsinin ehtimalı

$$\mathbf{P}\{A\}=\frac{|A|}{|U|}$$

nisbətinə bərabərdir. Burada $|U|=r$ – qutudakı kürələrin ümumi sayı, $|A|$ – A alt çoxluğundakı kürələrin sayıdır. Beləliklə, qutu sxemində ixtiyari $A \subset U$ coxluğuna A = [A çoxluğundan şar çıxarmalı] hadisəsi uyğun gəlir. Qutudakı bütün kürələr çoxluğuna uyğun gələn U hadisəsi gerçək hadisə adlanır. Onun ehtimalı vahidə bərabərdir, belə ki,

$$\mathbf{P}\{U\}=\frac{|U|}{|U|}=1$$

$\varnothing$ boş çoxluğuna qeyri-mümkün hadisə uyğun gəlir, onun ehtimalı sıfıra bərabərdir, belə ki,

$$\mathbf{P}\{\varnothing\}=\frac{|\varnothing|}{|U|}=0$$

Əgər $A \subset B$, yəni A çoxluğu B çoxluğunun alt coxluğudursa, onda deyirlər: A hadisəsi B hadisəsini doğurur. Bu o deməkdir ki, əgər A hadisəsi baş veribsə, onda B hadisəsi də baş verib. Həmişə $\varnothing \subset A \subset U$ olduğundan $0 \le |A| \le |U|$ olur və ixtiyari hadisənin ehtimalı

$$0 \le \mathbf{P}\{A\} \le 1$$

bərabərsizliklərini ödəyir.

A və B hadisələrinin AB hasili ancaq və ancaq hər iki hadisə baş verərkən baş verən hadisədir. Məsələn, C =[qırmızıürək tuz çıxarılıb] hadisəsi A=[qırmızıürək mastlı kart çıxarılıb] və B =[tuz çıxarılıb] hadisələrinin hasilidir.

$A+B$ hadisələrinin A və B cəmi yalnız və yalnız ya A, ya B, ya da hər ikisi eyni zamanda mövcud olarkən baş verən hadisədir.

Əgər $AB = \varnothing$ – sə, A və B hadisələri uyuşmaz adlanır. Uyuşmaz hadisələr üçün $|A + B| = |A| + |B|$ ona görə də $\mathbf{P}\{A+B\} = \mathbf{P}\{A\} + \mathbf{P}\{B\}$.

A hadisəsi baş verməyəndə həmişə baş verən $\bar{A}$ hadisəsini A hadisəsinin əksi deyilir. Asanca görmək olar ki, A və $\bar{A}$ hadisələri

uyuşmazdır və $A+\overline{A}=U$ buna görə də $\mathbf{P}\{A\}+\mathbf{P}\{\overline{A}\}=1$.

Qutu sxemində A və B hadisələrinə A və B çoxluqları qarşı qoyulursa, onda hadisələrin AB hasilinə A və B çoxluqlarının kəsişməsi, hadisələrin $A+B$ cəminə isə A və B çoxluqlarının birləşməsi uyğun gəlir.

Daha mürəkkəb hallarda A təsadüfi hadisəsini bərabər ehtimallı nəticələrinin şanslarının sonlu çoxluğu şəklində təqdim etmək olmaz. Məsələn oğlan və ya qız doğulması bərabər ehtimallı təsadüfi hadisələr deyil. Məlumdur ki, doğulan uşaların 51%-i oğlan olur. Bu halda A = [oğlan doğulması] hadisəsinin ehtimalı olaraq $\mathbf{P}\{A\}=0{,}51$ qəbul edilir.

Bir çox təsadüfi hadisələr tezliklərin statistik dayanıqlılığı adlanan xassəyə malikdirlər. Fərz edək ki, N sınaq keçirilir. Onların hər birinin nəticəsində A təsadüfi hadisəsi baş verə də bilər, baş verməyə də: məsələn, zər atarkən altı düşəcək, iki sikkə atılarkən iki xəritə düşəcək və s. A hadisəsinin baş verdiyi sınaqların sayını $N(A)$ ilə işarə edək. Sınaqların böyük N saylarında $N(A)/N$ müəyyən $\mathbf{P}\{A\}$ ədədinin ətrafında rəqs edirsə, deyirlər ki, tezliklərin statistik dayanıqlığı mövcuddur, $\mathbf{P}\{A\}$ ədədi isə A hadisəsinin ehtimalı adlanır. Belə ehtimal rus alimi Andrey Nikolayeviç Kolmoqorovun üç aksiom şəklində formulə etdiyi xassələrə malik olmalıdır.

1. *Qeyri-mənfilik aksiomu.* İstənilən $\mathbf{P}\{A\}$ ehtimalı mənfi olmayan ədəddir:

$$\mathbf{P}\{A\}\geq 0$$

2. *Normallaşma aksiomu.* Gerçək (yəqin) U hadisəsinin ehtimalı vahidə bərabərdir:

$$\mathbf{P}\{U\}=1$$

3. *Additivlik aksiomu.* İki uyuşmayan A və B hadisələrinin cəmlərinin ehtimalı onların ehtimalları cəminə bərabərdir:

$$\mathbf{P}\{A+B\}=\mathbf{P}\{A\}+\mathbf{P}\{B\}$$

Bu aksiomlardan asanca ehtimalların aşağıdakı xassələrini çıxarmaq olar:

a) qeyri-mümkün (mümkün olmayan) $\varnothing$ hadisəsinin ehtimalı sıfıra bərabərdir:

$$\mathbf{P}\{\varnothing\}=0;$$

b) əgər $A\subset B$ – dirsə, yəni A hadisəsi B hadisəsini doğurursa, onda

$$\mathbf{P}\{A\}\leq\mathbf{P}\{B\};$$

c) hər bir A hadisəsinin ehtimalı aşağıdakı bərabərsizlikləri ödəyir:

$$0\leq\mathbf{P}\{A\}\leq 1;$$

d) A hadisəsinin və $\overline{A}$ əks hadisəsinin ehtimalları aşağıdakı bərabərliklə bağlıdırlar:

$$\mathbf{P}\{\overline{A}\}=1-\mathbf{P}\{A\};$$

e) əgər $A_1, A_2, \ldots A_n$ hadisələri cüt-cüt uyuşmazdırlarsa, yəni $A_iA_j=\varnothing$ onda

$$\mathbf{P}\{A_1+A_2+\ldots+A_n\}=\mathbf{P}\{A_1\}+\mathbf{P}\{A_2\}\ldots+\mathbf{P}\{A_n\}$$

Kolmoqorov göstərdi ki, ehtimal nəzəriyyəsini adi riyazi nəzəriyyəyə uyğun olaraq, məsələn, həndəsədəki kimi, aksiomlar əsasında inkişaf etdirmək olar. Doğrudur, bu zaman additivlik aksiomunu sonsuz sayda toplanan halına genişləndirmək lazımdır:

$$\mathbf{P}\{A_1+A_2+\ldots\}=\mathbf{P}\{A_1\}+\mathbf{P}\{A_2\}+\ldots$$

Aksiomlar sistemi sayəsində ehtimal nəzəriyyəsi qəti surətdə tam hüquqlu riyazi elm kimi formalaşdı. O, riyaziyyatın digər bölmələrinin nəticələrindən də istifadə edir və öz növbəsində onlara əhəmiyyətli təsir göstərir.

ASILI VƏ ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR

Sinifdə N şagird var. Müəllim çox maraqlı tamaşaya bilet gətirib, lakin təəssüf ki, hamıya çatmır. Onda uşaqlar püşk atmağı qərara aldılar. M dənəsinin işarələndiyi N bükülmüş kağızı papağın içinə qoydular. Növbə ilə püşk çəkdilər. İşarəli kağızları çıxaranlar bilet alırdılar. Sual olunur: püşkü birinci, ikinci ... sonuncu çəkən şagirdlər eyni vəziyyətdədirlərmi?

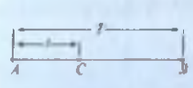
İlk baxışdan elə bil ki, yox. Daha pisi, elə bir inam yaranır ki, axırıncı iştirakçı daha sərfəli olmayan vəziyyətdədir. Onun heç seçimi də yoxdur, birindən başqa bütün kağızlar çəkilib və ona yeganə kağız qalıb. Lakin bu halda bizi seçim imkanı deyil, uğurlu püşk çəkməyin növbəlilikdən asılı olub-olmaması maraqlandırır. Belə məsələlərin həlli zamanı "şərti ehtimal" anlayışından istifadə etmək münasibdir.

AVTOBUSU NƏ QƏDƏR GÖZLƏMƏLİYİK?

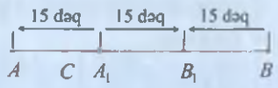
Siz hərəkət intervalı 45 dəqiqə olan bir avtobusun dayanacağına gəlmisiniz, lakin cədvəli bilmirsiniz. Siz avtobusu nə qədər gözləyəcəksiniz? Aydındır ki, bu, 45 dəqiqədən çox çəkməyəcək.

Avtobusun 15 dəqiqədən gec gəlməyəcəyi ehtimalını tapaq. Bundan ötrü belə bir həndəsi sxemdən istifadə edək. Fərz edək ki, T – avtobusun iki gəlişi arasındakı zaman parçasıdır. Sizin dayanacağa gəlişinizi hər hansı bir miqyasda (məsələn, 1*mm* 1 dəqiqəyə uyğundur; şəkil 1) T uzunluqlu AB parçasında C nöqtəsini işarə edək. Əgər C nöqtəsi parçanın sol A ucundan t məsafədə yerləşirsə, onda avtobusu gözləmə müddəti t olacaq.

Avtobusun dayanacağa gəlmə anı təsadüfidir. AB parçasını A_1 və B_1 nöqtələri ilə üç bərabər AA_1, A_1B_1 və B_1B hissələrinə ayırsaq, təsadüfi C nöqtəsinin hər bir hissəyə düşməsini eyni ehtimallı hesab etmək olar. [$t\leq 15$ dəq] hadisəsinin ehtimalı C nöqtəsinin AA parçasına düşmə ehtimalına bərabərdir. Klassik tərifə görə buradan alırıq $\mathbf{P}\{[t\leq 15$ dəq$]\}=1/3$.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

Ümumiyyətlə, hesab etmək olar ki, C nöqtəsinin əsas parçanın T uzunluqlu əsas parçanın hissəsini təşkil edən ixtiyari parçaya düşmə ehtimalı həmin parçanın uzunluğu ilə mütənasibdir. Buna görə dəavtobusu gözləmə müddətinin x-dən böyük olmayacağı ehtimalı x/T -yə bərabərdir ki, bu da belə yazılır:

$$\mathbf{P}\{[\text{avtobusun gəlmə vaxtı}\leq x]\}=\frac{x}{T}$$

əgər $0\leq x\leq T$

Ehtimalın həndəsənin köməkliyi ilə hesablanmasına digər misal. Fərz edək ki, meteorit $R=18$ *km* radiuslu dairə hesab oluna bilən iri şəhərə düşür. Meteoritin şəhərin mərkəzinə düşməsi ehtimalı nə qədərdir? (Şəhər mərkəzini $r=3$*km* radiuslu dairə qəbul edək).

Hesab edəcəyik ki, meteoritin şəhərin hər hansı hissəsinə düşməsi ehtimalı onun sahəsi ilə mütənasibdir. Buna görə də

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2}=\frac{r^2}{R^2}=\frac{3^2}{18^2}=\frac{1}{36}$$

Bu cür hesablanan ehtimallar həndəsi ehtimallar adlanır. Ümumi halda bu hesablama üsulu aşağıdakı kimidir. Fərz edək ki, C təsadüfi nöqtəsi hər hansı G oblastına düşür. Axırıncı düz xətt parçası, müstəvi və ya fəza hissəsi ola bilər. Əsas odur ki, onun sonlu ölçüsü $m(G)>0$ olsun, burada $m(G)$ ya parçanın uzunluğu, ya müstəvi cismin sahəsi, ya da cismin fəzada həcmidir. Onda C təsadüfi nöqtəsinin G oblastında müntəzəm paylanması zamanı C-nin $g\subset G$ oblastına düşməsi ehtimalı ölçülərin nisbətinə bərabərdir

$$\mathbf{P}\{C\in g\}=\frac{m(g)}{m(G)}$$

Həndəsi ehtimalın tapılmasına çoxlu maraqlı məsələləri göstərmək olar.

ŞƏRTİ EHTİMAL

Fərz edək ki, r bərabər ehtimallı nəticəyə malik olan hər hansı sınaqlar nəticəsində A və B təsadüfi hadisələri baş verə bilər. Fərz edək ki, $s(A)$ A hadisəsinin; $s(B)$ B hadisəsinin; $s(AB)$ AB hadisəsinin şansları sayılır. Onda, ehtimalın klassik tərifinə əsasən ("Hər şey zər atmaqdan başladı" məqaləsinə bax),

$$\mathbf{P}\{A\}=\frac{s(A)}{r},\quad \mathbf{P}\{B\}=\frac{s(B)}{r},\quad \mathbf{P}\{AB\}=\frac{s(AB)}{r}$$

İndi isə ancaq B hadisəsinin baş verdiyi sınaqlara baxaq. Bu sınaqlarda cəmi $s(B)$ bərabər ehtimallı nəticə var. Onlarda A hadisəsi $s(AB)$ şansa malikdir, yəni hər iki A və B hadisəsi $s(AB)$ nəticədə baş verir. B hadisəsinin baş verməsi şərti ilə A hadisəsinin şərti ehtimalını $s(AB)/s(B)$ nisbəti kimi təyin edək. Onu $\mathbf{P}\{A|B\}$ ilə işarə edək. İlkin $\mathbf{P}\{A\}$ ehtimalını A hadisəsinin şərtsiz və ya tam ehtimalı adlandırmaq olar. Beləliklə,

$$\mathbf{P}\{A|B\}=\frac{s(AB)}{s(B)}$$

Surət və məxrəci r-ə bölək. Onda alırıq ki,

$$\mathbf{P}\{A|B\}=\frac{s(AB)/r}{s(B)/r}$$

və ya

$$\mathbf{P}\{A|B\}=\frac{\mathbf{P}(AB)}{\mathbf{P}(B)}\qquad (*)$$

Bu bərabərliyi şərti ehtimalın tərifi hesab etmək olar. Onun hər iki tərəfini $\mathbf{P}\{B\}$ – yə vuraraq

$$\mathbf{P}\{AB\}=\mathbf{P}(B)\,\mathbf{P}(A|B)\qquad (**)$$

alırıq.

(**) bərabərliyi ehtimalların vurulması teoremi adlanır.

Yenə də sinifdə püşk məsələsinə qayıdaq. Papağı qutu, işarəli kağızları ağ kürələrlə, işarəsizləri isə qara kürələrlə əvəz edərək klassik "qutu" sxemi alırıq ("Hər şey

zər atmaqdan başladı" məqaləsinə bax). Bizi iki hadisə maraqlandıracaq:

A = [1-ci iştirakçı ağ şar çıxaracaq],

B = [2-ci iştirakçı ağ şar çıxaracaq].

Klassik tərifə görə, aşağıdakı ehtimallar asanca hesablanır

$$\mathbf{P}\{A\} = \frac{M}{N},\ \mathbf{P}(B|A) = \frac{M-1}{N-1},\ \mathbf{P}(B|\overline{A}) = \frac{M}{N-1}$$

Burada $\overline{A}$, A hadisəsinə əks olan hadisədir (yəni $\overline{A}$ = [1-ci iştirakçı qara kürə çıxaracaq]; $\mathbf{P}\{B|A\}$ B hadisəsinin A hadisəsinin baş verməsi şərti ilə şərti ehtimalıdır; $\mathbf{P}\{B|\overline{A}\}$-$B$ hadisəsinin $\overline{A}$ hadisəsinin baş verməsi şərti ilə şərti ehtimalıdır. (**) ehtimalların hasili teoreminə əsasən

$$\mathbf{P}\{AB\} = \frac{M}{N}\cdot\frac{M-1}{N-1},\ \mathbf{P}(\overline{A}B) = \frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}$$

B hadisəsini iki uyuşmayan hadisənin $B=BA+B\overline{A}$ cəmi şəklində vermək mümkün olduğundan, additivlik aksiomuna əsasən,

$$\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}(BA) + \mathbf{P}(B\overline{A}) =$$

$$\frac{M(M-1)}{N(N-1)} + \frac{M(N-M)}{N(N-1)} = \frac{M}{N} = \mathbf{P}\{A\}$$

Deməli, püşkün birinci və ikinci iştirakçıları ağ şar çıxarmaq baxımından eyni şansa malikdirlər. Qalan digər iştirakçıların uğur şansını aydınlaşdırmaq üçün daha mürəkkəb hesablamalar aparmaq lazımdır.

Belə hesablamalar üçün tam ehtimalın düsturundan istifadə etmək münasibdir:

$$\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}(B|A_1) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}(B|A_2) + \ldots +$$

$$+ \mathbf{P}(A_\kappa)\mathbf{P}(B|A_\kappa) \qquad (***)$$

Burada A_1, A_2, ..., A_κ cüt-cüt uyuşmayan hadisələrdir, yəni ixtiyari $A_iA_j = \varnothing$ üçün $i \neq j$; $A_1+A_2+\ldots+A_\kappa$ cəmi yəqin hadisədir; B ixtiyari hadisədir. (***) düsturunu isbat etmək üçün B hadisəsini $BA_1+BA_2+\ldots+BA_\kappa$ cəmi şəklində göstərmək, ehtimalların additivliyi xassəsindən

$$\mathbf{P}\{B\} = \mathbf{P}\{BA_1\} + \mathbf{P}\{BA_2\} + \ldots + \mathbf{P}\{BA_\kappa\}$$

və (**) ehtimalların vurulması düsturundan

$$\mathbf{P}\{BA_1\} = \mathbf{P}(A_1)\,\mathbf{P}(B|A_1)$$

istifadə etmək lazımdır.

İndi isə püşk məsələsində

C = [3-cü iştirakçı ağ kürə çıxaracaq] hadisəsinə baxaq.

$\mathbf{P}\{C\}$ – ni hesablamaq üçün (***) düsturunu tətbiq etmək olar, bu halda o belə şəkildədir:

$$\mathbf{P}\{C\} = \mathbf{P}(AB)\,\mathbf{P}(C|AB) + \mathbf{P}(\overline{A}B)\,\mathbf{P}(C|\overline{A}B) +$$

$$+ \mathbf{P}(A\overline{B})\,\mathbf{P}(C|A\overline{B}) +$$

$$+ \mathbf{P}(\overline{A}\overline{B})\,\mathbf{P}(C|\overline{A}\overline{B}) \qquad (****)$$

Ehtimalları və şərti ehtimalları hesablayaq

$$\mathbf{P}\{AB\} = \frac{M(M-1)}{N(N-1)},$$

$$\mathbf{P}\{\overline{A}B\} = \mathbf{P}\{A\overline{B}\} = \frac{M(N-M)}{N(N-1)},$$

$$\mathbf{P}\{\overline{A}\overline{B}\} = \frac{(N-M)(N-M-1)}{N(N-1)},$$

$$\mathbf{P}\{C|AB\} = \frac{M-2}{N-2},$$

$$\mathbf{P}\{C|\overline{A}B\} = \mathbf{P}\{C|A\overline{B}\} = \frac{M-1}{N-2},$$

$$\mathbf{P}\{C|\overline{A}\overline{B}\} = \frac{M}{N-2}$$

Bütün bu qiymətləri (****) düsturunda yerinə qoysaq,

$$\mathbf{P}\{C\} = M/N$$

alırıq.

Analoyi olaraq isbat etmək olar ki, püşkün ixtiyari iştirakçısının uğur ehtimalı M/N – dir.

Beləliklə, püşk düzgün təşkil olunubsa: bütün kağızlar eynidirlərsə və ciddi-cəhdlə qarışdırılıblarsa, bütün püşk iştirakçıları bərabər vəziyyətdədirlər. Doğrudur, püşkün birinci və axırıncı iştirakçısı özlərini fərqli hiss edirlər. Birinci anlayır ki, onun seçimi var, kağızları əlləşdirmək, onları barmaqlarla çək-çevir etmək və nəhayət uduşlu "görünən" kağızı çıxarmaq olar. Sonuncu iştirakçı belə bir imkandan məhrumdur: o, sadəcə qalmış kağızı açır və nəticəni bilir. Daha pisi, əgər bütün işarəli kağızlar ona qədər çıxarılarsa, püşk onun iştirakından əvvəl də qurtara bilər. Doğrudur, birinci iştirakçı boş kağız çıxarıbsa, sonuncu iştirakçı xoşbəxt püşkə birincidən daha uzun müddət ümid bəsləyə bilər.

HADİSƏLƏRİN ASILI OLMAMASI

Ehtimal nəzəriyyəsində çox mühüm bir anlayış – hadisələrin asılı olmaması anlayışı var. Əgər $\mathbf{P}\{A|B\}$ şərti ehtimalı $\mathbf{P}\{A\}$ şərtsiz ehtimalına bərabərdirsə, onda A hadisəsi B hadisəsindən asılı olmayan hadisə adlanır. Əgər $\mathbf{P}\{A\} = \mathbf{P}\{A|B\}$ – dirsə, onda (*) və (**) düsturlarının köməyi ilə

$$\mathbf{P}\{B|A\} = \frac{\mathbf{P}\{AB\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \frac{\mathbf{P}\{B\}\mathbf{P}\{A|B\}}{\mathbf{P}\{A\}} = \mathbf{P}\{B\}$$

alırıq.

Yəni B hadisəsi də A hadisəsindən asılı deyil. Buna görə də biz sadəcə A və B hadisələrinin asılı olmamasından danışa bilərik. A və B asılı olmayan hadisələri üçün (**) düsturunun nəticəsi olan ehtimalların hasili düsturu doğrudur

$$\mathbf{P}\{AB\} = \mathbf{P}\{A\}\,\mathbf{P}\{B\}$$

Məsələn, fərz edək ki, iki oyunçu iki zər atır.

A =[1-ci zərdə altı düşür],

B = [ikinci zərdə altı düşür]

hadisələri olsun.

Onda

AB = [altı qoşa düşəcək].

A və B hadisələri asılı olmadığından

$$\mathbf{P}\{AB\} = \mathbf{P}\{A\}\,\mathbf{P}\{B\} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Əgər $C = A_j, A_\kappa, \ldots, A_m$ ixtiyari hadisələri üçün burada $j, \kappa, \ldots, m$ indeksləri i – yə bərabər deyillər,

$$\mathbf{P}\{A_i|C\} = \mathbf{P}\{A_i\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

şərti ödənilərsə, bir neçə $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hadisəsi asılı olmayan hadisə adlanır.

İxtiyari $A_1, A_2, \ldots, A_n$ asılı olmayan hadisələri üçün aşağıdakı düsturlar doğrudur:

$$\mathbf{P}\{A_iA_j\} = \mathbf{P}\{A_i\}\mathbf{P}\{A_j\},\ \text{əgər}\ 1 \le i < j \le n;$$

$$\mathbf{P}\{A_iA_jA_\kappa\} = \mathbf{P}\{A_i\}\mathbf{P}\{A_j\}\mathbf{P}\{A_\kappa\},$$

$$\text{əgər}\ 1 \le i < j < \kappa \le n;$$

.....

$$\mathbf{P}\{A_1A_2\ldots A_n\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{A_2\}\ldots\mathbf{P}\{A_n\}$$

Bir misala baxaq. İlk elektron hesablama maşınları (EHM) o qədər də etibarlı olmayan elektron lampalarla işləyirdi. Fərz

SPORTLOTO

Ehtimalın klassik tərifi lotoreyalarda uduş ehtimalını təyin etməyə imkan verir. Bundan ötrü qutu sxeminin belə bir variantından istifadə etmək lazımdır. Fərz edək ki, qutuda N kürə var və bunlardan M kürə ağ, qalan $N–M$ kürə isə qaradır. Qutudan təsadüfi şəkildə n kürə seçilir. Seçilmiş kürələr çoxluğunu n həcminin seçimi adlandıraq.

A_m = [seçimdə m ağ və $n – m$ qara kürə var] hadisəsinə baxaq.

N, M, n, m ədədləri

$0 \le M \le N,\ 0 \le n \le N,\ 0 \le m \le M,\ 0 \le m \le n$

bərabərsizliklərini ödəyir.

A_m hadisəsinin ehtimalı belə hesablanır:

$$\mathbf{P}\{A_m\} = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \qquad (*)$$

Yada salaq ki,

$$C_\kappa^j = \frac{\kappa(\kappa-1)\ldots(\kappa-j+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot j} = \frac{\kappa!}{j!(\kappa-j)!}$$

Burada C_κ^j –κ elementdən j kombinezondur. ("Kombinezonlar" məqaləsinə bax).

(*) düsturu belə alınır. Bərabər ehtimallı nəticələrin ümumi sayı C_N^n n həcmli seçimlərin sayına bərabərdir. A_m hadisəsinin şansları sayı C_M^m kombinezonlarının sayının (yəni qutudakı M ağ kürənin seçimdəki m ağ kürər üzrə kombinezonların sayının) C_{N-M}^{n-m} kombinezonların sayına (yəni qutudakı N-M qara kürənin seçimdəki $n – m$ qara kürə üzrə kombinezonların sayına) hasilinə bərabərdir. A_m hadisəsinin şansları sayının nəticələrin ümumi sayına nisbəti elə $\mathbf{P}\{A_m\}$ ehtimalına bərabərdir.

Uzun müddət ən populyar lotoreyalardan biri "Sportloto" olmuşdur. Növbəti tirajda iştirak etmək istəyən şəxs 49 nömrədən 6-nı qeyd etməli olduğu kart alırdı. Oyunçu bu kartın bir hissəsini qutyuya salır, digərini özündə saxlayırdı. Tiraj zamanı içində 1-dən 49-a qədər nömrələnmiş 49 kürə olan qutudan ixtiyari 6-sı çıxarılırdı. Bu nömrələr uduş nömrələri elan edilirdi. Oyunçunun qeyd etdiyi nömrələrin içində heç olmazsa üç uduş nömrəsi olurdusa, o, pul mükafatı alırdı. Özü də mükafatın ölçüsü tapılmış nömrələrin sayının artmasıyla sürətlə artırdı.

Oyunçunun qeyd etdiyi m ədədin uduşlu olması ehtimalını p_m – lə işarə edək.

m =0, 1,...6 üçün p_m – i hesablamaqdan ötrü (*) düsturundan istifadə edək. Hesab etsək ki, oyunçunun qeyd etdiyi kürələr ağ, digərləri qaradır, onda

$p_m = \mathbf{P}\{A_m\}$, burada $N = 49$, $n = M = 6$, $m = 0, 1, \ldots, 6$. Beləliklə,

$$p_0 = \frac{C_{43}^6}{C_{49}^6} \approx 0{,}43596, \qquad p_1 = \frac{C_6^1 \cdot C_{43}^5}{C_{49}^6} \approx 0{,}41302,$$

$$p_2 = \frac{C_6^2 \cdot C_{43}^4}{C_{49}^6} \approx 0{,}13238, \qquad p_3 = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6} \approx 0{,}01765,$$

$$p_4 = \frac{C_6^4 \cdot C_{43}^2}{C_{49}^6} \approx 0{,}00097, \qquad p_5 = \frac{C_6^5 \cdot C_{43}^1}{C_{49}^6} \approx 0{,}000018,$$

$$p_6 = \frac{C_6^6}{C_{49}^6} \approx 0{,}000000072$$

Buradan alınır ki, uduzma ehtimalı $p_0 + p_1 + p_2 = 0{,}98136$–dır, ən kiçik uduş ehtimalı $p_3 \approx 0{,}01765$, ən böyük uduş ehtimalı p_6 son dərəcə kiçikdir.

edək ki, EHM-də bir-birindən asılı olmadan müəyyən T zaman kəsiyində $q = 0{,}0001$ ehtimalla yana biləcək $n = 10\ 000$ elektron lampa var. Heç olmazsa bir lampa sıradan çıxırdısa, EHM yanlış nəticələr verirdi. EHM-in T zamanı ərzində sıradan çıxma ehtimalı nəyə bərabərdir?

A_i = [bütün T zamanı ərzində i-ci lampa sazdır] hadisəsini təyin edək.

Onda

C = {EHM bütün T müddəti ərzində sazdır} hadisəsini $C = A_1A_2...A_n$ şəklində göstərmək olar ki, onun da ehtimalı

$$\mathbf{P}\{C\} = \mathbf{P}\{A_1\}\mathbf{P}\{A_2\}...\mathbf{P}\{A_n\} = p^n \text{ olar.}$$

Burada

$$p = \mathbf{P}\{A_i\} = 1 - \mathbf{P}\{\overline{A}_j\} = 1 - q = 0{,}9999$$

EHM-in bu halda sıradan çıxma ehtimalı

$$\mathbf{P}\{\overline{C}\} = 1 - \mathbf{P}\{C\} = 1 - (1-q)^n =$$

$$= 1 - (1 - 0{,}0001)^{10000} \approx 1 - e^{-1} \approx 0{,}632$$

İlk EHM-lərdə lampaların etibarlılığının belə halında işləmək çox çətin idi. Çıxdaş lampaları daima dəyişmək lazım gəlirdi. Qat-qat stabil işləyən EHM-lər yarandı. Onlarda yeni elektron elementlərdən – yarımkeçirici tranzistor və inteqral mikrosxemlərdən istifadə edilirdi.

TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR

Ehtimal nəzəriyyəsində tez-tez ədədlərlə xarakterizə olunan şəbəkədəki gərginlik, eksperimentdə cihazların göstərişi və s. təsadüfi hadisələrə baxılır. Belə hadisələr təsadüfi kəmiyyətlər adlanır. Bir halda ki, onlar ədədlərdir, deməli onları toplamaq, adi ədədlərə vurmaq və s. mümkündür. Eləcə də digər hadisələri ədədlər kimi qələmə vermək olar. Məsələn, zərin bu və ya digər üzünün düşməsinə bu üzdəki ədəd üyğundur. Sikkəni atarkən xəritə düşməsini 1, rəqəm düşməsini 0-la işarə etmək olar. Onda sikkəni n dəfə atarkən belə təsadüfi kəmiyyətin cəmi düşən xəritələrin sayına bərabərdir.

Ümumiyyətlə, X təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymətləri ala bilirsə, onda

$$p_i = \mathbf{P}\{X = x_i\}$$

qiymətləri (burada $i = 1, 2, ..., n$ – dir) X təsadüfi kəmiyyətinin ehtimallarının paylanması adlanır, özü də

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$$

bərabərliyi ödənir.

Bir çox hallarda təsadüfi kəmiyyətin "orta qiymətini" bilmək vacib olur. Ehtimal nəzəriyyəsində o, riyazi gözləmə adlanır və aşağıdakı kimi təyin olunur.

Fərz edək ki, X təsadüfi kəmiyyəti p_1, p_2, ..., p_n ehtimalları ilə x_1, x_2, ..., x_n qiymətləri alır. Onda

$$\mathbf{M}\{x\} = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n$$

ədədi X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözlənilməsi adlanır.

Bu düstur düz xətt üzərində $x_1, x_2, ..., x_n$ nöqtələrində yerləşmiş $m_1, m_2, ..., m_n$ kütlələrinin kütlə mərkəzinin koordinatı üçün olan düstura bənzəyir, ancaq kütlə rolunu ehtimal oynayır ("Orta qiymətlər" məqaləsinə bax).

Təsadüfi kəmiyyyətlərin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir:

$$\mathbf{M}\{X_1 + X_2 + ... + X_n\} = \mathbf{M}\{X_1\} + \mathbf{M}\{X_2\} + ... + \mathbf{M}\{X_n\}.$$

Əgər c sabitdirsə (yəni, ancaq eyni bir qiymət alan təsadüfi kəmiyyətdirsə), onda

$$\mathbf{M}\{c\} = c \text{ və } \mathbf{M}\{cX\} = c\mathbf{M}\{X\}.$$

Riyazi gözləmə anlayışını qumar oyunlarının təhlilinə tətbiq etmək olar. Əgər hər bir oyunçu üçün uduşun riyazi gözləməsi sıfıra bərabərdirsə, pula və ya jetona görə oyun ziyansız adlanır. Əks halda oyun riyazi gözləməsi müsbət olan oyunçu üçün sərfəlidir.

Hamıya məlum olan sikkə atma oyuna baxaq. Bir oyunçu xəritəyə, digəri rəqəmə pul qoyur. Sikkəni atırlar. Əgər xəritədüşürsə, ikinci oyunçu birinciyə, məsələn, bir manat verir, rəqəm düşürsə, birinci ikinciyə bir manat verir. Xəritənin də, rəqəmin də düşmə ehtimalları 0,5 olduğundan ixtiyari oyunçunun udmasının riyazi gözləməsi sıfırdır:

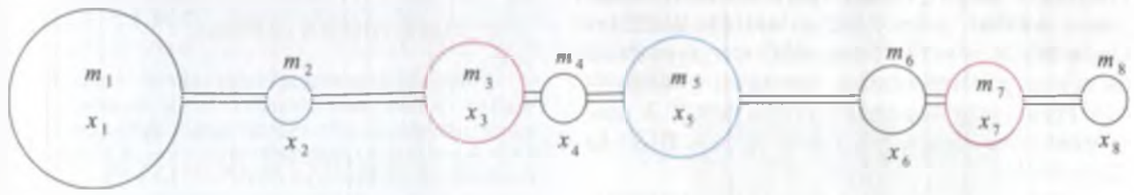
$$1 \cdot 0{,}5 + (-1) \cdot 0{,}5 = 0$$

Deməli, oyun ziyansızdır.

Ruletka oynayan oyunçu xəttə, məsələn, 1 jeton qoyduqda 6/37 ehtimalla 5 jeton udur və 31/37 ehtimalla 1 jeton uduzur. Buna görə də onun uduşunun riyazi gözləməsi:

$$5 \cdot \frac{6}{37} + (-1) \cdot \frac{31}{37} = \frac{1}{37}$$

Oyun heç də ziyansız deyil və qoyulmuş hər jetondan 1/37 jeton udan qumarxanaya sərfəlidir.



XIX əsrdə Şimali Amerikanın Uzaq Qərbində oynanılan "Səadətini axtar" oyunu daha mürəkkəbdir. Barmen darıxan müştərisinə bir dollar verib 1, 2, 3, 4, 5, 6 ədədlərinin birini deməyi təklif edir. "Sən indi üç zər atırsan, – deyə o, davam edirdi. – Əgər sənin dediyin ədəd zərlərin birində düşürsə öz dollarını götürürsən və mən sənə bir dollar da verirəm. Bu ədəd iki zərdə düşürsə, mən sənin dollarına iki dollar əlavə edirəm. Zərlərin hər üçündə düşsə isə, mən sənə üç dollar verirəm".

Oyun ziyansızdırmı və əks halda kimə sərfəlidir? Bir zər atarkən lazımi ədədin düşmə ehtimalı $p = 1/6$, düşməməsi ehtimalı isə $q = 5/6$ dır. Hesablamalar göstərir ("Binomial paylanma" məqaləsinə bax) verilən ədədin heç vaxt düşməməsi ehtımalı

$$q^3 = \frac{125}{216}$$

Düz bir zərdə lazımi ədədin düşməsi ehtimalı

$$3pq^2 = \frac{75}{216}$$

Həmin ədədin düz iki zərdə düşməsi ehtimalı

$$3p^2q = \frac{15}{216}$$

üçqat uğur ehtimalı isə

$$p^3 = \frac{1}{216}$$

Onda

$$\mathbf{M}\{X\} = (-1) \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} +$$

$$+ 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = -\frac{17}{216}$$

Deməli, oyun müştəri üçün sərfəli deyil.

Riyazi gözləmə təsadüfi kəmiyyətin birinci ədədi xarakteristikasıdırsa, təsadüfi kəmiyyətin qiymətlərinin riyazi gözləməyə nəzərən səpələnməsi ikinci xarakteristikasıdır. Səpələnməni necə qiymətləndirməli?

Fərz edək ki, $m = \mathbf{M}\{X\}$ X kəmiyətinin riyazi gözləməsidir. Onda $Y = X - m$, X təsadüfi kəmiyyətinin öz riyazi gözləməsindən olan meylidir. Ağla gələn ilk şey $\mathbf{M}\{Y\}$ riyazi gözləməsini hesablamaq və alınan nəticəni X təsadüfi kəmiyyətinin qiymətlərinin səpələnmə xarakteristikası kimi qəbul etməkdir. Lakin, hesablamalara əsasən,

$\mathbf{M}\{Y\} = \mathbf{M}\{X - m\} = \mathbf{M}\{X\} - \mathbf{M}\{m\} = m - m = 0$,

yəni təsadüfi kəmiyyətin öz riyazi gözləməsindən meylinin riyazi gözləməsi sıfıra bərabərdir. Fikirləşsək, burada təəccüblü bir şeyin olmadığını görərik. Y təsadüfi kəmiyyəti həm müsbət, həm də mənfi qiymətlər alır ki, bunlar da son nəticədə bir-birlərini kompensə edirlər.



Son üç əsr ərzində böyük həndəsə alimlərinin əməyi ilə riyaziyyat elmlərinin qalxdığı yüksək inkişaf səviyyəsinə baxmayaraq praktika onların bir çox baxımdan natamamlığını aşkarlayır; o, elm üçün yeni suallar təklif edir və bələliklə tamamilə yeni üsullar axtarmağa çağırır. Əgər nəzəriyyə köhnə üsulun yeni tətbiqlərindən və ya onun yeni inkişafından xeyli udursa, o həm də yeni üsulların kəşfini əldə edir, bu halda elm praktikada öz sadiq rəhbərini tapır.

Pafnuti Lvoviç Çebışev

Bəs təsadüfi kəmiyyətin meylinin kvadratına $Y^2 = (X - m)^2$ baxsaq necə? Əvvəla, bu kəmiyyət həmişə mənfi deyil, ikin-

cisi isə o, meylin məhz işarədən asılı olmayan, müsbət kəmiyyətini səciyyələndirir. Onda $\mathbf{M}\{(X-m)^2\}$ X təsadüfi kəmiyyətinin öz riyazi gözləməsindən meylinin kvadratının riyazi gözləməsidir. O, təsadüfi X kəmiyyətinin dispersiyası adlanır və $\mathbf{D}\{X\}$-lə işarə edilir.

Beləliklə, əgər m X təsadüfi kəmiyyətinin riyazi gözləməsidirsə, onda

$$\mathbf{D}\{X\} = \mathbf{M}\{(X-m)^2\}$$

X təsadüfi kəmiyyətinin dispersiyasıdır. Əgər X ehtimalların

$$p_i = \mathbf{P}\{X = i\},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

paylanmasına malikdirsə, onda onun dispersiyası

$$\mathbf{D}\{X\} = (x_1 - m)^2 p_1 + (x_2 - m)^2 p_2 + \ldots + (x_n - m)^2 p_n.$$

Dispersiya həmişə mənfi deyil, yəni

$$\mathbf{D}\{X\} \geq 0$$

Özü də $\mathbf{D}\{X\} = 0$ bərabərliyi yalnız və yalnız X sabit kəmiyyət olduqda (yəni həmişə eyni qiymətə malik olduqda) mümkündür.

Asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin cəmlərinin dispersiyası onların dispersiyaları cəminə bərabərdir:

$$\mathbf{D}\{X_1 + X_2 + \ldots + X_n\} = \mathbf{D}\{X_1\} + \mathbf{D}\{X_2\} + \ldots + \mathbf{D}\{X\}.$$

Əgər c sabitdirsə, onda

$$\mathbf{D}\{cX\} = c^2\mathbf{D}\{X\}$$

Qeyd edək ki, dispersiya, təsvir etdiyi təsadüfi kəmiyyətin kvadratına uyğun ölçüyə malikdir. Ona görə də X təsadüfi kəmiyyətinin kvadratik sarpması adlanan digər xarakteristikadan

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{D}(X)}$$

istifadə olunur. Onun ölçüsü X-in ölçüsü kimidir.

Riyazi gözləmə və dispersiya anlayışlarını "şuler zər" – içərisinə qurğuşun kürəcik qoyulmuş zər haqqında hekayətlə nümayiş etdirək. Qurğuşun kürəcik zərin içində elə yerləşib ki, zərin bu və ya digər üzünün düşməsi ehtimalı bu üzdəki xalların sayı ilə mütənasibdir.

Zərin müxtəlif üzlərinin düşmə ehtimallarını tapaq. Fərz edək ki, κ mütənasiblik əmsalıdır, onda bu ehtimallar κ, 2κ, 3κ, 4κ, 5κ və 6κ olacaqlar. Onların cəmi vahidə bərabər olmalıdır, buna görə də $\kappa\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 1$, deməli, $\kappa = 1/21$.

Düşən xalların riyazi gözləməsini hesablayaq:

BÖYÜK ƏDƏDLƏR QANUNU

Riyazi gözləmə və dispersiya ehtimal nəzəriyəsinin ən mühüm qanunlarından olan böyük ədədlər qanunu ilə əlaqədardır. Həmin qanun aşağıdakı kimidir. n – in böyük qiymətlərində eyni $m = \mathbf{M}\{X\}$ riyazi gözləməli paylanmaya malik olan asılı olmayan təsadüfi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kəmiyyətlərinin ədədi ortası

$$Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$$

sabit m – dən az fərqlənir. Daha dəqiq desək, ixtiyari $\varepsilon > 0$ və kifayət qədər böyük n üçün hadisənin ehtimalı

$$\mathbf{P}\{|Y_n - m|\} < \varepsilon \qquad (*)$$

1-ə yaxındır.

İlk dəfə böyük ədədlər qanununu

$$\mathbf{P}\{X = 1\} = p,$$
$$\mathbf{P}\{X = 0\} = 1 - p = q$$

paylanma qanunlu X təsadüfi kəmiyyətləri üçün isveçrəli riyaziyyatçı Yakob Bernulli müəyyənləşdirmişdi.

XIX əsrdə rus riyaziyyatçısı Pafnuti Lvoviç Çebışev ümumi halda (*) ehtimalının qiyməti dəqiqləşdirilən böyük ədədlər qanunu haqqında teoremi isbat etdi:

$$\mathbf{P}\{|Y_n - m| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \qquad (**)$$

Burada $\sigma = \sqrt{\mathbf{D}\{X_i\}}$ – X təsadüfi kəmiyyətinin kvadratik sapmasıdır. (**) bərabərsizliyindən alınır ki, $0 < \sigma < 1$ olduqda $1 - \sigma$– nı keçən ehtimalla

$$m - \frac{\sigma}{\sqrt{n\delta}} \leq \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \leq m + \frac{\sigma}{\sqrt{n\delta}}$$

bərabərsizliyi ödənilir.

$$\mathbf{M}\{X\} = 1\cdot\frac{1}{21} + 2\cdot\frac{2}{21} + 3\cdot\frac{3}{21} + 4\cdot\frac{4}{21} + 5\cdot\frac{5}{21} + 6\cdot\frac{6}{21} = \frac{13}{3} \approx 4{,}3333$$

İndi isə düşən xalların sayının dispersiyanı hesablayaq:

$$\mathbf{D}\{X\} = \frac{1}{21}\left(1 - \frac{13}{3}\right)^2 + \frac{2}{21}\left(2 - \frac{13}{3}\right)^2 + \frac{3}{21}\left(3 - \frac{13}{3}\right)^2 + \frac{4}{21}\left(4 - \frac{13}{3}\right)^2 + \frac{5}{21}\left(5 - \frac{13}{3}\right)^2 + \frac{6}{21}\left(6 - \frac{13}{3}\right)^2 = \frac{1}{21\cdot 9}(100 + 98 + 48 + 4 + 20 + 150) = \frac{420}{21\cdot 9} = \frac{20}{9} \approx 2{,}2222$$

Qeyd edək ki, adi zər üçün $\mathbf{M}\{X\} = 3{,}5$ və $\mathbf{D}\{X\} = 2{,}9167$. Beləliklə, "şuler zərində" adi zərə nisbətən düşən xalların orta sayı nəzərə çarpacaq qədər çox, səpələnmə isə azdır.

BİNOMİAL PAYLANMA

Siz balığın tilovla tutulmasını görmüsünüzmü? Balıqçı – balaca balığa oxşayan qarmaqlı metallik tələ yemini sahildən uzağa tullayır, sonra isə onun bağlandığı tilov ipini makaraya dolayırlar. Çox vaxt balıqcıq geriyə boş qayıdır, lakin bəzən qarmaqda tələ yemini əsil balıq sayan vəhşi balıq – xanı balığı, sıf balığı və ya naqqa çırpınır.

1 balıq tutmaq üçün balıqçığı neçə dəfə atmaq lazımdır? Bu, ilin fəslindən, sutkanın çağından, havadan asılıdır. Balıqçı deyə bilər ki, orta hesabla on dəfə tilov atmaq lazımdır. Onda bir atılışa balıq tutmaq ehtimalı 0,1-ə, boş qarmaq çıxarmaq ehtimalı isə $q = 0{,}9$ - a bərabərdir. Bəs yüz atılış zamanı bir balıq belə tutmamaq ehtimalı nəyə bərabərdir? Yaxud 10 balıq tutma ehtimalı?

Sikkəni ataraq neçə dəfə xəritə düşəcəyini hesablayan zaman eyni situasiya baş verir. Aydındır ki, hər bir atılışda xəritənin düşmə ehtimalı $p = 0{,}5$, eləcə də rəqəmin düşmə ehtimalı $q = 0{,}5$ – dir. Bəs on atılışda xəritənin, məsələn, beş dəfə düşmə ehtimalı neçədir, Bəs səkkiz dəfə düşmə ehtimalı?

Bu prosedur onu təklif etmiş və öyrənmiş isveçrəli alim Yakob Bernullinin şərəfinə Bernulli sxemi adlanır. Gəlin onunla yaxından tanış olaq.

Fərz edək ki, n asılı olmayan sınaq həyata keçirilir və onların hər birində uğur p, uğursuzluq $q = 1 - p$ ehtimalına malikdir. Onda ümumi sınaqların n sayındakı uğurlu sayların miqdarı X, $n + 1$ qiymət: $0, 1, \ldots, n$ alacaq. Onun paylanması necə olacaq? Başqa sözlə, bizim κ sınaqda uğur qazanmağımız və $n - \kappa$ sınaqda qazanmamağımızın $\mathbf{P}\{X = \kappa\}$ ehtimalı nəyə bərabər olacaq?

İxtiyari κ sınaq seçək. Fərz edək ki, bunlar $i_1, i_2, \ldots, i_\kappa$ nömrəli sınaqlardır. i_1 sınağının uğurla başa çatması ehtimalı p – dir, eləcə də i_2 sınağının uğurla başa çatması ehtimalı p – dir və s. Digər tərəfdən, j sınağının uğursuz olacağı ehtimalı q – yə bərabərdir (burada $j \neq i_1$, $j \neq i_2, \ldots, j \neq i_\kappa$). Deməli, həm i_1, həm $i_2, \ldots$, həm də i_κ sı- naqlarının uğurla, digərlərinin uğursuz başa çatacağının ehtimalı $p^\kappa q^{n-\kappa}$ – dır, belə ki. asılı olmayan hadisələrin hasilinin ehtimalı onların ehtimalları hasilinə bərabərdir.



Günəş altında mövcud olan və baş qaldıran hər şey – keçmiş, indi və gələcək – öz-özlüyündə obyektivdir və həmişə ali gerçəklik dərəcəsinə malikdir.... Təsadüfilik əsasən bizim biliyimizdən asılıdır, belə ki, biz hadisənin indi olmamasında heç bir ziddiyyət görmürük, bizə məlum olmayan ən yaxın səbəbə görə o ya zəruri olaraq baş verir, ya baş verə bilər.

Yakob Bernulli

Lakin biz ümumi sınaqların sayından κ uğurlu sınaqlar seçimninin yalnız bir variantına baxdıq. Kombinatorikanın öyrətdiyi kimi belə variantların sayı C_n^κ –dir. Buna görə də hər hansı κ sınağın uğurla, qalanların uğursuz nəticələnəcəyi ehtimalı $C_n^\kappa\, p^\kappa\, q^{n-\kappa}$-ə bərabərdir.

Beləliklə, Bernulli sxemi üzrə n sınağın κ uğurlu nəticəsi ehtimalını aşağıdakı düsturla ifadə etmək olar:

$$\mathbf{P}\{X = \kappa\} = P_\kappa(n) = C_n^\kappa\, p^\kappa\, q^{n-\kappa} \qquad (*)$$

Bu düsturun sağ tərəfindəki ifadə bizə tanışdır ("Nyuton binomu" məqaləsinə bax). Doğrudan da, $(p + q)^n$ – i Nyuton binomu düsturu ilə ayıraq:

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + C_n^2 p^{n-2}q^2 + \ldots + C_n^\kappa p^\kappa q^{n-\kappa} + \ldots + q^n$$

Bu ayrılışdakı toplananlar Bernulli sxemindəki uyğun ehtimallardır. Buna görə də (*) paylanması binomial paylanma adlanır.

İndi isə sikkə və balıqlar haqqında suala cavab verməyə çalışaq. Sikkənin atılması halında $n = 10$, $p = q = 0{,}5$, $\kappa = 5$ və ya 8-dir. Müvafiq surətdə

$$P_5(10) = \frac{10!}{5!5!} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^5 \approx 0{,}246,$$

$$P_8(10) = \frac{10!}{8!2!} \cdot 0{,}5^8 \cdot 0{,}5^2 \approx 0{,}044$$

Balıqçı misalında $n = 100$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, κ isə 0 və ya 10 – dur. Birinci halda

$$P_0(100) = 0{,}9^{100} \approx 0{,}0000266$$

Əgər balıqçı bir balıq belə tutmazsa, deməli, tamamilə aydındır ki, o, uğur ehtimalını ($p = 0{,}1$) düz qiymətləndirməyib.

$\kappa = 10$ halında

$$P_{10}(100) = \frac{100!}{10!90!} \cdot 0{,}1^{10} \cdot 0{,}9^{20} \approx 0{,}13187$$

alırıq.

Bernulli sxemi istər ardıcıl keçirilən n sınağa, istərsə də eyni zamanda aparılan n sınağa aiddir. Belə ki, 1 sikkənin 10 dəfə atılmasını 10 sikkənin 1 dəfə atılması ilə əvəz etmək olar. Bundan bir həyati əhəmiyyətli məsələnin həllində istifadə edək.

Fərz edək ki, siz təyyarə ilə N – şəhərinə uçmağı qərara almısınız və sizin seçiminiz var: ikimotorlu və ya dördmotorlu təyyarə ilə uçmaq. Təyyarələrin motorları eynidir və hər biri uçuş zamanı p ehtimalı ilə sıradan çıxa bilər. Tanış aviatorlardan öyrənmisiniz ki, ikimotorlu təyyarə N şəhərinə bir motorla da uçub çata bilər, dörd motorlu isə – üç, hətta iki motorla da çata bilər, bir motorla isə artıq yox. Hansı təyyarə daha etibarlıdır?

Uçuş zamanı motorun sıradan çıxması ehtimalını p, mühərrikin saz işləməsi ehtimalını q ilə işarə edək. Onda ikimotorlu təyyarənin qəza ehtimalı $P_2(2) = p^2$, dördmotorlununku isə – $P_4(4) + P_3(4) = p^4 + 4p^3q$-dür. p və q – nün hansı qiymətlərində ikimotorlu təyyarənin qəzaya uğraması ehtimalının dördmotorlunkundan az olmasını, yəni nə vaxt $p^2 < p^4 + 4p^3q$ olacağını təyin edək. Aydındır ki, $0 < p < 1$. p^2 – a bölüb və q – nü $1-p$ ilə əvəz edib alırıq ki, ikimotorlu təyyarədə qəzaya uğrama ehtimalı $3p^2 - 4p + 1 < 0$ şərti ödəndikdə az olacaq. Bu bərabərsizlik $1/3 < p < 1$ olduqda doğrudur.

Həmin aviatorlar sizi xəbərdar ediblər ki, belə təyyarələrdə qurulmuş motorlar üçün $p = 0{,}001$-dir, yəni əlbəttə ki, 1/3-dən kiçikdir. Buna görə də dördmotorlu təyyarədə uçuş daha təhlükəsizdir.

BULKADA NEÇƏ KİŞMİŞ VAR

Kalorili bulkaların xəmirinə kişmiş əlavə edirlər. Bəs bulkaların hər hansı birində neçə kişmiş olacağını təyin etmək olarmı? Normaya görə hər bulkaya a kişmiş, məsələn, $a = 10$, qoyurlar. Lakin siz gündə bir bulka alırsınızsa, onda təxminən hər 8 bulkanın birində 10 kişmiş olacaq. Niyə? Bu suala ehtimal nəzəriyyəsinin köməyi ilə cavab vermək olar.

Fərz edək ki, növbəti bulka partiyası hazırlamaq üçün V κq miqdarında xəmir yoğrulur. Əgər 1 bulkaya v κq (məsələn, $v = 0.1$ κq) xəmir sərf olunursa, bir yoğurmadan $N = V/v$ bulka yapmaq olar. Buna görə də xəmirə $n = aN$ kişmiş səpmək lazımdır. Qarışdırma zamanı hər bir kişmiş eyni ehtimalla xəmirin 1 bulkanın hazırlanmasına gedən N hissəsindən ixtiyari birinə düşə bilər. Hər bir kişmişin o birilərindən asılı olmadan xəmirin bu və ya digər hissəsinə düşməsi fərziyyəsi də doğrudur. Onda bulkadakı kişmişlərin sayı

$$\mathbf{P}\{X = m\} = P_m(n) = C_n^m p^m q^{n-m}$$

burada $p = \frac{1}{N} = \frac{v}{V}$, $q = 1 - p$, $n = aN$

binomial paylanmasında ("Binomial paylanma" məqaləsinə bax) X təsadüfi kəmiyyətdir.



İki şeyin – riyaziyyatı öyrənməyin və riyaziyyatı öyrətməyin sayəsində həyat gözəldir.

Simeon Deni Puasson

Bir xəmir partiyasından bir neçə yüz bulka alınırsa, xəmirə səpilən kişmişlərin $n = aN$ sayı bir neçə min edir. n –in böyük qiymətlərində $P_m(n)$ ehtimalını (*) düsturu ilə hesablamaq çox çətindir.

$n \to \infty$, $np=a$ qeyd edib binomial paylanmanın limit halına baxıldıqda hesablamalar əhəmiyyətli dərəcədə sadələşir. Fransız riyaziyyatçısı Simeon Puasson göstərib ki,

$$p_m(a) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}$$

paylanması, burada $m = 0, 1, 2,\ldots$- dir, limit halı olacaq. Bu hökm Puassonun limit teoremi və $p_m(a)$ paylanmasının özü isə Puasson paylanması adını almışdır. Ümumi halda $p_m(a)$ kəmiyyəti sınaqlar zamanı, müsbət nəticələrin orta sayı a – dırsa, asılı olmayan sınaqların böyük sayında m müsbət nəticənin ehtimalıdır.

Bulkada heç bir kişmiş olmayacağı ehtimalını tapmaq üçün Puasson paylanmasından istifadə edək. 0=1, a^0=1 və a=10 olduğundan

$$p_0(10) = e^{-10} \approx 0{,}0000454$$

Beləliklə, bulkanın kişmişsiz qalacağı ehtimalı son dərəcədə kiçikdir.

Bulkada düz 1 kişmiş olması ehtimalı $p_1(10)$-u tapmaq üçün tapdığımız ədədi 10-a vurub 1-ə bölməliyik, yəni sadəcə 10-a vurmalıyıq. Bulkaya düz 2 kişmiş düşəcəyi ehtimalını aydınlaşdırmaq üçün, alınan ədədi bir daha 10-a vurub 2-yə bölməliyik və s.

Bulkada 10 kişmişin olacağı ehtimalı 0,125-ə bərabərdir. Bu o deməkdir ki, 10 kişmiş yalnız 12, 5% bulkaya düşür. Eləcə də hesablamaq olar ki, təqribən bütün bulkalarda (95, 7%) 5-dən 17-dək kişmiş olacaq. 5 kişmişdən az nadir hallarda (1%) olur, belə ki, gündə 1 bulka alınsa, bu, 3 – 4 ayda bir dəfə baş verə bilər.

Puasson qanununun işləməsi üçün çoxlu n sayda asılı olmayan sınaqlar mövcud olmalı və onların hər birində hər hansı A hadisəsinin p ehtimalı o qədər kiçik olmalıdır ki, A hadisələrinin orta sayı np böyük olmasın. Verilmiş sınaqda A hadisəsinin peyda olması nəticə, n sınaqda A hadisələrinin ümumi sayı isə X nəticələrinin sayı adlanır. Belə halda hesab etmək olar ki, nəticələrin X sayı $a = np$ olan Puasson paylanmasına malikdir. Misal olaraq böyük şəhərdə gün ərzində baş verən yol-nəqliyyat hadisələrinin sayını və ya yanğınların sayını göstərmək olar.

Doğrudan da verilmiş avtomobilin gün ərzində qəzaya uğrayacağı və ya verilmiş binada yanğın alovlanacağı ehtimalları çox kiçikdir. Lakin maşınların və ya binaların n sayı böyükdür, böyük şəhərdə xoş olmayan hadisələrin X sayı Puasson qanununa tabedir. Bu, bir tərəfdən vaxtında kömək gös-

BERNULLİ SXEMİNDƏ RİYAZİ GÖZLƏMƏ VƏ DİSPERSİYA

Fərz edək ki, X təsadüfi kəmiyyəti Bernulli sxemi üzrə n sınaqda uğurların sayıdır. $\mathbf{M}\{X\}$ riyazi gözləməsini hesablayaq.

Bilirik ki, uğur ehtimalı p, uğursuzluq ehtimalı $q = 1 - p$ olduqda n sınaqda κ uğur ehtimalı aşağıdakı düsturla ifadə olunur:

$$P_\kappa(n) = \frac{n!}{\kappa!(n-\kappa)!} p^\kappa q^{n-\kappa}$$

Buna görə də

$$0 \cdot \frac{n!}{0!n!} p^0 q^n + 1 \cdot \frac{n!}{1!(n-1)!} p^1 q^{n-1} +$$

$$+2 \cdot \frac{n!}{2!(n-2)!} p^2 q^{n-2} + \ldots + n \frac{n!}{n!0!} p^n q^0$$

cəmini hesablamaq lazımdır. Bu cəmə necə yaxınlaşmaq lazımdır?

Bunu etmək çətin deyil. Yada salaq ki, bir neçə təsadüfi kəmiyyətin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələrinin cəminə bərabərdir. Deməli, n sınaqda uğurlar sayının riyazi gözləməsini almaq üçün bir sınaqda uğurların sayının riyazi gözləməsini tapmaq və nəticəni n-ə vurmaq olar.

Bir sınaq üçün uğurların sayının riyazi gözləməsini asanca tapmaq olar:

$$m = 1p + 0q = p.$$

Deməli,

$$\mathbf{M}\{X\} = nm = np.$$

Dispersiyaya keçək. Bir sınaqda uğur saylarının dispersiyası

$$d = p(1-m)^2 + q(0-m)^2.$$

$$d = p(1-p)^2 + qp^2 = pq^2 + qp^2 = pq(p+q) = pq.$$

Burada biz iki dəfə $p + q = 1$ münasibətindən istifadə etdik.

Bernulli sxemi üzrə sınaqlarda onların hər birinin nəticəsi yerdə qalanlarınkından asılı deyil, buna görə də asılı olmayan təsadüfi kəmiyyətlərin dispersiyaları cəmi düsturundan istifadə etmək olar. Beləliklə,

$$\mathbf{D}\{X\} = nd = npq.$$

tərmək üçün "təcili yardım" və ya yangın maşınlarının sayını düzgün hesablamağa, digər tərəfdən ehtiyatda artıq maşın saxlamamağa imkan verir. Aydındır ki, çoxmilyonlu şəhərlərdə qurbansız xırda yolnəqliyyat hadisələri və "təcili yardım" çağırışları üçün *np* hasili adətən, böyük olur. Belə halda Puasson qanunundan şəhərin ayrı-ayrı rayonlarının yardım xidmətlərinin personalının və texniki təchizatının sayının hesablanması zamanı istifadə etmək məqsədəuyğundur.

Bütün dünyanın sığorta şirkətləri də normal işləmək və gəlir əldə etmək üçün Puasson qanununa müraciət edirlər. Fərz edək ki, məsələn, sığorta şirkəti tikilinin yanğından sığortası üçün onun sığortalandığı məbləğin 1,5 %-ni götürür. Fərz edək ki, şirkət bağ sahələrində $n = 1000$ təsərrüfat blokunun hər birini 8 min manata sığortalayıb. Bu sığortaya görə cəmi 120 min manat yığan şirkət il ərzində yanan hər tikiliyə 8 min manat ödəməlidir. Əgər təsərrüfat blokunun il ərzində yanma ehtimalı p – yə bərabərdirsə, onda böyük olmayan $a = np$-lər üçün il ərzində yanan sığorta olunmuş təsərrüfat blokларının X – sayı Puasson paylanmasına tabedir. $X \geq 15$ olduqda şirkət iflasa uğrayar, belə ki, bu halda o, başqa xərclərdən əlavə, əmlakı yananlara 120 min manat ödəməlidir. Hesablama göstərir ki,

$\mathbf{P}\{X \geq 15\} = 0{,}083$ p=0,01 olduqda,
$\mathbf{P}\{X \geq 15\} = 0{,}017$ p=0,008 olduqda,
$\mathbf{P}\{X \geq 15\} = 0{,}006$ p=0,007 olduqda

Bu ehtimallara görə şirkətə, yəqin ki, p=0,01 ehtimalla işləmək sərfəli deyil və p=0,008 və $p = 0$, 007 xeyli əlverişlidir.

Sığorta, ya da aktuar riyaziyyatı adlanan elm oxşar, lakin daha mürəkkəb hesablamalarla məşğul olur. Bütün dünyada bir neçə elmi aktuar jurnalı çıxır, sığorta ilə bağlı riyazi mövzular üzrə elmi konfranslar keçirilir.

STATİSTİKA HƏR ŞEYİ BİLİR

"Statistika hər şeyi bilir" – İlya İlf və Yevgeni Petrovun "On iki stul" romanının ikinci hissəsi bu sözlərlə başlayır. "Respublikanın orta vətəndaşının il ərzində hansı

PUASSON PAYLANMASI CƏDVƏLLƏRİ

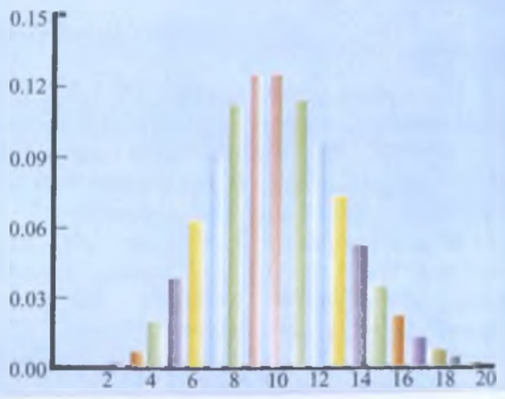
Ehtimal nəzəriyyəsinə dair bir çox kitablarda Puasson paylanmaları cədvəlləri mövcuddur. Fərz edək ki, X təsadüfi kəmiyyəti a - nın müəyyən qiymətində Puasson paylanmasına malikdir, onda

$$\mathbf{P}\{X = m\} = p_m(a),$$
$$\mathbf{P}\{X \leq m\} = p_0(a) + p_1(a) + \ldots + p_m(a)$$

a = 10 olduqda belə bir cədvələ misal aşağıdakı kimidir:

m	$\mathbf{P}\{X = m\}$	$\mathbf{P}\{X \leq m\}$
0	0,00004540	0,00004540
1	0,00045400	0,00049940
2	0,00227000	0,00276940
3	0,00756665	0,01033605
4	0,01891664	0,02925269
5	0,03783327	0,06708596
6	0,06305546	0,13014142
7	0,09007923	0,22022065
8	0,11259903	0,33281968
9	0,12511004	0,45792971
10	0,12511004	0,58303975
11	0,11373640	0,69677615
12	0,09478033	0,79155648
13	0,07290795	0,86446442
14	0,05207710	0,91654153
15	0,03471807	0,95125960
16	0,02169879	0,97295839
17	0,01276400	0,98572239
18	0,00709111	0,99281350
19	0,00373216	0,99654566
20	0,00186608	0,99841174

Şəkildə a = 10 olduqda $\mathbf{P}\{X = m\} = p_m(a)$ ehtimallarının diaqramı təsvir olunub.



qidadan nə qədər yediyi məlumdur... Ölkədə nə qədər ovçu, balerina...dəzgah, bütün cinslərdən olan itlər, velosiped, heykəl, qız, mayak və tikiş maşını olduğu məlumdur. Statistik cədvəllərdən bizə nə qədər hərarət, ehtiras və fikir dolu həyat baxır!.. Statistikadan heç yerdə gizlənə bilməzsən..."

Məşhur romanın sətirləri, əlbəttə ki, statistikanın elmi tərifini vermir. Lakin bu yumoristik tərifdən bilirik ki, statistikanın obyekti həyatın ən müxtəlif sahələri haqqında, statistik cədvəllərə yığılan statistik məlumatlardır.

Lakin bu cədvəllər nəyə lazımdır, onları necə tərtib və emal etməli, onlardan hansı nəticələr hasil etmək olar? Elə bu suallara da statistika (italyanca stato–"dövlət", latınca status–"hal" sözlərindən) cavab verir.

Məlumdur ki, artıq qədim dövlətlərdə vergi ödəməyə qadir olan əhalinin uçotu aparılırdı. Təbiət elmləri inkişaf etdikcə və cəmiyyətin həyatı mürəkkəbləşdikcə ən müxtəlif məlumatların emalının və təhlilinin elmi metodları tələb olunurdu. Xüsusi halda, *XIX* əsrdə, ingilis müəlliflərinin əsərlərində biometrika adlanan bioloji statistika meydana gəldi. O, istər ayrıca fərdlərin, istərsə də onların populyasiyalarının ədədi xarakteristikaları ilə bağlı məlumatları təhlil edir.

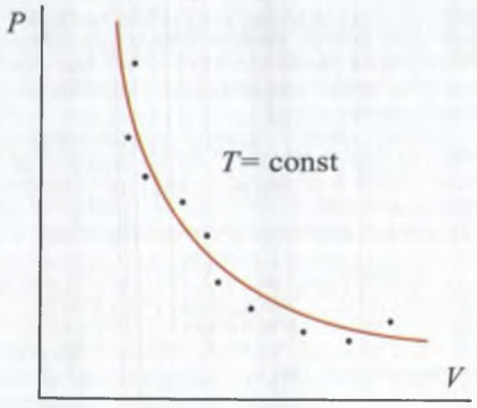
Demoqrafiyada əhalinin sayını, onun yaş, sosial, peşə tərkibini, ölkə daxilində əhalinin yerdəyişməsini və s. öyrənən demoqrafik statistika böyük rol oynayır. İqtisadi statistika məhsulun istehsalının artımı və ya azalmasının; əmtəəyə təklifin və tələbatın, qiymətlərin dəyişməsinin proqnozlaşdırılması metodlarını işləyib-hazırlayır. Onlarla müxtəlif statistika: məsələn, tibbi, maliyyə, sığorta və s. statistika adı çəkmək olar.

Statistikanın bütün adı çəkilən növlərində statistik verilənlərin emalı metodları çoxlu ümumi xüsusiyyətlərə malikdir və ehtimal nəzəriyyəsini bilməyə əsaslanıb. *XX* əsrdə yeni elm – riyazi statistika yarandı. Onun tətbiqinə dair bir neçə misala baxaq.

Orta məktəb fizika kursunda fiziki hadisələrin ədədi xarakteristikaları arasında əlaqəni təyin edən fizika qanunları öyrənilir. Belə ki, Boyl – Mariot qanunu sabit t temperaturunda qazın p təzyiqinin tutduğu V həcminə hasilinin sabit kəmiyyət olduğunu bildirən

$$pV = const$$

düsturu ilə ifadə olunur.



Boyl-Mariot qanunu.
Təcrübi nöqtələr və pV = const hiperbolası.

XVII əsrdə ingilis Robert Boyl və fransız Edi Mariot bu qanunu təcrübə yolu ilə kəşf etmişlər. Onlar bir ucu qaynaq edilmiş şüşə boruya civə tökür, havanın tutduğu həcmi ölçür və həcmin qiymətini civə sütununun uzunluğu ilə ölçülən təzyiqin qiymətinə vururdular. Məlum oldu ki, ölçmələrdəki səhvlər nəzərə alınmazsa (belə təcrübədə bunlar o qədər də kiçik olmur), bu hasil praktiki olaraq sabitdir.

Fiziki nəzəriyyə inkişaf etdikcə Boyl – Mariot qanununu dəqiqləşdirmək zərurəti yarandı. 1873-cü ildə holland fiziki Diderik Van-der-Vaals sonralar onun adıyla adlanan düsturu təklif etdi:

$$(p + \frac{a}{V^2})(V - b) = const$$

Burada a və b müəyyən müsbət sabitlərdir. Bu sabitləri tapmaq və onların təyini zamanı səhvləri minimuma endirmək üçün nəinki təcrübələr üçün təkmilləşdirilmiş cihazlardan, eləcə də o zaman üçün inkişaf etmiş riyazi statistika metodlarından istifadə etmək lazım gəlirdi.

Bizim dövrümüzdə səhvlərin emalının statistik nəzəriyyəsini xüsusi dəqiq ölçmələrdə tətbiq edirlər. Ən adi misal – hər hansı kəmiyyətin təyininin dəqiqliyinin bir neçə təkrar ölçmənin köməyi ilə artırılmasıdır.

ƏLİFBADA ƏN ZƏRURİ HƏRF

Rusdilli yazı makinasında O, E, И, A, H, T, C, P hərfləri klaviaturanın mərkəzi hissəsində yerləşir. Mətn çapı zamanı onlardan daha tez-tez istifadə olunur. Ф, Э, Ш, Ц, Ю, Щ nadir hərfləri onun kənarlarına yaxın yerləşir. Hərflərin belə yerləşməsində makinaçı daha sürətlə çap edə bilər və onun əlləri az yorulur, belə ki, əllər əsasən klaviaturanın mərkəzində yerləşir.

Hərflərin işlənmə tezliyinin hesablamalarının verilənləri, əgər mətnin tərtibi zamanı əvəzləmə şifrindən istifadə edilmişdirsə, mətnin deşifrlənməsi zamanı əvəzsizdir.

Aşağıdakı şifrlənmiş mətni oxumağa çalışın:

Т ЭИЧОРЛЧЬЬ ТЫЬЪК Т ОЬРЫЬОЗПЬЧНРУ НЫЗЕОРФЫВЦЗЗ ЗЧЕРДШБШСОЧК УРЭКОЗК З ЫЬВШДШОВОИ ЪЭРФЗЙ ЫВБЛЬДРТ ЪВОЬЪВОЗНЗ :ВДФЬАЫЙ, ОЬРЫЗЗ ПЗЧЬД, ОЬРЫЗЗ ТЬЫРЛОЭРЧОЬУ, ОРЫЗЗ ЧДРГЕРЧОЗ ВДФРЫЗОЪРТ ЗТИПЗЧДЬЭЗУ З ОВН ЛВДЪЬ, УРЮОРЪЩ ЛДК ЧРТЫЬЪЬЭЭРФР НЫЗЕОРФЫВЦВ ЕЫЬГЛЬ ТЧЬФР ТВГЭВ ЙРЫРМВК ЪВОЬЪВОЗПЬНВК УРЛФРОРТНВ.

Gətirilən mətndə hər bir hərfə başqa hərf uyğundur. Bu da şifrin açarıdır. Açarı bilməklə mətni asanca oxumaq olar. Lakin dildə hərflərin və hərf birləşmələrinin müxtəlif işlənmə tezliyindən istifadə etməklə mətni açarsız da oxumaq olar. Sözlər arasında məsafənin və durğu işarələrinin saxlanılması işi xeyli asanlaşdırır. Açarsız oxuma deşifrləmə adlanır.

İlkin mətndə sözlər arasında hər yerdə əlavə hərf, məsələn Z qoyulduqda məsələ qəlizləşir. Sonra bütün rus əlifbası və Z latın hərfi müvafiq olaraq hər hansı bir açarla əvəz olunur: məsələn, A –nın yerinə Z, Z- in yerinə J və s. Sözlər arasında boşluq olmayan tamamilə şifrlənmiş mətn alınır. Onu da açarsız açmaq olar. Bundan ötrü şifrlənmiş mətnin hansı hərfinin sözarası olduğu təyin edilir. O, başqa hərflərdən daha tez-tez rast gəlinməlidir. Sözarasını təyin edəndən sonra məsələ sadələşir.

Aşağıda rus əlifbasının rastgəlmə tezliyi (% - lə) gətirilir:

А - 6,2	Л - 3,5	Ц - 0,4
Б - 1,4	М - 2,6	Ч - 0,4
В - 3,8	Н - 5,3	Ш - 0,6
Г - 1,3	Щ - 9,0	Щ - 0,3
Д - 2,5	П - 2,3	Ы - 1,6
Е - 7,2	Р - 4,0	Ъ,Ь - 1,4
Ж - 0,7	С - 4,5	Э - 0,3
З - 1,6	Т - 5,3	Ю - 0,6
И - 6,2	У - 2,1	Я - 1,8
Й - 1,0	Ф - 0,2	Aralıq – 17,5
К - 2,8	Х - 0,9	

Fərz edək ki, n ölçmə zamanı $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qiymətləri alınıb. a – axtarılan kəmiyyətin dəqiq, lakin bizə məlum olmayan qiyməti olduqda $x_i - a_i$ ölçmə səhvi adlandıraq. Əgər hər bir ölçmə səhvi mütləq qiymətcə $|x_i - a|$ müəyyən $\delta > 0$ ədədini aşmırsa, onda $\overline{x} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/n$ ədədi ortası, bir qayda olaraq, $|\overline{x} - a| \le \delta/\sqrt{n}$ səhvinə malik olacaq ki, bu da ehtimal nəzəriyyəsinin köməyi ilə müəyyənləşdirilir. Beləliklə, $n = 9$ olduqda ölçülən kəmiyyətin axtarılan qiymətini birqat ölçmədən üç dəfə dəqiq bilmək olar.

Və yaxud demoqrafiyadan misal. Hələ *XVIII* əsrdə böyük statistik materialda müəyyənləşdirilmişdi ki, yeni doğulanların içində oğlanların sayı qızlarınkından çoxdur. *XVIII* əsrin sonunda fransız riyaziyyatçısı Pyer Simon Laplas müşahidə etdi ki, Fransanın müxtəlif bölgələrində doğulan oğlanların nisbi sayı 22/43-ə bərabər olur, Parisdə isə, onu heyrətləndirən 25/49 qiyməti alınır. Bu fərqlə maraqlanan Laplas onun ağlabatan izahını verdi: Parisdə yeni doğulanların ümumi sayına atılmışlar da daxil edilir və şəhər ətraflarındakı əhali, əsasən, qızları atırdı. Atılmışları körpələrin ümumi sayında nəzərə almadıqda Laplas Parisdə də doğulan oğlanların nisbi sayı üçün 22/43-ə yaxın qiymət aldı.

Bu əhvalat iki cəhətdən ibrətamizdir. Əvvəla, aydındır ki, yalnız emal edilən statistik verilənlər mümkün qədər bərabər şəraitdə alındıqda və yuxarıda danışılana bənzər hər hansı bir səbəblə təhrif edilmədikdə gerçək nəticələr çıxarıla bilər.

İkincisi, belə bir sual meydana gəlir: niyə oğlanların doğulmasının nisbi sayının böyük olmasına baxmayaraq statistika qadınların kişilərdən çox olmasına şəhadət verir? Müşahidə olunan hadisənin səbəbi kimi, adətən, müharibələri və kişilərin qadınlara nisbətən qeyri-sağlam həyat tərzi keçirdikləri göstərilir. Lakin hər şey o qədər də sadə deyil. Həqiqətən həm müharibələr, həm də qeyri-sağlam həyat tərzi qadınların və kişilərin sayındakı fərqə təsir göstərir. Lakin demoqrafik cədvəllərə nəzər salsaq, artıq 11-12 yaşlı oğlanlar arasında oğlanlar qızlardan azdır. Görünür, bu fenomenin daha dərin (bioloji) kökləri var.

İndi isə dil statistikasına müraciət

edək. Məsələn, niyə yazı makinalarında O hərfli literlər daha tez sıradan çıxır? Cavab sadədir: O hərfi o qədər kiçik olmayan hər bir rus mətnində o biri hərflərdən daha tez-tez rast gəlinir. Dildə müxtəlif rəqəmlərin tezliyinə maraq təsadüfi deyil. Mətbəələrdə mətnin əllə yığımı zamanı əl altda həmişə müxtəlif literlərin müəyyən ehtiyatı olurdu. Onların ehtiyatını əvvəllər çox təqribi təyin edirdilər. Daha tez-tez rast gəlinən hərfləri seçirdilər – rus dilində bunlar А, Е, И, О saitləri və В, К, Л, Н, С, Р, Т samitləridir. Э, Ю, Щ, Ц, Ч nadir hərfləri üçün az sayda liter ehtiyatı tələb olunurdu. Mətndə qalan hərflər orta tezlikla peyda olurdu.

Teleqrafın banisi Semyuel Morze öz əlifbasını tərtib edən zaman ingilis dilində ən işlək hərflər olan E və T-ni maksimal qısa – bir nöqtə və bir tire ilə işarə etmişdi. O, nadir hərfləri birləşmələrlə (məsələn, X-i "–••–", J-ni "•– – –") təsvir etmişdi. Morze işarələri elə seçirdi ki, teleqraf xəbərləri bacardıqca qısa olsun. Deyirlər ki, ixtiraçı ingilis dilində hərflərin rast gəlmə tezliyini asanca təyin edib: ən yaxın mətbəə yə gedib yığım kassalarındakı literlərin sayını öyrənib. Bu kifayət qədər kobud hesabat qeyri-dəqiqliklərə və teleqrafla xəbər göndərməyin maksimal qənaətcil olmamasına gətirib. Məsələn, tezliyinə görə ingilis əlifbasında 4-cü yer tutan O hərfi (7,94%) Morze əlifbasında üç tire "- - -", M hərfi isə (16-cı yer, 2,25%) iki tire "- -" ilə işarə olunur.

Hərflərin tezliyinin daha dəqiq statistikası şifrləmə işində tələb olunurdu. Hələ Yuli Sezarın zamanından məlum olan sadə şifri – əvəzetmə şifrini açmaq üçün onu nəzərə almaq lazım gəlirdi. Onda müəyyən qanunla (şifrin açarı ilə) bir sıra hərflərin yerinə başqaları işlədilirdi. Məsələn, A yerinə Y, B yerinə U və s. Əvəz şifrinin açarsız da asanca təyin olunduğunu anlayana qədər belə şifrdən əsrlər boyu istifadə etdilər. Məsələ burasındadır ki, şifrlənmiş mətndəki daha çox istifadə olunan hərflərə dildəki ən çox tezlikli hərflər uyğun gəlir. Belə uyğunluğu müəyyən edəndən sonra iki və ya üç hərf birləşməsindən, (məsələn CT, PRO) istifadə olunur və s. Şifri axıra qədər açmaq üçün şifrin, necə deyərlər, oxunaqlığına müraciət edirlər, yəni mənalı mətn alınanadək çatışmayan hərfləri bərpa edirlər. Şifrin adi əvəzləmə ilə açılmasını öz əsərlərində Edqar Po və ("Qızıl böcək") və Artur Konan Doyl ("Rəqs edən adamcığazlar") təsvir etmişlər.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ NƏDİR?

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN PREDMETİ TƏSADÜFİ SINAQ VƏ HADİSƏ ANLAYIŞI

Ehtimal nəzəriyyəsi müasir riyaziyyatın ən intensiv inkişaf edən və geniş tətbiq sahəsinə malik olan qollarından biridir. Ehtimal nəzəriyyəsi bizi əhatə edən aləmdə baş verəm təsadüfi dəyişikliklərin (hadisə və proseslərin) riyazi *modelini* qurur və tədqiq edir. İlk baxışda "ehtimal nəzəriyyəsi" terminində bir qədər ziddiyyət ifadə olunur. Belə ki, nəzəriyyə sözü elmlə uzlaşır (elm isə qanunauyğunluqları öyrənir). Lakin ehtimal sözü isə müəyyən mənada qeyri-müəyyənliklə, təsadüfi və ya qeyri-elmi fikirlə bağlı olur. Əslində bu belə deyildir. Yəni, ehtimal nəzəriyyəsi müəyyən bir elmi nəzəriyyə kimi özünün ciddi elmi məsələlərinə malikdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin ilkin elmi məsələləri XVII əsrin ortalarında meydana çıxmışdır. Bu məsələlər o dövrün görkəmli alimlərinin – Paskalın (1623-1662), Fermanın (1601-1665) və Hüygensin (1629-1695) əsərlərində qeyd olunduğu kimi əyləncəli oyunlarla bağlı ortaya çıxmışdır. Lakin əyləncəli *oyunlarla* bağlı şansların hesablanması məsələlərinə əslində XV-XVI əsrlərdə yaşamış Kardano, Tartali kimi italyan alimlərinin əsərlərində rast gəlinir. Bizim dövrə qədər gəlib çıxmış bu görkəmli riyaziyyatçıların bir-birinə yazdığı məktublarda qeyd olunub ki, əyləncəli oyunlarla yaranan riyazi məsələləri o dövrün riyazi metodları ilə həll etmək qeyri-mümkündür. Bu fikir ehtimal nəzəriyyəsinə aid ilk əsər hesab olunan və Hüygens tərəfindən 1654-cü ildə çap olunan "Əyləncəli oyunlarda hesablama haqqında" adlanan əsərdə qeyd olunmuşdur.

Ehtimal nəzəriyyəsinin bir elm kimi inkişafı Y.Bernullinin (1654-1705) 1713-cü ildə çap olunan «Fərziyyənin məharəti» (Ars Conjelandi) əsəri ilə başlayır. Bu əsərdə ehtimal nəzəriyyəsinin böyük ədədlər qanunu isbat olunmuşdur. 1730-cu ildə çap olunan Muavrin (1667-1754) "Analitik metodlar" adlı əsəri ehtimal nəzəriyyəsinin həqiqi riyazi elm kimi formalaşmasına böyük təkan vermişdir. Bernulli ehtimal nəzəriyyəsində ilk olaraq hadisənin klassik ehtimalının tərifini vermiş və ehtimal ilə tezliyinin bir-birindən fərqli anlayışlar olduğunu göstərmişdir.

O ilk olaraq ehtimal nəzəriyyəsinə riyazi gözləmə, asılı olmamazlıq və şərti ehtimal anlayışlarını gətirmişdir.

1812-ci ildə Laplasın (1749-1827) "Analitik ehtimal nəzəriyyəsi" adlanan böyük əsəri çap olunmuşdur. Bu əsərdə Laplasın özünün aldığı nəticələr və ona qədər məlum elmi nəticələr şərh edilmişdir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin inkişafının müasir mərhələsi onun aksiomatik qurulması ilə başlayır.

Məlumdur ki, hər bir riyazi elm özünün ilkin anlayışlar və aksiomlar sisteminə malikdir. Ehtimal nəzəriyyəsinin də aksiomatikasının qurulması istiqamətində bir neçə cəhdlər olub. Bu istiqamətdə ilk işlər P.Mizes (1883-1953). C.H Bernşteyn (1880-1968) və E.Borelə (1871-1956) məxsusdur. Lakin onların təklif etdiyi aksiomatik sistem ziddiyyətli olmuşdur. Ehtimal nəzəriyyəsinin düzgün və universal aksiomatikası 1933-cü ildə böyük rus riyaziyyatçısı A.H. Kolmoqorovun "Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları" kitablnda verilib. Onun aksiomlar sistemi çoxluqlar və funksiyalar nəzəriyyəsinə əsaslanır və bütün dünya riyaziyyatçıları tərəfindən qəbul olunmuşdur.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi ehtimal nəzəriyyəsi bizi əhatə edən aləmdə baş verən (kütləvi şəkildə) təsadüfi hadisələrin baş vermə ehtimalları arasında riyazi münasibətlər qurur və bu münasibətlərin köməyi ilə mürəkkəb hadisələrin ehtimalları daha sadə hadisələrin ehtimalları əsasında qiymətləndirilir.

Ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışlarından biri təsadüfi sınaq (sadəcə olaraq sınaq) anlayışıdır. Sınaq dedikdə biz nəticələri bu və ya digər təsadüfi hadisələrdən ibarət müəyyən eksperiment (təcrübə, müşahidə) başa düşürük.

Qeyd edək ki, təbiətşünaslıqda iki növ sınaqları bir-birindən fərqləndirirlər:

1. determinik sınaqlar (requlyar sınaqlar). 2. qeyri-determinik sınaqlar (requlyar olmayan sınaqlar).

Determinik sınaqlar elə sınaqlara deyilir ki, bu sınaqların aparılması üçün lazım olan kompleks şərtlər həyata keçirildikdə, nəticəni birqiymətli şəkildə əvvəlcədən demək olur. Məsələn, suyun qızdırılması eksperimentində suyun 100^0C-də qaynayacağını əvvəlcədən demək olar. Determinik sınaqlar fizika və kimyada istifadə olunurlar.

Qeyri-determinik sınaqlarda isə sınağın aparılmasını təmin edən kompleks şərtlər həyata keçirildikdə, nəticəni qabaqcadan demək olmur. Belə sınaqlar təsadüfi sınaqlar adlanır və ehtimal nəzəriyyəsində tətqiq olunurlar. Təsadüfi sınaqlara aid bir neçə misala baxaq.

Misal. Metal pulun atılması eksperimentinə baxaq. Fərz olunur ki. metal pul "*düzgündür*", yəni simmetrik və bircinsdir. Bu zaman aydındır ki, sınağın iki nəticəsi ola bilər: "*p*"-pul, "*g*"-gerb. Bu nəticələrdən hansının düşəcəyini qabaqcadan söyləmək mumkün deyil. Belə sınaqların nəticələri qeyri-requlyar xarakter daşıyır (gah "pul", gah "gerb") və belə nəzərə çarpır ki, müəyyən qanunauyğunluq aşkar olunması mümkün deyil. Lakin bu belə deyildir. Əgər metal pulun çoxlu sayda asılı olmayan atılmalarını aparsaq, onda "düzgün" metal pulun atılmasının statistik dayanaqlı olmasını müşahidə edərik, yəni "gerb"-in düşmə sayının ümümi saya nisbəti $\frac{1}{2}$-ə yaxın olacaqdır.

Misal. Bircins materialdan hazırlanmış simmetrik kub şəkilli zərin atılmasına baxaq. Zərin 6 üzü var və bu üzlər 1, 2, 3, 4, 5, 6 xalları ilə nömrələnib. Zərin atılması zamanı bu xallardan biri düşür, hansı xalın düşəcəyini isə qabaqcadan demək olmur.

Misal. İnsanın qrip xəstəliyinə tutulmasına bir sınaq kimi baxmaq olar. Burada 3 nəticə ola bilər. 1. Tam sağalma. 2. Qismən sağalma. 3. Ölüm. Lakin epidemiya zamanı bu nəticələrin hansının baş verəcəyinin əvvəlcədən demək olmur.

Beləliklə, ümumi şəkildə fərz edək ki. Q sınağı aparılır. Onun mümkün nəticəsini ω ilə işarə edək. ω-ya elementar nəticə və ya elementar hadisə deyilir. Sınağın bütün mümkün elementar nəticələr çoxluğunu $\Omega=\{\omega\}$ ilə işarə edək. Ω-çoxluğu elementar hadisələr fəzası adlanır. Məsələn, "düzgün" metal pulun atılması zamanı iki mümkün nəticə ola bilər, yəni $\omega=p$ və ya $\omega=g$. Onda $\Omega=\{p,g\}$ olur.

Sınağın riyazi modelinin qurulmasında onun Ω elementar hadisələr fəzasının elementlərinin təbiəti maraq kəsb etmir. Yalnız elementlərin sayı maraq kəsb edir. Yuxarıda verdiyimiz misallarda Ω sonlu çoxluqdur.

Zər daşının atılması zamanı $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,\}$ olur. Cüt üzün düşməsi hadisəsinə baxaq. Cüt xallar $\{2,4,6\}$ çoxluğunu təşkil edir. Cüt üzün düşməsi hadisəsi zər daşının atılması zamanı baş verə də bilər, verməyə də bilər. Ona görə belə hadisəyə təsadüfi hadisə deyilir.

Biz təsadüfi hadisəyə elementar hadisələrin müəyyən bir alt çoxluğu kimi baxa bilərik. Təsadüfi hadisələri A,B,C və s. ilə işarə edək. Beləliklə, təsadüfi hadisə dedikdə, biz sınaq zamanı baş verə bilən və ya baş verə bilməyən, yəni müşahidə oluna bilən hadisələri nəzərdə tuturuq. Ehtimal nəzəriyyəsini müasir inkişaf mərhələsində hadisə anlayışı tərif verilməyən elementar hadisə (sınağın nəticəsi) vasitəsilə təyin olunur. Belə ki, əgər sınağın nəticəsində $\omega\in A$ olarsa, onda deyilir ki, sınaq zamanı A hadisəsi baş vermişdir. Əks halda isə, yəni $\omega\notin A$ olarsa, onda sınaq zamanı A hadisəsi baş verməmişdir deyirlər. Burada A hadisəsi sınağın bütün mümkün nəticələr çoxluğunun Ω müəyyən alt çoxluğu ilə eyniləşdirilir. Hadisə ehtimal nəzəriyyəsinin ikinci mühüm anlayışıdır. Beləliklə, hər bir hadisə Ω elementar hadisələr fəzasının müəyyən alt çoxluğudur.

Təsadüfi hadisələr sinifində aşağıdakı iki hadisəni fərqləndirirlər:

1) *yəqin hadisə*; 2) *mümkün olmayan hadisə*.

Sınaq zamanı mütləq baş verəcək hadisəyə yəqin hadisə deyilir və Ω ilə işarə olunur. Sınaq zamanı heç vaxt baş verməyən hadisəyə isə mümkün olmayan hadisə deyilir və o$\varnothing$ (boş çoxluq) ilə işarə olunur.

Hadisələr üzərində çoxluqlar nəzəriyyəsinin aşağıdakı əməllərini aparmaq olar.

1. Hadisələrin birləşməsi (cəmi).

A və B hadisələrinin birləşməsi (cəmi) elə $C=A\cup B$ $(C=A+B)$ hadisəsinə deyilir

ki, bu hadisə, yalnız və yalniz, A və B hadisələrindən heç olmasa biri baş verdikdə baş verir. Çoxluqlar nəzəriyyəsi dilində belə ifadə etmək olar:

$C = A \cup B \ (A+B) = \{\omega : (\omega \in A) \text{və ya } (\omega \in B)\}$

2. Hadisələrin kəsişməsi (hasili).

A və B hadisələrinin kəsişməsi (hasili) elə $C = A \cap B \ \ (C = AB)$ hadisəsinə deyilir ki, bu hadisə, yalnız və yalnız, A və B hadisələri eyni zamanda baş verdikdə baş verir. $C = A \cap B(AB) = \{\omega : (\omega \in A) \text{ və } (\omega \in B)\}$

3. Hadisələrin fərqi.

A və B hadisələrinin fərqi elə $C = A \setminus B$ hadisəsinə deyilir ki, bu hadisə, yalnız və yalniz, A baş verdikdə, B isə baş verməddikdə baş verir. $C = A \setminus B = \{\omega : (\omega \in A)$ və $(\omega \overline{\in} B)\}$

4. Hadisələrin simmetrik fərqi .

A və B hadisələrinin simmetrik fərqi elə $C = A \Delta B$ hadisəsinə deyilir ki, bu hadisə, yalnız və yalnız, A və B hadisələrindən biri baş verdikdə baş verir. $C = A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (AB)$

5. Tamamlama.

A hadisəsi baş vermədikdə baş verən hadisəyə A hadisəsinin tamamlanması deyilir və $\overline{A} = \Omega \setminus A$ kimi işarə olunur. $\overline{A}$ hadisəsi A hadisəsinin əksi və ya inkarı adlanır.

Əgər A və B hadisələri üçün $AB = Ş$ olarsa, yəni onların kəsişməsi boş çoxluğa bərabər olarsa, onda onlara uyuşmayan hadisələr deyilir.

TEZLİK VƏ EHTİMAL ANLAYIŞLARI

Yuxarıda qeyd etdik ki, ehtimal nəzəriyyəsində tədqiq olunan sınaqlar qeyri-məhdud sayda təkrarlana bilər. Onların hər dəfə reallaşması üçün müəyyən kompleks şərtlər ödənməlidir.

Tutaq ki, Q sınağı N dəfə aparılır və A hadisəsi $N(A)$ dəfə baş verir. Onda $N(A)$ kəmiyyətinə A hadisəsinin tezliyi deyilir. $\frac{N(A)}{N}$ münasibətinə isə A hadisəsinin **nisbi tezliyi** deyilir.

Praktiki müşahidələr əsasında nisbi tezliklər üçün aşağıdakı şəkildə ifadə olunan dayanıqlıq xassəsi aşkar edilmişdir.

Fərz edək ki, Q sınağı N_1 dəfə aparıldıqda, A hadisəsi $N_1(A)$ ilə, sınaq N_2 dəfə aparıldıqda, A hadisəsi $N_2(A)$ ilə və s., sınaq N_k dəfə aparıldıqda, A hadisəsinin tezliyini $N_k(A)$ ilə işarə edək. Onda

$$\frac{N_1(A)}{N_1} \approx \frac{N_2(A)}{N_2} \approx \ldots \frac{N_k(A)}{N_k} \approx P(A) \qquad (*)$$

münasibəti ödənilir. Bu (*) münasibətinə nisbi tezliklərin dayanıqlıq xassəsi və ya statistik dayanıqlıq xassəsi deyilir. Tezliklərin dayanıqlığı real aləmdə baş verən kütləvi təsadüfi hadisələrin obyektiv xassəsidir. Bu xassənin olmaması onu göstərir ki, sınaqlar seriyasında qoyulan komplekс şərtlər dəyişikliyə məruz qalmışdır.

Dayanıqlıq xassəsi göstərir ki, sınaqlar seriyasını qeyri-məhdud $(k \to +\infty)$ davam etdirsək, onda $\frac{N_k(A)}{N_k}$ nisbəti müəyyən bir $P(A)$ ədədi ətrafında "rəqs edər", yəni ona yaxın olur. Bu $P(A)$ ədədinə A hadisəsinin başvermə ehtimalı deyilir.

(*) ifadəsi XVII əsrin ortalarında aşkar edilmişdir. Bu istiqamətdə müxtəlif sınaqlar aparılmışdır. Məsələn, o dövrün böyük riyaziyyatçısı Pasкal "düzgün" metal pulu 24000 dəfə ataraq göstərib ki, onun "g" üzünün düşməsi üçün (*)-da $\frac{N(g)}{N} \approx \frac{1}{2}$ olur. Buradan çıxır ki, "g" üzünün düşməsi hadisəsinin ehtimalı $P(g) = \frac{1}{2}$ olur.

(*) ifadəsi hadisənin baş vermə ehtimalını emprik şərh etməyə imkan verir: sınaqların sayı qeyri-məhdud olaraq artırıldıqda, baxılaan hadisə üçün alınmış nisbi tezliklər hadisənin ehtimalı ətrafında qruplaşır ("rəqs edir").

Nisbi tezliklərin statistik dayanıqlıq xassəsindən çıxır ki, hadisənin ehtimalı mənfi olmamalıdır, yəni $P(A) \geq 0$. Asanlıqla bu xassədən çıxır ki, yəqin hadisənin ehtimalı $P(\Omega) = 1$ olmalıdır.

Qeyd edək ki, (*) təqribi bərabərliyindən hadisənin ehtimalı üçün $0 \leq P(A) \leq 1$ olduğu alınır.

DİSKRET EHTİMAL FƏZASI. KLASSİK EHTİMALI

Tutaq ki, müəyyən bir Q sınağı aparılır və onun nəticələr çoxluğu Ω sonlu və ya hesabi çoxluqdur. Biz yuxarıda nəticələr çoxluğu sonlu olan sınaqlara misal göstərdik. İndi isə nəticələr çoxluğu hesabi olan sınağa aid misala baxaq.

Misal. Metal pulun birinci dəfə "g" üzü düşənə qədər atılmış sınağına baxaq. Bu sınağın nəticələr çoxluğu hesabi

$\Omega = \{g, pg, ppg, ppg, \ldots\}$ çoxluğu olur.

Sonlu və ya hesabi çoxluqla ifadə olunan təsadüfi sınaqların riyazi modelini quraq. Əvvəlcə A ilə Ω-nın bütün alt çoxluqlarının çoxluğunu işarə edək:

$\mathrm{A} = \{A : A \subset \Omega\}$, Baxılan halda $A \in \mathrm{A}$ -ya hadisə deyilir. Bu hadisənin baş verib-verməməsini sınağın nəticəsi zamanı maşahidə etmək mümkündür. Əsas məqsədimiz A hadisəsinin ehtimalını yəni, $P(A)$-ni təyin etməkdən ibarətdir.

Beləliklə, biz nəticələr çoxluğu Ω olan sınağın nəticəsində baş verən təsadüfi hadisələr küllüsünü – A-nı təyin etdik. Sınağın riyazi modelini qurmaq üçün bizə $P(A)$ ehtimalını təyin etmək lazımdır. Bu məqsədlə, aşağıdakı iki xassəyə malik olan $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ədədlər ardıcıllığına baxaq: 1) $p_n \geq 0, \ n \geq 1, \ 2) \sum_n p_n = 1$

1) *şərti mənfi olmamazlıq*. 2) *şərti isə normallaşma şərti adlanır.*

Aydındır ki, Ω çoxluğunun elementləri ilə $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ ardıcıllığının hədləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar: $\omega_n \leftrightarrow p_n \ \ (n \geq 1)$. Onda p_n ədədinə ω_n elementar hadisəsinin ehtimalı kimi baxa bilərik: $p_n = P(\omega_n)$.

Qeyd edək ki, 1), 2) şərtlərindən çıxır ki, $0 \leq p_n \leq 1$. Onda $A \in \mathrm{A}$ hadisəsinin baş vermə ehtimalını belə təyin edək:

$$P(A) = \sum_{n:\omega_n \in A} P(\omega_n) \qquad (1)$$

(1) düsturuna diskret ehtimal düsturu deyilir. (1) düsturundan və 1), 2) şərtlərindən ehtimalın aşağıdakı xassələrini almaq olar:

1. $P(A) \geq 0$,

2. $P(\Omega) = 1$, $P(()=0$. Ω-yəqin hadisə, $\varnothing$-mümkün olmayan hadisədir.

3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

4. Əgər A hadisəsi B hadisəsini doğurursa, yəni $A \subset D$ olarsa, onda $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$,

5. Əgər $AB = \varnothing$ olarsa, onda $P(A+B) = P(A) + P(B)$ - sonlu additivlik xassəsi.

6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$,

7. $P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(AB)$,

8. Əgər hesabi sayda $A_1, A_2, \ldots A_n, \ldots$ hadisələri $A_i \cap A_j = \varnothing \ \ (i \neq j)$ şərtini ödəyərsə, yəni verilmiş hadisələr cüt-cüt kəsişməzlərsə (uyuşmayandırlarsa), onda

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

9. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$-yarımadditivlik xassəsi.

Bu xassələrin isbatı birbaşa (1) düsturundan alınır. Məsələn, dördüncü xassənin isbatına baxaq: $A \subset B$ olduğundan $B = A + B \setminus A$ yaza bilərik. Burada A və $B \setminus A$ hadisələri uyuşmayan hadisələr olduğundan, sonlu additivik xassəsindən istifadə etsək alarıq: $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$ Beləliklə, bu ifadədən çıxır ki,

$$P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Beşinci xassəni isbat edək.

A və B hadisələri uyuşmayan hadisələr olduğundan (1) düsturuna görə

$$P(A+B) = \sum_{\omega \in A+B} P(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega \in A} P(\omega) + \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A) + P(B).$$

Altıncı xassəni isbat etmək üçün

$$A \cup B = A + (B \setminus AB)$$

yazaq. Onda, $P(A + B \setminus AB) = P(A) + P(B \setminus AB)$ yazdığımız ifadədən aydındır ki, $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus AB)$. Burada ikinci toplanana yuxarıda isbat etdiyimiz dördüncü xassəni tətbiq etsək altıncı xassəni almış olarıq.

Diskret ehtimal fəzasının bir mühüm

xüsusi halına baxaq. Tutaq ki, sınağın nəticələr çoxluğu Ω sonlu çoxluqdur. $\Omega=\{\omega_1.\omega_2...\omega_N\}$, $N<\infty$ və fərz edək ki, Ω çoxluğunu təşkil edən elementar hadisələr eyniimkanlıdır, yəni $P(\omega_1)=P(\omega_2)=...=P(\omega_N)=p$ münasaibəti ödənilir. Onda aydındır ki, normalaşma şərtinə görə $\sum_{k=1}^{N}p(\omega_k)=1\Rightarrow pN=1\Rightarrow p=\frac{1}{N}$ olur.

(1) düsturunu tətbiq etsək, alarıq ki,

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}\frac{1}{N}=\frac{|A|}{N} \qquad (2)$$

Burada, $|A|-A$ hadisəsini təşkil edən elementar hadisələrin sayını göstərir. Aydın olur ki, $|\Omega|=N$.

(2)-ni belə də yaza bilərik.

$$P(A)=\frac{|A|}{\Omega} \qquad (3)$$

(2) bərabərliyinə ehtimalın klassik düsturu və ya klassik tərifi deyilir. (3) düsturunu sözlə belə ifadə etmək olar. $|A|$-əlverişli hallar sayının $|\Omega|$-ümumi hallar sayına nisbətinə A hadisəsinin klassik ehtimalı deyilir. Klassik ehtimalın tətbiq olunduğu ehtimal fəzalarının elementar hadisələri aparılan sınağın şərtlərinə nəzərən eyni imkanlı olurlar.

Klassik ehtimalın hesablanmasında aşağıdakı iki sadə prinsipdən istifadə olunur.

1. **Toplama prinsipi.** Tutaq ki, A obyekti n, B obyekti isə m üsulla seçilə bilər. Onda $A\cup B$ (A və ya B) obyekti $n+m$ üsulla seçilir.

2. **Vurma prinsipi.** Tutaq ki, A obyekti n, B obyekti isə m üsulla seçilə bilər. Onda AB cütü $n\cdot m$ üsulla seçilir.

Praktiki məsələlərdə klassik ehtimalın hesablanmasında kombinatorikadan və aşağıdakı qutu sxemindən geniş istifadə olunur.

Fərz edək ki, müəyyən bir qutuda N sayda kürəcik var. Bu kürəciklər 1,2...N ədədlərlə nömrələnmişlər. Qutudan təsadüfi olaraq n sayda kürəcik götürülür. a_i ilə i-ci addımda götürülən kürəciyin nömrəsini işarə edək. Bu halda hər götürülmüş n sayda kürəciyi $(a_1,a_2...,a_n)$ küllüsü kimi yazmaq olar. Bu küllü statistikada n həcmli seçim adlanır. Uyğun ehtimal fəzasını təsvir etmək üçün nizamlı və nizamsız seçimləri bir-birindən fərqləndirmək lazımdır.

Nizamlı seçimlərdə eyni elementlərdən təşkil olunmuş, lakin elementlərin düzülüşlərinə görə fərqlənən n həcmli seçimlər müxtəlif hesab olunurlar. Nizamsız seçimlərdə isə belə n həcmli seçimlər eyniləşdirilir, yəni elementlərin düzülüşü nəzərə alınmır.

Biz nizamlı n həcmli seçimləri $(a_1,a_2,...a_n)$, nizamsız seçimləri isə $[a_1,a_2...a_n]$ kimi işarə edəcəyik.

Qutudan kürəciklər aşağıdakı iki üsulla götürülür.

1. Təkrarsız sxem. Bu sxemdə fərz olunur ki, $n\le N$ və götürülən kürəciyin nömrəsi qeyd olunur və o, qutuya qaytarılmır. Təkrarsız sxemə uyğun elementar hadisələr fəzasını belə yazmaq olar:

$$\Omega=\{\omega=(a_1,a_2...a_n),a_1\neq a_i,\ i\neq k,a_i=1,2,...N\}$$

Təkrarsız sxem üzrə nizamlı seçimlərin sayını tapaq. Vurma prinsipinə görə Ω çoxluğunun elementlərinin sayı

$$|\Omega|=N(N-1)..(N-n+1)=\frac{N!}{(N-n)!}=A_N^n.$$

Klassik ehtimal sxemində $\omega\in\Omega$ üçün $P(\omega)=\frac{1}{A_N^n}$ götürülür.

Nizamsız təkrarsız sxemə uyğun elementar hadisələr fəzasını belə ifadə etmək olar.

$$\Omega=\{\omega[a_1,a_2,...,a_n],a_1\neq a_k,i=\neq k,a_1=\overline{1,N}\}.$$

Təkrarsız sxem üzrə nizamsız seçimlərin sayını tapaq. Aydındır ki, hər bir nizamsız $[a_1,a_2...,a_n]$ seçimdən elementlərin yerini dəyişməklə $n!$ sayda nizamlı seçim alınar. Onda, $|\Omega|\cdot n!=A_N^n$ olur. Buradan

$$|\Omega|=\frac{1}{n}\cdot A_N^n=\frac{N!}{n!(N-n)!}=C_N^n.$$

Klassik ehtimal sxeminə görə, hər bir nizamsız seçimin baş vermə ehtimalı $P(\omega)=\frac{1}{C_N^n}$ olur.

Misal. Fərz edək ki, qutuda N sayda kürə var. Onlardan M dənəsi ağ, yerdə qalan $N-M$ dənəsi isə qara rənglidir. Qutudan təkrarsız sxem üzrə, təsadüfi olaraq n kürə götürülür. Bu götürülmüş kürələrdən m saydasının ağ, $n-m$ saydasının qara olması ehtimalını tapın.

Həlli. Aydındır ki, vurma prinsipinə görə n həcmli nizamsız seçimlərin sayı $|\Omega|=C_N^n$ olur, əlverişli halların sayı isə $|A|=C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}$.

Beləliklə, $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n=m}}{C_N^n}$.

2. Təkrarlı sxem. Bu sxemdə qutudan kürə götürülür, nömrəsi qeyd olunur və o yenidən qutuya qaytarılır. Aydındır ki, təkrarlı sxemdə hər bir a_iN sayda 1...,N qiymətlərini ala bilər.

Bu sxem üzrə də nizamlı və nizamsız seçimləri bir-birindən fərqləndirmək lazımdır. Təkrarlı sxemə uyğun elementar hadisələr fəzasını belə yazmaq olar.

$$\Omega=\{\omega:\omega=(a_1,a_2,...a_n),a_i=1,2,...N,i=\overline{1,n}\}$$

Vurma prinsipinə görə $|\Omega|=N\cdot N\cdot...\cdot N=N^n$. Onda, klassik sxemə görə, $\omega\in\Omega$ üçün $P(\omega)=N^{-n}$ götürmək olar. Əgər nizamsız təkrarlı sxemə baxsaq, onda uyğun elementar hadisələr fəzası

$$\Omega=\{\omega:\omega=[a_1,a_2,...a_n],a_i=1,2,...,N,i=\overline{1,n}\}$$

olar.

Asanlıqla başa düşmək olar ki, nizamsız seçimlərin sayı nizamlı seçimlərin sayından azdır.

Göstərmək olar ki, nizamsız n həcmli təkrarlı seçimlərin sayı

$$|\Omega|=C_{N+n-1}^n$$

3 ədədinə bölünən ədədlər 0,3,6,9 olduğundan üzərində 3-ə bölünən ədədlər yazılmış şarların çıxması bütün halların təxminən $\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$ olar.

2 və 3-ə bölünməyən ədədlər 1,5,7 olduğundan. Onların payına hadisələrin $\frac{3}{10}$-ü düşər.

4-ə bölünən ədədlər 0,4,8 olduğundan onların payına hadisələrin $\frac{3}{10}$-ü düşər.

Baxılan misallar göstərir ki, müəyyən təcrübələr aparılır və onların nəticələri müxtəlif olur. Məsələn, zər atıldıqda 6 düşmə nəticəsi (1,2,3,4,5,6), şarların çıxarılmasında 10 nəticə (0,1,2,...,9) ədədləri yazılmış şarların çıxması. Bu nəticələrdən bəziləri əlverişlidir (məsələn zər atıldıqda bir və beş yazılmış üzlərin düşməsi, tək ədəd yazılmış şarın çıxması. 2 və 3-ə bölünməyən ədədlər yazılmış şarın çıxması və s.).

Beləliklə 1) hesab edirik ki, çoxlu sayda təcrübə nəticəsində bütün nəticələr təxminən bərabər sayda baş verir; 2) bu təcrübələrdən, təxminən nə qədəri əlverişlidir. Tutaq ki, bütün nəticələr n-dir, onlardan m-i əlverişlidir. Onda hər bir nəticə $\frac{1}{n}$-say-da. Əlverişli nəticə isə $\frac{m}{n}$ sayda hadisə zamanı baş verir. Beləliklə bütün əlverişli nəticələrin sayının ümumi nəticələrin sayına olan nisbəti həmin hadisənin baş vermə ehtimalıdır.

Beləliklə, istənilən hadisənin ehtimalı o ilə 1 arasında olan ədəddir $(0\le m\le n)$. Əgər əlverişli hadisənin olması mümkün deyilsə, yəni, gözlənilən nəticə yoxdursa, onun ehtimalı 0-dır. Əgər bütün nəticələr əlverişlidirsə onda onun ehtimalı 1-dir.

Klassik ehtimalın hesablanmasına aid bəzi misallara baxaq.

1. İki oyun zəri atılır. Hər bir nömrənin düşmə hadisəsi eyni dərəcədə mümkündürsə, hər iki zərdə eyni nömrənin düşmə ehtimalını tapın.

Həlli. Bütün mümkün nəticələrin sayı 36-dır. Çünki, birinci zərdə 1 düşəndə ikinci zərdə 6 mümkün nəticə baş verər və (1,1), (1,2), (1,3),(1,4),(1,5), (1,6) veriantlarından biri baş verə bilər. Beləliklə, biz bütün mümkün nəticələri aşağıdakı kimi cədvəldə göstərə bilərik:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6.1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,:6)

Bu hadisələrdən (1,1), (2,2), (3,3), (4.4), (5,5), (6,6) əlverişlidir. Ona görə zərlərin hər ikisində eyni ədədlər olan üzün düşmə ehtimalı $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}-$ dır.

Misal. Bundan əvvəlki misalda hər iki zərin üzərində yazılan ədəd qeyd edilir, və onların cəmi hesablanır. Alınan cəmlərdən hansi daha çoz ehtimallıdır?

Yuxarıdakı cədvələ əsasən belə cədvələ baxaq:

2	3	4	5	6	7
3	4	5	6	7	8
4	5	6	7	8	9
5	6	7	8	9	10
6	7	8	9	10	11
7	8	9	10	11	12

Aydındır ki, alınan cəmlər 2 ilə 12 arasındadır və 36 mümkün nəticədən ən əlverişli cəm də 7 olmasıdır. Bu hadisənin əlverişli olması 6-dır. Ona görə də onun baş verməsi ehtimalı $\frac{6}{36}=\frac{1}{6}-$dir

Misal. Yuxarıdakı misalda cəmdə 9 alınması ehtimalını tapın.

Cədvəldən göründüyü kimi bu hadisənin əlverişli olması hadisəsinin sayı 4-dür. Deməli, onun baş verməsi ehtimalı $\frac{4}{36}=\frac{1}{9}-$dir.

Oyun zərini atdıqda üzərində 1, 2, 3, 4, 5, 6 qeyd edilmiş hamısının düşəcəyini əvvəlcədən dəqiq demək olmur. Amma bu zərləri çoxlu sayda atdıqda, təcrübələr göstərir ki, onların hamısının düşməsinin sayı bərabər olur. Əgər $n-$qədər zər atılıbsa və n kifayət qədər böyük ədəddirsə, onda 1, 2, 3, 4, 5, 6 nömrələrinin hər biri təqribən, $\frac{n}{6}$ dəfə rastlaşır. Deməli, çox böyük n sayda atılışda zərin üzərindəki hər bir nömrənin çıxması sayı $\frac{n}{6}$-ya bərabərdir, yəni bütün atılmaların $\frac{1}{6}$ hissəsinə bərabərdir.

İndi tutaq ki, oyun zəri atılır və zərin 1 və 5 üzünün düşməsi oyunun udulması hesab olunar. Böyük n ədədi sayda zərin atılmasında uduşların sayının təxminən nə qədər olduğunu hesablayaq. Qeyd etdiyimiz kimi zərin hər bir üzünün düşməsi bütün atılışların təxminən $\frac{1}{6}$-i qədər olduğundan, oyunun udulması təxminən bütün atılmaların $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}-i$ qədər olacaqdır, yəni udma şansı $\frac{1}{3}$ olacaq.

Birinci halda deyəcəyik ki, zərin bir üzünün düşmə ehtimalı $\frac{1}{6}$, ikinci halda isə uduşun olma ehtimalı isə $\frac{1}{3}-$ə bərabərdir.

Başqa bir misala baxaq.

Torbada üzərlərində 0,1,2.3...,9 ədədləri yazılmış 10 şar vardır. Torbadan bir şar götürülür, çıxan ədəd qeyd edilir və sonradan torbaya qaytarılır. Hər bir şar eyni tezliklə götürüldüyü məlumdursa onda

a) tək ədəd yazılmış şarın çıxması,
b) cüt ədəd yazılmış şarın çıxması,
c) 4-ə bölünən ədədlərin çıxması,
d) 2 və 3-ə bölünməyən ədəd yazılmış şarın çıxması təxminən, götürülmələrin hansı hissəsini təşkil edir?

Hər bir şar təcrübə nəticəsində bütün götürmələrin $\frac{1}{10}$-ni təşkil edir. Tək ədədlər 1, 3, 5, 7, 9 beş ədəd olduğundan onların götürülməsi təxminən $\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$ hissə olar.

Eyni qayda ilə cüt ədədlər yazılmış şarların da çıxması halı təxminən $\frac{1}{2}$ hissə olar.

Yuxarıdakı misallarda hadisələrin sayı az olduğundan cədvəl tərtib etməsi əlverişli idi. Hadisələrin sayı çox olduqda isə bu praktiki mümkün deyil.

Eyni zamanda 3 oyun zəri atılır. Aşağıdakı hadisələrin baş vermə ehtimalını tapın.

1) Hər üç zərdə beş nömrəsinin düşməsi,
2) İki altı və bir beş düşməsi,
3) Yalnız bir beş düşməsi,
4) Heç bir üzdə beş düşmür,
5) Heç olmasa bir üzdə beş düşür,
6) Bütün üzlərdə müxtəlif ədədlərin düşməsi.

Həlli. Bütün mümkün olan nəticələri hesablayaq. Zərləri nömrələyək. Birinci zərdə düşən nömrəni birinci, II-ci zərdə düşən nömrəni ikinci, III-cü zərdə düşən nömrəni üçüncü yazsaq, onda təcrübənin nəticəsini üç hərflə işarə edə bilərik. Məsələn, (4,2,6) yazılışı birinci zərdə 4, ikincidə 2, üçüncüdə isə 6 nömrələrinin düşməsi deməkdir. Hər üç zərdə beş nömrənin düşməsi (5,5,5) kimi yazılır. Aydındır ki, birinci nömrədə duran ədəd 1,2,3,4,5,6 ədədlərindən hər biri ola bilər. Onlardan hər biri ikincinin altı nömrəsi ilə düşə bildiyindən $6\cdot 6=36$ kombinasiya mümkündür. Bunlardan hər biri də III- nun altı nömrəsi ilə düşdüyündən bütün mümkün nömrələrin sayı $6\times 6\times 6=6^3=216$ olar. Deməli, bütün mümkün nəticələrin sayı 216-dır.

1). Əlverişli hadisə 1-dir: (5,5,5). Deməli hər üç zərdə beş nömrəsinin düşmə ehtimalı $\frac{1}{216}-$dır.

2). Əlverişli hadisə (6,6,5), (6,5,6), (5,6,6). Deməli bu hadisənin baş vermə ehtimalı $\frac{3}{216}=\frac{1}{72}-$dir.

3). Əlverişli hadisəni hesablayaq. Burada beş hər üç halda qalmış bir yerdə iştirak edir və əlverişli hadisələr də, hər bir qrupda, 5 və 5-dən başqa bütün 1,2,3,4,6 ədədlər iştirak etdiyindən hər qrupda əlverişli hadisələrin sayı $5^2=25$-dir.

Qrupların sayı 3 olduğundan bütün əlverişli hadisələrin sayı $3\cdot 5^2=75$-dir. Deməli, bu hadisənin baş verməsi ehtimalı $\frac{75}{216}=\frac{15}{72}$-dir.

4). Hər üç yerdə beşdən başqa istənilən 1,2,3,4,6 ədədi düşə bilər. Deməli. əlverişli hadisələrin sayı $5^3=125$-dir. Hadisənin baş vermə ehtimalı isə $\frac{125}{216}$-dir.

5). Burada mümkün hadisələrin sayı $6^3-5^3=216-125=91$-dir. Çünki bütün nəticələrin sayı 6^3=216, heç bir üzdə beş düşməməsi isə 5^3=125-dir. Onda heç olmasa bir üzdə 5 düşməməsinin sayı 91 olar. Deməli, axtarılan ehtimal $\frac{91}{216}$-dır.

6). Bütün üzlərdə müxtəlif ədədlərin düşməsinin əlverişli nəticələrini hesablayaq. Aydındır ki, birinci yerdə istənilən altı ədəddən biri ola bilər. Bu altı variantın hər birində ikinci yerdə o ədəddən başqa istənilən 5 ədəd dura bilər. Deməli belə kombinasiyalar 6×5=30-dur. Bunlarında hər birində qalan 4 ədəd dura bilər. Deməli, əlverişli hadisələrin sayı 6×5×4=30×4=120-dir. Onda, bu hadisənin baş verməsi ehtimalı $\frac{120}{216}=\frac{5}{9}$.

HƏNDƏSİ EHTİMAL

Biz yuxarıda elə sınaqlara baxdıq ki, onların nəticələr çoxluğu sonlu və ya hesabi (diskret) çoxluqla verilir. Ehtimal nəzəriyyəsində elə sınaqlar da var ki, onların nəticələr çoxluğu kontinium güclü çoxluqla ifadə olunur.

Misal. R radiuslu dairə şəkilli hədəfin vurulması hadisəsinin nəticələr çoxluğunu belə vermək olar.

$$\Omega=\{(x,y):x^2+y^2\le R^2\}\cup\{D\}$$

Burada $D-$hədəfin vurulmaması halına uyğun nöqtədir.

Misal. Temperaturun ölçülməsi sınağına baxaq. Bu sınaq zamanı

$\Omega=[-T,T],T>0$ olar.

Belə sınaqların riyazi modelini qurmaq üçün diskret ehtimalı düsturundan istifadə etmək yararsızdır. Onların riyazi modelini

qurmaq üçün həndəsi ehtimal düsturundan istifadə olunur.

Fərz edək ki, ölçü həqiqi oxda uzunluq, müstəvidə sahə, fəzada isə həcmi olur. Onda B-nin anlayışının baş vermə ehtimalını belə təyin edək.

$$P(B)=\frac{mesB}{mes\Omega} \qquad (1)$$

Burada, $mesB-B$ çoxluğunun ölçüsüdür. (1) düsturu Ω oblastından götürülən nöqtənin B oblastına düşmə ehtimalını təyin edir. (1) düsturu həndəsi ehtimal düsturu adlanır.

Beləliklə, biz (Ω,B,P) ehtimal fəzasını alırıq. Bu ehtimal fəzası hissəciyin oblasta düşməsi məsələsinin riyazi modelini ifadə edir. Burda fərz olunur ki, hissəciyin vəziyyəti oblast üzrə müntəzəm paylanmışdır, yəni hissəciyin B oblastına düşmə ehtimalı bu oblastın ölçüsü ilə düz mütənasibdir.

Misal. Uzunluğu l olan məftil təsadüfi nöqtədən iki hissəyə sındırılır. Kiçik hissənin uzunluğunun məftilin uzunluğunun üçdə bir hissəsindən böyük olmaması hadisəsinin ehtimalını tapaq.

Həlli. Məftilin sınma nöqtəsindən onun qeyd olunmuş bir ucuna qədər olan məsafəni x ilə işarə edək. Onda ehtimalı axtarılan hadisə ancaq və ancaq $x\le\frac{l}{3}$ və ya $x\ge\frac{2}{3}$ olduqda baş verir. Buna görə axtarılan ehtimal (5) düsturuna görə $\frac{\frac{l}{3}+\frac{l}{3}}{l}=\frac{2}{3}$ olur.

Misal. Təpələri $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ nöqtələrində olan vahid kvadratın daxilində təsadüfi olaraq (ξ,η) nöqtəsi götürülür. $x^2+\xi x+\eta=0$ tənliyinin həqiqi kökü olması ehtimalını tapaq:

Həlli. Baxılan məsələ üçün

$\Omega=\{(x,y):0\le x,y\le 1\}$ və $mes\Omega=1$.

Verilmiş tənliyin həqiqi kökü olması üçün tənliyin $\xi^2-4\eta\ge 0$. Buradan $\eta\le\frac{\xi^2}{4}$ olur. Onda ehtimalı axtarılan hadisə ancaq və ancaq $y\le\frac{x^2}{4}$ olduqda, yəni (ξ,η) təsadüfi nöqtəsinin $B=\left\{(x,y):y\le\frac{x^2}{4}\right\}$ çoxluğuna daxil olduqda baş verir. Aydındır ki, $mes(B)=\int_0^1\frac{x^2}{4}dx=\frac{1}{12}$. Beləliklə, axtarılan $P(B)=\frac{1}{12}$ olur.

EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİNİN AKSİOMATİK QURULUŞU. KOLMOQOROV AKSİOMALARI

Yuxarıda qeyd etdik ki, əgər elementar hadisələr fəzası Ω sonlu və ya hesabi çoxluq olarsa, onda, onun ixtiyari alt çoxluğuna hadisə kimi baxa bilərik. Bu hadisənin ehtimalını isə diskret ehtimal düsturu ilə tapa bilərik. Əgər $\Omega=(\omega)$ kontinium güclü çoxluq olduqda isə onun ixtiyari alt çoxluğuna hadisə kimi baxa bilmərik.

Ümumi halda, tutaq ki, $\Omega=\{\omega\}$ müəyyən əsas çoxluqdur. $A=\{A:A\subset\Omega\}$. Ω-nin boş olmayan alt çoxluqlarının müəyyən sinifini işarə edək.

Tərif. Əgər

1) $\forall A\in A$ olduqda, $A=\Omega\,|\,A\in A$ olarsa.

2) sonlu sayda $A_1,A_2,...,A_n\in A$ hadisələri üçün $\bigcup_{i=1}^{n}A_i\in A$ ödənərsə, onda A -ya hadisələrin cəmi deyilir.

1-ci tərifin şərtindən alırıq ki, $\Omega\in A$, $\phi\in A$, $\bigcap_{i=1}^{n}A_i\in A$ və $A,B\in A$ olduqda, $A\setminus B\in A$ olur.

Bu münasibətlər göstərir ki, hadisələrin cəbri sonlu sayda birləşmə, kəsuşmə və tamamlama əməllərinə görə qapalı sinifdir.

Tərif. Tutaq ki, F hadisələr sinfi cəbrdir. Əgər hesabi sayda $A_1A_2,...,A_n\in\Im$ hadisələri üçün $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\in F$ isə F sinfinə hadisələrin σ-cəbri deyilir.

Aydındır ki, hadisələrin σ-cəbri həm də hadisələrin cəbridir.

2-ci tərifdən çıxır ki, $\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i\in F$. Bu isə göstərir ki, hadisələrin σ-cəbri hesabi sayda birləşmə və tamamlama əməllərinə görə qapalı sinifdir.

Tərif. $\Im$ σ-cəbr olduqda $(\Omega,\Im)$ cütünə ölçülən fəza deyilir.

Tərif. Tutaq ki, $(\Omega,\Im)$ fəzasında $P=P(A),(A\in\mathcal{F})$ funksiyası verilib. Əgər

1) $\forall A\in\mathcal{F}$ üçün $P(A)\ge 0$ (mənfi olmamazlıq aksiomu).

2) $P(\Omega)=1$ (normallaşma aksionu).

3) hesabi sayda, cüt-cüt kəsişməyən $A_1,A_2,...A_n\in\mathcal{F}$ hadisələri üçün

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

(hesabi additivlik aksiomu) aksiomları ödənərsə, onda, $P(A)$ çoxluq funksiyasına ehtimal ölçüsü deyilir və $\forall A\in\mathcal{F}$ hadisəsi üçün $P(A)$-ya A hadisəsinin baş vermə ehtimalı deyilir.

Tərif. $(\Omega,\Im,P)$ üçlüyünə ehtimal fəzası deyilir. Burada Ω- elementar hadisələr fəzası, F -hadisələrin σ-cəbri, P– ehtimal ölçüsüdür.

1),2),3) aksiomalarından ehtimal ölçüsünün mühüm xassələrini almaq olar (bax. §3. diskret ehtimal fəzası).

1),2),3) aksiomları Kolmoqorov aksiomları adlanır. Bu aksiomlar ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatikasinin əsasını təşkil edir. Öyrəndiyimiz diskret ehtimal və həndəsi ehtimal Kolmoqorov aksiomalarını ödəyirlər. Qeyd edək ki, Kolmoqorovun aksiomaları ziddiyyətsizdir, yəni onların eyni zamanda ödəyən çoxlu ehtimal fəzaları qurmaq olar. Aksiomlar sistemi ehtimal ölçüsünün verilməsini birqiymətli təmin etmir. Bu isə Kolmoqorov aksiomlar sisteminin zəngin olmasını göstərir. Bu o deməkdir ki, aksiomlar sistemində ehtimal ölçüsünü müxtəlif üsillarla vermək olar. Bu fikri aşağıdakı misalla şərh edək.

Misal. Simmetrik zər daşı atıldıqda, hər bir üzün düşmə ehtimalı

$$P_1=P_2=...P_6=\frac{1}{6} \qquad (1)$$

Burada normallaşma şərti ödənilir, yəni

$$P_1+P_2+...+P_6=1 \qquad (2)$$

İndi isə fərz edək ki, zər daşı simmetrik deyil. Forması kub şəkillidir, lakin qeyri-bircins materialdan hazırlanmışdır. Bu halda (1) bərabərliyinin ödənməsini fərz etmək düzgün olmaz. Məsələn, ola bilər ki, $P_1=P_2=P_3=\frac{1}{12}\cdot P_4=P_5=\frac{3}{8}$ olsun. Bu halda da (2) normallaşma şərti ödənilir. 1) və 2) aksiomların tezliklərin statistik dayanıqlıq xassəsi ilə izah etmək olar. A hadisəsinin nisbi tezliyinin mənfi olmamazlıq xassəsindən çıxır, belə ki, $0\le\frac{N(A)}{N}\approx P(A)$. Yəqin hadisə üçün $\frac{N(\Omega)}{N}=1$ normallaşma aksiomun qəbul edilməsini tələb edir. Tutaq ki. iki uyuşmayan A və B hadisələri verilmişdir. Onda $\frac{N(A+B}{N}=\frac{N(A)}{N}+\frac{N(B)}{N}$.

Bərabərliyindən çıxır ki,

$$P(A+B)=P(A)+P(B) \qquad (3)$$

bərabərliyi ödənməlidir. 3) bərabərliyinə ehtimal ölçüsünün sonlu additivlik xassəsi deyilir. Bu xassənin köməkliyi ilə hesabi additivlik aksiomu aşağıdakı misalda izah etmək olar.

Vahid kvadrat daxilinə təsadüfi hissəcik atılır. Bu hissəciyin əsas kvadratın daxilində yerləşən və onun tərəflərinə paralel olan kvadrata düşmə ehtimalı bu kiçik kvadratın sahəsinə bərabərdir. Sonlu additivlik xassəsinə görə hissəciyin kiçik kvadratdan təşkil olunan istənilən fiqura düşmə ehtimalını tapa bilərik. Lakin sonlu additivlik xassəsi hissəciyin daha mürəkkəb, məsələn əsas kvadrat daxilində yerləşən dairəyə düşmə ehtimalını birbaşa tapmağa imkan vermir.

Dairənin sahəsini tapmaq üçün bizə hesabi additivlik aksiomunu qəbul etmək lazım gəlir, çünki dairənin sonlu sayda kiçik kvadratlarının cəmi kimi göstərmək mümkün deyil. Kvadratların sayını artıraraq, onların sonlu sayda birləşmələrindən ibarət fiqurlarla dairəyə yaxınlaşa bilərik. Dairənin sahəsi hesabi-additivlik aksiomu vasitəsilə tapılır.

ŞƏRTİ EHTİMAL

Fərz edək ki, müəyyən bir sınaq N dəfə aparılır. Bu zaman A-hadisəsi $N(A)$ dəfə, B hadisəsi $N(B)$ dəfə, AB hadisəsi isə $N(AB)$ dəfə baş verir. Onda, əgər nisbi tezliklərin dayanıqlıq xassəsi ödənilərsə aşağıdakı münasibəti yaza bilərik:

$$\frac{N(A)}{N}\approx P(A),\ \frac{N(B)}{N}\approx P(B),\ \frac{N(AB)}{N}\approx P(AB) \quad (1)$$

Buradan alırıq

$$\frac{N(AB)}{N(B)}=\frac{N(AB)/N}{N(B)/N}\approx\frac{P(AB)}{P(B)} \quad (2)$$

$\frac{N(AB)}{N(B)}$ nisbətinə A hadisəsinin B hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində şərti nisbi tezliyi və ya A hadisəsinin B-yə nəzərən şərti nisbi tezliyi deyilir.

(2) münasibəti göstərir ki, şərtsiz nisbi tezliklər üçün dayanıqlıq xassəsi ödəndikdə, şərti nisbi tezliklər üçün də dayanıqlıq xassəsi ödənilir. (2) münasibəti aşağıdakı tərifi verməyə əsas verir.

Tərif. A hadisəsinin B hadisəsinin baş vermə şərti daxilində (qısaca, A hadisəsinin B-yə nəzərən) şərti ehtimalı belə təyin olunur.

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)},\ (P(B)>0) \quad (3)$$

$P(A|B)$ şərti ehtimal üçün bəzən $P_B(A)$ işarəsindən istifadə olunur.

Əgər $P(A)>0$ olarsa, onda B hadisəsinin A-ya nəzərən şərti ehtimalından da danışa bilərik.

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)},\ (P(A)>0) \quad (4)$$

Əgər (3)-də $B-$ hadisəsini qeyd etsək və $(\Omega,\Im,P)$ ehtimal fəzası üçün $A\in\Im$ olarsa, onda $P(A/B)$ şərti A hadisəsinin funksiyası kimi yeni $(\Omega,\Im,P(\cdot/B))$ fəzası təyin edir. Bunu göstərmək üçün $P(\cdot|B)$-nin 1),2),3) Kolmoqorov aksiomlarını ödəməsini yoxlamaq lazımdır. Bunu isə etmək çətin deyil, belə ki, (3)-ə əsasən

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\ge 0,\ P(\Omega|B)=1.$$

Əgər $A_iA_j=\phi, i\ne j$, hadisələri üçün

$$P\left(\sum_i A_i|B\right)=\frac{P\left(\sum_i A_iB\right)}{P(B)}=\frac{\sum_i P(A_iB)}{P(B)}=\sum_i P(A_i|B)$$

alırıq. (3)-dən alırıq

$$P(AB)=P(B)P(A\setminus B) \quad (5)$$

(5) düsturu ehtimalların vurma teoremi adlanır.

Misal. Qutuda M sayda ağ və $N-M$ sayda qara şar var. Təkrarsız sxem üzrə ardıcıl olaraq iki şar seçilir. Bu şarların ağ olması ehtimalını tapaq. Bu ehtimalı (5) vurma teoreminə görə tapmaq olar. A ilə 1-ci şarın ağ, $B-$lə 2-ci şarın ağ olması hadisəsini işarə edək. Aydındır ki, $P(A)=\frac{M}{N}, P(B\setminus A)=\frac{M(M-1)}{N(N-1)}$.

Ehtimalların vurma teoremi daha ümumi şəkildə belədir.

Teorem (Vurma teoremi).

Tutaq ki, $A_1,A_2,\dots A_n$ hadisələri üçün $P(A_1\dots A_{n-1})>0$. Onda

$$P(A_1\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)\times$$
$$\times P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1\dots A_{n-1}) \quad (6)$$

İndi isə şərti ehtimalın tətbiqinə aid aşağıdakı iki düstur ilə tanış olaq.

Tərif. Tutaq ki, $A_1,A_2\dots A_n\in\Im$ hadisələri verilib və aşağıdakı şərtlər ödənilir: 1) $A_i\cap A_j=\phi, i\ne j$, 2) $A_1+A_2+\dots+A_n=\Omega$.

Onda, $\{A_1,A_2,\dots,A_n\}$ küllüsünə uyuşmayan hadisələrin tam qrupu və ya Ω fəzasının bölgüsü deyilir.

Teorem. (Tam ehtimal düsturu). Tutaq ki, Ω çoxluğunun $A_1,A_2\dots A_n\in\Im$ bölgüsü verilib və $P(A_i)>0, i=\overline{1,n}$ ş onda

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i). \quad (7)$$

İsbatı. Bölgünün tərifinə görə

$$B=B(A_1+A_2\dots++A_n)=BA_1+BA_2+\dots BA_n.$$

Sonlu additivlik xassəsinə və vurma teoreminə görə

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i).$$

Tam ehtimal düsturu sadə formaya malik olsa da, ehtimal nəzəriyyəsinin bir çox fundamental nəticələrinin aşkar olunmasında mühüm rol oynayır.

Misal. Misal 1-də B={2-ci çıxarılan şarın ağ olması} hadisəsinin ehtimalını tapaq. Ehtimalın klassik tərifinə görə

$$P(A)=\frac{M}{N}, P(\overline{A})=\frac{N-M}{N},$$
$$P(B|A)=\frac{M-1}{N-1}, P(B\setminus\overline{A})=\frac{M}{N-1}$$

olur. Tam ehtimal düsturu (7)-ə əsasən alarıq.

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{M}{N}\times$$
$$\times\frac{M-1}{N-1}+\frac{N-M}{N}\cdot\frac{M}{N-1}=\frac{M}{N}.$$

Beləliklə $P(A)=P(B)$ alırıq. Analoji qayda ilə göstərə bilərik ki, şarları təkrarsız sxem üzrə qutudan çıxartdıqda ağ şarın istənilən addımda çıxma ehtimalı eyni olur.

Bu misal göstərir ki, düzgün təşkil olunmuş bilet çəkmədə bütün iştirakçıların şansı onların hansı növbədə olmasından asılı olmayaraq eynidir.

Teorem. (Bayes düsturu). Tutaq ki, $A_1,A_2,\dots A_n\in\Im$ hadisələri bölgü təşkil edir. Onda , ixtiyari

$B\in\Im, P(B)>0$ hadisəsi üçün aşağıdakı düstur doğrudur.

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)},\ i=\overline{1,n} \quad (8)$$

İsbatı. Vurma düsturuna görə

$$P(A_iB)=P(A_i)P(B|A_i)=P(B)P(A_i|B)$$
$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

Tam ehtimal düsturunu $P(B)-$yə tətbiq etsək, (8) düsturunu almış olarıq.

Bayes düsturunu tətbiqi məsələlərdə aşağıdakı kimi şərh etmək olar. $A_i, i=\overline{1,n}$ hadisələrinə hipotezlər və B hadisəsinə isə müəyyən eksperimentin (təcrübənin) nəticəsi kimi baxaq. $P(A_i)$ ehtimalları təcrübənin aparılmasına qədər hesablanmış apriori ehtimallar, $P(A_iB)$ şərti ehtimallar isə eksperimentin nəticəsi məlum olduqdan sonra hesablanmış apasterior ehtimallar adlandırılır. Bayes düsturu $P(A_i)$ apriori ehtimalların və $P(B|A_i)$ şərti ehtimalların köməyi ilə $P(A_i|B)$ ehtimallarını hesablamağa imkan verir.

Misal. Fərz edək ki, verilmiş iki qutunun hər birində N sayda kürəcik var. Birinci qutuda M_1, ikinci qutuda isə M_2 sayda ağ rəngli kürəcik var. Təsadüfi olaraq bir qutu seçilir və ondan təkrarlı sxem üzrə n dənə kürəcik seçilir. Bu kürəciklərin hamısının ağ olması hadisəsini B ilə işarə edək.

A_1 ilə birinci qutunun, A_2 ilə isə ikinci qutunun götürülmə hadisələrini işarə edək. Onda, $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$ olur. Asanlıqla alırıq ki, $P(B/A_k)=\left(\frac{M_k}{N}\right)^n$, $k=1,2$.

Bayes düsturu apasterior ehtimalları tapmağa imkan verir:

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)}=$$
$$=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{M_k}{N}\right)^n}{\frac{1}{2}\left(\frac{M_1}{N}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{M_2}{N}\right)^n}=\frac{M_k^n}{M_1^n+M_2^n}=k=1,2.$$

Əgər $M_2<M_1$ olarsa, onda $n\to\infty$ olduqda $P(A_1|B)=\frac{1}{1+\left(\frac{M_2}{M_1}\right)^n}\to 1$.

Beləliklə, eksperimentin B nəticəsinə görə $P(A_1)$ apriori ehtimalları ilə $P(A_1|B)$ apasteriori ehtimalları bir-birindən ciddi fərqlənirlər.

ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR

Bu bölmədə verəcəyimiz asılı olmazlıq anlayışı ehtimal nəzəriyyəsində əsas anlayışlardan biri hesab olunur.

Təsadüfi hadisələrin asılı olmazlıq xassəsi ehtimal nəzəriyyəsinin özünə məxsusluğunu müəyyən edir. Məhz asılı olmazlıq anlayışı Ehtimal nəzəriyyəsini ölçülər nəzəriyyəsindən fərqləndirir. Hadisələr arasında asılı olmazlıq emprik olaraq, səbəbə görə asılı olmazlıq kimi ifadə olunur. Məsələn, bir hadisənin baş verməsi digər hadisənin baş verməsindən asılı deyilsə (yəni,

onlar arasında funksional və səbəbi asılılıq yoxdursa), onda belə hadisələrə asılı olmayan və ya səbəbə görə asılı olmayan hadisələr deyilir. Səbəbə görə asılı olmayan hadisələrin riyazi tərifini vermək üçün əvvəlcə fərz edək ki, verilmiş $A, B \in \mathcal{F}$ hadisələrinin hər hansı birinin ehtimalı, məsələn $P(B) > 0$ olur, onda $P(A|B) = P(AB)/P(B)$ şərti ehtimalından danışmaq olar, əgər $P(A|B) = P(A)$ olarsa, yəni şərti ehtimal şərtsiz ehtimala bərabər olsa, onda deyirlər ki, A hadisəsi B – dən asılı deyil. Əgər eyni zamanda $P(A) > 0$ münasibəti də ödənərsə, onda alarıq ki,

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = P(B)\frac{P(A/B)}{P(A)} = P(B).$$

Yəni, B hadisəsi də A hadisəsindən asılı deyil. Buradan da çıxır ki, hadisələrin asılı olmazlıq xassəsi simmetrikdir. Yəni, əgər B hadisəsi A – dan asılı deyilsə, onda eyni zamanda hökm etmək olar ki, A hadisəsi də B – dən asılı deyil. Əgər A hadisəsi B – dən asılı deyilsə, yəni $P(A|B) = P(A)$ olarsa, onda alarıq ki,

$$P(AB) = P(B)P(A \setminus B) = P(A)P(B).$$

Asanlıqla göstərmək olar ki, $P(AB) = P(A)P(B)$ olduqda $P(A|B) = P(A)$ olur.

Qeyd edək ki, $P(AB) = P(A)P(B)$ bərabərliyi $P(A) = 0$ olduqda da ödənir. Doğrudan da $P(A) = 0$ olsa, onda $AB \subseteq A$ və $P(AB) \le P(A) = 0$ olduğundan $P(AB) = 0$ olur.

Beləliklə, iki hadisənin asılı olmaması üçün aşağıdakı tərifi vermək olar.

Tərif. Əgər

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad (1)$$

olarsa, onda A və B hadisələrinə asılı olmayan hadisələr deyilir. Əgər (1) bərabərliyi ödənmirsə, onda hadisələr asılıdır deyilir.

(1) ifadəsi iki hadisənin asılı olmamasını ifadə edir. İkidən daha çox sayda hadisələrin asılı olmamasının tərifini verək.

Fərz edək ki, $A_1, A_2, \ldots A_n \in \mathfrak{I}$ hadisələri verilib. Əgər bu hadisələrdən ixtiyari ikisi asılı deyilsə, onda deyirlər ki, $A_1, A_2, \ldots A_n$ hadisələri cüt-cüt asılı deyil.

Tərif. Əgər istənilən $1 \le l_1 < l_2 < \ldots < l_m \le n$ indeksləri üçün $P\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{l_k}\right) = \prod_{k=1}^{m} P(A_{l_k})$, $2 \le m \le n$. Bərabərliyi ödənərsə, onda $A_1, A_2, \ldots A_n$ hadisələrinə asılı olmayan və ya küllüyyatca asılı olmayan hadisələr deyilir.

2-ci tərifdən görünür ki, asılı olmayan $A_1, \ldots, A_n$ hadisələrin istənilən $A_{l_1} \ldots A_{l_k}$ altçoxluğu asılı olmayan hadisələrdən ibarət olur.

Əgər r=2 olarsa, biz cüt-cüt asılı olmazlığı alarıq. Bu isə o deməkdir ki, hadisələrin külliyyatca asılı olmazlığından onların cüt-cüt asılı olmazlıq xassəsi çıxır. Bu faktın tərsi isə ümumiyyətlə doğru deyil. Bu, aşağıdakı misaldan görünür.

Misal. $\{2,3,5,30\}$ ədədlər çoxluğundan təsadüfi bir ədəd götürülür. Aşağıdakı təsadüfi hadisələrə baxaq:

$A_2 = \{götürülmüş\ ədəd\ 2\text{-}yə\ bölünür\}$,

$A_3 = \{götürülmüş\ ədəd\ 3\text{-}ə\ bölünür\}$,

$A_5 = \{götürülmüş\ ədəd\ 5\text{-}ə\ bölünür\}$ (göstərək ki, cüt-cüt asılı deyil, lakin küllüyyatca asılıdırlar. Aydındır ki, $P(A_2) = P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{2}$.

Göstərək ki, A_2 və A_3 hadisələri asılı deyil. Aydındır ki, tərifə görə $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$ olmalıdır.

$$P(A_2A_3) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = P(A_2)P(A_3)$$

Eyni qayda ilə qalan hadisələrin də cüt-cüt asılı olmadığını göstərmək olar. Digər tərəfdən $\frac{1}{4} = P(A_2A_3A_5) \ne P(A_2)P(A_3)P(A_5) = \frac{1}{8}$ münasibəti göstərir ki, bu üç hadisə külliyyatca asılıdır.

Teorem. 1) Əgər A və B hadisələri asılı deyilsə, onda B və $\overline{A}$ hadisələri də asılı deyil.

2) Əgər A_1 və B, A_2 və B hadisələri asılı deyilsə və $A_1A_2 = \phi$ olarsa, onda $A_1 + A_2$ və B hadisələri asılı deyillər.

$A_i, i = 1,2$ və B hadisələrinin asılı olmazlığından və $A_1A_2 = \phi$ olduğundan yaza bilərik.

$P((A_1 + A_2)B) = P(A_1B) + P(A_2B) = P(A_1)P(B) + P(A_2)P(B) = (P(A_1) + P(A_2))P(B)$, yəni B və $A_1 + A_2$ hadisələri asılı deyillər.

DİSKRET TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR

Fərz edək ki, $(\Omega, \mathfrak{I}, P)$ diskret ehtimal fəzasıdır, yəni, $\Omega = \{\omega\}$ sonlu və ya hesabi çoxluqdur. Bu halda $\omega \in \Omega$ elementar hadisəsindən asılı olan istənilən $\xi = \xi(\omega)$ ədədi funksiyasına təsadüfi kəmiyyət deyəcəyik. Təsadüfi kəmiyyətə aid misallara baxaq.

Misal. Metal pulun iki dəfə atılması eksperimentində "G" üzün düşməsi sayını $\xi = \xi(\omega)$ işarə edək, burada

$$\omega \in \Omega = \{GG, GP, PG, PP\}.$$

Bu təsadüfi kəmiyyəti cədvəllə ifadə etsək.

ω	GG	GP	PG	PP
ξ	2	1	1	0

Əgər təsadüfi kəmiyyət sonlu sayda qiymətlər alarsa, onda belə təsadüfi kəmiyyətə sadə təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Sadə təsadüfi kəmiyyət ailəsinin mühüm bir üzvü indikator anlayışı ilə tanış olaq.

Tərif. A hadisəsinin indikatoru belə təyin olunur: $J_A = J_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$. Bu o deməkdir ki, əgər sınaq zamanı A hadisəsi baş verirsə, onun indikatoru 1, əks halda 0 qiymətini alır.

Hadisənin indikatorunun aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

1) $J_\Omega = 1$, $J_\varnothing = 0$,

2) $A \subset B$ olarsa, $J_A \le J_B$,

3) $J_{AB} = J_A \cdot J_B$,

4) $A \cap B = \phi$ olarsa, $J_{A+B} = J_A + J_B$,

5) $J_{\overline{A}} = 1 - J_A$.

Fərz edək ki, $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti $x_1 x_2 \ldots$ qiymətləri alır və fərz edək ki, $x_i \ne x_j$, $i \ne j$. Onda $A_k = \{\omega : \xi = x_k\}$ hadisələri bölgü əmələ gətirir, belə ki, $\sum_k A_k = \Omega$ olur. Onda, J_{A_k} indikatorların köməyi ilə $\xi = \xi(\omega)$- ni aşağıdakı kimi yazaq:

$$\xi = \sum_k x_k J_{A_k} \qquad (1)$$

(1) bərabərliyinin sağ və sol tərəfi $\omega \in A_1$ – lər üçün x_1 qiymətini alır. Təsadüfi kəmiyyətlərin əsas xarakteristikalarından biri onun ehtimal paylanmasıdır.

Tərif. $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanması $P(\xi \in B) = P(\omega : \xi(\omega) \in B)$ $(B \in \beta(R))$ ehtimalına deyilir. Aydındır ki,

$$P(\xi \in B) = \sum_{k:\, x_k \in B} P(\xi = x_k) \qquad (2)$$

Təsadüfi kəmiyyətin ehtimal paylanmasına paylanma qanunu da deyilir. (2) paylanma qanunu verilmiş təsadüfi kəmiyyətin aldığı $x_1, x_2 \ldots$ qiymətlərilə və bu qiymətlərin alınma ehtimalları $P_k = P(\xi = x_k), k \ge 1$ ilə təyin olunur.

Çox hallarda təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanunu (x_k, P_k) $(k \ge 1)$ cütlərlə verilir. Burada x_k təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymət, P_k bu qiymətə uyğun ehtimaldır.

Praktiki məsələlərdə paylanma qanunu aşağıdakı cədvəldə verilir:

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	....
P_1	P_2	...	P_{n-1}	P_n	....

$$\left(\sum_k P_k = 1\right).$$

Yuxarı sıra təsadüfi kəmiyyətin aldığı müxtəlif qiymətlərdən ibarətdir. Aşağı sıradakı ədədlər isə $P_k > 0, \sum_k P_k = 1$ şərtini ödəyən ehtimallardır. A hadisəsinin J_A indikatorunun paylanma qanunu cədvəldə belə verilir.

0	1
1–P(A)	$P(A)$

Qeyd edək ki, hər bir təsadüfi kəmiyyətə bir paylanma qanunu uyğundur. Eyni bir paylanma qanununa isə müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlər malik ola bilərlər. Məsələn, əgər A və B hadisələri müxtəlifdirsə, onda $P(A) = P(B)$ ola bilər və deməli müx-

təlif J_A və J_B təsadüfi kəmiyyətləri (indikatorları) eyni bir paylanma qanununa malik olurlar.

Ehtimal nəzəriyyəsində çox vaxt uyğun ehtimal fəzasını və $\xi = \xi(\omega)$ funksiyasını vermədən (2) paylanma qanununa tabe olan təsadüfi kəmiyyət haqqında danışırlar. Bu halda fərz olunur ki, müəyyən bir $(\Omega, \Im, P)$ ehtimal fəzası və bu fəzada təyin olunmuş $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti var ki, onun paylanma qanunu (2)-lə və ya göstərilən cədvəldə verilir. Ehtimal fəzası tədqiq olunan məsələnin həll sxeminə görə seçilir. (2) paylanma qanununa uyğun sadə ehtimal fəzasını vermək üçün elementar hadisələr fəzasını $\Omega = \{x_1, x_2 ...\}$ götürək və $\omega = x_i$ elementar hadisələrin ehtimallarını $P(\omega) = P(x_i) = P_i$ qəbul edək. Uyğun $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti isə $\xi(x_i) = x_i$ kimi təyin olunur.

RİYAZİ STATİSTİKA NƏDİR?

Statistika elə təsadüfi dəyişiklikləri (hadisə və prosesləri) öyrənir ki, onların birqiymətli (birmənalı) təsvirini və proqnozunu qabaqcadan vermək mümkün olmur.

Məsələn, müəyyən zaman aralığında ölkədə doğulan və ölən insanların dəqiq sayını qabaqcadan söyləmək mümkün deyil, müəyyən zaman aralığında ailənin gəlirini və xərcini qəpik dəqiqliyi ilə qabaqcadan demək olmaz. Bundan əlavə, yolda 10 qəpik metal pulun tapılmasını, lotoreyada uduşun olmasını, xəstəlikdən müəyyən qədər pulun xərclənməsini, səhv qərarın qəbul olunmasını, birjalarda böhranın nəticələrini və s. qabaqcadan birmənalı söyləmək olmur.

İnsan həyatında, cəmiyyət və onun sivilizasiyasında təsadüfi faktorların oynadığı rolu inkar etmək və ya nəzərə almamaq mümkün deyil. Cəmiyyətin dayanaqlı və həyatın inkişafını proqnozlu etmək üçün təsadüfi faktorların rolunu və təsir imkanlarını azaltmaq lazımdır. Onların rolunu tamamilə aradan qaldırmaq mümkün deyil və bu cəhdlər həmişə uğursuz olmuşdur.

Həqiqi statistik məlumatlara malik olmadan və onların statistik metodlarla təhlilini (analizini) aparmadan müasir planlaşdırma, idarəetmə və proqnozlaşdırma məsələlərini həll etmək mümkün deyil.

Müasir dövrü təhlil etmək və gələcəyə baxmaq məsələsi həmişə aktual olmuşdur. Bu işi görmək üçün müxtəlif üsullar tədbiq edilir. Bu məsələlərdə meydana çıxan təsadüfi faktorların təsvir edilməsi və öyrənilməsi statistika elminin əsasını təşkil edir. Müasir statistikada riyaziyyat elminin anlayış və metodlarından geniş istifadə edilir. Bu o deməkdir ki, real situasiya (vəziyyət) stoxastik (ehtimallı) sxemlərlə (modellərlə) əvəz olunur və ehtimal nəzəriyyəsinin metodları ilə təhlil edilir. Statistik müşahidələrin nəticələrinin analizini aparmaq üçün ciddi riyazi metodların tədbiqi müasir statistikada geniş yayılmışdır.

Qeyd edək ki, istənilən statistik məlumatlar həmişə tam və dəqiq olmur. Bu tam və dəqiq olmayan statistik məlumatları analiz etməklə tədqiq olunan obyekt haqqında əsaslı və düzgün nəticələri əldə etmək statistika elminin əsas məsələləridir.

Praktika göstərir ki, statistika bu tipli məsələləri uğurla həll edir.

Orta məktəbin müəllimləri və yuxarı sinif şagirdləri üçün nəzərdə tutulmuş "Riyazi statistika nədir" metodik vəsaitdə riyazi statistikanın əsas anlayışları və məsələləri sadə şəkildə şərh olunur. Əvvəlcə ehtimal nəzəriyyəsindən lazım olan zəruri anlayışlar vəsaitin 1-ci fəslində şərh olunur. II-ci fəslində riyazi statistikanın əsas anlayışları və məsələləri orta məktəb səviyyəsinə uyğun olaraq şərh edilir.

Hesab edirik ki, orta məktəb üçün ilk dəfə yazılan bu vəsait riyazi statistikanın əsas anlayışları, məsələləri və metodları haqqında təsəvvür yaradacaq. Praktikada meydana çıxan statistik məsələlərin riyazi modelini qurmaq və tədqiq etmək bacarığını şagirdlərə aşlamaq prosesində bu vəsait müsbət rol oynayacaqdır.

Kitab orta məktəb şagirdləri, müəllimlər və riyaziyyatı sevənlər üçün nəzərdə tutulur.

ELEMENTAR EHTİMAL NƏZƏRİYYƏSİ

Bu fəsildə biz riyazi statistikanın anlayış və məsələlərini vermək üçün ehtimal nəzəriyyəsinin əsas anlayışları ilə tanış olacağıq.

SONLU NƏTİCƏLİ TƏSADÜFİ SINAQLARIN EHTİMAL MODELİ

Sonlu sayda müxtəlif $\omega_1, ..., \omega_N$ mümkün nəticələrinə malık müəyyən bir stoxastik (təsadüfi) eksperimentə baxaq. Bu nəticələrin real təbiəti bizi maraqlandırmır, əsas cəhət ondan ibarətdir ki, onlarda say sonlu olur və N-ə bərabərdir.

$\omega_1 ..., \omega_N$ nəticələrinə elementar hadisələr deyilir. Onların küllüsü $\Omega = \{\omega_1, ..., \omega_n\}$-çoxluğu elementar hadisələr fəzası adlanır.

Stoxastik eksperimentlərin riyazi modelinin qurulmasında birinci addım elementar hadisələr fəzasının verilməsindən ibarət olur.

Elementar hadisələr fəzasının strukturunun təsvirinə aid aşağıdakı misallara baxaq.

Misal. Metal pulun bir dəfə atılmasında uyğun Ω elementar nəticələr fəzası iki – G – "gerb" və P - "pul" nəticələrindən ibarət olur: $\Omega = \{G, P\}$.

Misal. Metal pulun n dəfə atılmasına uyğun Ω fəzası isə belə olur:

$\Omega = \{\omega : \omega = \{\omega_1, \omega_2 ..., \omega_n\}, \omega_i = P$ və ya $G\}$

Ω-nin elementlərinin sayı $|\Omega| = 2^n$ olur.

Misal. Fərz edək ki, əvvəlcə metal pul atılır. Əgər "G" üzü düşərsə, onda altı üzlü zər daşı (1,2,3,4,5,6 rəqəmlərlə nömrələnmiş) atılır, əgər "P" üzü düşsə, onda metal pul yenidən atılır. Bu eksperimentə uyğun Ω elementar hadisələr fəzası belə olur:

$$\Omega = \{G1, G2, G3, G4, G5, G6, PG, PP\}$$

İndi isə təsadüfi hadisə (qısaca hadisə) anlayışını verək.

Adətən, sınağın nəticəsində konkret hansı elementar hadisənin (ω) baş verməsi ilə deyil, onun bu və ya digər elementar hadisələr (nəticələr) çoxluğuna daxil olması ilə maraqlanırlar.

Əgər $A \subseteq \Omega$ çoxluğu üçün eksperimentin aparılma şərtləri daxilində onun ω elementar nəticəsinə görə "$\omega \in A$" və ya "$\omega \notin A$" demək mümkün olarsa, onda A çoxluğuna hadisə deyəcəyik. Məsələn, tutaq ki, metal pul üç dəfə atılır. Bu halda Ω elementar hadisələr fəzası 8 dənə elementar nəticədən ibarət olur:

$$\Omega = \{GGG, GGP, GPP, PGP, PPG, GPG, PGG, PPP\}$$

Əgər bizim bütün üç dəfə atılmaların nəticəsini qeyd etmək (yazmaq, ölçmək) imkanımız olsa, onda:

$$A = \{GGG, GGP, GPG, PGG\}$$

çoxluğu ən azı iki "G" üzünün düşməsi hadisəsi olur. Əgər biz yalnız 1-ci atılmanın nəticəsin qeyd edə biliriksə, onda A çoxluğuna hadisə kimi baxa bilmərik, çünki konkret $\omega \in \Omega$ nəticəsinin $\omega \in A$ ilə ya $\omega \notin A$ olmasını nə təsdiq, nə də inkar edə bilmərik.

Beləliklə, təsadüfi hadisəyə elementar nəticələrin müəyyən bir çoxluğu kimi baxa bilərik. Çoxluqlar üzərində aparılan birləşmə $(\cup)$, kəsişmə $(\cap)$ və tamamlama əməllərini hadisələr üzərində apara bilərik.

İki A və B çoxluqlarının birləşməsi elə $c = A \cup B$ çoxluğuna deyilir ki, bu çoxluğun hər bir elementi ya A–ya, ya da B–daxil olur, yəni

$$C = A \cup B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ və ya } \omega \in B\}$$

Ehtimal nəzəriyyəsi dilində $C = A \cup B$ elə hadisədir ki, bu hadisə A və B hadisələrindən heç olmasa birinin baş verilməsindən ibarət olur.

İki A və B çoxluqlarının kəsişməsi elə $C = A \cap B$ və ya $C = AB$ çoxluğuna deyilir ki, bu çoxluğun hər bir elementi həm A-ya və həm də B-yə daxil olur, yəni:

$$C = A \cap B = \{\omega \in \Omega : \omega \in A \text{ və } \omega \in B\}$$

Ehtimal nəzəriyyəsi dilində $A \cap B$ çoxluğu A və B hadisələrinin eyni zamanda baş verməsindən ibarət olan hadisədir.

Məsələn, $A = \{GG, GP, PG\}$

və $B = \{PP, PG, GP\}$ olarsa

$$A \cup B = \{GG, GP, PG, PP\}$$

$$A \cap B = \{PG, GP\}$$

olur.

İki A və B çoğluqlarının fərqi elə $C = A \setminus B$ çoxluğuna deyilir ki, bu çoxluğun hər bir elementi A-ya daxil olur və B-yə daxil olmur, yəni $C = A \setminus B = \{\omega \in \Omega : \omega \in$ və $\omega \notin B\}$.

$\bar{A} = \Omega \setminus A$ fərqinə A çoxluğunun tamamlayıcısı deyilir.

Ehtimal nəzəriyəsi dilində $\overline{A}$ çoxluğu A hadisəsinin baş verməməsi və ya inkar hadisəsidir.

Məsələn, $\{GG, GP, PG\}$ heç olmasa bir dəfə "G" üzünün düşməsi hadisəsinin inkar hadisəsi $\overline{A} = \{PP\}$ olur, yəni hər dəfə "P" üzünün düşməsi hadisəsidir.

Aydındır ki. A və $\overline{A}$ çoxluqlarının ortaq elementi olmur və deməli $A \cap \overline{A} = \phi$. ($\phi$ – boş çoxluqdur). Ehtimal nəzəriyyəsində ϕ çoxluğu mümkün olmayan hadisədir, Ω çoxluğu isə zəruri və ya yəqin hadisədir.

$AB = \phi$ olduqda $A \cup B$ birləşməsinə A və B çoxluqlarının cəmi deyilir və $A + B$ kimi yazılır.

Əgər $A \subseteq \Omega$ altçoxluqlarının müəyyən bir A_0 sisteminə baxsaq, onda $\cup, \cap$, və $\setminus$ əməllərinin köməyi ilə A_0 sistemindən yeni bir çoxluqlar sistemini almaq olar ki, bu sistemin hər bir çoxluğu hadisə olur.

Bu hadisələr sisteminə yəqin (Ω) və mümkün olmayan (ϕ) hadisələrini daxil etsək, alınan A hadisələr sistemi cəbr əmələ gətirir, yəni

1) $\Omega \in A$

2) Əgər $A \in A$ və $B \in$ A olarsa, onda $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ hadisələri A-ya daxil olur.

Hadisələr cəbrinə aid aşağıdakı misallara baxaq:

1) $\{\Omega, \phi\}$ – sistemi yəqin (Ω) və mümkün olmayan (ϕ) hadisədən ibarətdir. Bu sistem trivial cəbr (və ya ən kiçik cəbr) adlanır.

2) $\{A, \overline{A}, \Omega, \phi\}$ - sistemi A hadisəsinin doğurduğu cəbr adlanır.

3) $\{A : A \subseteq \Omega\}$ – Ω – nın bütün altçoxluqlarının sistemidir (ϕ çoxluğu da daxil olmaqla).

Bu sistem maksimal cəbr adlanır.

Beləliklə, biz hələlik sonlu sayda nəticələri olan stoxastik eksperimentin ehtimal modelini qurmaq üçün iki addım atmışıq: Ω elementar hadisələr fəzası təyin olunub və onun hadisə adlandırılan müəyyən altçoxluqlarının sistemi A- cəbri qurulub. İndi isə üçüncü – axırıncı addıma keçək və hər bir $\omega_i \in \Omega, i = \overline{1, N}$, elementar hadisəsinin "çəkicini"-ehtimalını- $P(\omega_i)$ ədədini təyin edək. Fərz edəcəyik ki, aşağıdakı sətirlər ödənilir.

1) $P(\omega_i) \geq 0$ (mənfi olmamazlıq)

2) $P(\omega_1) + \ldots + P(\omega_N) = 1$ (normallaşma).

Aydındır ki, bu iki sətirdən çıxır ki,

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1, \quad i = \overline{1N}$$

İstənilən $A \in$ A hadisəsinin ehtimalını belə təyin edək:

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i) \qquad (1)$$

Beləliklə, Ω sonlu nəticələr çoxluğuna və A hadisələr cəbrinə malik stoxastik eksperimentin ehtimal modeli (Ω, A, P) üçlüyü ilə verilir, burada $\Omega = \{\omega 1, \ldots, \omega_N\}$. A – Ω – nin müəyyən altçoxluqlarının cəbri və $P = \{P(A) : A \in A\}$ hadisələrin ehtimallar küllüsidir.

(Ω, A, P) üçlüyünə ehtimal fəzası da deyilir.

(1) düsturundan ehtimalın aşağıdakı xassələri çıxır:

$$P(\phi) = 0, \quad P(\Omega) = 1$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Xüsusi halda əgər $A \cap B = \phi$ olarsa, onda

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

və $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

Konkret müəyyən edilmiş stoxastik eksperimentlərin ehtimal modellərinin qurulması zamanı Ω elementar hadisələr fəzasını və hadisələrin A cəbrini qurmaq mürəkkəb məsələ deyil. Beləki, elementar ehtimal nəzəriyyəsində öyrənilən stoxostik eksperimentlər (sınaqlar) çoxlu sayda (və ya ən çoxu hesabi sayda) elementar nəticələrə malik olar. Bu halda A cəbri olaraq Ω – nın bütün alt çoxluqlar çoxluğu götürülür. Ehtimal modelin qurulmasında çətin məsələ elementar hadisələrin $P(\omega_i)$ ehtimallarının verilməsi ilə bağlı ortaya çıxır. Bu ehtimalların verilmə qaydası ehtimal nəzəriyyəsinin məsələsi deyil. Bu, riyazi statistikanın məsələsidir.

Ehtimal nəzəriyyəsində əsas məsələ bu verilən $P(\omega_i)$ nəzəri ehtimalların köməyi ilə A-ya daxil olan mürəkkəb hadisələrin ehtimallarının tapılmasıdır.

Yuxarıda deyilən çətinliklə əlaqədar qeyd edək ki, çoxlu sayda praktiki hallar var ki, bu hallarda elementar nəticələr eyni imkanlı olurlar. Buna görə

$$P(\omega_1) = \ldots = \rho(\omega_N) = \frac{1}{N}, \quad (1 < N < \infty) \text{ olur.}$$

Onda istənilən $A \in$ A hadisəsi üçün (1) düsturundan

$$P(A) = \frac{|A|}{N}, \qquad (2)$$

alınır, burada $|A|$ – ilə A hadisəsini təşkil edən elementar hadisələrin sayı işarə edilmişdir. (2) düsturu klassik ehtimal düsturu adlanır.

Aydındır ki, klassik ehtimalın hesablanması məsələsi $|A|$-nın hesablanması məsələsinə gətirilir.

ŞƏRTİ EHTİMAL. ASILI OLMAYAN HADİSƏLƏR

Hadisənin klassik ehtimalı aşağıdakı suala cavab tapmağa imkan verir: Qutuda M sayda kürəcik var, onlardan M_1 dənəsi ağ, M_2-dənəsi isə qara rəngə malikdir. Qutudan təsadüfi götürülən kürəciyin ağ olması hadisəsinin (bu hadisəni A ilə işarə edək) ehtimalını tapın.

Aydındır ki, $P(A) = \frac{M_1}{M}$ olur.

İndi isə belə suala baxaq: qutudan 1-ci götürülən kürəciyin ağ olması (A hadisəsi) şərti daxilində 2-ci götürülən kürəciyin ağ olması (B hadisəsi) hadisəsinin ehtimalını tapın.

Burada fərz olunur ki, götürülən kürəcik qutuya qaytarılmır.

Aydındır ki, bu məsələnin həllində aşağıdakı kimi mülahizə aparmaq olar: əgər 1-ci götürülən kürəcik ağdırsa, onda 2-ci görülən kürəcik M-1 sayda kürəciklər içərisində seçilir və burada $M_1 - 1$ sayda ağ kürəcik qalır. Buna görə bizi maraqlandıran şərti ehtimalı $\frac{M_1 - 1}{M - 1}$ bərabər hesab etmək məqsədəuyğundur.

İndi şərti ehtimalın intuisiya ilə uzlaşan tərifini verək.

Tutaq ki, sonlu (Ω, A, P) ehtimal fəzası və $A \in$ A hadisəsi verilmişdir, $P(A) > 0$.

Tərif. $B \in$ A hadisəsinin A hadisəsinə nəzərən (daha dəqiq desək A hadisəsinin baş verməsi şərti daxilində) şərti ehtimalı (onu $P(B|A)$ kimi işarə edilir).

$\frac{P(AB)}{P(B)}$ nisbətinə dəyişər, yəni

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ olur.}$$

Ehtimalın klassik tərifinə görə,

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$, $P(AB) = \frac{|AB|}{|\Omega|}$ olduğundan

$P(B|A) = \frac{|AB|}{|A|}$ olur.

Şərti ehtimalın aşağıdakı xassələrini qeyd edək.

$$P(A|A) = 1, \quad P(\phi|A) = 0, \quad P(\Omega|A) = 1$$

əgər $A \subseteq B$ olarsa, onda $P(B|A) = 1$ olur.

Əgər $B_1 \cap B_2 = \phi$ olarsa onda

$$P(B_1 + B_2|A) = P(B_2|A) + P(B_2|A) \text{ olar.}$$

Bu xassələr şərti ehtimalın tərifindən birbaşa alınırlar.

Şərti ehtimalın tapılmasına aid aşağıdakı misala baxaq.

Misal. İkiuşaqlı ailədə hər iki uşağın oğlan olmasının ehtimalını aşağıdakı şərtlər daxilində tapın:

1) Böyük uşaq oğlandır.

2) Uşaqlardan heç olmasa biri oğlandır.

Həlli: Elementar hadisələr fəzası

$$\Omega = \{OO, OQ, QO, QQ\}$$

olur, burada OQ elementar hadisəsi böyük uşağın O oğlan, kiçik uşağın isə qız olmadığını göstərir və s.

Fərz edirik ki, elementar hadisələr eyni ehtimallardır, yəni

$$P(OO) = P(OQ) = P(QO) = P(QQ) - \frac{1}{4}$$

Böyük uşağın oğlan olması hadisəsini A ilə, kiçik uşağın oğlan olması hadisəsini isə B ilə işarə edək. Onda $A \cup B$ hadisəsi heç olmasa uşaqlardan birinin oğlan olmasını, $A \cap B$ hadisəsi isə hər iki uşağın oğlan olmasını göstərir.

Məsələnin 1)-ci bəndində axtarılan şərti ehtimal $P(AB/A)$, 2)-ci bənddə isə axtarılan şərti ehtimal $P(AB/A \cup B)$ olur.

Deməli $P(AB|A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$, burada

$$P(AB) = P(OO) = \frac{1}{4}$$

və

$$P(A) = P(OO) + P(OQ) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$P(AB \setminus A) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

alarıq.

Eyni qayda ilə

$$P(AB/A \cup B) = \frac{P(AB)}{P(A \cup B)}$$

bərabərliyində

$$P(A \cup B) = P(OO) + P(OQ) + P(QO) = \frac{3}{4}$$

olduğunu nəzərə alsaq

$$P(AB/A \cup B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

alarıq.

İndi isə hadisələrin asılıolmazlıq xassəsi ilə tanış olaq.

Əgər A hadisəsinin baş verməsi B hadisəsinin baş vermə ehtimalına təsir etmirsə, onda təbii olaraq deyirlər ki, B hadisəsi A hadisəsindən asılı deyil, yəni

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0.$$

Şərti ehtimal şərtsiz ehtimal ilə üst-üstə düşür.

$P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ olduğunu nəzərə alsaq, alarıq ki, B hadisəsi A-dan asılı deyilsə

$$P(AB) = P(A)P(B) \qquad (3)$$

bərabərliyi ödənilir.

Əgər $P(B) > 0$ olarsa, onda $P(A/B = P(A)$ bərabərliyi ödəndikdə deyirlər ki, A hadisəsi B hadisəsindən asılı deyil.

Bu halda (3) bərabərliyinin doğru olduğu alınır. (3) bərabərliyi A və B hadisələrinə görə simmetrikdir, yəni A hadisəsi B hadisələrdə A-dan asılı olmur.

Qeyd edək ki, (3) bərabərliyi $P(A) = 0$ $(P(B) = 0)$ olduqda da ödənilir.

Doğrudan da, əgər $P(A) = 0$ olarsa, onda $AB \subset A$ olduğundan alırıq ki, $0 \le P(AB) \le P(A) = 0$ olur.

Buradan $P(AB) = 0$ olur, yəni (3) bərabərliyi $P(A) = 0 (P(B) = 0)$ olduğu halda 0=0 bərabərliyi kimi ödənilir.

Beləliklə aşağıdakı tərifi vermək olar.

Tərif. Əgər $P(AB) = P(A)P(B)$ olarsa, onda A və B hadisələrinə asılı olmayan və ya statistik asılı olmayan hadisələr deyilir.

Aşağıdakı misala baxaq:

Misal. Tutaq ki, A hadisəsinin ehtimalı 0 və ya 1-ə bərabərdir. Onda istənilən B hadisəsi A-dan asılı deyil.

Doğrudan da əgər $P(A) = 0$ olarsa, onda yuxarıda verdiyimiz mühakiməyə görə istənilən B hadisəsi üçün $P(AB) = 0 = P(A)P(B)$ olur.

Əgər P(A)=1 olarsa, onda istənilən B hadisəsi üçün

$$1 = P(A) \le P(A \cup B) =$$

$$= P(A) - P(AB) - 1 + P(B) - P(AB)$$

münasibətindən alırıq ki, $P(AB) = P(B)$ olur.

Onda $P(AB) = P(A)P(B)$ bərabərliyi doğru olur.

TASADÜFİ KƏMİYYƏT VƏ ONUN XARAKTERİSTİKALARI

Tutaq ki, (Ω, A, P) üçlüyü sonlu sayda elementar nəticəyə $(|\Omega| < \infty)$ malik müəyyən stoxastik eksperimentin ehtimal modelini ifadə edən ehtimal fəzasıdır.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi bu fəzada hadisənin ehtimalının hesablanmasında Ω-nın elementlərinin təbiəti maraq kəsb etmir. Əsas maraq qiymətləri elementar hadisələrdən asılı olan müəyyən ədədi xarakteristikalar kəsb edir. Məsələn, metal pulu n dəfə atdıqda gerb üzünün düşmə sayı elementar hadisələrdən asılı olaraq o,1,2,....,n sayda qiymət alır. Gerb üzünün düşmə sayının əvvəlcədən hansı qiymət alacağını demək mümkün olmur. Ümumiyyətlə, təsadüfi eksperimentin nəticələrindən asılı olaraq müxtəlif qiymətlər olan kəmiyyətlər təsadüfi kəmiyyətlər adlanır.

Yuxarıda qeyd etdik ki, Ω elementar hadisələr fəzasının nöqtələri konkret obyektlərlə təsvir oluna bilərlər, məsələn, Ω-nin nöqtələri almalarla, molekullarla, insanlarla və s. obyektlərlə təsvir oluna bilərlər. Bu obyektlər müxtəlif xassələrə malik olurlar. Bu xassələrin bir hissəsini ölçmək olar. Almanın çəkisi və həcmi var, onun şirəsinin kimyəvi xassələrini təyin etmək olar. Hətta almanın dadını ekspert rəyinə görə müxtəlif kateqoriyalara aid etmək olar. Molekulun kütləsinin və sürətinin vasitəsi ilə onun impulsunun və kinetik enerjisinin fiziki düsturlarını yazmaq olar. Eyni ilə insan müxtəlif fizioloji xarakteristikalara – yaşa, boya, çəkiyə və s. malik olur.

Bundan başqa, insan intelekti müxtəlif kəmiyyət xarakteristikalarına malik olur. Məsələn, təhsil müddəti, malik olduğu ixtisasların sayı, bildiyi xarici dillərin sayı və s.

İnsanın malik olduğu qardaş və bacılarının sayı, onun illik gəlirlərinin və ödədiyi verginin miqdarı müxtəlif kəmiyyət xarakteristikaları olurlar.

Aşağıdakı misallara baxaq.

Misal. Ω fəzası n sayda insanlar çoxluğudur, bunu $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ kimi yazmaq olar.

Fərz edək ki, bizə insanların yaşa görə paylanmasını öyrənmək lazımdır. ω "elementinin" yaşım $\xi(\omega)$ ilə işarə edək.

Beləliklə, hər bir ω nöqtəsinə $\xi(\omega)$-ə uyğun olur ($\xi(\omega)$ illəri ifadə edir). Başqa sözlə desək $\omega \to \xi(\omega)$ inikası təyin oblastı Ω olan funksiya olur. Bu funksiyanın qiymətləri tam ədədlər olurlar. Lakin yaşı daha dəqiq ifadə etmək üçün onluq kəsrdən və ya sözdən istifadə etmək olar. Məsələn "18 il 5 ay və 1gün". Aydındır ki, $\xi(\omega)$ qiymətlər çoxluğunu tam ədədlər çoxluğu və ya müsbət həqiqi ədədlər çoxluğunun bir kiçik hissəsi kimi götürmək olar. Bu halda $\xi = \xi(\omega)$ tamqiymətli və ya həqiqi qiymətli funksiya adlanır.

Analoji olaraq insanın boyunu, çəkisini və gəlirini aşağıdakı funksiyalarla vermək olar:

$$\omega \to H(\omega)$$

$$\omega \to W(\omega)$$

$$\omega \to V(\omega)$$

Qeyd edək ki, V funksiyası mənfi qiymətlər də ola bilər. Müəyyən tibbi tədqiqatda boyun və çəkinin xətti kombinasiyası ilə verilən xarakteristikalardan istifadə olunur:

$$\omega \to \lambda H(\omega) + \mu W(\omega)$$

burada λ və μ həqiqi ədədlərdir.

Əgər ω olaraq müəyyən $N(\omega)$ sayda üzvü olan ailənin "başçısı" götürsək, onda əhalinin sayının qeydə alınması işində

$$\omega \to \frac{V(\omega)}{N(\omega)}$$

funksiyasının qiymətlərini hesablamaq tələb olunur.

Bu funksiya ailədə adambaşına düşən gəliri ifadə edir.

Ω fəzasının $\xi = \xi(\omega), \omega \in \Omega$ funksiyası ilə bağlı alt çoxluqlarını əlverişli şəkildə ifadə etmək üçün aşağıdakı işarədən istifadə edək. Məsələn, yaşları 20-dən az olmayan və 40-dan çox olmayan $\omega \in \Omega$-ların çoxluğunu

$$\{\omega | 20 \le \xi(\omega) \le 40\}$$

və ya da qısa olaraq $\{20 \le \xi \le 40\}$ kimi işarə edəcəyik.

Boyları 170 sm ilə 185 sm arasında olan və çəkiləri 90 kq ilə 105 kq arasında olan insanlar (ω-lar) çoxluğunu aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\{\omega | 175 \le H(\omega) \le 185\} \cap \{\omega | 90 \le W(\omega) \le 105\} =$$

$$= \{\omega | 175 \le H(\omega) \le 185 : \ 90 \le W(\omega) \le 180\} =$$

$$= \{65 \le H \le 185, \ 90 \le W \le 180\}$$

Yuxarıda qeyd etdik ki, $\xi = \xi(\omega)$ təsa-

düfi kəmiyyəti Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunur və ədədi qiymətlər alır. Xüsusilə qeyd etmək lazımdır ki, $\xi(\omega)$ funksiyasının təsadüfliyi onun ω arqumentinin təsadüfi seçilməsi ilə bağlıdır. ω arqumenti seçildikdən sonra $\xi(\omega)$ funksiyasının qiyməti dərhal tamamilə müəyyənləşir və təsadüflik aradan götürülür.

Məsələn, ω almasını yeşikdən çıxartdıqdan sonra onun çəkisi təyin olunur, buna görə də $W(\omega)$ qiyməti məlim olur.

Qeyd edək ki, müəyyən sayda təsadüfi kəmiyyətlərə malik olduqda onların üzərində müxtəlif əməllər aparmaqla yeni təsadüfi kəmiyyətlər almaq olar.

Əgər ξ_1 və ξ_2 təsadüfi kəmiyyətlərdirsə, onda $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1-\xi_2$, $\xi_1\xi_2$, $\frac{\xi_1}{\xi_2}(\xi_2\neq 0)$ və $a\xi_1+b\xi_2$ təsadüfi kəmiyyət olurlar, burada a və b həqiqi ədədlərdir.

Situasiya burada riyazi analizdə olduğu kimidir: əgər f və g funksiyadırsa, onda $f\in g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}(g\neq 0)$, $af+bg$ funksiyadırlar. Yeganə fərq ondan ibarətdir ki, riyazi analizdə funksiyaların arqumenti x həqiqi qiymətlər alır, təsadüfi kəmiyyətlərin arqumenti ω isə Ω fəzasının nöqtəsi olur.

Analizdə sabit funksiyanın xüsusi halı olduğu kimi burada da təsadüfi kəmiyyətin xüsusi halı olur. Məsələn, müəyyən sinif şagirdlərinin yaşlarının eyni olması tamamilə mümkündür. Onda misal 1-də verilən $\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti sabit olur, məsələn III-ci sinif üçün 9-a (ilə) bərabər olur.

Yuxarıda Ω elementar hadisələr fəzasının altçoxluqlarının ehtimallarının verilməsi ilə tanış olduq. Adətən bu altçoxluqlar təsadüfi kəmiyyətin köməyi ilə təyin olunurlar.

Məsələn, $\{a\le\xi\le b\}=\{\omega|a\le\xi(\omega)\le b\}$ çoxluğu ξ təsadüfi kəmiyyətin aldığı qiymətlərin $[a,b]$ parçasına düşməsi hadisəsini ifadə edir.

Aydındır ki, Ω-nın hər bir altçoxluğu təsadüfi hadisə olaraq müəyyən ehtimala malikdir və deməli $P(a\le\xi\le b)$ ehtimalı da məna kəsb edir.

Bu deyilənləri bir qədər ümumiləşdirək.

Tutaq ki, $A\subset R=(-\infty,\infty)$ müəyyən altçoxluğu verilmişdir. Onda yaza bilərik

$$P(\xi\in A)=P\{\omega|\xi(\omega)\in A\}$$

Aydındır ki, A çoxluğu olaraq $[a,b]$ (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$, $(-\infty,b]$, (a,∞) inventarlarını, belə intervalların birləşməsi, tam ədədlərin müəyyən $\{m,m+1,\dots,m+n\}$ çoxluğu götürülə bilər. Mühüm xüsusi hal A çoxluğunun bir x nöqtəsindən ibarət olmasıdır, yəni $A=\{x\}$. Bu halda A çoxluğu atom adlanır.

x nöqtəsi ilə $\{x\}$ çoxluğu arasında fərq nəzəri xarakter daşıyır. İstənilən halda $P(\xi=x)=P[\xi\in\{x\}]$ ehtimalı məna kəsb edir: bu ξ təsadüfi kəmiyyətinin x qiyməti alması hadisəsinin ehtimalıdır. Əgər ξ kəmiyyəti insanların yaşını göstərirsə, onda $\{\xi=18\}$, çoxluğu 18 yaşlıların çoxluğunu ifadə edir.

Biz yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi yalnız Ω elementar hadisələr fəzasının sonlu olduğu hala baxırıq.

Bu halda, $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$ təsadüfi kəmiyyətinin aldığı qiymətlər çoxluğu da sonlu olur, V_ξ ilə ξ-qiymətlər çoxluğunu işarə etsək, onda yaza bilərik:

$$V_\xi=\bigcup_{\omega\in\Omega}\{\xi(\omega)\}$$

Bu birləşmədə müəyyən qiymətlər üstüstə də düşə bilər, Çünki $\omega\to\xi(\omega)$ funksiyası qarşılıqlı birqiymətli olmaya da bilər. Xüsusi halda, ξ sabit təsadüfi kəmiyyət olarsa, onda V_ξ çoxluğu bir nöqtədən (ədəddən) ibarət olur.

$$P_n=P(\xi=x_n),\ x_n\in V_\xi$$

işarə edək.

Aydındır ki, əgər bütün P_n-lər məlum olarsa, onda ξ təsadüfi ilə bağlı bütün hadisələrin ehtimallarını tapmaq olar. Beləki, yuxarıda göstərilən ehtimalları aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$P(a\le\xi\le b)=\sum_{a\le x_n\le b}P_n$$

və

$$P(\xi\in A)=\sum_{x_n\in A}P_n$$

Göstərilən cəmlərdə $x_n\in A$ qiymətlərinin ehtimalları toplanılır. Aydındır ki, xüsusi halda ikinci ehtimalda $A=[a,b]$ götürsək birinci ehtimalı alarıq.

A çoxluğu olaraq $A=(-\infty,x)$, $x\in(-\infty,\infty)$ sonsuz intervalı götürək. Onda

$$P(\xi\le x)=\sum_{x_n<x}P_n$$

bərabərliyini alarıq.

$F_\xi(x)=P(\xi\le x)$, $x\in(-\infty,\infty)$ funksiyasına ξ təsadüfi kəmiyyətinin paylanma funksiyası deyilir.

$F_\xi(x)$ paylanma funksiyası p_n və x_n-lər vasitəsi ilə təyin olunur.

Asanlıqla başa düşmək olar ki, istənilən $a<b$ ədədləri üçün

$$P(a<\xi\le b)=P(\xi\le b)-P(\xi\le a)=$$
$$=F_\xi(b)-F_\xi(a)$$

Bəzən $P_n=P(\xi=x_n)$ ehtimalları ξ təsadüfi kəmiyyətinin elementar ehtimalları adlanırlar.

Ümumi halda, P_n-lər üçün aşağıdakı xassələr ödənilir:

1) $P_n\ge o$, $\forall_n\ge 1$ üçün

2) $\sum_h P_h=1$

Baxılan ξ təsadüfi kəmiyyəti sonlu sayda qiymətlər aldığı üçün 2-ci xassədə cəmdə sonlu sayda toplanan iştirak edir.

Əgər x_n qiymətləri müxtəlif olarsa, onda $\{\xi=x_n\}$ çoxluqları kəsişmirlər və $\sum_n\{\xi=x_n\}=\Omega$ olur.

Ehtimalın additivlik xassəsinə görə

$$\sum_n P\{\xi=x_n\}=P(\Omega)=1 \text{ olur.}$$

Tərif. Ω sonlu elementar hadisələr fəzasında təyin olunan istənilən $\xi=\xi(\omega)$, $\omega\in\Omega$ ədədi funksiyaya təsadüfi kəmiyyət deyilir.

Aşağıdakı misallara baxaq.

Misal. Metal pulun iki dəfə atılması eksperimentində $\Omega=\{GG,PG,GP,PP\}$ elementar hadisələr fəzasında aşağıdakı cədvəlin köməyi ilə $\xi=\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti təyin edək.

ω	GG	GP	PG	PP
$\xi(\omega)$	2	1	1	0

Beləliklə, $\xi=\xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti öz mənasına görə gerblərin sayını ifadə edir.

Misal. Təsadüfi kəmiyyətə daha sadə misal olaraq $A\in A$ hadisəsinin indikatorunu göstərmək olar:

$$\xi=J_A=J_A(\omega)=\begin{cases}1,\\0,\end{cases}$$

Beləliklə, təsadüfi eksperiment nəticəsində A hadisəsi baş verdikdə onun indikatoru 1-ə, baş vermədikdə isə onun indikatoru 0-a bərabər olur.

Ümumi halda, təsadüfi kəmiyyətə misal olaraq, dolların kursunu, əmtəənin qiymətini, firmanın gəlirini və itkisini, nəqliyyatın gözləmə müddətini və s. göstərmək olar.

Qeyd edək ki, baxdığımız halda Ω elementar hadisələr fəzası sonlu sayda elementə malik olduğundan $\{\xi(\omega\in A)\}$ hadisəsi o ω elementar hadisələrdən ibarət olur ki, onlar üçün $\xi(\omega)=x\in A$ olur və bu hadisənin ehtimalı

$$P(\xi(\omega)\in A)=\sum_{k:\xi(\omega_k)\in A}P_k=\sum_{k:x_k\in A}P(\xi=x_k)\quad(1)$$

1-ci misalda **(1)** düsturunun köməyi ilə alırıq:

$$P(\xi(\omega)=2)=P(GG)=\frac{1}{4}$$

$$P(\xi(\omega)=1)=P(GP)+P(PG)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P(\xi(\omega)=0)=P(PP)=\frac{1}{4}$$

Təsadüfi kəmiyyətin mümkün qiymətləri ilə onların uyğun başvermə ehtimalları arasında verilən istənilən münasibət paylanma qanunu adlanır.

Təsadüfi kəmiyyətin paylanma qanununu aşağıdakı cədvəldə vermək daha əlverişlidir.

ξ	x_1	x_2	...	x_n
P	$P1$	$P2$		$P4$

Burada $x_1, x_2 ... x_n$-lər təsadüfi kəmiyyətin ala biləcəyi mümkün qiymətlər, $P_1 = P(\xi = x_1), ..., P_n = P(\xi = x_n)$ – lər uyğun ehtimallardır və $\sum_{k=1} P_k = 1$ olur.

2-ci misalda A hadisənin indikatorunun paylanma qanununu aşağıdakı cədvəldə vermək olar:

J_A	0	1
P	$1 - P(A)$	$P(A)$

Hər bir təsadüfi kəmiyyətə bir paylanma qanunu uyğundur. Bir paylanma qanununa isə müxtəlif təsadüfi kəmiyyətlər malik ola bilər.

Məsələn əgər A və B hadisələri müxtəlifdirsə və $P(A) = P(B)$ olarsa, onda J_A və J_B müxtəlif təsadüfi kəmiyyətləri (indikatorları) eyni bir paylanma qanununa malik olurlar.

Aşağıdakı misallara baxaq.

1) $(1,2...N)$ sonlu çoxluqda ($N<\square$) müntəzəm paylanma qanunu. Bu paylanmada ξ təsadüfi kəmiyyətinin m qiymətini alma ehtimalı

$$P(\xi = m) = \frac{1}{N}, \quad m = 1,2,..., N \text{ olur.}$$

2) Bernulli paylanması. Bu paylanmada təsadüfi kəmiyyəti 1-i $P = P(\xi = 1)$ ehtimalı ilə 0-ı $q = P(\xi = 0)$ ehtimalı ilə alır:

$$P(\xi = k) = p^k q^{1-k}, \quad k = 0,1, \quad p + q = 1.$$

3) Binomiol paylanma. Bu paylanmada ξ təsadüfi kəmiyyəti $n+1$ sayda $0,1,2...,n$ qiymətini

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

ehtimalı ilə alır, κ=0,1,2...n,

$p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1$

Qeyd edək ki, bu misallarda $\sum_k P_k = 1$ normallaşma şərti ödənilir. Bu 1) və 2) misallarında aydın görünür.

3-cü misalda isə

$$\sum_{k=0}^{n} P_k = \sum_{k=0}^{n} P(\xi = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1$$

olur.

Misal 2) və 3)-də verilən paylanmalar aşağıdakı sınaqlar ardıcıllığında meydana çıxırlar. Tutaq ki, müəyyən bir təsadüfi eksperiment (sınaq) n dəfə təkrar edilir, beləki hər bir təkrar sınağın nəticəsi digər təkrar aparılan sınaqların nəticəsindən asılı deyil. Belə təkrarlanma seriyası asılı olmayan sınaqlar ardıcıllığı adlanır. Asılı olmayan sınaqlar ardıcıllığının aşağıdakı iki şərti ödəyən xüsusi halına baxaq:

1. Hər bir sınaqda iki mümkün nəticədən yalnız biri baş verir. Bu nəticələr şərti olaraq "müsbət" və "mənfi" nəticələr adlandırılır.
2. Hər bir sınaqda "müsbət" nəticəsinin baş vermə ehtimalı sınağın nömrəsindən və digər sınaqların nəticələrindən asılı deyil.

Bu iki şərti ödəyən asılıolmayan sınaqlar ardıcıllığına Bernulli sxemi və ya Bernulli sınaqlar ardıcıllığı deyilir.

N sayda Bernulli sınaqlar ardıcıllığında düz κ sayda "müsbət" nəticənin baş vermə ehtimalı misal 3)-də verilən Binomial paylanma ilə ifadə olunur. Burada p-bir sınaqda "müsbət" nəticənin başvermə ehtimalıdır.

RİYAZİ GÖZLƏMƏ VƏ DİSPERSİYA

Tutaq ki, $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyəti sonlu Ω elementar hadisələr fəzasında təyin olunmuşdur. Bu təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsi

$$M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) \qquad (1)$$

bərabərliyi ilə təyin olunan $M\xi$ ədədinə deyilir.

Əgər ξ təsadüfi kəmiyyəti $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymətlərini $P_n = P(\xi = x_n)$ ehtimalları ilə alırsa, onda onun riyazi gözləməsi üçün (1) bərabərliyindən alırıq:

$$M\xi = \sum_n x_n P_n \qquad (2)$$

ξ təsadüfi kəmiyyətin riyazi gözləməsinə bəzən ξ təsadüfi kəmiyyətin orta qiyməti də deyilir.

(2) bərabərliyi göstərir ki, ξ təsadüfi kəmiyyətin riyazi göstərməsi onun $P_n = P(\xi = x_n)$ ehtimal paylanması ilə təyin olunur.

Qeyd edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyətdən asılı istənilən $\varphi(\xi)$ funksiyasının riyazi gözləməsi $M(\varphi(\xi)) = \sum_{\omega \in \Omega} \varphi(\xi(\omega)) P(\omega)$ düsturu ilə verilib.

Buradan (2) düsturunun köməyi ilə alarıq

$$M(\varphi(\xi)) = \sum_n P_n \varphi(x_n) \qquad (3)$$

burada P_n və x_n – lər (2) bərabərliyindən götürülür.

(3) düsturu göstərir ki, $\varphi(x)$ təsadüfi kəmiyyətin riyazi göstərməsini tapmaq üçün onun ehtimal paylanmasının tapılmasına ehtiyac yoxdur. Bu riyazi gözləməni ξ-nin ehtimal paylanması vasitəsi ilə tapmaq olar. (3) düsturu hesablama işlərində çox əlverişlidir. Xüsusi halda $\varphi(x) = x^r$ olarsa, onda

$$E\xi^r = \sum_n P_n x_n^r$$

riyazi gözləməsi ξ təsadüfi kəmiyyətinin r tərtibli momenti adlanır.

$M|\xi|^r = \sum_n P_n |x_n|^r$ riyazi gözləməsinə r tərtibi mütləq moment deyilir.

Eyni qayda ilə $M(\xi - M\xi)^r$ riyazi gözləməsi

$$M(\xi - M\xi)^r = \sum_n P_n (x_n - M\xi)^r$$

və $M|\xi - M\xi|$ riyazi gözləməsini

$$M|\xi - M\xi|^r = \sum_n P_n |x_n - M\xi|^r$$

təyin etmək olar.

$M(\xi - M\xi)^r$-ə r tərtibli mərkəzi moment, $M|\xi - M\xi|^r$-ə isə r tərtibli mütləq mərkəzi moment deyilir.

İki tərtibli mərkəzi momentə ξ təsadüfi kəmiyyətin dispersiyası deyilir və

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

kimi işarə edilir.

$\sqrt{D\xi}$-ə ξ təsadüfi kəmiyyətin orta kvadratik meyli və ya standart meyli deyilir.

Riyazi gözləmənin və dispersiyanın sadə xassələrini qeyd edək.

Əvvəlcə $M\xi$ riyazi gözləməsinin (1) ((2)) bərabərliyindən birbaşa çıxan xassələrini verək.

1) A hadisəsinin J_A indikatorunun riyazi gözləməsi

$$MJ_A = P(A) \text{ olur.}$$

Doğrudan da, tərifə görə

$$MJ_A = \sum_{\omega \in \Omega} J_A(\omega) P(\omega) = \sum_{\omega \in A} P(\omega) = P(A)$$

2) Addisivlik xassəsi: İki ξ və η təsadüfi kəmiyyətlərin cəminin riyazi gözləməsi onların riyazi gözləmələri cəminə bərabərdir, yəni tərifə görə

$$M(\xi + \eta) = \sum_{\omega \in \Omega} (\xi(\omega) + \eta(\omega)) P(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \eta(\omega) P(\omega) = M\xi + M\eta$$

2-ci xassədən induksiya vasitəsilə riyazi gözləmənin sonlu addisivlik xassələrini almaq olar: n sayda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ təsadüfi kəmiyyətləri üçün

$$M(\xi_1 + ..., + \xi_n) = M\xi_1 + M\xi_2 + ... + M\xi_n.$$

3) İstənilən C sabiti üçün $M(C\xi) = CM\xi$ və $MC = C$ olur.

Bu xassə riyazi gözləmənin tərifindən alınır:

$$M(C\xi) = \sum_{\omega \in \Omega} C\xi(\omega) P(\omega) = C \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) = CM\xi$$

və

$$MC = \sum_{\omega \in \Omega} CP(\omega) = C \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = CP(\Omega)$$

Axırıncı bərabərlikdə $P(\Omega) = 1$ olduğunu nəzərə alsaq $MC = C$ $MC = C$ olduğunu alarıq.

4) Əgər $\xi \geq \eta$ olarsa, onda $M\xi \geq M\eta$ olur.

Bu xassə riyazi gözləmənin monotonluq xassəsi adlanır.

5) Əgər $\xi \geq 0$ və $M\xi = 0$ olarsa, onda $P(\xi = 0) = 1$ olur, daha dəqiq desək istənilən $\omega \in \Omega$ üçün $\xi(\omega) = 0$ olur.

4-cü xassənin isbatı: tərifə görə $M(\xi - \eta) = \sum_{\omega \in \Omega} [\xi(\omega) - \eta(\omega)] P(\omega)$ cəmində bütün toplananlar mənfi deyillər, çünki şərtə görə istənilən $\omega \in \Omega$ üçün $\xi(\omega) \geq \eta(\omega)$.

Onda $M(\xi - \eta) \geq 0$ olur.

2) və 3) xassələrinə görə buradan $M\xi - M\eta \geq 0$ və ya $M\xi \geq M\eta$ alırıq.

5-ci xassəni isbat edək. Tərifə və şərtə görə

Burada $M\xi = \sum_{\omega \in \Omega} \xi(\omega) P(\omega) = 0$ olur.

İstənilən $\omega \in \Omega$ üçün $\xi(\omega \geq 0)$ olduğunu və $P(\omega) \geq 0$ olduğunu nəzərə alsaq, istənilən $\omega \in \Omega$ üçün $\xi(\omega) P(\omega) = 0$ olduğunu alarıq. Buradan isə $P(\omega) > 0$ sətrini ödəyən ω-lar üçün $\xi(\omega) = 0$ olduğu çıxır, yəni 5-ci xassə ödənilir.

İndi isə dispersiyanın aşağıdakı xassələrini qeyd edək

1) $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$

Doğrudan da

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2\right) =$$
$$= M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2 - (M\xi)^2$$

2) $D\xi \geq 0$ və $D\xi = 0$ olarsa, onda elə c sabiti var ki, $P(\xi = c) = 1$ olur.

Bu xassə riyazi gözləmənin 5-ci xassəsindən çıxır.

3) İstənilən c sabiti üçün

$D(c\xi) = c^2 D\xi$, $D(\xi + c) = D\xi$ olur.

Bu xassə tərifdən və riyazi gözləmənin 3-cü xassəsində birbaşa alınır.

TAMQİYMƏTLİ TƏSADÜFİ KƏMİYYƏTLƏR VƏ ONLARIN XARAKTERİSTİKALARI

Biz bu paraqrafda mənfi olmayan tam qiymətlər alan ξ təsadüfi kəmiyyətlərlə tanış olacağıq. Əlverişli olmaq üçün ξ təsadüfi kəmiyyətin qiymətlər çoxluğunu $N_0 = \{0,1,2,...\}$ kimi göstərəcəyik, beləki bu ədədlərdən hansını ξ təsadüfi kəmiyyət qəbul etmirsə, onda onun ehtimalını sıfıra bərabər götürəcəyik.

Beləliklə, tam qiymətli ξ təsadüfi kəmiyyətinin ehtimal paylanma qanununu, paylanma funksiyasını, riyazi gözləməsini aşağıdakı kimi yazı bilərik

$$P_n = P(\xi = n), \quad n \in N_0$$

$$F_\xi(x) = \sum_{0 \leq n \leq x} P_n$$

$$M\xi = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot P_n$$

Bir neçə misala baxaq.

Misal. Tutaq ki, L müəyyən natural ədədi verilmişdir. İstənilən $n = \overline{1, L}$ üçün $P_n = \frac{1}{L}$ götürək. Onda $\sum_{n=1}^{L} P_n = 1$ bərabərliyindən çıxır ki, istənilən $k \neq n$ üçün $P_k = 0$ olur, çünki

$$\sum_{k=1}^{L} P_n = L \cdot \frac{1}{L} = 1 \text{ olur.}$$

$M\xi$ riyazi gözləməni hesablayaq:

$$M\xi = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{L} n = \frac{1}{L} \cdot \frac{L(L+1)}{2} = \frac{L+1}{2},$$

burada ədədi silsilə cəminin düsturuna görə

$$\sum_{n=1}^{L} n = \frac{L(L+1)}{2} \text{ olur.}$$

Baxdığımız bu halda, deyirlər ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti $\{1,2,...L\}$ çoxluğunda müntəzəm paylanmışdır. Başqa sözlə desək, L sayda mümkün $\{\xi = 1\}, \{\xi = 2\}, ..., \{\xi = L\}$ hadisələri eyni imkanlıdır. Yəni onların ehtimalları eynidir:

$$P_n = P(\xi = n) = \frac{1}{L}, \quad n = \overline{1, L}.$$

$M\xi$ riyazi gözləməsi (və ya gözlənilən qiymət) $1,2,...,L$ natural ədədlərin hesabi orta qiymətinə bərabər olur. Bu orta qiymətin mənasını başa düşmək üçün fərz edək ki, siz içərisində 1 qəpikdən 100 qəpiyə qədər metal pul olan qutudan təsadüfi olaraq bir metal pul çıxarırsınız. Onda sizin gözlədiyiniz "mükafat" $M\xi = 50{,}5$ qəpik olur. Bu isə qutudakı pulun miqdarının $\frac{1}{100}$-inə bərabərdir.

Misal. Fərz edək ki, metal pul birinci dəfə gerb üzü (G) düşənə qədər atılır. ξ ilə atılmalar sayını işarə edək. Onda $\{\xi = n\}$ hadisəsi göstərir ki, birinci "G" düşənə qədər $n-1$ sayda "P" (pul üzü) düşmüşdür. Asanlıqla başa düşmək olar ki, əlverişli hal yalnız $\underbrace{PP...PG}_{n-1}$ olur və deməli,

$$P_n = P(\xi = n) = \frac{1}{2^n} \text{ alırıq}$$

$$\left(P(\{P\}) = P(\{G\}) = \frac{1}{2}\right)$$

$M\xi$ riyazi gözləməsini tapaq. Tərifə görə

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \text{ olur.}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ cəmini tapaq.

Sonsuz azalan həndəsi silsilə düstürüna görə

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad |x| < 1.$$

Bu bərabərliyin hər tərəfindən x-ə görə törəmə alsaq (bu mümkündür)

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1} + ... =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n, |x| < 1 \qquad \text{alarıq.}$$

Bu bərabərlikdə $x = \frac{1}{2}$ götürsək

$$4 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{2^n} \text{ alarıq.}$$

Bu cəmdə $n+1 = m$ əvəzləməsi aparsaq

$$4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2^{n-1}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{m}{2^n}$$

alarıq. Buradan

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m}{2^n} = 2 \text{ alırıq.}$$

Deməli, $M\xi = 2$ olur. Bu orta qiymət intuisiya ilə düz gəlir (məntiqə uyğundur). Beləki, metal pul iki dəfə atıldıqda düşən "G" sayının riyazi gözləməsi vahidə bərabərdir (göstərin). Onda $1 = 2 \cdot \frac{1}{2}$ bərabərliyi göstərir ki, $M\xi = 2$ orta qiyməti doğrudur, çünki metal pul bir dəfə atıldıqda "G" nəticəsinin baş vermə ehtimalı $\frac{1}{2}$-ə bərabərdir.

RİYAZİ STATİSTİKA

BAŞ KÜLLÜYAT (HEYYƏT) VƏ SEÇİM ANLAYIŞLARI

Baş küllüyat və seçim statistika nəzəriyyəsinin ilkin anlayışlarıdır.

Bunların ciddi tərifləri ehtimal nəzəriyyəsindən gəlir.

Riyazi statistika müasir riyaziyyatın bir qolu olaraq ehtimal nəzəriyyəsinin anlayış və metodlarına əsaslanaraq inkişaf edir. Riyazi statistika nəzəri və praktiki elmi nəticələr almaq üçün statistik nəticələrin tabe olduğu qanunauyğunluqları sistemləşdirir və tədqiq edir.

Statistik nəticələr dedikdə biz bu və ya digər əlamətlərə malik olan obyektlərin sayı haqqında əldə olunan məlumatları nəzərdə tuturuq.

Müəyyən kəmiyyət və ya keyfiyyət əlamətinə görə birləşən obyektlər qrupuna statistik küllüyat deyilir. Bu küllüyata daxil olan elementə statistik küllüyatın həddi (üzvü), statistik küllüyatı təşkil edən hədlərin sayına küllüyatın həcmi deyilir.

Qeyd edək ki, riyazi statistikanın terminləri ehtimal nəzəriyyəsinin terminlərindən fərqlənirlər.

Ehtimal nəzəriyyəsinin təsadüfi kəmiyyət anlayışına qarşı riyazi statistikada baş küllüyat (heyyət) anlayışını qoyurlar. Belə-

lıklə, baş küllüyat anlayışı təsadüfi kəmiyyət anlayışı ilə eyniləşdirilir. Baş külliyyat təyin oblastına (elementar hadisələr fəzasına), qiymətlər çoxluğuna, funksional asılılığa və paylanma qanuna malik təsadüfi kəmiyyətdir.

Ehtimal nəzəriyyəsində deyilir ki, aparılan stoxastik (təsadüfi) eksperimentin nəticəsində ξ təsadüfi kəmiyyətinin qiyməti x həqiqi ədədinə bərabər olur. Bu fakt riyazi statistikada belə ifadə olunur: Baş küllüyatdan x həqiqi ədədi təsadüfi seçilmişdir (götürülmüşdür).

Beləliklə, emprik olaraq, baş küllüyata belə tərif vermək olar: real şərtlər kompleksi yerinə yetirildikdə (realizasiya olunduqda) aparılan müşahidənin bütün mümkün olan nəticələr çoxluğuna baş küllüyat deyilir.

Daha dəqiq desək, baş küllüyat dedikdə müəyyən bir ehtimal fəzası və bu fəzada təyin olunan ξ təsadqfi kəmiyyəti başa düşürük. ξ təsadüfi kəmiyyətin paylanmasına baş küllüyatın paylanması deyilir.

Eksperimentin elementar nəticəsi və bu nəticəyə uyğun ξ təsadüfi kəmiyyətin qiyməti birlikdə baş küllüyatın vahidini (həddini) təşkil edir. Baş küllüyatın həcmi sonlu və ya sonsuz ola bilər. Məsələn, tutaq ki, X təsadüfi kəmiyyəti üçün asılı olmayan ölçmələr (təcrübələr) aparılır. Bu halda baş küllüyat nəzəri olaraq sonsuz həcmə malik olur. Əgər N sayda məlumatdan ibarət partiyada qüsürlu məmulatların sayını təyin etmək üçün yoxlamalar aparılırsa, onda bu partiyaya N həcmli sonlu baş küllüyat kimi baxa bilərik. Sosial-iqtisadi tədqiqatlarda bir ölkənin, regionun və ya şəhərin əhalisi sonlu baş küllüyat kimi qəbul olunur və bu halda ölçülən əlamət (parametr) olaraq ayrıca götürülmüş insanın gəliri, xərci və ya topladığı pulun miqdarı götürülə bilər. Əgər baxılan əlamət keyfiyyət xarakterli olarsa (məsələn, cinsi, milləti, sosial vəziyyəti, fəaliyyət növü) və sonlu variantlar çoxluğuna daxil olarsa, onda bu əlaməti ədədlərlə də kodlaşdırmaq olar.

Tutaq ki, baş küllüyatın həcmi, yəni elementlərin sayı sonludur və N-ə bərabərdir. Bu elementlərin hər birini müəyyən bir ehtimal fəzanın ω elementar hadisəsi kimi qəbul edək və onun ehtimalını $\frac{1}{N}$ götürək. Onda ω elementi ilə baxılan əlamətin qiyməti arasında uyğunluq $\xi = \xi(\omega)$ təsadüfi kəmiyyətlə ifadə oluna bilər. Bu təsadüfi kəmiyyətə baş küllüyatda təyin olunan funksiya kimi baxmaq olar. Belə qurulan təsadüfi kəmiyyətin ədədi xarakteristikaları tədqiq olunan baş küllüyatın mühüm xassələrini ifadə edirlər. Xüsusi halda bu təsadüfi kəmiyyətin $M\xi$ riyazi gözləməsi baxılan əlamətin **orta qiymətini**, $P(\xi < x)$ ehtimalı isə əlaməti x-dən kiçik qiymətlər alan obyektlərin sayının baş küllüyatın həcminə olan nisbətini və ya faizini ifadə edir. Məsələn sosial-iqtisadi tədqiqat işlərində əhalinin orta gəlirini və gəliri yaşayış minimumdan kiçik olan əhalinin sayını tapmaq məsələləri öyrənilir.

Aydındır ki, baş küllüyatın həcmi N kifayət qədər böyük olduqda onu təşkil edən obyektlərin hamısını yoxlamadan (müayinədən) keçirmək praktiki olaraq çətin olur və ya fiziki olaraq mümkün olmur. **Belə hallarda baş küllüyatdan məhdud sayda obyektlər təsadüfi olaraq götürülür və tədqiq olunur.**

Tərif. Hər bir ξ təsadüfi kəmiyyəti kimi paylanan n sayda asılı olmayan $X_1, X_2 ... X_n$ təsadüfi kəmiyyətlər ardıcıllığı n həcmli seçilmiş küllüyat və ya statistik seçim adlanır.

Məsələn, ξ təsadüfi kəmiyyətin ilk n sayda ölçülməsinin nəticələrinə sonsuz baş heyyətdən götürülən n həcmli statistik seçim kimi baxa bilərik. Ölçmə nəticəsində alınmış $x_1, x_2 ... x_n$ qiymətlərinə ξ təsadüfi kəmiyyətin müşahidələri (realizasiyaları) və ya aldığı qiymətləri deyilir.

Statistik seçimin xassələrinə və xarakteristikalarına görə baş küllüyatın ədədi xarakteristikaları və paylanma qanunları haqqında məlumat əldə edilir. Bu məsələ statistik seçim metodu ilə öyrənilir.

Baş küllüyatın həcmi sonlu olduqda bir çox statistik məsələlərin şərhi aşağıdakı qutu sxemi ilə verilir.

Tutaq ki, bir qutuda N sayda kürəcik var və bunların üzərində müxtəlif $X_1, X_2, .., X_N$ ədədləri qeyd edilmişdir.

Qutudan təsadüfi olaraq n sayda kürəcik götürülür. Bu götürülən kürəciklərin üzərindəki ədədləri $x_1, x_2, ..., x_n$ ilə işarə edək.

Onda $x_1, x_2, .. x_n$ ədədlər küllüsü n həcmli statistik seçim və ya sadəcə seçim adlanır.

Qutudan kürəciklər iki sxem – təkrarlı və təkrarsız sxem üzrə götürülür.

Təkrarlı sxem üzrə kürəcik qutudan götürülür, onun nömrəsi qeyd olunur və o yenidən qutuya qaytarılır.

Təkrarsız sxemdə isə götürülən kürəcik qutuya qaytarılmır.

Sonlu N həcmli küllüyat üçün təkrarsız sxem üzrə götürülən n həcmli statistik seçimin elementləri x_i-lər bir-birindən asılı olur. Təkrarlı sxemdə isə x_i-lər bir-birindən asılı olmur.

Əgər ξ ilə götürülən kürəcik üzərində qeyd olunan ədədi işarə etsək, onda aydındır ki,

$$P(\xi = X_i) = \frac{1}{N}, i = \overline{1N} \text{ olar.}$$

Qeyd edək ki, hər n həcmli seçimin təkrarsız sxem üzrə götürülmə ehtimalı C_N^n-ə, təkrarlı sxem üzrə isə $\frac{1}{N^n}$-ə bərabərdir.

Praktikada əsasən təkrarsız seçimlərdən istifadə olunur. Bu halda əgər baş küllüyatın N həcmi statistik seçimin n həcmindən kifayət qədər çox olarsa (yüz və ya min dəfə), onda müşahidənin nəticələrini asılı olmayan nəticələr kimi qəbul edə bilərik.

Yuxarıda qeyd olunduğu kimi, çox hallarda qiymətləri müşahidələrin nəticəsindən asılı olaraq dəyişən kəmiyyətlərin ölçülməsi lazım gəlir. Belə kəmiyyətlərə misal olaraq, aksiyaların qiyməti, dolların (manatın) kursu, ölçmənin təsadüfi səhvini və s. göstərmək olar. Burada obyekt əvəzinə müxtəlif üsullarla əmələ gələn müəyyən situasiyalı vəziyyətlər nəzərdə tutulur. Bu hallarda da müəyyən statistik modellər tədbiq edilir və seçim aparılır

SEÇİMİN STATİSTİK PAYLANMASI

Tutaq ki, ξ təsadüfi kəmiyyət üzərində asılı olmayan ölçmələr aparılmış və $X_1, X_2 ..., X_n$ n həcmli seçiminin $x_1, x_2, ..., x_k$ realizasiyaları (ξ-nin müşahidə olunduğu qiymətləri) alınmışdır. Fərz edək ki, x_1 realizasiyası (nəticəsi) n_1 dəfə, x_2 realizasiyası n_2 dəfə,... x_k realizasiyası isə n_k dəfə müşahidə olunmuşdur. Onda $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ seçimin həcmi olur. n_i ədədi x_i realizasiyasının tezliyi, $\nu_i = \frac{n_i}{n}$ nisbəti isə x_i realizasiyasının nisbi tezliyi adlanır. Aydındır ki, ν_i-lər rasional ədədlərdir və $\sum_{i=1}^{k} \nu_i = 1$ olur.

Diskret təsadüfi kəmiyyətə uyğun baş küllüyatdan götürülmüş seçimin statistik paylanma qanunu dedikdə seçimin elementlərinin (variantları) və onlara uyğun nisbi tezliklərinin ν_i) birlikdə verilməsi başa düşülür. Statistik paylanma qanunu adətən aşağıdakı cədvəldə verilir.

x_1	x_2	.....	x_k
$\nu_1 = \frac{n_1}{n}$	$\nu_2 = \frac{n_2}{n}$	....	$\nu_k = \frac{n_k}{n}$

$$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$$

Burada n-seçimin həcmini, n_i – isə x_i variantının müşahidə olunma sayını göstərir.

ν_i nisbi tezlik uyğun hadisənin P_i ehtimalının təqribi qiyməti kimi götürülə bilər, yəni

$$P_i = P(\xi = x_i) \approx \frac{n_i}{n} = \nu_i \text{ yaza bilərik.}$$

Beləliklə, seçimin statistik paylanma qanununu təqribi olaraq baş küllüyatın paylanma qanunu kimi qəbul etmək olar.

Misal. Həcmi n=20 olan seçim belə verilmişdir.

$x1$	2	6	12
ni	3	10	7

Uyğun statistik paylanma qanununu verək. Bunun üçün nisbi tezlikləri tapaq

$$\nu_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{3}{20} = 0{,}15$$

$$\nu_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50: \quad \nu_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = 0{,}15 + 0{,}50 + 0{,}35 = 1$ ödənilir.

Onda statistik paylanma qanunu belə olar:

$x1$	2	6	12
ν_i	0,25	0,5	0,35

x_1 variantlarının artma qaydaları ilə düzülüşünə seçimin variasiya sırası deyilir.

SEÇİMİN EMPRİK PAYLANMA FUNKSİYASI

Baş küllüyatın paylanmasını təqribi qiymətləndirmək üçün seçimin empirik paylanmasından istifadə olunur.

Tutaq ki, ξ baş küllüyatından götürülmüş n həcimli seçimin statistik paylanma qanunu məlimdir.

n_x ilə baxılan n- həcmli seçimin x ədədindən kiçik qiymət alan variantlarının (elementlərinin) sayını işarə edək. Aydındır ki, $\frac{n_x}{n}$ nisbəti $\{\zeta < x\}$ hadisəsinin nisbi tezliyi olur və x dəyişdikdə bu nisbi tezlik də dəyişir, yəni x-in funksiyası olur. Bu funksiyanın qiymətləri təcrübi (empirik) yolla tapılır. Bu səbəbdən ona empirik funksiya deyilir.

Tərif. n həcmli statistik seçimin empirik paylanma funksiyası $F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, $x \in R$ bərabərliyi ilə təyin olunur.

Baş küllüyatın, yəni ξ təsadüfi kəmiyyətin paylanma funksiyası nəzəri paylanma funksiyası adlanır və $F(x) = P(\xi \le x)$ bərabərliyi ilə təyin olunur.

Ehtimal nəzəriyyəsində mühüm rol oynayan böyük ədədlər qanununa görə seçimin həcmi artdıqca $\{\xi \le x\}$ hadisəsinin nisbi tezliyi bu hadisənin ehtimalına yaxın qiymətlər alır. Bu o deməkdir ki, $F^*(x)$ və $F(x)$ funksiyaları bir-birindən az fərqlənirlər, yəni $F(x)$ nəzəri paylanma funksiyasının qiymətlərinin yerinə $F^*(x)$ empirik paylanma funksiyasının qiymətlərini təqribi olaraq götürmək olar.

Misal. Aşağıdakı statistik seçimin empirik paylanmasını qurun.

Variantlar x_i	2	6	10
Tezlik n_i	12	18	30

Həlli. Seçimin həcmi $n = 12 + 18 + 30 = 60$ olur. Ən kiçik variant $x_1 = 2$ – dir, deməli $x \le 2$ olduqda $F^*(x) = 0$ ($\{\xi < 2\}$ hadisəsi müşahidə olunmur.

Aydındır ki, $\{\xi < 6\}$ hadisəsi, yəni ξ-nin $x_1 = 2$ qiyməti 12 dəfə müşahidə olunur, deməli $2 < x \le 6$ olduqda

$$F^*(x) = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} = 0{,}2 \text{ olur.}$$

$\{\xi < 10\}$ hadisəsi, yəni $x_1 = 2$ və $x_2 = 6$ qiymətləri 12+18=30 dəfə müşahidə olunur, deməli $6 < x \le 10$ olduqda

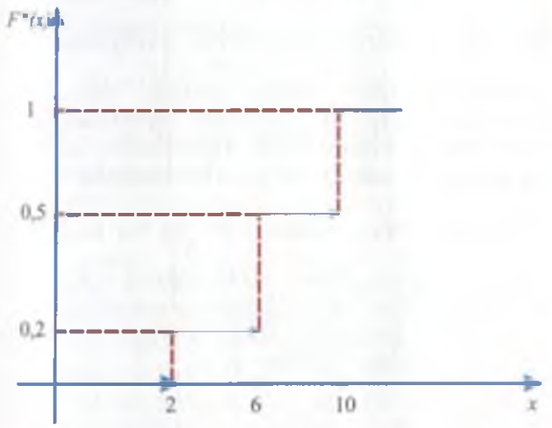
$$F^*_{(x)} = \frac{30}{60} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \text{ olur.}$$

Nəhayət, $x_3 = 10$ variantı ən böyükdür, deməli $x > 10$ olduqda $F^*(x) = 1$ olur.

Beləliklə, axtarılan empirik paylanma funksiyası

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}2 & 2 < x \le 6 \\ 0{,}2 & 6 < x \le 10 \\ 1, & x > 10 \end{cases} \text{ olur.}$$

Bu funksiyanın qrafik təsviri belədir:



STATİSTİK SEÇİMİN POLİQONU VƏ HİSTOQRAMMASI

Seçimin statistik paylanmasını əyani (qrafiki) təsvir etmək üçün poliqon və histoqrammadan istifadə etmək əlverişli olur.

Tezliklərin poliqonu dedikdə $(x_1, n_1), (x_2, n_2) \ldots (x_k, n_k)$ nöqtələrini birləşdirən düz xətt parçalarının əmələ gətirdiyi əyri başa düşülür. Bu əyrini qurmaq üçün koordinat sistemində absis oxu üzərində x_i variantlarını, ordinat oxu üzərində isə n_i tezliklərini qeyd edirik, sonra (x_i, n_i) nöqtələrini düz xətt parçaları ilə birləşdirərək tezliklərin poluqonunu təsvir edən əyrini alırıq.

Eyni qayda ilə nisbi tüzliklərin poliqonunu qura bilərik.

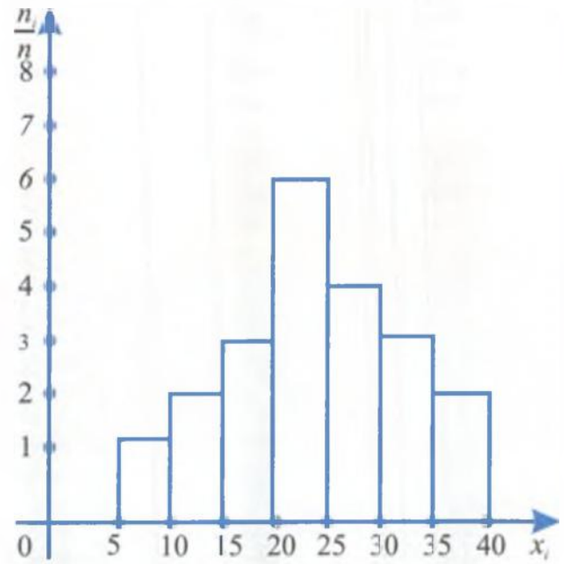
Bunun üçün absis oxunda x_i variantlarını, ordinat oxunda isə $\nu_i = \frac{n_i}{n}$ nisbi tezlikləri qeyd edirik və (x_i, ν_i) nöqtələrini düz xətt parçaları ilə birləşdirərək nisbi tezliklərin poliqonunu təsvir edən əyrini alırıq.

Qeyd edək ki, ξ təsadüfi kəmiyyəti (baş küllüyat) sonlu və ya hesabi sayda olduqda seçimin təsviri poliqonlarla verilir.

Misal. Seçimin statistik paylanma qanunu belə verilmişdir.

x_i	1,5	3,5	5,5	7,5
ν_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Uyğun poliqonu quraq:



Əgər ξ təsadüfi kəmiyyətin qiymətləri həqiqi oxun müəyyən bir aralığını (hissəsini) doldurursa, onda statistik paylanmanı histoqrammalarla təsvir etmək əlverişlidir. Bu halda bütün müşahidə olunan qiymətləri özündə saxlayan intervalı uzunluğu h olan kiçik intervallara bölürlər və hər bir interval üçün ona düşən variantların tezliklər cəmi (n_i) tapılır.

Tezliklər histoqramması oturacaqları uzunluğu h olan intervallardan təşkil olunmuş və $\frac{n_i}{n}$ hündürlüyə malik düzbucaqlılardan təşkil olunmuş pilləvari fiqura deyilir. $\frac{n_i}{h}$ nisbətinə tezliyin sıxlığı deyilir.

Tezliklər histoqrammasını qurmaq üçün absis oxu üzərində h uzunluqlu intervalları qeyd etmək və onlar üzərində $\frac{n_i}{h}$ məsafədən absis oxuna paralel düz xətt parçası (uzunluq h olan) çəkmək lazımdır. Beləliklə, düzbucaqlılardan ibarət olan və

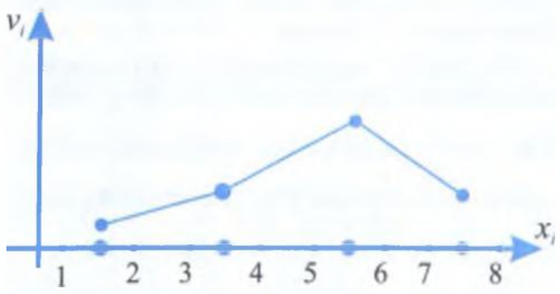
histoqrammanı təsvir edən fiqur alırıq.

i-ci düzbucaqlının sahəsi $h\cdot\frac{n_i}{h}=n_i$-ə, yəni i-ci intervala düşən variantların tezlikləri cəminə bərabər olur. Histoqrammanın sahəsi isə bütün tezliklər cəminə, yəni seçimin həcminə $(n=\sum_i n_i)$ bərabər olur.

Misal. $n=1000$ seçimin tezliklərinin paylanması cədvəldə belə verilmişdir.

h=uzunluqlu intervallar	Variantların tezliklər cəmi n_i	Tezliyin sıxlığı $\frac{n_i}{h}$
5-10	4	0,8
10-15	6	1,2
15-20	16	3,2
20-25	36	7,2
25-30	24	4,8
30-35	10	2,0
35-40	4	0,8

Bu cədvəldə verilmiş tezliklərin paylanmasına uyğun histoqrammanı belə təsvir etmək olar:



Eyni qayda ilə nisbi tezliklərin histoqrammasını qurmaq olar. Beləki, oturacaqları uzunluğu h olan intervallardan və hündürlükləri $\frac{v_i}{h}$ (nisbi tezliyin sıxlığı) olan düzbucaqlılardan təşkil olunmuş pilləvari fiqur nisbi tezliklərin histoqramması olur. Bu histoqrammanı qurmaq üçün absis oxu üzərində uzunluqları h olan intervalları qeyd edirik və onların üzərindən $\frac{v_i}{h}$ məsafədən absis oxuna paralel düz xətt parçaları keçiririk. Alınmış düzbucaqlılardan ibarət fiqur nisbi tezliklərin histoqrammasını təsvir edir. Bu fiqurda $i-$ci düzbucaqlının sahəsi $h\cdot\frac{v_i}{h}=v_i$-ə, yəni $i-$ci intervala düşən variantların nisbi tezliyinə bərabər olur. Histoqrammanın özünün sahəsi isə bütün nisbi tezliklərin cəminə, yəni vahidə bərabər olur.

BAŞ KÜLLÜYATIN VƏ SEÇİMİN ORTA QİYMƏTİ

Fərz edək ki, ξ təsadüfü kəmiyyəti və ya baş küllüyat diskretdir və onun həcmi N-dir: $x_1,x_2,...x_N$

Baş küllüyatın orta qiyməti onun variantlarının (elementlərinin) ədədi ortasına deyilir və $\bar{x}_b$ kimi işarə edilir.

Əgər $x_1,x_2,...x_n$ qiymətləri müxtəlifdirsə, onda

$$\bar{x}_b=\frac{x_1+...x_N}{N}$$ olar.

Əgər $x_1,x_2,...x_k$ qiymətləri uyğun olaraq $N_1N_2...N_k$ tezliklərinə malikdirsə, $(N_1+N_2+...+N_k=N)$ onda

$$\bar{x}_b=\frac{x_1\cdot N_2+x_2N_2+...x_kN_k}{N}$$ olur.

Biz $\bar{x}_b-$ yə baş orta qiymət deyilir.

İndi fərz edək ki, baş küllüyatdan həcmi n olan $X_1,X_2...,X_n$ seçimi götürülmüşdür.

Seçimin orta qiyməti seçimin variantlarının ədədi ortasına deyilir və $\bar{X}_s$ ilə işarə edirik. Əgər n həcmli $X_2,X_2,...X_n$ həcminin elementləri müxtəlifdirsə, onda

$$\bar{X}_s=\frac{X_1+...+X_n}{n}$$ olur.

Əgər n həcmli seçimdə $X_1,X_2,...X_k$ elementləri uyğun olaraq $n,n_2,...n_k$ tezliyinə malik olarsa, beləki $n_1+n_2+...+n_k=n$, onda

$$\bar{X}_s=\frac{n_1X_1+n_2X_2+...+n_kX_k}{n}$$ olur.

$\bar{X}_s$-ə seçim orta qiymət deyilir.

Qeyd: Seçimin orta qiyməti onun konkret realizasiyaları üzrə hesablandıqda müəyyən bir ədədə bərabər olar. Əgər seçimin həcmini eyni saxlamaqla digər seçim götürsək və onun orta qiymətini hesablasaq, aydındır ki, başqa bir ədəd alınacaqdır, yəni seçimin orta qiyməti seçimin realizasiyalarından asılı olaraq dəyişir və müxtəlif qiymətlər alir. Beləliklə, seçimin orta qiymətinə biz təsadüfi kəmiyyət kimi baxa bilərik və onun nəzəri və emprik paylanmasından danışa bilərik.

İndi riyazi statistikanın əsas məsələlərinin qısa şərhini Bernulli sxemi üçün verək.

1. Bernulli sxemi üçün statistik fərziyyələrin yoxlanması. Fərz edək ki, n sayda Bernulli sınaqları aparılır və m sayda "müsbət" nəticə baş verir. Tutaq ki, "müsbət" nəticənin baş vermə ehtimalı p məlum deyil və müəyyən praktiki mülahizələrin köməyi ilə $p=p_0$ olduğu fərz olunur, burada p_0- müəyyən qeyd olunmuş qiymətdir. $\frac{m}{n}$ nisbi tezliyə görə biz $p=p_0$ statistik fərziyyəsinin doğru və ya yalan olduğunu göstərməliyik.

Ehtimal nəzəriyyəsindən məlumdur ki, böyük n-lər üçün $\frac{m}{n}$ nisbi birliyi p ehtimalına yaxın qiymətlər alır. Onda $p=p_0$ fərziyyəsini yoxlamaq üçün $\left|\frac{m}{n}-p_0\right|$ fərqinə baxmaq lazımdır. Əgər bu fərq çox böyük olarsa, onda baxılan fərziyyə doğru deyil. Əgər baxılan fərqin qiyməti kiçik olarsa, onda $p=p_0$ fərziyyəsini qəbul etmək olar.

2. Naməlum parametrin statistik qiymətləndirilməsi. Berulli sxemində bəzən tələb olunur ki, baş verən müsbət nəticələrin məlum m sayına görə naməlum p ehtimalını (parametrini) tapaq. Baxılan halda təbii olaraq p əvəzinə $\hat{p}=\frac{m}{n}$ statistik qiymətini götürmək olar. Statistik qiymət müəyyən mənada qiymətləndirilən parametrə yaxın olmalıdır.

3. Etibarlılıq intervalları. Bernulli sxemində çox hallarda naməlum parametrin dəqiq qiymətinin tapılması tələb olunmur. Elə $\underline{p}\le p\le\bar{p}$ intervalının qurulması tələb olunur ki, naməlum parametrin həqiqi qiyməti vahidə yaxın ehtimalla bu intervalda yerləşsin. Burada $\underline{p}=\underline{p}(m)$, $\bar{p}=\bar{p}(m)$ uc nöqtələri yalnız m-dən asılı olaraq qiymətlər alan təsadüfi kəmiyyətlərdir.

$(\underline{p},\bar{p})$-aralığına p ehtimalı üçün etibarlılıq intervalı deyilir.

ÇOXLUQLAR VƏ ƏMƏLLƏR

ÇOXLUQLAR VƏ ONLARIN ELEMENTLƏRİ

– Seymur, pəncərədən bax, gör quşların necə gözəl kolleksiyası var! – uşaq öz məktəbli qardaşının pencəyinin qolunu dartışdırdı.

– Kolleksiya yox, qatar. Şəkil kolleksiyası, qiymətli daşlar kolleksiyası olur. Quşlar qatarla uçur, balıqlar karvanla üzür.

– Bəs niyə fərqli adları var? Axı bunlar hamısı bir şeydir...

Uşaq haqlı idi. Həqiqətən, bu anlayışlarda ümumi bir şey var. Oxşar hallarda riyaziyyatda adətən çoxluq anlayışından istifadə olunur, baxılan çoxluqdakı şeylərə isə çoxluğun ünsürləri (və ya elementləri) deyilir. Əgər a M çoxluğunun ünsürüdürsə, onda $a \in M$ yazırlar; əgər b M çoxluğunun ünsürü deylsə, onda $b \notin M$ yazırlar. Məsələn, fərz edək ki, F bütün ərəb rəqəmləri çoxluğudur. Onda

$$2 \in F,\ 0 \in F,\ 12 \notin F,\ -5 \notin F$$

Riyaziyyatda çoxluq deyəndə nəzərdə tuturlar ki, verilmiş istənilən əşyanın baxılan çoxluğa aid olub-olmamasını ayırd etmək imkanı var. Lakin "ayırd etmək imkanı var" deyəndə biz bunu etməyin asan olduğunu nəzərdə tutmuruq. Məsələn, 1, 2, 3 rəqəmlərindən ibarət olan çoxluğu M-lə işarə edək. $\pi = 3{,}14159...$ ədədinin onluq yazılışında vergüldən sonra yüz mininci yerdə duran rəqəmi a ilə işarə edək. Prinsipial olaraq (məsələn, kompyuterin köməyi ilə) $a \in M$ olub-olmadığını təyin etmək olar. Lakin $a \in M$, $a \notin M$ hansının doğru olduğunu dərhal söyləmək olmaz.

Bəzən adama elə gəlir ki, verilmiş çoxluq dəqiq və aydın təyin olunub, lakin əslində bu belə deyil. Məsələn, A çoxluğunu belə təyin edək: o hər biri rus dilindəki iyirmidən çox olmayan sözün köməyi ilə təyin olunan bütün təbii (natural) ədədlərdir. Çoxluq sonludur (belə ki, rus dilindəki sözlərin sayı sonludur). Fərz edək ki, $n_1, n_2, ..., n_K$ A çoxluğunun bütün ünsürləridir. $m = n_1 + n_2 + ...+ n_K$ ədədini götürək, yəni ***m* iyirmidən artıq olmayan rus sözü ilə götürülə bilən bütün natural ədədlərin cəmidir.** Onda m A çoxluğuna daxil olmalıdır, çünki iyirmidən artıq olmayan rus sözü ilə (yağlı şriftlə ayrılmış sözlər) ifadə olunub. Deməli, m $n_1, n_2,...,n_K$ *ədədlərinin biriylə üst-üstə düşür. Lakin axı*

$m = n_1 + n_2 + ...+ n_K$, yəni $n_1, n_2, ...,n_K$ ədədlərinin hər birindən böyükdür. Buradan alınır ki, A çoxluğu korrekt təyin olunmayıb.

Sonlu çoxluqlar daha sadədir. Deyimin mənası aydındır: bunlar sonlu sayda ünsürdən ibarət olan çoxluqlardır. Lakin riyaziyyatda sonsuz çoxluqlara da, yəni sonsuz sayda ünsürdən ibarət olan çoxluqlara da baxılır. Bütün natural ədədlər çoxluğu, bütün rasional ədədlər çoxluğu, bütün həqiqi ədədlər çoxluğu, bütün çoxhədlilər çoxluğu, müstəvi üzərində bütün çevrələr çoxluğu və s. sonsuz çoxluqlardır.

Əgər çoxluq sonludursa və özü də az ünsürdən ibarətdirsə, onda onun bütün ünsürlərini sayaraq təyin etmək münasibdir. Bundan ötrü fiqurlu mötərizələrdən istifadə olunur. Bu üsulla yuxarıda təyin olunmuş çoxluğu verək:

$$F = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$$

Çoxluq, məsələn {0} çoxluğu kimi, bir ünsürdən də ibarət ola bilər. {0} çoxluğunu onun ünsürü 0 və ya {{0}} çoxluğu, yəni yeganə ünsürü 0 ünsüründən ibarət çoxluq ilə qarışdırmaq olmaz.

$$0 \in \{0\}, \{0\} \in \{\{0\}\}, \{0\} \notin \{0\} \text{ və } 0 \notin \{\{0\}\}$$

Bəzən boş çoxluğa, yəni heç bir ünsürü olmayan çoxluğa baxmaq lazım gəlir. Onu $\varnothing$ rəmzi ilə işarə edirlər. Tərəfləri tam ədəd olan və perimetri əsli (sadə) ədədlə ifadə olunan T düzbucaqlar çoxluğu götürək. T-nin mahiyyətini dərhal təyin etmək çətindir, lakin bir qədər mühakimə yürüdüb onun boş çoxluq olduğu qənaətinə gəlmək olar, yəni $T = \varnothing$. Qeyd edək ki, $\varnothing$ çoxluğu 0, $\{\varnothing\}$ çoxluğu isə bir ünsürdən –

$$\varnothing \in \{\varnothing\}$$

ünsüründən ibarətdir.

Bəzən bir çoxluq o birinin daxilində olur: məsələn{1, 2, 3} F çoxluğunun hissəsidir. Riyaziyyatçılar çoxluqlar haqqında danışarkən "hissə" sözünün yerinə "məxsusi alt çoxluq" deyimi işlədirlər.

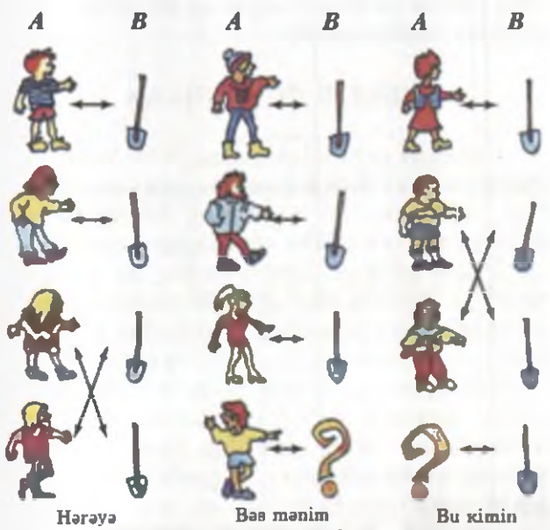
Ümumiyyətlə, A çoxluğunun hər bir ünsürü, eyni zamanda B çoxluğunun ünsürüdürsə, onda A çoxluğu B çoxluğunun alt çoxluğu adlanır. Bu, $A \subset B$ yazısıyla ifadə olunur. B çoxluğunun özü də özünün alt çoxluğudur: $B \subset B$. B çoxluğunun hər bir digər A alt çoxluğu (yəni elə çoxluq ki, B-də A-da olmayan heç olmazsa bir ünsür olsun) isə B çoxluğunun məxsusi alt çoxluğu adlanır. Beləliklə, əgər A B-nin alt çoxluğudursa, ya A və B üst-üstə düşür, ya da AB-nin məxsusi alt çoxluğudur. Bir neçə misal göstərək:

$$F \subset F,\ \{1,2,3\} \subset F,\ F \not\subset \{1,2,3\}$$

Hesab olunur ki, boş çoxluq ixtiyari çoxluğun alt çoxluğudur M: $\varnothing \subset M$

İndi isə fərz edək ki, A və B çoxluqları müxtəlif ünsürlərdən ibarətdir. Onları müqayisə etmək olarmı? Belə bir misala baxaq.

Bir sinfin şagirdləri bostan belləməyə gəliblər. Onların kifayət qədər kürəyə (belə) malik olub-olmadıqlarını necə bilməli? Əlbəttə, şagirdləri saymaq, sonra isə ayrıca kürəkləri saymaq olar. Lakin başqa cür də etmək olar: fərz edək ki, şagirdlər bir-bir yeşiyə yaxınlaşır və hərə bir kürək götürür. Əgər hamıya kürək çatıbsa və yeşikdə kürək qalmayıbsa, saymağa ehtiyac yoxdur: şagirdlərin və kürəklərin sayı bərabərdir. Biz şagirdlər çoxluğu ilə kürəklər çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq müəyyənləşdirdik, yəni birinci çoxluğun hər bir ünsürünə (şagirdə) ikinci çoxluğun bir ünsürünü (onun götürdüyü kürəyi; şəkil 1) qarşı qoyduq. Kürəklər çox və ya az olardısa, qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq alınmazdı (şəkil 2,3). İki çoxluğun ünsürləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğun olması onu göstərir ki, bu çoxluqlarda "eyni ilə çox" ünsür var.

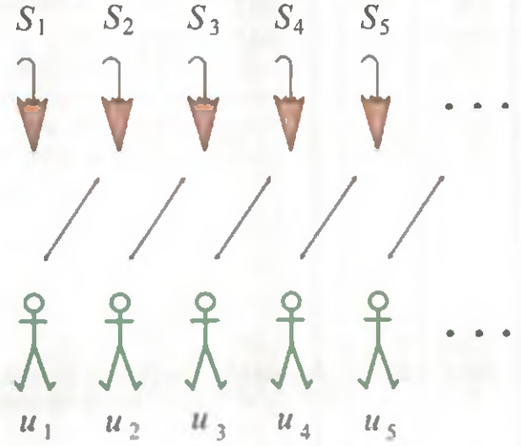


Şəkil 1. *Şəkil 2.* *Şəkil 3.*

Hissə tamdan kiçikdir, məntiq elminin yaradıcısı, böyük yunan mütəfəkkiri Aristotelin formulə etdiyi prinsiplərdən birində belə deyilir. Başqa sözlə, A çoxluğunun bütün ünsürləri və B çoxluğunun ünsürlərinin bir hissəsi arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin etmək mümkün olursa, onda A-dakı elementlərin sayı B-dəkindən azdır. Lakin Aristotel prinsipi sonlu çoxluqlara baxıldıqda yaxşıdır. Sonsuz çoxluqlar bu baxımdan özlərini qeyri-adi aparırlar.

SONSUZ ÇOXLUQLAR

Sonsuz yerli bir teatrda yerlər natural ədədlərlə nömrələnmişdi: 1 saylı yer, 2 saylı yer,...,n saylı yer, ... Premyeraya bütün biletlər satılmışdı və teatra sonsuz çox tamaşaçı gəlmişdi. Birinci (yəni 1 saylı yerə biletin sahibi), ikinci, ..., n-ci,...Yağış yağırdı və bütün tamaşaçılar çətir götürmüşdülər. Onlar çətirlərini qarderobda (özünəxidmət qaydasında) uyğun qarmaqlara birinci tamaşaçı 1 saylı qarmağa, ikinci 2 saylı qarmağa və s. asdılar. Tamaşadan sonra tələsik 2 saylı qarmaqdakı çətiri, ikinci 3 saylı qarmaqdakı çətiri, ..., n-ci tamaşaçı



Şəkil 1.

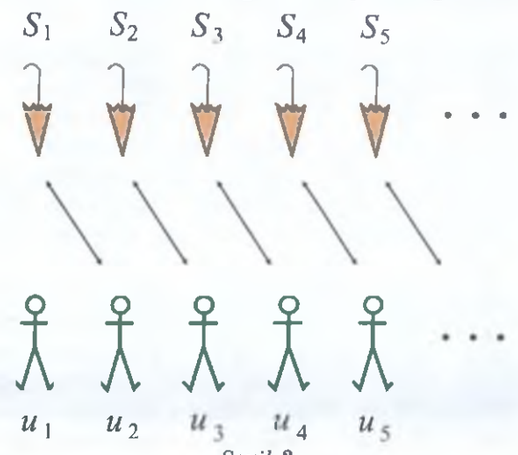
n+1 saylı qarmaqdakı çətiri... götürdülər. Nəticədə bütün tamaşaçılar çətirlə getdilər, lakin (bu sonsuz böyük teatrın müdiriyyətinin təəccübü ilə) 1 saylı qarmaqda bir "artıq" çətir qaldı.

Beləliklə, əgər biz tamaşaçıları u_1, u_2,..., çətirləri isə s_1, s_2,... rəmzləri ilə işarə etsək, onda şəraiti belə təsvir etmək olar. Hər bir tamaşaçı öz çətiri ilə gəlmişdi, yəni bütün tamaşaçıların $U = \{u_1, u_2,...\}$,çoxluğu ilə bütün çətirlərin $S = \{s_1, s_2,...\}$ qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq var. Lakin tamaşadan sonra digər uyğunluq qərarlaşdı ki, burada da bütün tamaşaçıların $U = \{u_1, u_2,...\}$ çoxluğu və bütün çətirlərin $\{s_2, s_3,...\}$ alt çoxluğu bir-birlərinə qarşılıqlı birqiymərtli uyğun gəlir. Belə çıxır ki, bütün çətirlərin S çoxluğunun $\{s_2, s_3,...\}$ hissəsi bütün S çoxluğu "qədər" ünsürə malikdir.

Baxılan misaldan çıxır ki, "hissə tamdan kiçikdir" prinsipi sonsuz çoxluqlar üçün doğru deyil. Ümumiyyətlə, ixtiyari sonsuz M çoxluğunda onun elə məxsusi M_1 alt çoxluğunu seçmək olar ki, M və M_1, yəni çoxluq və onun hissəsi arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq mövcuddur. Bu, sonsuz çoxluqların sonlulardan səciyyəvi fərqidir.

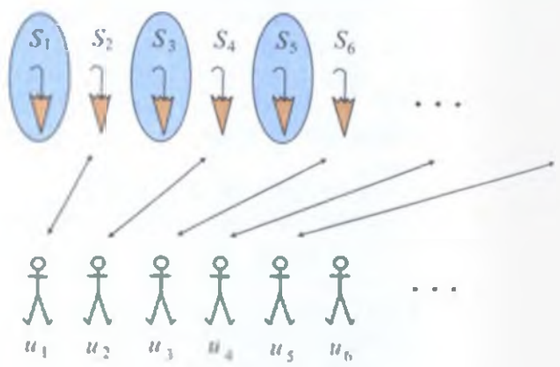
Sonsuz çoxluqların spesifikliyini tam təsəvvür etmək üçün xatırladılan sonsuz böyük teatrda digər tamaşalar zamanı baş verən hadisələri təsvir edək.

Bir dəfə yenə hava yağmurlu idi və bütün tamaşaçılar teatra çətirlə gəlmişdilər. Tamaşadan sonra birinci tamaşaçı rejissorla söhbət edərkən digərləri çıxıb getdilər.



Şəkil 2.

İkinci tamaşaçı 1 saylı çətiri, üçüncü tamaşaçı 2 saylı çətiri və s. götürdü (şəkil 2). Nəticədə birinci tamaşaçı çətirsiz qaldı!



Şəkil 3.

Başqa bir (yenə də yağmurlu) gün birinci tamaşaçı tamaşadan sonra 2 saylı çətiri, ikinci 4 saylı çətiri, n-ci $2n$ saylı çətiri... götürdü. Nəticədə hamı çətirlə getdi, lakin qarderobda sonsuz sayda çətir (lakin tək saylı çətirlər) qaldı. Ertəsi gün hava günəşli idi və hamı çətirsiz gəlmişdi. Lakin tamaşa gedərkən hava korlandı və yağış fışqırdı. Müdiriyyət qarderobda dünəndən qalma sonsuz sayda çətirin olduğunu deyərək tamaşaçıları sakitləşdirdi.

HESABİ ÇOXLUQLAR

Sonsuz çoxluqlarla əlaqəli bir sıra anlayışları təyin edək. İki çoxluq arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin etmək mümkündürsə, belə çoxluqlar ekvivalent çoxluqlar adlanır. Lakin bu heç də o demək deyil ki, birinci çoxluğun ünsürlərinə ikincininkiləri qarşı qoymaq çoxluqlar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin etməyə imkan verəcək. Çətirlər olayı buna bariz misaldır. Lakin A və B çoxluqlarının ünsürləri arasında hər hansı qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin edilərsə, bu çoxluqlar ekvivalentdirlər.

$N = \{1, 2, ...\}$ natural ədədlər sırasına ekvivalent olan hər bir çoxluq hesabi çoxluq adlanır. Başqa sözlə, M çoxluğu o zaman hesabidir ki, onu

$$M = \{m_1, m_2, m_3, ...\}$$

şəklində göstərmək (M çoxluğunun bütün ünsürlərini natural ədədlərlə nömrələmək) mümkün olsun. Bu fikri başqa cür ifadə edək: M çoxluğu o zaman hesabidir ki, o, sonsuz sayda ünsürə malikdir, özü də onları natural ədədlərlə nömrələnmiş şəkildə: birinci ünsür, ikinci ünsür, üçüncü ünsür ... düzmək olar.

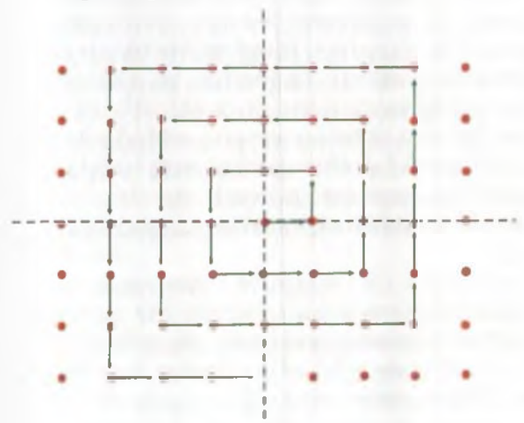
Bir tərəfdən, heç bir sonlu çoxluq hesabi deyil. Digər tərəfdən, hesabi çoxluğun ixtiyari sonsuz alt çoxluğu özü sayıla biləndir. Xüsusi halda, hansı sonsuz natural ədədlər alt çoxluğunu götürsək, o bütün natural ədədlər çoxluğuna ekvivalent olacaq. Lakin bu da hamısı deyil.

Natural ədədlər, sıfır və mənfi tam ədədlərdən ibarət olan bütün tam ədədlər çoxluğu hesabidir, belə ki, onun ünsürlərini

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...$$

şəklində göstərmək olur.

Koordinat müstəvisinin bütün tam saylı nöqtələrinin (hər iki koordinatı tam ədəd olan nöqtələrin) çoxluğunun hesabi olması müddəası ilk baxışda gözlənilməzdir. Şəkil 4-də spiralşəkilli sınıq xətt boyunca hərəkət edərək bu çoxluğun ünsürlərini necə yerləşdirmək lazım gəldiyi göstərilib. Bütün rasional ədədlər (p/q şəkilli ədədlər, burada p və q tam ədədlərdir, özü də $q > 0$)



Şəkil 4.

çoxluğu da hesabidir. Doğrudur, bu, inanılmaz görünür: tam ədədlər ədəd oxunda diskret yerləşsə də, rasional ədədlər sıx yerləşir və ixtiyari parça nə qədər kiçik olsa da, onda rasional nöqtələr olacaq. Rasional ədədləri aşağıdakı kimi ardıcıllıq şəklində yerləşdirək. Əvvəlcə surət və məxrəcinin modulları cəmi 1 olan ədədləri, yəni yeganə $0/1 = 0$ ədədini yazaq. Sonra həmin cəmi 2 olan ədədləri götürək: $0/2$, $1/1$, $-1/1$; onların birincisi sıfırdır ki, o, artıq olub, o biriləri isə 1 və -1-dirlər. Sonra isə surətinin və məxrəcinin modulları cəmi 3 olan ədədlər gəlir: $2/1$, $-2/1$, $1/2$, $-1/2$, (əvvəllər götürülmüş $0/3 = 0$ sayılmır). Aydındır ki, ixtiyari p/q rasional ədədi gec və ya tez belə bir ardıcıllıqla rastlaşacaq.

Başqa misallar. Rasional əmsallı bütün çoxhədlilər çoxluğu hesabidir. Müstəvi üzərində bütün rasional nöqtələrin (hər iki koordinatı rasional olan nöqtələrin) çoxluğu da hesabidir. Eyni müddəa fəzadakı nöqtələr üçün də doğrudur. Bütün cəbri ədədlərin – hər biri tam əmsallı hər hansı çoxhədlinin kökləri olan ədədlərin, çoxluğu hesabidir.

QEYRİ-HESABİ ÇOXLUQLAR

Hər bir sonsuz çoxluq hesabidirmi? Bu suala mənfi cavabı sonsuz çoxluqlar nəzəriyyəsinin banisi Georq Kantor verib. Kantor teoreminə əsasən bütün həqiqi ədədlərin **R** çoxluğu qeyri-hesabidir. Aşağıda bu teoremin Kantor diaqonal prosesi adlanan nəfis isbatı gətirilir.

Əvvəlcə bütün həqiqi ədədlərə yox, yalnız 0 –la 1 arasında yerləşənlərə baxaq. İsbat edək ki, verilmiş çoxluq qeyri-hesabidir. Əksini fərz etmək yolu ilə isbat edəcəyik. Fərz edək ki, o, hesabidir və ona daxil olan ədədləri nömrələyək:

$$a_1, a_2,...,a_n, ... \qquad (*)$$

Hər bir həqiqi ədədi sonsuz onluq kəsr şəklində yazmaq olar. Əgər onluq kəsr sonludursa, deməli müəyyən yerdən onluq yazılışın bütün rəqəmləri sıfırdır. (*) ədədini onluq kəsrlər şəklində, məsələn belə yazaq:

$$a_1 = 0,483751...,$$

$$a_2 = 0,479512...,$$

$$a_3 = 0,038179...,$$

$$a_4 = 0,576309...$$

Göstərilən yazılışda diaqonal boyu dayanan rəqəmlər xətlənib. İndi isə belə bir qaydanı əsas gətirib sonsuz b kəsrini tərtib edək: əgər diaqonal (yəni n-ci) yerdə a_n ədədində diaqonal (yəni n-ci) yerdə vergüldən sonra 7 rəqəmi dursa, b ədədində n-ci yer-

də 3 rəqəmini yazaq; qalan bütün hallarda b ədədində n-ci yerdə 7 rəqəmi duracaq. Belə ki, yuxarıdakı yazılışda yalnız a_2 ədədində diaqonal (xətlənmiş) rəqəm 7 – dir, a_1, a_3, a_4 ədədlərində isə diaqonal ədədlər 7 – dən fərqlidir. Buna görə də b ədədində ikinci rəqəm 3, qalan (ilk dördündən) rəqəmlər 7 – dir:

$$b = 0{,}7377...$$

Beləliklə, b ədədində birinci yerdə a_1 ədədinin birinci rəqəmindən fərqli rəqəm dayanır; b ədədində ikinci yerdə a_2 ədədinin ikinci rəqəmindən fərqli rəqəm dayanır və s. Alınır ki, b a_1 ilə üst-üstə düşmür – onların birinci rəqəmləri fərqlidir. b ədədi a_2 ilə üst-üstə düşmür – onların ikinci rəqəmləri fərqlidir. O, heç bir a_n ilə üst-üstə düşmür, çünki a_n və b ədədlərində n-ci yerdə fərqli rəqəmlər dayanır. Beləliklə, b ədədi (*) ədədləri arasında yoxdur. Lakin bu, (*) ədədləri sırasında 0 və 1 arası bütün həqiqi ədədlərin olması fərziyyəsinə ziddir. Görürük ki, çoxluğun hesabi olması haqqında fərziyyə ziddiyyətə gətirib-çıxarır. Deməli, bizim fərziyyəmiz yanlışdır: A çoxluğu qeyri-hesabidir. Buna görə də R bütün həqiqi ədədlər çoxluğu da qeyri-hesabidir.

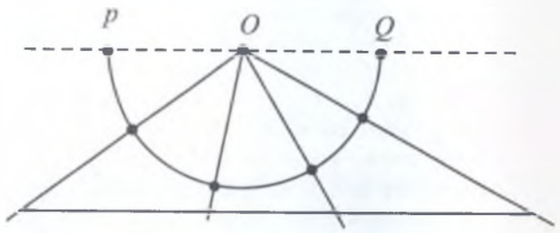
Bilavasitə Georq Kantorun teoremindən transendent – cəbri olmayan ədədlərin mövcudluğu çıxır. Doğrudan da, bütün ədədlər cəbri olsaydı, onda bütün həqiqi ədədlər çoxluğu hesabi olardı, bu isə doğru deyil.

ÇOXLUĞUN GÜCÜ

Ekvivalent çoxluqlar haqqında deyirlər ki, onlar eyni gücə malikdir. Beləliklə, güc yalnız sonlu çoxluqlar üçün məna kəsb edən "ünsürlər sayı", "elementlər sayı" anlayışının ümumiləşdirilməsidir. Hesabi sonluğun gücü $\aleph_0$ ($\aleph$, "əlif" hərfi qədim yəhudi əlifbasının ilk hərfidir), bütün həqiqi ədədlərin çoxluğu isə c (latınca continuum – "kəsilməz" sözündən) işarə edilir. Bütün həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri-hesabi olduğundan, $c > \aleph_0$.

$\aleph_0$ gücü ən kiçik sonsuz gücdür. Bu o deməkdir ki, ixtiyari sonsuz çoxluqdan hesabi alt çoxluq seçmək olar. Doğrudan da, fərz edək ki, M sonsuz çoxluqdur. Onun ixtiyari ünsürünü götürüb a_1 adlandıraq. M çoxluğu sonsuz olduğundan, onda a_1 - dən başqa digər ünsürlər də var. Fərz edək ki, a_2 onlardan biridir. M çoxluğunda a_1 və a_2 – dən başqa ünsürlər də var – M sonsuzdur; onların ixtiyari birini a_3 ilə işarə edək və s. Son nəticədə biz M çoxluğuna daxil olan $M_1 = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ hesabi çoxluğu alacağıq. Deməli, sonsuz M çoxluğu hesabi M_1 çoxluğundan az ünsürə malik deyil.

İxtiyari düz xətt parçası, ixtiyari sınıq xətt, ixtiyari çevrə, ixtiyari qövs düz xətlə eyni, yəni c gücə malikdir. Düz xəttə baxaq. Əgər onu mərkəzi O nöqtəsində olan yarımçevrə şəklində (şəkil 5) əysək, onda belə yarımçevrəni O mərkəzindən yarımçevrənin

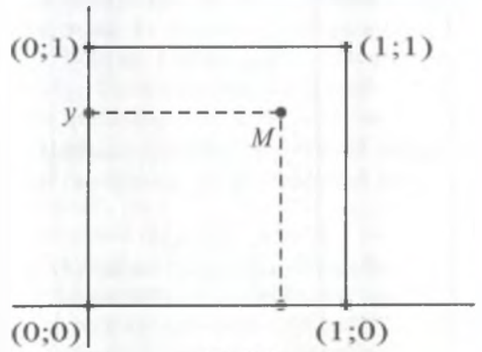


Şəkil 5.

PQ diametrinə paralel düz xəttə proyeksiyalasaq, ilkin parçanın və düz xəttin nöqtələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq təyin etmiş olarıq. Doğrudur, parçanın ucları (və ya PQ yarımçevrəsinin ucları) düz xəttin heç bir nöqtələrinə qarşı qoyulmayıb. Nəticədə parçada düz xətdən "iki nöqtə artıq olur". Lakin sonsuz çoxluğa sonlu sayda nöqtənin əlavə edilməsi onun gücünü dəyişmir.

İndi isə müstəvi fiqurlara baxaq. Adama elə gəlir ki, kvadrat düz xətt parçasından (məsələn, kvadratın tərəfindən) daha çox nöqtəyə malikdir. Lakin bu, düz deyil.Müstəvidəki rasional nöqtələr düz xətdəki rasional nöqtələrlə eyni sayda olduğuna oxşar olaraq (hər iki çoxluq hesabidir) müstəvi üzərində düz xətt üzərində olan qədər nöqtə var. Başqa sözlə, müstəvinin (ya üçölçülü, ya dördölçülü, ya çoxölçülü, ya da hətta sonsuz ölçülü fəzada) bütün nöqtələri çoxluğunun gücü düz xəttin bütün nöqtələr çoxluğunun gücü ilə üst-üstə düşür.

Kvadratda onun tərəfində olan nöqtələrin "sayı" qədər nöqtə olması faktının Kantor isbatını verək. Koordinat müstəvisində təpələri (0; 0), (1; 0), (1; 1), (0; 1) olan kvadrata baxaq (şəkil 6). Kvadratın hər bir M nöqtəsi iki koordinata: (x, y) malikdir,



Şəkil 6.

özü də onların hər biri [0, 1] parçasına məxsus olan həqiqi ədəddir, yəni $0 \le x \le 1$ və $0 \le y \le 1$. Deməli, x və y ədədləri sonsuz onluq kəsrlər şəklində yazıla bilərlər:

$$x = 0, a_1a_2a_3..., y = 0, b_1b_2b_3...$$

(Qeyd edək ki, həmişə tam hissəni sıfır hesab etmək olar: əgər $x = 1$ – dirsə, $x = 0$, 9999...yazmaq olar). x və y ədədlərinin onluq rəqəmlərini növbə ilə yazaraq "qarışdıraq" və

$$z = 0, a_1b_1a_2b_2a_3b_3...$$

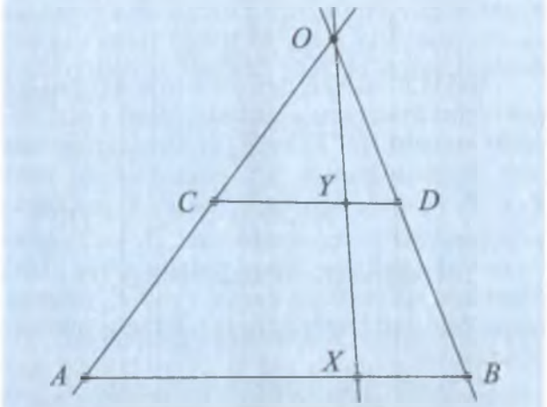
baxaq və onu kvadratın götürülmüş M nöqtəsinə (koordinatları x, y olan) uyğun qoyaq. Kvadratın bütün nöqtələri və [0, 1] parçasının nöqtələri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq alınır. Deməli, kvadrat və düz xətt parçası eyni gücə - kontinium gücünə malikdirlər.

Lakin elə zənn edilməsin ki, c – sonsuz güclərin ən böyüyüdür. Kantor teoreminin yuxarıdakı isbatını ümumiləşdirərək bu qənaətə gəlmək mümkündür ki, əgər M ixtiyari sonsuz çoxluqdursa, onda onun bütün alt çoxluqları çoxluğu M çoxluğunun gücündən böyük gücə malikdir. M çoxluğunun bütün alt çoxluqlarının gücü 2^m-lə işarə olunur, burada m M çoxluğunun gücüdür. Beləliklə, $2^m > m$. Xüsusi halda, ədəd oxunun bütün alt çoxluqları çoxluğu $2^c > c$ gücünə malikdir. Bu 2^c gücü hiperkontinium adlanır.

BƏRABƏR PARÇALAR "PARADOKSU"

Bərabər olmayan iki AB və CD parçalarını götürək və onları bir-birlərinə paralel yerləşdirək. AC və BD düz xətləri bir O nöqtəsində kəsişir. İndi isə AB parçasının ixtiyari X nöqtəsi üçün ikinci parçanı hər hansı Y nöqtəsində kəsən OX düz xətti keçirək. Y nöqtəsini AB – dəki X nöqtəsinə qarşı qoyaq. Beləliklə, AB və CD parçaları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq müəyyənləşdirilib, yəni verilmiş parçalar eyni miqdarda nöqtəyə malikdirlər. Deməli, onların uzunluğu eynidir.

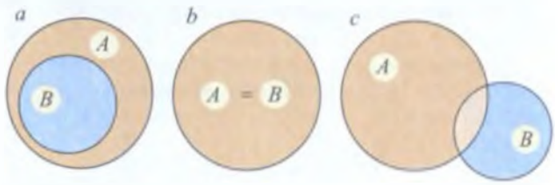
Bu "paradoksun" həlli asandır. Həqiqətən, hər iki parça "eyni miqdarda nöqtəyə malikdir", deməli, onların gücləri eynidir. Lakin güc və uzunluq – fərqli anlayışlardır və çoxluqların güclərinin bərabər olmasından onların uzunluqlarının bərabər olması çıxmır.



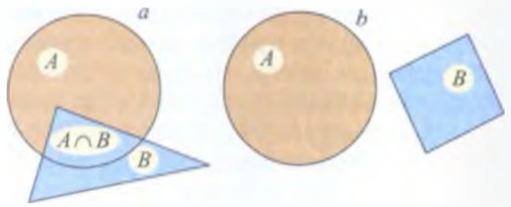
ÇOXLUQLAR ÜZƏRİNDƏ ƏMƏLLƏR

Çoxluqların qarşılıqlı münasibətinin əyani təsvirinin Eyler – Venn diaqramı adlanan çox münasib bir üsulu var. Onlarda çoxluqlar müstəvi fiqurlarla, əsasən dairələrlə təsvir olunur.

1, a şəklində A və B çoxluqları dairələrlə təsvir olunub, özü də görünür ki, B çoxluğu A çoxluğunun daxilindədir, yəni $B \subset A$, B isə A çoxluğunun məxsusi çoxluğudur və onunla üst-üstə düşmür. 1, b şəklində göstərilən A və B çoxluqları üçün də $B \subset A$ daxilolması doğrudur, lakin bu zaman A və B çoxluqları üst-üstə düşür. Beləliklə, $B \subset A$ yazısı bildirir ki, ya B A çoxluğunu məxsusi alt çoxluğudur, ya da $A = B$. 1, c şəklində heç biri digərinin alt çoxluğu olmayan iki çoxluq təsvir edilib.



Şəkil 1.

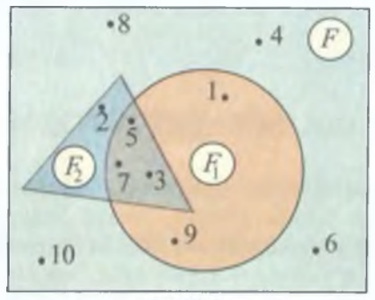


Şəkil 3.

Fərz edək ki, məsələn, F çoxluğu 10-u aşmayan bütün natural ədədlər çoxluğu, F_1 10-u aşmayan bütün tək ədədlər çoxluğu, F_2 10-u aşmayan bütün sadə ədədlər çoxluğudur. Başqa sözlə,

$$F = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\},$$
$$F_1 = \{1, 3, 5, 7, 9\},$$
$$F_2 = \{2, 3, 5, 7\}$$

Şəkil 2 - dəki Eyler – Venn diaqramı bu çoxluqlar arasındakı münasibətləri əyani şəkildə əks etdirir. F_1 və F_2 çoxluqlarının hər biri F çoxluğunun alt çoxluğudur, yəni $F_1 \subset F$, $F_2 \subset F$, özü də F_1 və F_2 F çoxluğunun məxsusi alt çoxluqlarıdır. F_1 və F_2 çoxluqlarına gəlincə isə, onların heç biri digərinin alt çoxluğu deyil: F_1 və F_2 çoxluqlarını bildirən hər bir fiqur o birinin hüdudlarını aşır.



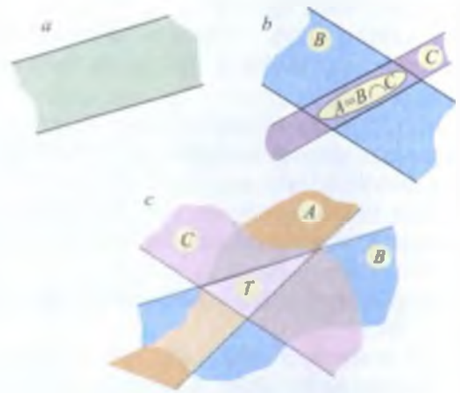
Şəkil 2.

ÇOXLUQLARIN KƏSİŞMƏSİ

Fərz edək ki, A və B iki çoxluqdur. Həm A çoxluğuna, həm də B çoxluğuna daxil olan birlikdə götürülmüş ünsürlər A və B çoxluqlarının kəsişməsi və ya $A \cap B$ adlanan bir çoxluq təşkil edirlər (şəkil 3, *a*). Əgər A və B çoxluqları ümumi ünsürlərə malik deyillərsə, yəni $A \cap B = \varnothing$, onda A və B çoxluqları kəsişməyən çoxluqlar adlanır (şəkil 3, *b*). Məsələn, F_1 və F_2 çoxluqları üçün (şəkil 2) $F_1 \cap F_2 \neq \varnothing$ münasibəti doğrudur, yəni bu çoxluqların kəsişməsi boş deyil:

$$F_1 \cap F_2 = \{3,5,7\}$$

Çoxluqların kəsişməsi haqqında məktəb həndəsə kursundan çoxlu misal gətirmək olar. Xüsusi halda zolağı (iki paralel düz xətt arasındakı müstəvi hissəsi) iki yarımmüstəvinin kəsişməsi kimi (şəkil 4, *a*), ixtiyari paraleloqramı isə iki zolağın kəsişməsi kimi (şəkil 4, *b*) təsəvvür etmək olar. Açıq bucaqdan kiçik olan bucaq da iki yarımmüstəvinin, üçbucaq isə üç yarımmüstəvinin (şəkil 4, *c*) kəsişməsidir. Ümumiyyətlə, ixtiyari qabarıq çoxbucaqlı yarımmüstəvilərin kəsişməsidir.

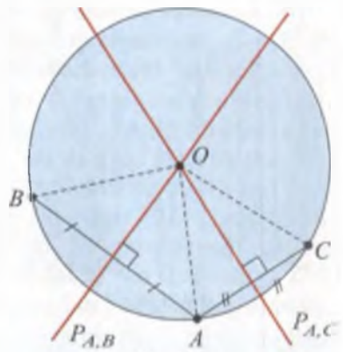


Şəkil 4.

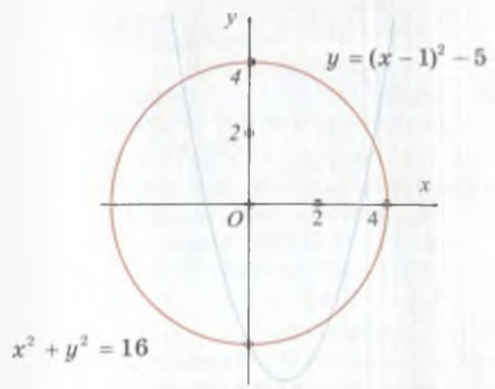
Belə bir məsələyə baxaq. Müstəvidə bir düz xətt üzərində olmayan üç A, B və C nöqtələri verilib. Bu üç nöqtədən keçən çevrə qurmaq tələb olunur.

Məsələni həll etmək üçün tələbi iki hissəyə ayıraq: 1) axtarılan çevrə A və B nöqtələrindən keçməlidir; 2) axtarılan çevrə A və C nöqtələrindən keçməlidir. Həm 1, həm də 2 şərtini ödəyən çevrə məsələnin həllidir.

Çevrə 1 şərtini ödəyirsə, onun O mərkəzi A və B nöqtələrindən radiusa bərabər olan eyni məsafədədir. Deməli, O, A və B nöqtələrinin $P_{A,B}$ orta perpendikulyarında yerləşir. Tərsi də doğrudur: əgər O nöqtəsi həmin orta perpendikulyarda yerləşirsə, onda A nöqtəsindən keçən O mərkəzli çevrə B nöqtəsindən də keçəcək. Başqa sözlə, $P_{A,B}$ 1 şərtini ödəyən bütün çevrə mərkəzləri çoxluğu, $P_{A,C}$ 2 şərtini ödəyən bütün çevrə mərkəzləri çoxluğudur. Lakin axtarılan çevrə hər iki şərti ödəməlidir. Deməli, onun mərkəzi $P_{A,B}$ və $P_{A,C}$ çoxluqlarının hər ikisinə məxsusdur, yəni $O \in P_{A,B} \cap P_{A,C}$. İki düz xəttin kəsişməsi $P_{A,B} \cap P_{A,C}$ yalnız bir nöqtədən ibarət olduğundan, bu nöqtə də çevrənin mərkəzidir (şəkil 5). Pərgarın iynəsini ona qoyub A nöqtəsindən çevrə keçirərək biz məsələni həll etmiş oluruq, belə ki, çevrə eləcə də B və C nöqtələrindən keçəcək.



Şəkil 5.



Şəkil 6.

Cəbrdən bir misal göstərək. Fərz edək ki,

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y - 4 = 0, \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$$

sistemini qrafik yolla həll etmək tələb olunur.

Başqa sözlə, hər iki tənliyi ödəyən x və y ədəd cütləri tapmaq tələb olunur.

Birinci tənliyi aşağıdakı şəkildə yazmaq olar:

$$y = (x - 1)^2 - 5$$

Koordinat müstəvisinin bu tənliyi ödəyən bütün nöqtələr çoxluğu təpəsi (yəni aşağı nöqtəsi) (1; -5) koordinatlarına malik olan paraboladır. İkinci tənlik mərkəzi koordinat başlanğıcında olan və radiusu 4-ə bərabər olan çevrədir. Hər iki tənliyi ödəyən x və y ədədləri cütü parabolanın və çevrənin kəsişmə nöqtəsinin koordinatlarından başqa bir şey deyil (şəkil 6). Belə nöqtələr cəmisi dörd dənədir. Deməli, baxılan sistemin dörd həlli var:

1) $x \approx -1{,}917$, $y \approx 3{,}510$;
2) $x = 0$, $y = -4$;
3) $x \approx -2{,}319$, $y \approx -3{,}259$;
4) $x \approx 3{,}597$, $y \approx 1{,}748$

ÇOXLUQLARIN BİRLƏŞMƏSİ

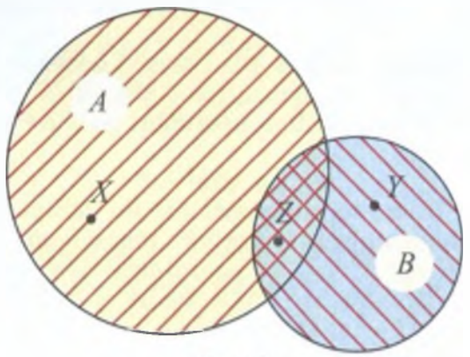
Birlikdə götürülmüş A çoxluğunun bütün ünsürləri və B çoxluğunun bütün ünsürləri A və B çoxluqlarının birləşməsi adlanan yeni çoxluq yaradırlar. Bu, $A \cup B$ kimi yazılır. Şəkil 7-də gətirilmiş Eyler – Venn diaqramı A və B çoxluqlarının qarşılıqlı münasibətini, onların kəsişməsini və birləşməsini göstərir. A və B çoxluqlarının kəsişməsi ikiqat ştrixlənmə ilə işarə edilib, bütün ştrixlənən (heç olmazsa birqat ştrixlənmə ilə) fiqur isə onların birləşməsidir.

$A \cup B$ birləşməsini almaq üçün A çoxluğunun bütün ünsürlərini götürmək və onlara A çoxluğunun B çoxluğuna daxil olmayan bütün ünsürlərini əlavə etmək lazımdır. Ya da tərsinə: B çoxluğunun bütün ünsürlərini götürmək və onlara A çoxluğunun B-yə daxil olmayan ünsürlərini daxil etmək lazımdır. Buradan aydındır ki, A və B çoxluqlarının kəsişməsi onların birləşməsində yerləşir:

$$A \cap B \subset A \cup B$$

$A \cup B$ çoxluğunun ixtiyari ünsürü üçün üç imkan mövcuddur: o ya A-ya daxil olub B-yə daxil deyil (şəkil 7-dəki X nöqtə-

si); ya B-yə daxil olub A-ya daxil deyil (Y nöqtəsi); ya da hər iki çoxluğa, yəni onların kəsişməsinə də daxildir (Z nöqtəsi).



Şəkil 7.

Şübhəsiz ki, iki kəsişməyən çoxluğun birləşməsi təsəvvürü (məsələn, iki ayrıca şeylər topalarının bir topada birləşməsi) iki ədədin cəmi haqqında anlayışdan əvvəl formalaşmışdı. Əgər iki A və B çoxluqları kəsişmirlərsə (ümumi ünsürə malik deyillərsə), özü də onların biri a ünsürə, ikincisi b ünsürə maliкdirsə, onda $A \cup B$ çoxluğu $a+b$ ünsürə maliкdir. "Bir topada qarışdırmaq" üçün A və B "topalarının" hansı ardıcıllıqla götürülməsinin fərqi olmadığından, onda

$$A \cup B = B \cup A$$

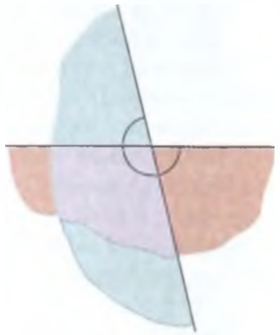
Deməli, ədədlərin cəmi toplananların yerlərindən asılı deyil:

$$a + b = b + a$$

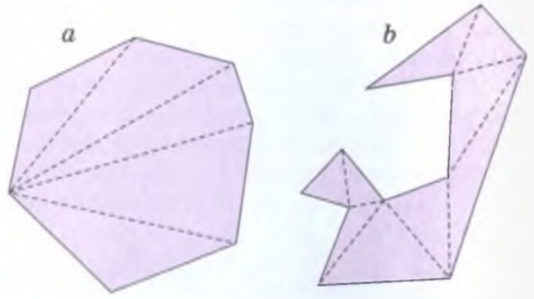
Təbii ki, bu, toplamanın yerdəyişmə qanununun isbatı yox, izahıdır. Əcdadlarımızın az saylı şeylərdən ibarət olan topaları qarışdırarkən anladıqları toplamanın yerdəyişmə qanunu ("toplananların yerini dəyişəndə cəm dəyişmir") sonralar natural ədədlərin toplama qanunu kimi ifadə edilmişdi.

Çoxluqların birləşməsi haqqında misalları həndəsədə asanca tapmaq olar. Bildiyimiz kimi, açıq bucaqdan kiçik bucağı iki yarımmüstəvinin kəsişməsi kimi təsvir etmək olar. Açıq bucaqdan böyük bucağı bu şəkildə vermək mümkün deyil. Lakin o, iki yarımmüstəvinin kəsişməsidir. (Şəkil 8).

Hər bir dördbucaqlını, özü də təkcə qabarıq yox, həm də qabarıq olmayan çoxbucaqlını diaqonal boyunca asanca iki üçbucağa ayırmaq mümkündür. Ümumiyyətlə, istənilən n bucaqlını diaqonallarla $n-2$ üçbucağa ayırmaq olar. Qabarıq çoxbucaqlı halında bir təpədən çıxan bütün diaqonalları çəkmək kifayətdir (şəkil 9, *a*). Qabarıq olmayanlar üçün heç də hər bir diaqonal yaramır, bu halda onu $n-2$ üçbucağa ayıran diaqonalları götürmək lazımdır (şəkil 9, *b*).



Şəkil 8.



Şəkil 9.

İndi isə cəbrdən bir misala baxaq.

$(x^3 - 3x^2 + 4x - 12)(x^2 - 5x + 6) = 0$

tənliyinin sol tərəfində iki çoxhədlinin

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12,$

$g(x) = x^2 - 5x + 6$

hasili dayanıb.

Aydındır ki, birinci çoxhədlinin hər bir həlli (yəni onu x – in yerinə qoyduqda bu çoxhədlini sıfıra çevirən hər bir ədəd) tənliyin də həlli olacaq, belə ki, ixtiyari ədədi 0–a vurduqda 0 alınır. Oxşar olaraq, $g(x)$ çoxhədlisinin hər bir həlli də tənliyin həlli olacaq. Əgər x ədədi nə $f(x)$ – in, nə də $g(x)$ – in həlləri deyilsə, onda o, tənliyin də həlli olmayacaq, belə ki, 0 – dan fərqli iki ədədin hasili 0 deyil. Başqa sözlə, verilmiş tənliyin bütün həllər çoxluğu $F \cup G$ birləşməsindən ibarətdir, burada F $f(x)$ çoxhədlisinin, G $g(x)$ çoxhədlisinin kökləri çoxluqlarıdır.

DİGƏR ƏMƏLİYYATLAR

Adətən hər bir çoxluğa hər hansı böyük çoxluğun hissəsi kimi baxılır. Məsələn, üçbucaqlar, çevrələr, kvadratlar müstəvinin; tam ədədlər isə həqiqi ədədlərin alt çoxluqlarıdır. Belə birləşdirici çoxluq universal çoxluq adlanır. Bundan sonra mətndə "çoxluq" sözü həmişə muəyyən universal U çoxluğunun alt çoxluğunu bildirəcək. İndi isə daha bir əməliyyatı – tamamlama əməliyyatını daxil edək. Hər bir A çoxluğunun tamamlayıcısını, yəni U çoxluğunun A-ya daxil olmayan ünsürləri çoxluğunu cA ilə işarə edək.

Məsələn, əgər A dairədirsə, cA bu dairəni kəsib çıxarandan sonra müstəvidə qalandır (şəkil 10). Tənlik və bərabərsizliklərin həllinə baxdıqda universal U çoxluğu kimi **R** bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu götürmək məqsədəuyğundur. Bu halda, məsələn, M çoxluğu olaraq $x^2 + x - 6 \geq 0$ bərabərsizliyinin həlləri çoxluğunu götürsək, $x^2 + x - 6 < 0$ əks bərabərsizliyinin həllər çoxluğunu cM tamamlayıcı çoxluğu kimi alırıq ki, bu da (-3, 2) intervalıdır. Yada salaq ki, intervalın uc nöqtələri intervala daxil deyil – onlar M çoxluğuna daxildir. Aydındır ki, $\varnothing$ boş çoxluğunun tamamlayıcısı universal U çoxluğudur, U – nun tamamlayıcısı isə boş çoxluq olacaq.

Tamamlama əməliyyatının digər əməliyyatlarla əlaqəsi maraqlıdır. Belə ki, iki çoxluğun birləşənə qədərki tamamlayıcısı onların tamamlayıcılarının kəsişməsidir. Bu, belə yazılır:

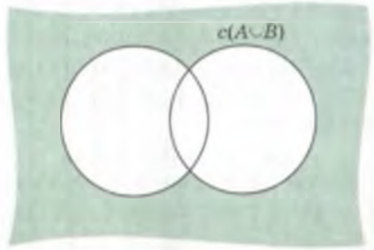


Şəkil 10.

$$c(A \cup B) = cA \cap cB$$

İki çoxluğun kəsişməsinin tamamlayıcısı isə onların tamamlayıcılarının birləşməsidir (şəkillər 11, 12).

$$c(A \cap B) = cA \cup cB$$



Şəkil 11.

İKİ ÇOXLUĞUN BİRLƏŞMƏSİNİN GÜCÜ

A çoxluğunun gucunun $|A|$ kimi yazılması qəbul edilib. Əgər A və B sonlu çoxluqları ümumi ünsürlərə malik deyillərsə, onda

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

bərabərliyi doğrudur.

$A \cup B$ kəsişməsi boş olmayanda bu münasibət aşağıdakı ilə əvəz olunur.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Başqa sözlə, əgər A çoxluğu a, B çoxluğu b, onların kəsişməsi isə p ünsürdən ibarətdirsə, onda $A \cap B$ çoxluğunun ünsürləri sayı $a + b - p$ – yə bərabər olacaq. Həqiqətən, A çoxluğunun bütün ünsürlərini, sonra B çoxluğunun bütün ünsürlərini sayaraq $a + b$ alırıq. Bu zaman $A \cup B$ kəsişməsinə daxil olan p ünsürdən hər birini iki dəfə sayırıq, lakin $A \cap B$ çoxluğuna daxil olanların hər birini isə təkcə bir dəfə saymaq lazım gəlir.

Çoxluqların heç olmasa biri – A və ya B – sonsuzdursa, düstur özgə cür olacaq. Fərz edək ki, A çoxluğu sonsuzdur və onun gücü B çoxluğunun gücündən az deyil, yəni $|A| \geq |B|$, onda

$$|A \cup B| = |A|$$

bərabərliyi doğrudur, özü də bu A və B – nin ümumi ünsürlərə malik olub – olmamasından asılı deyil. Oxşar olaraq, əgər B sonsuzdursa və $|B| \geq |A|$, onda

$$|A \cup B| = |B|$$

Ümumi halda A və B çoxluqlarının heç olmasa biri sonsuzdursa, onların birləşməsinin gücü $|A|$ və $|B|$ güclərinin ən böyüyünə bərabərdir;

$$|A \cup B| = max(|A|, |B|)$$

Xüsusi halda,hesabi və sonlu çoxluqların birləşməsi də hesabi çoxluqdur. Məsələn, fərz edək ki,

$A = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ – dir.

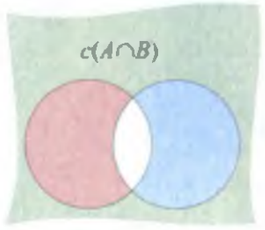
Bu çoxluqların ünsürlərini "qarışdıraraq" onların birləşməsini

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, a_4, a_5, ...\}$$

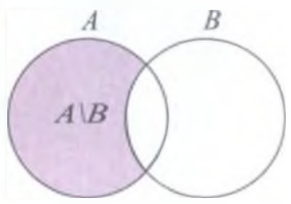
şəklində yaza bilərik.

Deməli, $A \cup B$-nin ünsürlərini natural ədədlərlə nömrələmək olar, yəni o, hesabidir.

Daha bir əməliyyat – çoxluqların fərqi əməliyyatını daxil edək. Fərz edək ki, iki A və B çoxluqları verilib. A çoxluğunun B çoxluğuna mənsub olmayan bütün ünsürlərindən təşkil olan C çoxluğuna baxaq (şək. 13). C çoxluğuu A və B çoxluqlarının fərqi adlanır və $C=A\setminus B$ ilə işarə edilir.



Şəkil 12.

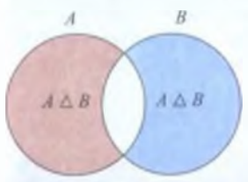


Şəkil 13.

Qeyd etmək vacibdir ki, çoxluqların fərqini artıq məlum olan əməliyyatlardan asanca almaq olar. Həqiqətən, C çoxluğu A çoxluğunun elə ünsürlərindən ibarətdir ki, onlar B çoxluğunun tamamlayıcısına daxildir. Deməli, C fərqi A və cB çoxluqlarının kəsişməsidir, yəni

$$A \setminus B = A \cap cB$$

Birləşmə və kəsişmə əməliyyatlarında hər iki çoxluq eynihüquqlu iştirak edirsə (riyaziyyatçılar deyirlər ki, belə əməliyyatlar kommutativdir), çoxluqların fərqi əməliyyatı artıq qeyri-kommutativdir: $A \setminus B \neq B \setminus A$. Burada heyrətamiz heç nə yoxdur – axı ədədlərin hesabi fərqi də qeyri-kommutativdir. Lakin çoxluqlar nəzəriyyəsində simmetrik fərq adlanan və kommutativ olan daha bir fərq əməliyyatına baxılır. A və B çoxluqlarının simmetrik fərqi bu çoxluqların yalnız birinə mənsub olan ünsürlər çoxluğuna deyilir. Bu fərq $A\Delta B$ kimi yazılır. Şəkil 14-dən alınır ki,



Şəkil 14.



Şəkil 15.

$$A\Delta B = (A \cup B)\setminus(A \cap B) =$$
$$= (B \cup A)\setminus(B \cap A) = B\Delta A$$

Başqa sözlə, A və B çoxluqlarının simmetrik fərqi bu çoxluqların birləşməsi və kəsişməsi arasındakı fərqdir.

İndi isə həllinə baxılan əməliyyatlar tələb olunan məsələlərə baxaq.

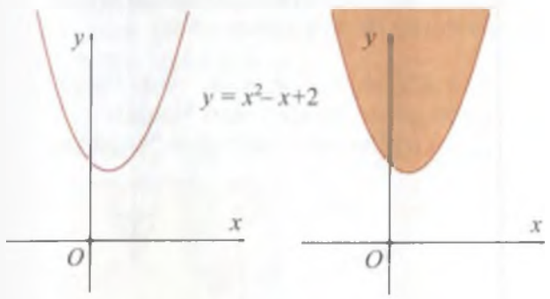
Nazirlik liseylərin birinə orada xarici dillərin necə tədris olunduğunu yoxlamaq üçün müfəttiş göndərdi. Nazirliyin əməkdaşı hesabatda yazdı ki, liseydə 100 uşaq oxuyur. Hər biri üç dildən: fransız, alman və ispan dillərindən azı birini öyrənir. Özü də hər üç dili 5; alman və ispan dillərini 10; fransız və ispan dillərini 8; alman və fransız dillərini 20; ispan dilini 30, alman dilini 23, fransız dilini 50 adam öyrənir. Hesabatı təqdim edən müfəttiş işdən qovulmuşdu. Niyə?

Həmişə olduğu kimi, işarələmələrdən başlayaq. Fransız dili öyrənən şagirdlərin çoxluğunu F, alman dili öyrənənlərinkini A, ispan dili öyrənənkilərini isə İ ilə işarə edək. Hesabatda deyilirdi ki, hər yüz liseyçi azı bir xarici dil öyrənir. Bu müddəanın hesabatın digər verilənlərinə uyğun olub-olmamasını yoxlayaq. Onları belə yazmaq olar: $|F| = 50$, $|A| = 23$, $|İ| = 30$, $|F \cap A| = 20$, $|F \cap İ| = 8$, $|A \cap İ| = 10$, $|F \cap A \cap İ| = 5$. Bütün liseyçilər çoxluğu F, A və $İ$ çoxluqlarının birləşməsi olub onun gücü 100-ə bərabər olduğundan, onda

$$100 = |F| + |A| + |İ| - (|F \cap A| + |F \cap İ| +$$
$$+ |A \cap İ|) + |F \cap A \cap İ|$$

Müvafiq qiymətləri qoyaraq alırıq: $50 + 23 + 30 - 20 - 8 - 10 + 5 = 70$. Ziddiyyət: $100 \neq 70$. Müfəttişin hesabatından neçə şagirdin ancaq alman dilini öyrəndiyini tapmağa çalışaq. Şəkil 15-dən göründüyü kimi verilmiş çoxluğun gücü belədir: $|A| - |A \cap F| - |A \cap İ| + |A \cap İ \cap F|$. Sonuncu düstura müvafiq qiymətləri yazıb $23 - 20 - 10 + 5 = -2$ alırıq. Yenə də cəfəngiyyat! Nəticə aydındır – yoxlama pis aparılıb, ya da heç aparılmayıb. Ola bilsin ki, müfəttiş ixtiyari rəqəmlər götürüb.

Daha bir nəzəri-çoxluq əməliyyatı – düz hasillə tanış olaq. Fərz edək ki, A və B iki ixtiyari çoxluqlardır. x A çoxluğuna, y B çoxluğuna məxsus olduqda (x,y) nizamlanmış cütünə baxaq. Oxşar belə cütlərin məcmusu da elə A və B çoxluqlarının düz hasili adlanaraq $A \times B$ işarə edilir.



Şəkil 16.

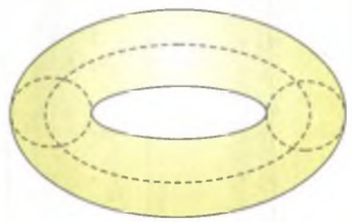
Belə təmtəraqlı və qeyri-adi adına baxmayaraq, bu əməliyyat bizə çoxdan bəllidir. Əlimizə dəmiryolu bileti alaq. Onda qatarın hara yollandığı, vaqon və yer, biletin qiyməti, eləcə də bir neçə artıq bizə lazım olmayan məlumatlar: biletin nömrəsi və s. göstərilib. Bəs burada düz hasillər haradadır? Budur onlar! Əvvəla, sərnişinin qatarda yerini təyin edən ədədlər cütü, - vaqonun nömrəsi və yerin nömrəsi. Əgər qatarda 22 vaqon, onların hər birində 36 yer varsa, onda A çoxluğu 1, 2, ...,22 ədədlər çoxluğu, B çoxluğu isə1, 2, ..., 36 ədədlər çoxluğudur. İkincisi, yoladüşmə vaxtı, məsələn, 13.48. A çoxluğu rolunda 0, 1, ..., 23, B çoxluğu rolunda isə 0-dan 59 –dək tam ədədlər çoxluğu çıxış edir. Daha nə? Hələ ay və il və ya biletin nömrəsi, məsələn. K 245654 var. Yenə də birinci ünsürün əlifbanın hərflər çoxluğuna, ikincinin isə 000001-dən 999999-a dək tam ədədlər çoxluğuna mənsub olduğu cüt.

Çoxluqların düz hasilinə kino biletlərində rast gəlmək olar. Orada sıra və yer, deməli, kinoteatrdakı sıralar çoxluğunun sıradakı yerlər çoxluğuna düz hasili göstərilib. Və yaxud şahmat partiyasının yazılışı. Şahmat taxtasının hər bir daması hərf – rəqəm cütü ilə qeyd olunub.

Lakin düz hasil müstəvi üzərində koordinat sistemi yaranandan sonra ən mühüm tətbiqini tapdı. Həqiqətən, müstəvinin hər bir nöqtəsinə (x,y) ədədlər cütü qarşı qoyulur. Beləliklə, müstəvi iki düz xəttin $R \times R$ düz hasili kimi təqdim olunur. Məsələn, $y = x^2 - x + 2$ funksiyasının qrafiki nədən ibarətdir? Bu, $R \times R$ alt çoxluğu və $y - x^2 + x - 2 \geq 0$ bərabərsizliyinin həlləri çoxluğudur. (şəkil 16).



Şəkil 17.



Şəkil 18.

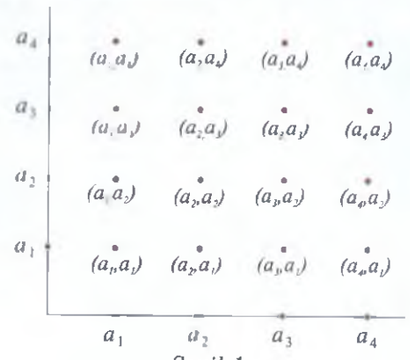
Düz xəttin və çevrənin düz hasilini götürsək, nə alınır? Asanca anlamaq olur ki, sonsuz silindr alınır (şəkil 17). Bəs iki çevrənin düz hasilini götürsək necə? Bu suala cavab vermək çətindir, amma fikirləşib tapmaq olar ki, adi bublikin səthini xatırladan səth alınacaq. Riyaziyyatçılar bunu "tor" sözüylə adlandırır (şəkil 18).

MÜNASİBƏTLƏR

Hər bir insan daxilən azad doğulur. Lakin bunu onun gəldiyi və öz gəlişi ilə dəyişdiyi cəmiyyət – bu ailə, millət, dövlət və ya bütün bəşəriyyət ola bilər – haqqında demək olmaz. Onların hər biri öz üzvləri arasında münasibətlər sisteminə malikdir ki, bunlar da üzvlərin cəmiyyətdə mövqeyini təyin edir. Buna görə də kənizin oğlu, bir qayda olaraq, qul olurdu, şahın oğlu şah ola bilərdi. Riyazi olaraq mürəkkəb və çoxtərəfli münasibətlər sistemini təsvir etmək olarmı? Məlum olmuşdur ki, müəyyən dəqiqlik dərəcəsində bu, tamamilə mümkündür.

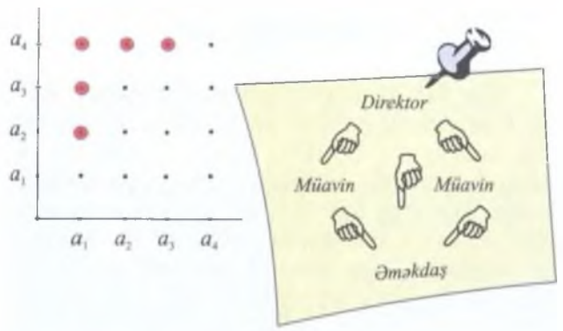
$M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ çoxluğuna və onun özünə düz hasili olan $M \times M$ bütün nizamlanmış (a_i,a_j) cütlər çoxluğuna baxaq: aydındır ki, belə cütlərin sayı n^2 – dır. Bu halda düz hasili qrafik olaraq $n \times n$ ölçülü kvadratdakı bütün tam nöqtələrin hasili kimi təsvir etmək olar (şəkil 1 – də $n = 4$ – dür). Şəkildəki hər qara nöqtə ilkin M çoxluğunun ünsürlərindən tərtib olunmuş hər hansı (a_i,a_j) cütünə uyğun gəlir. Özü də ümumiyyətlə M – dən bütün mümkün cütlər təsvir olunub. Deməli, M çoxluğunun ünsürləri

arasında ixtiyari cütlü qarşılıqlı münasibəti təsvir etmək olar.



Şəkil 1.

Məsələn, fərz edək ki, a_1 direktor, a_2 və a_3 onun iki müavini, a_4 sıravi əməkdaşdır. Belə hərəkət edək: əgər a_j a_i – ya tabedirsə, onda müvafiq (a_i, a_j) cütünə uyğun nöqtəni qırmızı edək (şəkil 2). Nəticədə $M \times M$ düz hasilinin müəyyən "qırmızı" alt çoxluğunu alacağıq ki, bu dörd adamın bütün qarşılıqlı tabeçilik sistemini tamamilə təsvir edir.

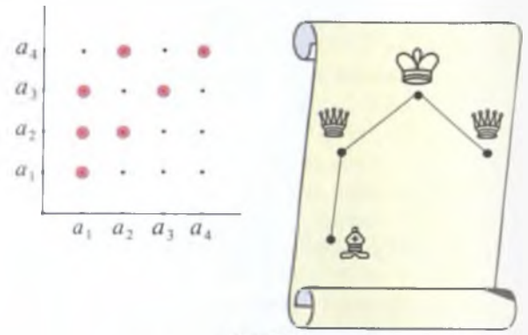


Şəkil 2.

Verilmiş misala uyğun, ümumi tərif vermək olar: $M \times M$ düz hasilinin ixtiyari R alt çoxluğu M çoxluğunda cüt və ya binar münasibətlər adlanır. R $M \times M$– in alt çoxluğu olduğundan, R də (a_i,a_j) nizamlanmış cütlərindən ibarətdir. Və əgər $(a_i, a_j) \in R$, onda deyirlər – a_i ünsürü a_j ünsürünə R münasibətindədir (bizim misalda a_i a_j – dan "başdır") və bunu bəzən belə yazırlar: a_i R a_j. Əgər $(a_i, a_j) \notin R$– dirsə, onda $a_i \overline{R} a_j$ yazırlar. Bizim ixtiyari $R \subset M \times M$ alt çoxluq seçməyə ixtiyarımız olduğundan, binar münasibətlərin köməyi ilə M çoxluğunun bütün ünsürləri arasındakı ixtiyari cüt qarşılıqlı münasibətlər sistemini təqdim etmək olar.

Şəkil 3 – də təqdim olunan R çoxluğunu, məsələn, belə oxumaq olar:

a_1 özündən, a_2 – dən, a_3 – dən "başdır";
a_2 özündən və a_4 – dən "başdır",
a_3 və a_4 yalnız özlərindən "başdırlar".



Şəkil 3.

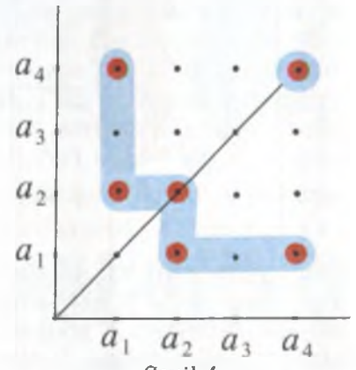
Orta əsrlərin məşhur prinsipi yada düşür: "Vassalımın vassalı mənim vassalım deyil". Bu prinsipdən çıxış edərək təsəvvür etmək olar ki, a_1 kral, a_2 və a_3 onun iki bərabər hüquqlu vassalı və a_4 a_2-nin vassalıdır. Onda "hər kəs özündən başdır" müddəası onu bildirir ki, hər kəs özü üzərində hakimdir. Axırıncı şərtin şəklimizdə $\{(a_i,a_i)\}$, i=1, 2, ... diaqonalının təsvir etməsi əlamətdardır. $i \subset R$ tam diaqonalını $\{(a_i;a_i)\}$ özündə saxlayan R binar münasibət refleksiv adlanır. Deməli, refleksiv binar münasibətdə a R a-dır, yəni həmişə "a a-dan başdır".

Qarşılıqlı münasibətlər sistemində "vassal" yox, tərs prinsip, məsələn, "dostumun dostu mənim dostumdur" prinsipi ödənirsə, onda müvafiq binar münasibət tranzitiv adlanır. Onda əgər x R y və y R z-dirsə, deməli, həm də x R z-dir. "Vassal" qaydası özü isə binar münasibətlər terminlərində antitranzitivlik adlanır: əgər x R y və y R z, onda mütləq x $\overline{R}$ z.

Misal kimi hamı üçün yaxın olan münasibətə: adamlar arasında tanışlıq münasibətinə baxaq.

Onun tranzitiv və ya antitranzitiv olması mütləq deyil, lakin o əlbəttə ki, refleksivdir: axı hamı özünü tanıyır. Tanışlıq münasibəti daha bir əlamətdar xassəyə malikdir: əgər a b ilə tanışdırsa, onda b-də a ilə

tanışdır. R binar münasibətinin bu xassəsi simmetriklik adlanır. R simmetrik binar münasibəti baş diaqonalına nəzərən həmişə simmetrikdir və tərsinə (şəkil 4). Antisimmetrik həm də tərs xassəyə malikdir: əgər a R b-dirsə, onda b $\overline{R}$ a.



Şəkil 4.

Əgər bu münasibət eyni zamanda refleksiv, tranzitiv, simmetrikdirsə, o, ekvivalentlik münasibəti adlanır. Belə münasibət üçün aşağıdakı qaydalar doğrudur:

1) a a – ya ekvivalentdir;

2) əgər a b – yə və b c – yə ekvivalentdirsə, onda a c – yə ekvivalentdir;

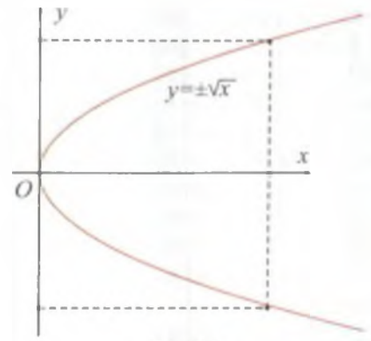
3) a b – yə ekvivalentdirsə, b də a –ya ekvivalentdir.

Ekvivalentlik münasibəti M çoxluğunu öz aralarında ekvivalent olan ünsürlərin kəsişməyən alt çoxluğuna – ekvivalentlik siniflərinə bölür. Ekvivalentlik münasibətinə misal eyni m ədədinə bölünən zaman eyni qalığa malik tam ədədlər cütləri çoxluğudur. Hər bir ekvivalentlik sinfi dəqiqliklə bir ünsürdən ibarətdirsə, onda münasibət eynilik və ya bərabərlik münasibəti adlanır.

Binar münasibətin yaxşı məlum olan misalı – həqiqi dəyişənin funksiyası - əslində ədəd oxunun özünə düz hasili olub qrafiklə təsvir edilir. Burada bircə məhdudiyyət tələb olunur: əgər x R y və x R z –sə, onda $y = z$. Bunu sözlə ifadə etməyə çalışın.

Beləliklə, əgər M bütün həqiqi ədədlər çoxluğudursa, onda $R \subset M \times M$ münasibətinə çoxqiymətli funksiya kimi baxmaq olar. Məsələn, $y = \pm\sqrt{x}$ ikiqiymətlidir (şəkil 5), belə ki, hər bir x>0 - ə y – in $y = \pm\sqrt{x}$ bərabərliyini ödəyən iki qiyməti uyğundur.

Gətirilən misallardan və illüstrasiyalardan alınır ki, binar münasibətin müxtəlif



Şəkil 5.

verilmə üsulları var. Bu müddəa ixtiyari çoxluğa aiddir, axı R $M \times M$ – in alt çoxluğudur. Sonlu M-lər üçün R-i sıfır və vahidlərdən ibarət matris şəklində verilməsi kimi məxsusi üsul da mövcuddur. Üsul çox sadədir və nəticədə kiçik matris nəhəng şəkli əvəz edir. Matrisi quran zaman belə bir qaydadan istifadə edilir: vahid yalnız və yalnız o zaman qoyulur ki, müvafiq yerdə R binar münasibətinin ünsürü dursun (şəkil 6).

$$\begin{pmatrix} 0101 \\ 1010 \\ 1100 \\ 1000 \end{pmatrix}$$

Şəkil 6. şəkil 3 – də başqa üsulla verilmiş münasibətin matrisi.

MÜƏMMALI MÜNASİBƏTLƏR

Atamın oğlu qardaşım deyil – bu kimdir?

• • •

İki ata və iki oğul üç portağalı bölüşdürdülər və hərəsinə bütöv portağal çatdı. Onlar bunu necə etdilər?

• • •

Peterburqda bir spiritik seansda Puşkinin ruhunu narahat eləyərək sual verdilər: "Sizin Anna Kerne münasibətiniz necədir? Nəlbəki cavab verdi:

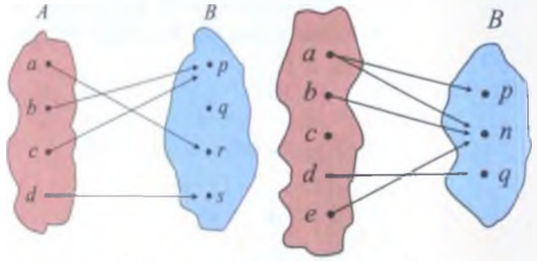
Sənə and içirəm, ey mənim dostum,
Sənsiz həyat yoxdur mənə dünyada,
Həyatda bir qüssəm varımdır mənim,
Dəqiqəsi ağırdır bu həyatımın.

İNİKASLAR

Muasir riyaziyyatın əsas anlayışlarından biri funksiya anlayışıdır. Funksiyalara eynən hər yanda rast gəlinir. Məsələn, tonqal üzərindən çəkilmiş məftili ədəd oxunun bir hissəsi hesab etsək, məftilin hər bir nöqtəsindəki temperaturu funksiya olacaq. Ətrafdakı havanın temperaturu artıq bir yox, üç dəyişənin: iki coğrafi koordinatın və dəniz səthindən hündürlüyün funksiyasıdır. Zamanı da əlavə etsək, dəyişənlərin sayı dörd olacaq.

Gətirilmiş misallarda ümumi cəhət odur ki, istər funksiyanın arqumenti (və ya arqumentləri), istərsə də onun qiymətləri rolunda ədədlər çıxış edir. Lakin funksiyanın arqumentləri və mümkün qiymətləri kimi ixtiyari təbiətli obyektlərə baxmaqda da bir problem yoxdur. Beləliklə, biz funksiya anlayışının ümumiləşməsinə – inikas anlayışına gəlib-çıxırıq. Sadə misal – planetin hər bir sakininə altında doğulduğu Zodiak nişanını qarşı qoyan inikas. Biz deyirik ki, əgər hər bir $x \in A$ ünsürünə B çoxluğunun tamamilə müəyyən edilmiş bir ünsürünü qarşı qoyan qayda müəyyənləşdirilibsə, onda A çoxluğunun B çoxluğuna, x ünsürünün obrazı adlanan və $f(x)$ – lə işarə olunan inikası verilib. A çoxluğunun B çoxluğuna inikası $A \to B$ yaxud $A \xrightarrow{f} B$ yazısı ilə işarə edilir. Bu zaman A çoxluğu f inikasının təyin oblastı adlanır. Qeyd edək ki, B çoxluğunun eyni bir ünsürü A çoxluğunun bir neçə ünsürünün surəti ola bilər. Belə ki, şəkil 1-də $p \in B$ ünsürü b və c ünsürlərinin hər birinin surətidir, yəni $f(b) = p$ və $f(c) = p$. Ola bilər ki, B çoxluğunun hər hansı bir ünsürü A çoxluğunun heç bir ünsürünün surəti olmasın. Məsələn, şəkil 1 – də A-da surəti $q \in B$ ilə üst-üstə düşən ünsür yoxdur. Lakin hər bir $A \to B$ inikası üçün mütləq belə bir şərt ödənməlidir: hər bir $x \in A$ – ya onun surəti kimi B çoxluğunun yalnız bir unsürü uyğundur. Şəkil 2-də göstərilən uyğunluq inikas sayıla bilməz, belə ki, $c \in A$ ünsürünün B çoxluğunda inikası yoxdur. Eləcə də, $a \in A$ ünsüründən B çoxluğunun bir yox, iki ünsürünə oxlar gedir.

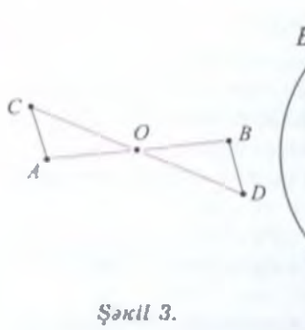
Funksiya olmayan inikasların sadə misallarına həndəsədə rast gəlmək olar. Riyaziyyatın bu sahəsində mühüm rol oynayan bütün həndəsi çevirmələr inikasın məğzidir. Məsələn, O nöqtəsinə nəzərən mərkəzi simmetriya inikasdır: hər bir A nöqtəsinə elə



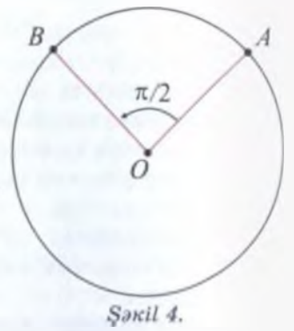
Şəkil 1.

Şəkil 2.

bir B nöqtəsi uyğun gəlir ki, AB parçasının ortası O olur. Şəkil 3-də O nöqtəsinə nəzərən mərkəzi simmetriyada A nöqtəsinin surəti B nöqtəsi, C nöqtəsininki D nöqtəsi, D nöqtəsininki C nöqtəsidir.



Şəkil 3.

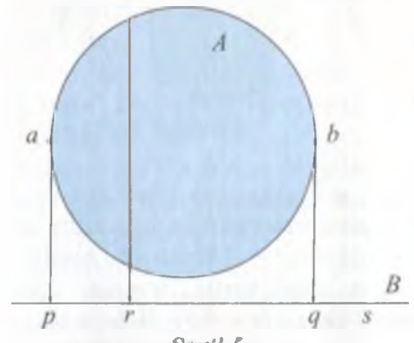


Şəkil 4.

P müstəvisinin O mərkəzi ətrafında $\pi / 2$ bucağı qədər r fırlanması da bu müstəvinin müəyyən $P \to P$ inikasıdır. Bu inikas O-dan fərqli A nöqtəsini elə bir $B = r(A)$ nöqtəsinə köçürür ki, A və B mərkəzi A olan çevrə üzərində yerləşirlər və müsbət istiqamətdə (yəni saat əqrəbinin əksi isiqamətində) ölçülən $\angle AOB$ bucağı $\pi / 2$ olur (şəkil 4). Ümumiyyətlə, P müstəvisinin ixtiyari f çevrilməsi (ox simmetriyası, paralel köçürmə, fırlanma və s.) müəyyən $P \to P$ inikasıdır, başqa sözlə, "həndəsi funksiyadır". Axırıncısının təyin oblastı ədədi funksiyadan fərqli olaraq hər hansı ədədlər çoxluğu deyil, nöqtələrdən ibarət və surətləri ədədlər deyil, nöqtələr olan P çoxluğudur. Deməli, ixtiyari $a \in P$ nöqtəsi üçün onun $b = f(a)$ obrazı da P müstəvisinin nöqtəsidir.

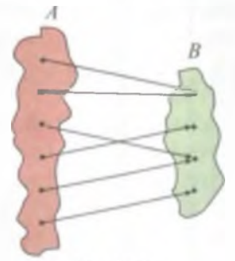
İNİKASLARIN BƏZİ NÖVLƏRİ

Fərz edək ki, $f : A \to B$ hər hansı inikasdır. $b \in B$ ünsürünü götürək və A – da surəti b olan bütün ünsürlərdən ibarət olan alt çoxluğa baxaq. Bu alt çoxluq b ünsürünün xəyalı (proobrazı) adlanır və $f^{-1}(b)$ ilə işarə olunur. Belə ki, şəkil 1 – də göstərilən inikas üçün $p \in B$ ünsürünün xəyalı $f^{-1}(p)=\{b,c\}$ iki ünsürdən ibarətdir. r və s ünsürlərinin hər birinin xəyalı yalnız bir ünsürdür: $f^{-1}(r) = a$; $f^{-1}(s) = d$. $q \in B$ gəlincə, onun xəyalında ünsür yoxdur: $f^{-1}(q) = \varnothing$. İndi isə müstəvidə A dairəsinə və B düz xəttinə baxaq və $g: A \to B$ ilə dairənin bu düz xəttə ortoqonal proyeksiyasını işarə edək (şəkil 5). Verilmiş halda p və q nöqtələrinin



Şəkil 5.

xəyalları hər biri yalnız bir ünsürdən ibarətdir: $g^{-1}(p) = a$, $g^{-1}(q) = b$. Daha sonra, ixtiyari $r \in (p, q)$ nöqtəsinin xəyalı $g^{-1}(r)$ düz xətt parçasıdır. Əgər $s \in B \setminus [p, q]$, onda $g^{-1}(s)$ xəyalı boş çoxluqdur. İnikasların növlərini B çoxluğunun müxtəlif ünsürlərinin xəyallarının neçə obyektdən ibarət olmalarına görə fərqləndirirlər. Əgər B çoxluğunun hər bir ünsürünün xəyalına A çoxluğunun birdən artıq olmayan ünsürü daxildirsə (yəni nümunə ya bir ünsürdən ibarətdir, ya boşdur), onda inikas yerləşdirmə və ya inyektiv inikas adlanır. Beləliklə, əgər $f: A \to B$ yerləşdirmədirsə, onda hər bir ünsürü öz surəti ilə eyniləşdirərək elə bil ki, A çoxluğunu alt çoxluq kimi B çoxluğunda yerləşdiririk (şəkil 6). "Yerləşdirmə" termini buradan doğur. Əgər $f: A \to B$ yerləşdirmədirsə, onda B çoxluğunda "artıq", yəni A-dakı hər hansı ünsürlərin surətləri olmayan ünsürlər ola bilər. Başqa sözlə, $f: A \to B$ yerləşdirməsi A çoxluğu və B çoxluğunun müəyyən alt çoxluğu arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaradır.



Şəkil 6.



Şəkil 7.

Əgər ixtiyari $b \in B$ xəyalı üçün $f^{-1}(b)$ nümunəsi boş deyilsə, onda $f: A \to B$ ya qoyulma, *süryektiv* inikas, ya da B çoxluğuna inikas adlanır (şəkil 7). Başqa sözlə, əgər B-də "artıq" ünsürlər yoxdursa (B çoxluğunun hər bir ünsürü A-nın heç olmasa bir ünsürünün surətidir), onda $f: A \to B$ qoyulmadır.

Fərz edək ki, $f: A \to B$ ixtiyari inikasdır. A çoxluğunun surətini, başqa sözlə, B çoxluğunun A-nın ünsürləri surətləri olan bütün ünsürləri çoxluğunu $f(A)$ ilə işarə edək. $f(A)$ B çoxluğu ilə üst-üstə düşürsə, onda f qoyulmadır, əgər B-də "artıq" ünsürlər varsa, yəni $f(A)$ B çoxluğunun məxsusi alt çoxluğudursa, f-ə qoyulma demək olmaz.

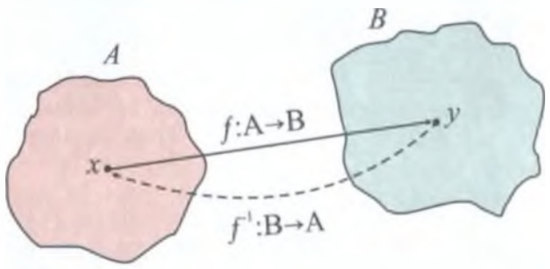
Nəhayət, həm yerləşdirilmə, həm də qoyulma olan inikas qarşılıqlı birqiymətli və ya *biyektiv* adlanır. Belə inikas $f: A \to B$, A və B çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq muəyyənləşdirir. Aydındır ki, A çoxluğunun B çoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli inikası ancaq o halda mövcuddur ki, bu çoxluqlar eyni gücə malik olsun. Başqa cür də demək olar: $f: A \to B$ ancaq və ancaq o zaman qarşılıqlı birqiymətlidir ki, $f(x) = b$ tənliyi ixtiyari $b \in B$ üçün yeganə $x \in A$ həllinə malikdir.

TƏRS İNİKAS

$f: A \to B$ inikası qarşılıqlı birqiymətli olan halda $f^{-1}: B \to A$ tərs inikası mövcuddur. Bu anlayışı müfəssəl izah edək.

Əgər $f: A \to B$ qarşılıqlı birqiymətli inikasdırsa, onda hər bir $y \in B$ ünsürü üçün onun xəyalı $f^{-1}(y)$ A çoxluğunun düz bir x

ünsürünü saxlayır. Deməli, $f(x) = y$ şərtini ödəyən yalnız bir $x \in A$ ünsürü var. Şək. 8-də x ünsüründən y ünsürünə ox aparır. y elementinə bu $x = f^{-1}(y)$ ünsürünü qarşı qoyaraq B çoxluğunun A çoxluğuna müəyyən inikasını alırıq. A çoxluğu ünsürlərindən B



Şəkil 8.

çoxluğuna aparan bütün oxların istiqamətini əksinə çevirsək, onun sxematik təsvirini vermək rahat olar. Alınan $B \to A$ inikası f^{-1}-lə işarələnir və f inikasına tərs inikas adlanır. Başqa sözlə, tərs inikası belə təyin etmək olar:

$f^{-1}(y) = x$, əgər $f(x) = y$ – dirsə.

Fərz edək ki, $A \to B$ qarşılıqlı birqiymətli inikası

$f(a) = q, f(b) = m, f(c) = p, f(d) = n, f(e) = r.$

münasibətləri ilə ifadə olunur. Onda f^{-1} tərs inikası

$f^{-1}(q) = a, f^{-1}(m) = b, f^{-1}(p) = c,$

$f^{-1}(n) = d, f^{-1}(r) = e$

şəklindədir.

f inikası $a \in A$ ünsürünü $q \in B$ ünsürünə "köçürür", f^{-1} inikası isə elə bil onu əvvəlki yerinə "qaytarır":

$$f(a) = q,\ f^{-1}(q) = a$$

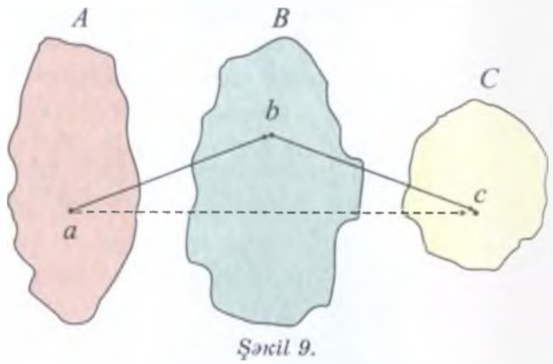
İNİKASLARIN KOMPOZİSİYASI

Fərz edək ki, üç A, B, C çoxluqları, eləcə də müəyyən $A \to B$ və $B \to C$ inikasları verilib. Onları "zəncir" şəklində yazmaq olar:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

Hər bir $a \in B$ ünsürünün B çoxluğuna mənsub olan $b = f(a)$ obrazı var. Öz növbəsində, hər bir $b \in B$ ünsürü C çoxluğunda olan $c = g(b)$ obrazına malikdir (şəkil 9).

Aralıq B çoxluğundan sovuşaraq a ünsürünə dərhal c ünsürünü qarşı qoyaq (şəkil 9-da qırıq ox). Beləliklə, A çoxluğunun C çoxluğuna müəyyən inikasını alırıq (şəkil 9). O, f və g inikaslarının kompozisiyası adlanır və $g \circ f$ ilə işarə edilir. Bu zaman birinci inikas (f) həmişə sağda, ikincisi – solda (g) yazılır. Belə yazılış forması



Şəkil 9.

aşağıdakı mülahizələrə görə tətbiq olunur. Kompozisiya nəticəsində ünsürünə qarşı qoyulan c ünsürü $c = g(b)$ şəklinə malikdir, burada b a ünsürünün birinci inikasdakı surətidir: yə- ni $b = f(a)$. Beləliklə,

$$c = g(b) = g(f(a))$$

$g(f(a))$ yazılışında ikinci g inikası soldadır ki, bu da kompozisiyanın işarələnməsi zamanı nəzərə alınır: f – sağda, g – solda. Beləliklə, tərifə əsasən, ixtiyari $a \in A$. üçün

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

Məsələn, f P müstəvisinin O nüqtəsinə nəzərən mərkəzi simmetriyası, g isə həmin müstəvinin O' nöqtəsinə nəzərən mərkəzi simmetriyasıdırsa (şəkil 10, *a*), onda $g \circ f$ $f: P \to P$ və $g: P \to P$ inikaslarının kompozisiyası OO' vektorundan iki dəfə böyük olan vektor qədər paralel köçürmədir ("Həndəsə və çevrilmə qrupları" məqaləsinə bax). Doğrudan da, $g \circ f$ inikası A nöqtəsini C nöqtəsinə köçürür. ABC üçbucağında OO' parçası orta xətdir, deməli, $AC = 2OO'$.

Daha bir misal. f olaraq P müstəvisinin K düz xəttinə nəzərən ox simmetriyasını, g olaraq həmin müstəvinin L düz xəttinə nəzərən ox simmetriyasını götürək, özü də K və L hər hansı O nöqtəsində kəsişirlər. Bərabər bucaqların işarələndiyi şəkil 10, *b*-dən

çıxır ki, $A \in P$ nöqtəsi $g \circ f$ kompozisiyası ilə elə bir C nöqtəsinə köçürülür ki, $\angle AOC$ bucağı K və L arasındakı α bucağından iki dəfə böyükdür, özü də A və C O nöqtəsindən bərabər məsafələrdədirlər. Başqa sözlə, $g \circ f$ kompozisiyası müstəvinin O nöqtəsi ətrafında 2α bucağı qədər dönməsindən ibarətdir. Gətirilmiş misallar göstərir ki, inikasların kompozisiyası həndəsi çevrilmələrin təhlilində mühüm rol oynayır.

İndi fərz edək ki, f qarşılıqlı birqiymətli inikasdır. Aşağıdakı inikaslar "zəncirinə" baxaq:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A$$

Əgər $f(a) = b$, - dirsə, onda tərs inikasın tərifinə görə $f^{-1}(b) = a$. Buna görə də $(f^{-1} \circ f)(a) = a$. Və bu A çoxluğunun ixtiyari ünsürü üçün doğrudur.

Eyni ilə

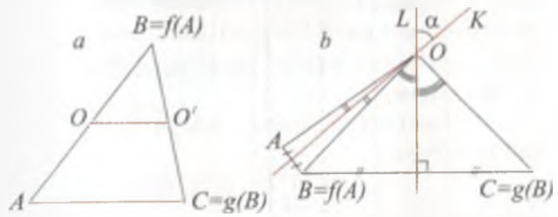
$$B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B$$

"zəncirində" B çoxluğunun ixtiyari b ünsürü üçün $(f \circ f^{-1})(b) = b$.

Beləliklə, $f^{-1} \circ f: A \to A$ inikası A çoxluğunun hər bir ünsürünə bu ünsürün özünü qarşı qoyur, $f \circ f^{-1}: B \to B$ inikasında B çoxluğunun ünsürləri üçün həmin hadisə baş verir. İbtidailiklərinə baxmayaraq, belə inikasları da nəzərdən keçirmək lazım gəlir. Onlara eynilik inikasları deyilir.

QRUPLAR

Fərz edin ki, siz əsgərlərin nizami komandaların yerinə yetirilməsinə öyrədildiyi meydandasınız. Budur, çavuş əsgərə komanda verir: "Sola dön, sağa dön, sağa dön,



Şəkil 10.

geriyə dön, sağa dön, fərəqət, geriyə dön!", o isə ciddi-cəhdlə əmrləri yerinə yetirir. Gəlin fikirləşək, burada riyaziyyat varmı?

Etiraz edə bilərsiniz: "Qaba əsgər təlimində nə riyaziyyat!" – və siz haqlı olmayacaqsınız. Bax, əsgər üzü çavuşa tərəf dayanıb. "sola dön, geriyə dön" komandaları səslənir. Nəticədə o, yeganə "sağa dön" komandasından sonrakı vəziyyətdə olur. Komandaları hərflərlə: S – "sola", A – "sağa", G – "geriyə", F – "fərəqət" işarə etsək və ardıcıl verilmiş komandaları + işarəsi ilə birləşdirsək, onda bu müşahidə sadə düsturla yazılar. Komandaların "toplanması" cədvəlini tərtib edək.

Komanda	F	S	G	A
F	F	S	G	A
S	S	G	A	F
G	G	A	F	S
A	A	F	S	G

Özünüz başladığımız yeddi komandanın "cəmini" təyin edin. "Geriyə dön" komandası alınacaq. Hesablamaların gedişində bəzi komandalar qarşılıqlı məhv olur. "Fərəqət" komandasının ixtiyari digərinə əlavə edilməsi isə sonuncunu dəyişmir: "fərəqət" komandasında əsgər əvvəlki vəziyyətində qalır. Bu, adi toplamada sıfırın roluna bənzəyir, deyilmi?

Və ümumiyyətlə, komandaların toplanması ədədlərin toplanmasına yamanca bənzəyir: iki ədədin cəmi yenə ədəd, iki komandanın cəmi yenə komandadır.

Lakin ədədləri toplayarkən hər bir a ədədinə əks elə bir b ədədi var ki, $a + b = 0$. Bəs bu, "nizami" sistemdə ödənirmi? Bəli! F üçün həmin komanda F, A üçün S, S üçün A, G üçün yenə G-dir. Bildiyimiz kimi, toplananların yerinin dəyişməsi zamanı cəm dəyişmir. Asanca yoxlamaq olar ki, bu xassə nizami sistemdə də ödənilir.

Siz ətrafınıza baxaraq bu və ya digər toplama növünün istifadə olunduğu çoxlu "komandalar sistemi" taparsınız. Məsələn, otaqdakı elektrik açarında müxtəlif lampalara cavab verən iki düymə varsa, onlarla aşağıdakı komandalar bağlıdır: "sol düymə-

ni basmalı" (*S*), "sağ düyməni basmalı" (*A*), "eyni zamanda hər iki düyməni basmalı" (*İ*), "olduğu kimi saxlamalı" (*O*). Aydındır ki, göstərilən dörd komandanın ixtiyari ikisinin ardıcıl yerinə yetirilməsi onların hansısa birinin nəticəsinə gətirir. Belə komandaların cəmi cədvəlini tərtib edək.

Komanda	O	S	A	İ
O	O	S	A	İ
S	S	O	İ	A
A	A	İ	O	S
İ	İ	A	S	O

Burada sıfır rolunu O – "olduğu kimi saxlamalı" komandası oynayır. Bəlkə "düymə" sistemi "nizami" sistem kimidir? Xeyr! Bu halda iki dəfə təkrarlanan hər bir komanda "olduğu kimi saxlamalı" – gətirir, "nizamidə" isə bu belə deyil. Lakin bu zaman "toplananların yerinin dəyişməsindən cəm dəyişmir" qaydası yenə ödənir.

"Komanda" toplanmasına daha bir misal. Rəfdə üç müxtəlif kitab durur: soldan birinci, sonra ikinci və üçüncu. Birinci əmri yerinə yetirək: "Birinci kitabı yerində saxlamalı, ikinci və üçüncünün yerlərini dəyişməli". Yerdəyişməni aşağıdakı şəkildə yazaq:

$$\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$$

Burada yuxarı sətirdəki rəqəm kitabın yerdəyişməyə qədər hansı yeri tutduğunu, altındakı rəqəm isə hansı yerə düşdüyünü göstərir. İkinci əmr: "Birinci yerdə duran kitabı ikinci yerə, ikinci yerdəkini üçüncü yerə, üçüncü yerdəkini birinci yerə qoymalı" isə belə yazılacaq:

$$\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$$

Bəs əvvəl birinci, sonra ikinci əmr yerinə yetirilsə, nə alınar? Birinci yerdə duran kitaba əvvəl toxunmuruq, sonra ikinci yerdə yerləşdiririk, buna görə də 1-in altında 2 duracaq. İkinci yerdə duran kitab əvvəl üçüncü yerə, oradan birinci yerə keçir, yəni 2-nin altında 1 duracaq. Üçüncü yerdəki kitab əvvəl ikinci yerə keçir, sonra əvvəlki yerinə qayıdır. Belə bir yazılış alırıq:

$$\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$$

Yenə də baxılan obyektləri "yığmaq" imkanı var. Doğrudur, yerdəyişmələr halında adətən onların cəmindən yox, hasilindən danışılır. Müvafiq olaraq ona hasili heç bir verllmiş yerdəyişməni dəyişməyən yerdəyişmə sıfır yox, vahid yerdəyişmə adlanır. Bu bütün kitabların yerlərində qaldığı eynilik yerdəyişməsidir:

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}$$

İxtiyari yerdəyişmədən sonra kitabları ondan əvvəlki yerlərinə qaytarmaq olar, uyğun yerdəyişmə verilənə tərs yerdəyişmə adlanır. Onun yazılışını almaq üçün verilmiş yerdəyişmənin yazılışındakı üst və alt və yuxarı sətirdəki nömrələr ardıcıllığı ilə sütunları yerləşdirmək lazımdır (yerdəyişmələrin "Vurma cədvəli" böyüklüyünə görə burada göstərilmir).

Aydındır ki, nəinki üç, ümumiyyətlə ixtiyari sayda ünsürlərin, özü də təkcə kitabların yox, yerdəyişməsinə baxmaq olar. Bunu ilk edənlərdən biri elm tarixində ən parlaq riyaziyyatçılardan olan *XIX* əsrdə yaşamış Evarist Qalua olmuşdur. O, çoxhədlinin köklərinin yerdəyişməsini öyrənmiş və onların xassələri əsasında sübut etmişdir ki, 4-dən böyük dərəcəli çoxhədlinin köklərini ümumi halda onun əmsalları vasitəsi ilə radikalların köməyi ilə ifadə etmək olmaz ("Yüksək dərəcəli tənliklər" məqaləsinə bax). Elə o da xüsusi halları baxdığımız və çoxlu daha "ciddi" və mühüm misallar olan anlayışı riyaziyyata daxil edib.

Fərz edək ki, müəyyən çoxluqda bu çoxluğun ixtiyari iki a və b ünsürünə həmin çoxluğun $c=(a^*b)$ ünsürünü qarşı qoyan əməliyyat təyin edilib. Əgər aşağıdakı şərtlər ödənilirsə:

1) baxılan çoxluğun ixtiyari üç a, b, c ünsürü üçün

$$(a^*b)^*c = a^*(b^*c);$$

2) çoxluğun ixtiyari a ünsürü üçün neytral adlanan və

$$a^*e = e^*a = a;$$

şərtini ödəyən e ünsürü var;

3) ixtiyari a ünsürü üçün a - nın tərsi adlanan və adətən a^{-1} –lə işarə edilən ünsür var, belə ki,

$$a^*a^{-1} = a^{-1}*a = e$$

onda bu çoxluq * əməliyyatlı qrup adlanır.

Qrupa bizim ən tanış olduğumuz misal toplama əməliyyatlı bütün həqiqi ədədlər çoxluğudur. Bu qrupun birinci xassəsi assosiativlik, yəni toplamanın bizə məlum olan paylanma qanunudur. İkinci xassədəki neytral ünsür sıfır ədədidir. (Ümumiyyətlə, ünsürlər üzərində əməllər toplama adlanırsa – bunlar ədədlər, vektorlar və digər riyazi obyektlər ola bilər, - onun neytral ünsürü sıfır; ünsürlər üzərində əməl vurma və ya hasil adlanırsa, onda vahid adlanır: axı ixtiyari a ədədi üçün $1\cdot a = a\cdot 1 = a$).Toplamada a-nın tərsi ona əks $-a$ ədədidir. Sıfırdan fərqli bütün ədədlər çoxluğu da vurma əməliyyatı ilə birlikdə qrupdur (bu halda $a \neq 0$ ədədinin tərsi $1/a$ ədədidir).

Eyni əməliyyatlı digər ədədi qruplar da var. Məsələn, bütün tam və ya yalnız bütün cüt ədədlər toplamaya görə qrup təşkil edir. Eyni əməliyyatla verilmiş qrupun ünsürlərinin bir qismi alt qrup adlanır. Toplama əməliyyatı ilə ədədlər qrupunun ən kiçik alt qrupu yalnız bir ünsürdən – sıfırdan ibarətdir (hər üç şərtin ödəndiyini yoxlayın). Vurma əməliyyatlı alt qruplar, bütün müsbət ədədlər, sıfırdan fərqli rasional ədədlər, 1 ədədi, eləcə də 1 və –1 ədədlər cütlərindən yaranır.

Ədədlərin toplanması və vurulması "toplananların yerdəyişməsindən cəm dəyişmir" qanununa tabedir, başqa sözlə, bu əməliyyatlar kommutativdir. Lakin bu xassə hər qrup üçün ödənilmir. "Nizami" və"düymə" qrupları üçün – hə, amma kitabların yerdəyişməsi üçün – yox.

Həqiqətən gördük ki,

$$\begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}$$

yerdəyişməsini

$$\begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}$$

yerdəyişməsinin ardınca edərək

$$\begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}$$

yerdəyişməsini alırıq.

Onların yerinə yetirilmə ardıcıllığını dəyişərək

$$\begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}$$

yerdəyişməsini alırıq.

Bütün ünsürləri üçün $a^*b = b^*a$ olan qruplar kommutativ adlanır.

Dörd ünsürdən – tam ədədlərin 4 - ə bölünməsinin qalıqlarından, yəni 0, 1, 2, 3 ədədlərindən ibarət olan çoxluğa baxaq. Qalıqları adi ədədlər kimi toplayaq, lakin cəm üçü aşarsa, onu onun 4-ə qalığı ilə əvəz edək. Bu əməliyyat "Qalıqlar hesabı və müqayisələr nəzəriyyəsi" məqaləsində baxılır; o, "4 moduluna görə cəmləmə" adlanır. Bu əməliyyatın cədvəlini tərtib edək.

Qalıq	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Yoxlamaq olar ki, burada qrupun hər üç xassəsi ödənilir. Lakin bu cədvəli "nizami" qrupun cədvəli ilə müqayisə etmək daha sadədir. Hər iki qrup arasındakı əlaqə dərhal üzə çıxır. Əgər "nizami" qrupda F-i 0, S-i 1, G-ni 2 və A-nı 3 lə əvəz etsək, onda 4 moduluna görə qalıqların toplanması cədvəli alınarl Riyaziyyat üçün bu qruplar eynidir. Onları izomorf adlandırırlar. İzomorfizm anlayışını daha ciddi formulə edək.

Fərz edək ki, iki qrup var: onların birindəki əməliyyatı *, ikincidəkinkini $\circ$ ilə işarə edək. Qrupların ünsürləri arasında bir əməliyyatı digərinə keçirən qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq varsa, yəni birinci qrupun ixtiyari iki ünsürünün a^*b "hasilinə" ikinci qrupun a və b-yə uyğun olan $\alpha\circ\beta$ və α ünsürlərinin β-ya hasili qarşı qoyulursa, qruplar izomorf adlanır.

İzomorfizm anlayışı qrup nəzəriyyəsinin ən mühüm anlayışlarından biridir, belə ki, bir-birinə izomorf olan qruplar çoxluğundan yalnız birini öyrənmək kifayətdir, qalanları eyni xassələrə malik olacaq.

İzomorf qruplar ilk baxışda heç də ox-

şar olmaya bilərlər. Məsələn, toplama əməliyyatlı həqiqi ədədlər çoxluğunu və vurma əməliyyatlı müsbət həqiqi ədədlər çoxluğunu götürək. Hər bir həqiqi x ədədinə (birinci qrup elementinə) müsbət $y = 2^x$ ədədini qarşı qoymaqla qruplar arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq yaratmaq olar. Əgər x_1 və x_2 ədədlərinə y_1 və y_2 ədədləri qarşı qoyulublarsa, onda $2^{x_1+x_2} = 2^{x_1} \cdot 2^{x_2}$ eyniliyinə əsasən x_1+x_2 cəminə $y_1 \cdot y_2$ hasili qarşı qoyulur, yəni toplama vurmaya keçir.

Başqa bir misal. Yuxarıda xatırlatdığımız iki ədəddən (–1 və 1) ibarət vurma əməliyyatlı qrupu və bərabəryanlı üçbucağın simmetriya (və ya özünüyerləşdirmə) – üçbucağın özünü özünə köçürən hərəkətlər – qrupuna baxaq. (Yada salaq ki, müstəvinin nöqtələr arasında məsafələri dəyişməyən çevirmələrinə hərəkət deyilir.) İkinci qrupun əməliyyatı kompozisiya – hərəkətlərin ardıcıl yerinə yetirilməsidir onu $\circ$ – lə işarə edirlər. Aydındır ki, bu qrup da yalnız iki ünsürdən ibarətdir – E eynilik çevirməsi, yəni bütün nöqtələri öz yerində saxlayan çevirmə və üçbucağın hündürlüyünə nəzərən S ox çevirməsi. Bu qrupların ünsürləri də, əməliyyatları da tamamilə müxtəlifdir, lakin aydındır ki, bu qruplar izomorfdur: –1 ədədinə S, 1 ədədinə E uyğun gəlir. 1 və E ünsürləri neytraldır, $(-1)\cdot(-1) = 1$ bərabərliyinə isə $S \circ S = E$ uyğundur. Ümumiyyətlə, asanca əmin olmaq olar ki, iki ünsürdən ibarət bütün qruplar izomorfdur. Onların vurma cədvəli belədir.

Ünsür	e	a
e	e	a
a	a	e

Göstərmək olar ki, üç ünsürdən ibarət olan bütün qruplar da izomorfdur. Onların ikisi – 3 modulu üzrə qalıqların cəmlənməsi qrupu və bərabərtərəfli üçbucağın E – dən (0° dönmədən) və üçbucağın öz mərkəzi ətrafında 120° və 240° dönmələrindən ibarət fırlanmalarıdır.. Hər iki halda neytral ünsürləri (0 və ya E) e ilə, iki digər ünsürü a və b ilə işarə edərək görürük ki,

$a^*a = b, b^*b = a, a^*b = a, a^*b = b^*a = e$

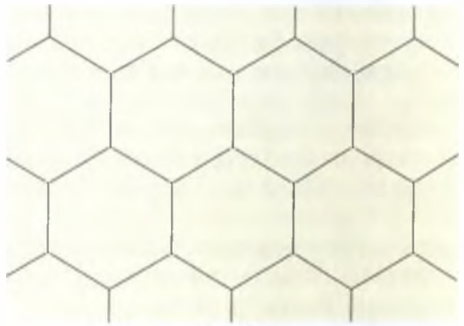
bərabərlikləri doğrudur.

Dörd ünsürdən isə artıq iki qeyri-izomorf qrup tərtib etmək olar – biz onlarla məqalənin əvvəlində tanış olduq. Lakin dörd ünsürdən ibarət olan ixtiyari digər qrup mütləq bu ikisindən birinə izomorf olacaq. Məsələn, düzbucaqlı üçbucağın onun orta xətlərinə nəzərən ox simetriyalarından, mərkəz ətrafında 180° dönməsindən və E – dən ibarət olan simmetriya qrupları "düymə" qrupuna izomorfdur. Yeri gəlmişkən, "nizami" qrupu da həndəsi olaraq kvadratların fırlanması, yəni bir nöqtə ətrafında 90° –nin misilləri olan bucaqlar qədər dönmələri qrupu kimi təqdim etmək olar.



Artur Keli

Deyilənlərlə əlaqədar belə bir sual doğur: qrupların təqdiminin nə isə bir universal üsulu yoxdur ki? Sonlu qruplar üçün belə bir üsul var. n ünsürdən ibarət olan ixtiyari qrup n ünsürün yerdəyişmələr qrupunun alt qrupuna izomorfdur; bu teoremi XIX yüzillikdə ingilis riyaziyyatçisi Artur Keli isbat edib.



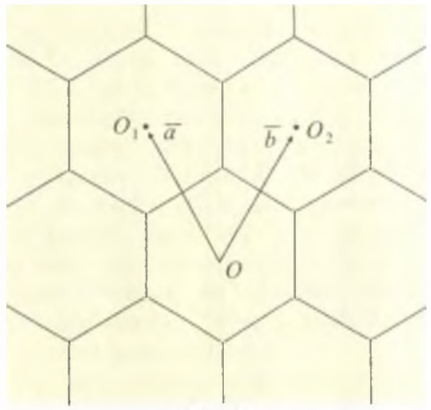
Şəkil 1.

İndi isə simmetriyalar qrupunun daha bir növü ilə müstəvi üzərində periodik simmetrik naxışlara baxaq.

Arı pətəyinə baxaq (şəkil 1). Şanının bir elementi olan altıbucaqlını qeyd edək. Belə bir sual verək: hansı hərəkətlərlə qeyd olunmuş altıbucaqlını başqa bir altıbucaqlıya köçürmək olar?

Bu altıbucaqlının O mərkəzini iki qonşu altıbucaqlının O_1 və O_2 mərkəzləri ilə

birləşdirək (şəkil 2). Bizim altıbucaqlımızı onlardan birincisinə və ya ikincisinə köçürmək üçün onu paralel olaraq $\bar{a} = \overline{OO_1}$ və ya $\bar{b} = \overline{OO_2}$ vektoruna köçürmək kifayətdir. İndi qeyd etmək çətin deyil ki, birinci altıbucaqlını ixtiyari altıbucaqlıya köçürmək üçün $n\bar{a} + m\bar{b}$ vektoru üzərinə paralel köçürmə aparmaq kifayətdir, burada n və m müvafiq tam ədədlərdir. Şəkil 3-də çəhrayı rəngli ilkin altıbucaqlıdan əlavə yaşıl və mavi altıbucaqlılar da qeyd olunub. Yaşıl altıbucaqlı üçün $n = 2$, $m = 3$, mavi üçünsə $n = 3$, $m = 2$.

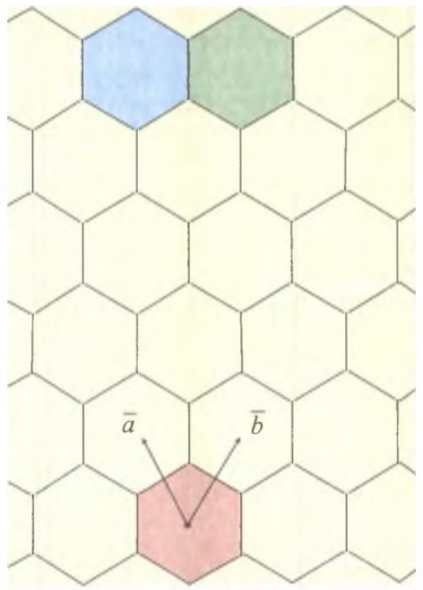


Şəkil 2.

n və m tam ədədlər olduqda $n\bar{a} + m\bar{b}$ vektorları üzərinə paralel köçürmələr çoxluğu kommutativ qrup əmələ gətirir. Xüsusi halda, onun neytral ünsürü olan eynilik çevirməsini $\bar{0} = 0 \cdot \bar{a} + 0 \cdot \bar{b}$ vektoru üzərinə köçürmə kimi təqdim etmək olar.

Diqqət yetirək ki, bu qrupun bütün ünsürləri iki - $\bar{a}$ və $\bar{b}$ –yə və onlara tərs olan köçürmədən alınır. Belə halda deyirlər ki, qrup bu ünsürlərdən doğub və onlar bu qrupu əmələ gətirənlər adlanır. Bizim "nizami" qrupumuzda bir əmələ gətirəni, məsələn, S-i (sola dön) ayırmaq olar: G = S + S, A = S + S + S və F = S +S + S + S. S yerinə A götürmək olar, lakin F olmaz. "Düymə" qrupunda əmələ gətirən ikidir: S və A.

Lakin "şana" qayıdaq. İxtiyari altıbucaqlını qonşusuna təkcə paralel köçürmə ilə yox, həm də, məsələn, onların ümumi tərəfinə nəzərən simmetriya ilə, ya onların ümumi təpəsinin ətrafında 120° dönmə ilə, ya da onların hər ikisi ilə həmsərhəd olan altıbucaqlının mərkəzi ətrafında 60° dönmə ilə



Şəkil 3.

köçürmək olar. Adları çəkilən çevirmələr bütün sonsuz altıbucaqlı mozaikanı da özünə köçürür, yəni onun simmetriyalar qrupuna daxil olur. Bu qrupun mühüm xassələrini qeyd edək: 1) o, müstəvi hərəkətlərindən ibarətdir; 2) onda kolleniar olmayan vektorlara ($\bar{a}$ və $\bar{b}$) iki köçürmə var; 3) ona daxil olan bütün köçürmələrin vektorları arasında ən kiçik uzunluqlu sıfır olmayan vektor var (məsələn, $\bar{a}$ və ya $\bar{b}$). Bu xassələrə malik qruplar kristallaqrafik qruplar adlanır, belə ki, kristallik strukturların simmetriyasının tədqiqi zamanı meydana çıxır. Müstəvi və fəzada kristalloqrafik qrupların tam təsvirini rus kristalloqrafı Yevqraf Stepanoviç Fyodrov verib ("Riyaziyyat və kristalloqrafiya" məqaləsinə bax). Xüsusi halda, o göstərib ki, düz 17 müxtəlif müstəvi kristalloqrafik qrup var. Bütün bu qrupları holland rəssamı M. Eşerin litoqrafiyalarında və qravürlərində tapmaq olar ki, bunlarda da o, quşlardan, süvarilərdən, balıqlardan ecazkar ornamentlər yaradıb.

Verilmiş fiquru saxlayan, yəni onu özünə köçürən çevirmələr (hərəkətlər) qrupu fiqurun simmetriya qrupu adlanır. Ümumiyyətlə, nəyisə saxlayan bütün çevirmələr çoxluğunun bu "nəyin" nə olmasından asılı olmadan həmişə qrup olacağını asanca anlamaq olar. Bu qrupa müstəvinin bütün hərəkətlər qrupu – onlar nöqtələr arasındakı

bütün məsafələri saxlayır, oxşarlıq çevirmələri qrupu – onlar məsafələrin nisbətlərini saxlayır, afin çevirmələri adlanan və bütün düz xətləri saxlayan və s. çevirmələr daxildir. Qruplar həndəsədə aparıcı rol oynayır. Hətta Evklid həndəsəsinə hərəkət qruplarının ünsürlərinin təsiri altında dəyişməyən fiqurların xassələrini öyrənən nəzəriyyə kimi baxmaq olar. Həmin baxışla digər çevirmə qruplarının uyğun gəldiyi qeyri-evklid həndəsələrə də baxmaq olar. Həndəsəyə alman riyaziyyatçısı Feliks Kleynin (1849–1925) təklif etdiyi bu baxış haqqında "Həndəsə və çevirmə qrupları" məqaləsində danışılır.

Feliks Kleyn qrup anlayışını həndəsənin bünövrəsinə qoyub. Lakin bu anlayış riyaziyyatın analiz və kombinatorika, eləcə də cəbr kimi sahələrinə də dərindən nüfuz edib. Onun əsasında topologiya yaranıb. Qruplar riyaziyyatın kodlaşdırma nəzəriyyəsi və kristalloqrafiya kimi əlavələrində də işçi alətə çevrilib. Müasir nəzəri fizikanın bir sıra bölmələri, məsələn, elementar zərrəciklər nəzəriyyəsi, qrup nəzəriyyəsi olmadan sadəcə mövcud olmazdı.

RİYAZİ MÜHAKİMƏLƏR

RİYAZİYYATDA İSBATLAR

Riyaziyyat kitabını başqa fənnlərin kitablarından nə fərqləndirir? Düsturların bolluğu? Lakin onlar fizika, astronomiya və körpüinşaatı kitablarında da var. Riyaziyyatı digər bilik sahələrindən fərqləndirən ən əvvəl isbatların mövcudluğudur.

Bütün riyaziyyatı bir əsərdə təqdim etməyə ilk cəhdi b.e.ə. *III* əsrdə qədim yunan alimi Evklid etmişdir. Nəticədə onun məşhur "Başlanğıclar"ı yarandı (Evklidin "Başlanğıclar"ı məqaləsinə bax). İkinci cəhd yalnız *XIX* əsrdə Fransada baş verdi ki, bu zaman Nikola Burbaki adlı birisi "Riyaziyyatın ünsürləri" adlı çoxcildli traktatının nəşrinə başladı. Əslində Burbaki adlı riyaziyyatçı mövcud deyildi. Bu, alimlər qrupunun kollektiv təxəllüsü idi. Burbaki öz əsərini belə bir kəlamla açır: "Yunanların dövründən "riyaziyyat" demək "isbat" deməkdir". Beləliklə, "riyaziyyat" və "isbat" sözləri sanki sinonimlərdir.

İsbatlara (sübutlara) insan fəaliyyətinin digər sahələrində də, məsələn hüquqşünaslıqda rast gəlinir. Lakin riyazi sübutlar məhkəmədə eşidilənlərdən daha inandırıcıdır. Riyazi isbatlar mübahisəsizlik etalonu kimi qəbul edilr.

Riyaziyyatda isbat nədir? İsbat bizi o qədər inandıran mühakimədir ki, biz həmin mühakimədən istifadə edərək başqalarını inandırmağa hazırıq.

Bəzi oxucular deyərlər: lütfən, isbat mühüm riyazi anlayışdır, amma tərifi yoxdur. İki etiraz gətirək. Əvvəla, hətta riyaziyyatda belə hər şeyi təyin etmək qeyri-realdır. Bir sıra anlayışlar digərləri, bu digərləri üçüncülər, üçüncülər dördüncülər vasitəsi ilə izah olunur. İkincisi, isbat "həqiqi ədəd" və ya "çoxbucaqlı" anlayışları kimi riyazi anlayış deyil. Riyaziyyata nəzərən o, daxili deyil, xaricidir və psixologiyaya, qismən də linqvistikaya aiddir. Lakin onsuz riyaziyyatı təsəvvür etmək olmaz.

İsbatların, yəni inandırıcı mühakimələrin təsnifatını təklif etmək olarmı? Güman ki, yox. Həm də ki, isbat, bir qayda olaraq, bir neçə, bəzən çoxlu mərhələdən ibarət olur və onların hər birində öz inandırma üsulu tətbiq olunur. Amma hər halda bir neçə əsas, tez-tez təkrarlanan əsas isbatlar sxemini ayırmaq olur.

İSBATLARA MİSALLAR

Misal 1. 420 – dən kiçik olan tam mənfi olmayan ədədlər içində

$(x + 1997)(x - 3)(x - 216)(x - 548) = 0$

tənliyinin 3 və 216 – dan başqa həllərinin olmadığını isbat etmək tələb olunur. Bir-birinin ardınca 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, ..., 213, 214, 215, 217, 218, 219, ..., 417, 418, 419 ədədlərini tənliyə qoyaraq onların heç birinin onun sol tərəfini sıfıra çevirmədiyinə əmin oluruq. Bu, seçmə üsulu ilə isbatdır.

Başqa cür də etmək olar. Xatırlayaq ki, hasil sıfırdırsa, mütləq vuruqlardan heç olmazsa biri sıfırdır. Buna görə də tənliyimizin kökləri 1997, 3, 216 və 548 – dir, bu dörd ədəddən yalnız 3 və 216 eyni zamanda mənfi deyil və 420 – dən kiçikdir, deməli, ancaq onlar məsələnin şərtini ödəyir.

İkinci isbat, əlbəttə, qısadır. Lakin məntiqi baxımdan birinci isbat da mütləq inandırıcı və qüsursuzdur. O, uzun olsa da, sadədir: hasilin yuxarıda xatırladılan xassəsindən istifadə etmək lazım deyil, bir də ki, onu bəziləri unuda da bilər.

Misal 2. Üçrəqəmli ədədlər içində 7, 11 və 13 - ə bölünən ədədin olmadığını isbat etmək tələb olunur. Yalnız bölmə ilə tanış olan aşağı sinif şagirdi 900 üçrəqəmli ədədin hər birini yerinə qoyub yoxlamaqla bu məsələni həll edə bilər. Lakin yuxarı sinif şagirdi bilir ki, 7, 11 və 13 ədədləri mahiyyətcə sadə ədədlərdir və onların hər birinə bölünən ədəd onların hasilinə də, yəni 1001-ə bölünür. Bu isə üçrəqəmli ədəd üçün mümkün deyil.

Misal 3. İsbat etmək lazımdır ki, $x^4 + y^4 = z^2$ tənliyinin 100-ü aşmayan tam müsbət ədədlər içində həlli yoxdur.

İsbat üçün $1 < x < 100$, $1 < y < 100$ şərtini ödəyən bütün on min (x,y) cütlərini seçmək, tənlikdə yerinə qoyub nəticədə əmin olmaq olar ki, onun sol tərəfinin cəmi tam kvadrat deyil. Başqa cür də edib tənliyin həlledilməz olduğunu sübut etməyə

TƏRİF

Hər şeyə malikdir bu anlayışlar,
Onların mənası tamam doludur.
Fikirsə lal olur bəzilərinin
Doğura bildiyi təfəüratdan.
Elələri var ki anlayışların,
Onların mənası dərkedilməzdir,
Onlara qovuşmaq fikir mənası,
Bu fikir kəşf olub uzaq zamandan.

Platon necəsə deyib: "İnsan lələksiz ikiayaqlı heyvandır". Diogen...tükləri yolunmuş xoruzu gətirək: "Platonun adamı budur" sözləri ilə buna cavab verib. Platon vəziyyətdən çıxış yolu axtarıb: "İnsan geniş dırnıqlı lələksiz heyvandır".

İki böyük kişi nə haqda mübahisə edirdi və müdrikliklərinə baxmayaraq nədə yanılırdılar? Tərif niyə belə mühümdür? Ilk baxışdan aşkar görünənin izahına qüvvə niyə sərf edilsin?

Bu barədə M. V. Lomonosov çox tutumlu söyləyib: "Lap əvvəldən əsas anlayışlarda səhvlərdən qaçmaq lazımdır, yoxsa biz bütün fiziki elm üzrə azıb qalaraq mütləq uzaq kənara meyl etmiş olarıq".

Riyaziyyatda tərif klassik məntiqin prinsipləri əsasında quryulur. Məntiqi tərif müəyyən anlayışın ən mühüm xassələrini açmaq məqsədi ilə onun sözlə (obrazlı) təsviridir.

Eyni bir anlayışın müxtəlif tərifləri ola bilər: sadə ədədin bölünənləri yalnız özündən və vahiddən ibarət olan (ədəd özü vahiddən fərqli olmalıdır) mənfi olmayan tam ədəd kimi təyin etmək olar. Eləcə də onu eyni toplananların cəmi kimi təqdim oluna bilməyən ədəd kimi təyin etmək olar.

Riyaziyyatda "söz təsviri", əlbəttə, düsturların tətbiqini də mümkün edir. Belə ki, biz yazdıqda ki, tərifə görə $y(x) = x^2$, bununla parabola veririk, yəni təyin edirik.

Çətin təyin olunan, ya da heç təyin olunmayan anlayışlara da rast gəlinir. Onda tərif kimi ən mühüm, əvəzsiz (atributiv) xassələrdən istifadə olunur. Evklid yazırdı: "Nöqtə hissələrə malik olmayandır; xətt enə malik olmayandır".

Buna görə də hər hansı anlayışa əhatəli cavab vermək üçün onun ən mühüm xassələrini ayırmağı bacarmaq lazımdır. Çoxlu anlayış, məntiqi və riyazi konstruksiyalar sırasında prinsipial yeni anlayışı görmək və təyin etmək də çox mühümdür.

çalışmaq olar. İkinci üsul çətin, birinci – cansıxıcıdır, buna görə də kimsə hesablamaları kompyuterdə aparacaq. Lakin yuxarı sərhəddi qat-qat artırsaq, kompyuter də kömәyə çatmayacaq. Ən güclü müasir kompyuterlərin belə öhdəsindən gələ bilməyən bir seçmə misalı gətirək.

Misal 4. 1742-ci ildə riyaziyyatçı Xristian Qoldbax belə bir fərziyyə irəli sürdü: 6-dan kiçik olmayan ixtiyari natural n ədədi üç sadə ədədin cəmidir. Holdbax fərziyyəsini böyük olmayan n-lər üşün seçmə üsulu ilə yoxlamaq çətin deyil: məsələn,

$$96 = 2 + 47 + 47.$$

Eləcə də çox böyük n-lər üçün də fərziyyə doğrudur. 1937 – ci ildə sovet riyaziyyatçısı İvan Matveyeviç Vinoqradovun sübut etdiyi kimi, Qoldbax fərziyyəsi müəyyən bir nəhəng n_0-dan böyük olan n-lər üçün doğrudur. Vinoqradovun və onun ardıcıllarının aldlıqları nəticələrə əsasən n_0 $3^{3^{16}}$-nı aşmır. 6-dan $3^{3^{16}}$-ya qədər bütün ədədləri yoxlamaq kifayətdir ki, fərziyyə ya isbat, ya da təkzib edilsin. Lakin belə geniş yoxlamaya hələ heç bir hesablama texnikası da qadir deyil. Belə seçmənin ümumiyyətlə həyata keçirilə bilməyəcəyini fərz etmək üçün əsaslar var. Ümid edək ki, n_0-ın başqa, daha kiçik qiymətini tapmaq mümkün olacaq.

İSBATIN İNANDIRICILIĞI

Görkəmli fransız riyaziyyatçısı Anri Puankare 1908-ci ildə yazırdı: "Biz əlli il əvvəl yazılmış kitabı oxuyuruqsa, orda tapdığımız mühakimələrin əksəriyyətinin məntiqi ciddilikdən məhrum olduğunu tapırıq".

İllüstrasiya üçün Eylerin "Sonsuzların analizinə giriş" kitabından indiki ölçülərə görə qəribə gələn fikirlərə baxaq:

KOLMOQOROVUN BİOQRAFİYASINDAN

Görkəmli rus riyaziyyatçısı Andrey Nikolayeviç Kolmoqorovun bioqrafiyasında maraqlı bir epizod var. Kolmoqorov on yeddi yaş yarımlıq ikən XV əsr Novqorod torpağının tarixini öyrənməyi qət edir. Gənc tarixçi tədqiqatını qurtararkən onun heç on doqquz yaşı yox idi və o öz işi haqqında universitet seminarının məşğələlərində məruzə etdi. Tarixçi V. A. Yanin xatırlayırdı: "İş onlara seminarda məruzə edilən zaman professor S. V. Baxruşin nəticələri təqdir edib qeyd etdi ki, gənc tədqiqatçının əsərləri qətiliyə iddia edə bilməz, belə ki, "tarix elmində hər nəticə bir neçə sübutla əsaslandırılmalıdır".

Sonralar bu haqda danışarkən Andrey Nikolayeviç əlavə edirdi: "Və mən son nəticə üçün bir isbatın kifayət etdiyi elmə getməyi qərara aldım". Tarix dahi tədqiqatçını itirdi – riyaziyyat onu əbədi əldə etdi. Kolmoqorovun tarix üzrə əlyazmaları uzun müddət itmiş sayılırdı, lakin sonralar, artıq müəllifin vəfatından sonra tapıldılar və dərc edildilər. Onun "XV əsr Novqorod mülkədarlığı" əsəri mütəxəssislərin yüksək qiymətini almışdır.

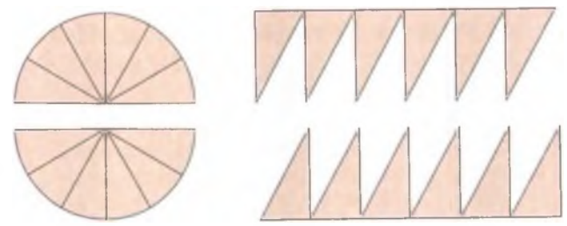
$e^x = (1 + x/i)^i$, burada i "sonsuz böyük ədədi" bildirir...$2k\pi/i$ qövsü sonsuz kiçik olduğundan, onda

$$\cos\frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2k^2}{i^2}\pi^2...$$

x^2/i^2 həddi qorxusuz atıla bilər, çünki hətta i-yə vurulanda belə o, sonsuz kiçik olaraq qalır".

Bizim günlərdə hətta tələbə imtahanda belə cavab versəydi, o, qeyri-kafi alardı. Lakin kitabın müəllifi dahi riyaziyyatçıdır və sitat gətirilən fraqmentlər onun məşhur düsturlarından olan sinusun sonsuz hasilə ayrılması düsturunun isbatının bir hissəsidir. Bu, indi də riyazi analizin mirvarilərindən biridir.

Beləliklə, nəyin isbat olması, nəyin olmamasının anlamı zamanla dəyişir. Dəlilin inandırıcılığını tarix şərtləndirir. Məsələn, orta əsr məhkəmələrində günahkar olub-olmamağın sübutu bizim nəzər nöqtəmizə görə çox özünəməxsus idi: insan əlində közərmiş dəmiri tuta bilsəydi, günahsız sayılırdı, sarınıb suya atılmış qadın batmasaydı, cadügər elan olunurdu. Riyazi isbatın inandırıcılığı hüquqi sübutlarla eyni psixoloji əsaslara malikdir və buna görə də tarixi şəraitdən asılıdır.



Şəkil 1.

Orta əsr Hindistanında, məsələn, həndəsi hökmləri belə isbat edirdilər: Altında bircə "Bax!" sözü olan cizgi təklif edirdilər. Şəkil 1-də dairənin sahəsi düsturunun hind isbatı gətirilib: bu dairə, hündürlüyü onun radiusuna, oturacağı isə dairənin yarımçevrəsinin uzunluğuna bərabər olan düzbucaqlının sahəsinə bərabərdir. Qədim Misir mətnlərində ən sadə sahələrin hesablanmasına, alikvot kəsrlərlə əməllərə rast gəlinir ("Qədim Misir" məqaləsinə bax). Hesabatlar hər hansı əsas olmadan gətirilir. Görünür, o zaman belə əsaslanmaya psixoloji zərurət mövcud deyildi – həll üsulları nüfuzlu şəxsdən, məsələn kahindən gəlirdi və yazılırdı. Daha heç nə tələb olunmurdu. (İndi biz tibbi

TEOREM, TƏRİF, AKSİOM, LEMMA

Teorem (yunanca "teoreo" – "baxıram", "araşdırıram", eləcə də "teorema" – "təqdimat", "tamaşa" sözlərindən) həqiqiliyi isbatın köməyi ilə müəyyən edilən riyazi təklifdir. Bu ad ona görə bərqərar olub ki, qədimlərdə teoremləri tez-tez publika önündə, meydanlarda isbat edirdilər. Bəzən isbat hətta əlbəyaxa çarpışmaya gətirən qızğın mübahisə xarakteri daşıyırdı.

Hər bir isbat əvvəllər qəbul olunmuş digər kəlamlar, son nəticədə tərif və aksiomlar üzərində qurulur. Tərif riyazi obyektin onu digər obyektlər arasından ayıran əsas xassələrinin göstərildiyi təklifdir. Aksiom (yunanca "aksioma" – "hörmət", "nüfuz" sözündən) əvvəldən seçilmiş deyimdir. Müəyyən aksiomların həqiqiliyi isbatsız fərz edilir. Qeyd edək ki, hətta sübut olunmuş teoremlər belə mütləq həqiqət kimi qəbul edilə bilməz, çünki onların isbatı qəbul olunmuş aksiomlara əsaslanır.

Konkret teoremin isbatının aksiom və tərifl ərdən başlaması vacib deyil, o, əvvəllər isbat edilmiş təkliflərə - teorem və lemmalara da əsaslana bilər. Bir və ya bir neçə teoremin isbatı üçün istifadə edilən köməkçi təklif lemma (yunanca "lemma" – "rüşvət", "gəlir" sözündən) adlanır.

Hər bir teoremi, konkret formuləetmədə onlar aşkar şəkildə ayrılmaya bilsələr də, iki hissəyə bölmək olar: şərt və nəticə.

Məsələn, yaxşı məlum olan Viyet teoremini adətən belə formulə edirlər:

Kvadrat tənliyin köklərinin cəmi x-in əks işarə ilə götürülmüş əmsalının x^2-ın əmsalına nisbətinə bərabərdir; köklərin hasili sərbəst həddin x^2-ın əmsalına nisbətinə bərabərdir.

Teoremin şərti ondadır ki, tənliyin köklərinin mövcudluğu fərz olunur. Belə fərziyyə asanca diqqətdən yayınır və bu da bu və ya digər məsələnin həlli zamanı səhvə gətirə bilər. Buna görə də teoremləri tez-tez şərti cümlələr şəklində: "əgər...onda..." – formalaşdırırlar. Bu cümlənin "əgər"dən sonra gələn hissəsi teoremin şərti, "onda"dan sonra gələn o biri hissəsi onun nəticəsidir. Hər bir teoremi, məsələn, Viyet teoremini belə formulə etmək olar:

Əgər $ax^2 + bx + c = 0$ kvadrat tənliyinin kökləri x_1 və x_2 dirsə, onda

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},\quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

münasibətləri doğrudur.

reseptlərə eyni cür yanaşmırıqmı?) Müasir anlamda ilk isbatları qədim yunan mütəfəkkirləri Fales və Pifaqora aid edirlər. Hesab olunur ki, məhz e.ə. *VII – VI* əsrlərdə Qədim Yunanıstanda yeni adət: riyazi faktı onun əsaslandırılması ilə müşayiət etmə

SOFİZMLƏR

Qədim Yunanıstanda diskusiyalar aparılması sənəti tez-tez yanlış müddəaların hiyləgər "isbatlarına" gətirirdi. Belə "isbatlar" sofizmlər adlanırdı, belə ki, sofistlər – Qədim Elladada fəlsəfə və bəlağətli nitq müəllimləri onlardan tez-tez istifadə edirdilər. Müxtəlif sofizmlərin təhlili son nəticədə məntiqin inkişafına gətirdi. Xüsusi halda, qədim yunan filosofu Aristotelin kitablarından biri elə "Sofist təkzibetmələr haqqında" adlanır. Sofizmə bir neçə misal göstərək:

"Yarımlar bərabərdirsə, tamlar da bərabərdir. Yarıdolu stəkan yarıboş stəkana bərabərdir, deməli, boş stəkan dolu stəkana bərabərdir".

"Bu sənin küçüyündür? – Hə, o mənim itimin oğludur. – Deməli, o sənindir və o, oğuldur, yəni o sənin oğlundur."

"Bütün itirmədiklərinə maliksən. Sən buynuzlarını itirməmisən. Deməli, buynuzların var".

Bir çox sofizmlər anlayışların mənasının dəyişdirilməsinə əsaslanıb. Məsələn, axırıncı sofizmdə əvvəl verilmiş adama məxsus şeylərə, sonra isə ümumiyyətlə şeylərə baxılır. Bu mövzuda maraqlı lətifə də var:

Müəllim:

- Cənab tələbə, ümid edirəm ki, sənin köçürəcəyini görməyəcəyəm.

Tələbə:

- Mən də buna ümid edirəm.

Həndəsəni tez-tez səhv cizgilərdə düzgün mühakimə yürütmək sənəti adlandırırlar. Bu tərifin mövcud olmağa haqqı var, çünki mütləq dəqiq cizgilər olmur. Belə ki, müstəvidə nöqtə və düz xətti təsvir etmək mümkün deyil, onların yerinə balaca dairə və kiçik enli zolaq çəkirlər. Bununla belə, həndəsi sofizmlər tez-tez məhz düzgün qurulmamış cizgilərə əsaslanır. İki belə mühakimə gətirək.

Misal 1. İxtiyari *ABC* üçbucağına baxaq. *B* bucağının tənbölənini və *AC* parçasına orta perpendikulyar keçirək. Onların kəsişmə nöqtəsini *M*-lə işarə edək (şəkil 1,*a*). *MD AMC* üçbucağında həm hündürlük, həm də median olduğundan bu üçbucaq bərabəryanlıdır və *AM = MC*. İndi isə *M* nöqtəsindən *AB* və *BC* tərəflərinə müvafiq olaraq *ME* və *MF* perpendikulyarları endirək. Tənbölənin xassəsinə görə *ME = MF*, deməli, *AME* və *CMF* düzbucaqlı üçbucaqları bərabərdir: onların hipotenuzları (*AM* və *MC*), katetləri (*ME* və *MF*) bərabərdir. Buradan alınır ki, onların ikinci katetləri *AE* və *CF* də bərabərdir. Tənbölənin həmin xassəsinə görə, *MEB* və *MFB* düzbucaqlı üçbucaqları bərabərdir, deməli, onların ikinci katetləri *BE* və BF bərabərdir. Buradan alınır ki, *AB = BC*, çünki *AB = AE + EB*, *BC = BF + FC*.

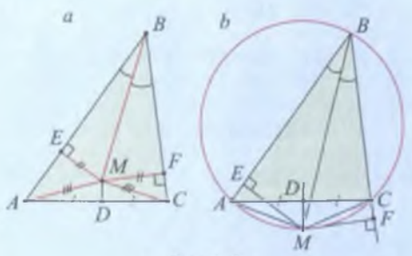
Belə bir paradoks meydana gəldi ki, bütün üçbucaqlar bərabəryanlıdır. Daha betəri, üçbucağın oturacağı kimi *AC*-ni yox, *AB*-ni götürsək, həmin üsulla alırıq ki, *BC = AC*. Deməli, bütün üçbucaqlar bərabərtərəflidir!

Cizgidə səhv olmasaydı, bu sofizm də olmazdı. Oturacağa çəkilmiş orta perpendikulyar və oturacağın qarşısında duran bucağın tənböləni üçbucağın daxilində kəsişə bilməzlər. Onların kəsişmə nöqtəsi *ABC* üçbucağının ətrafına çəkilmiş çevrə üzərindədir və *AC* qövsünü yarı bölür ki, buna da asanca əmin olmaq olar (şəkil 1,*b*). Eyni qurmaları düzgün cizgidə etsək, yenə görərik ki, *AM = MC*, *ME = MF*, buna görə də *AE = CF*. Daha sonra, *BE = BF*, lakin *AB = BE + AE* və *BC = BF – FC*.

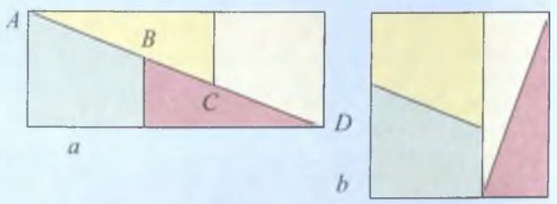
Misal 2. Şəkil 2 - də damalı kağızda düzbucaqlılar təsvir olunub. Onlardan biri 5 × 13 dama ölçülərdə olub cəmisi 65 damadan, digəri isə 8 × 8 damalı kvadrat olub cəmi 64 damadan ibarətdir. İndi isə fikir verin ki, hər iki düzbucaqlı cüt-cüt bərabər hissələrlə kəsilib. Deməli, onların sahələri bərabərdir, yəni 65 = 64.

Səhv ondadır ki, *A*, *B*, *C* və *D* nöqtələri bir düz xətt üzərində yerləşmir (şəkil 2, *a*): *B* nöqtəsi *AD* düz xəttindən bir az yuxarıda, *C* nöqtəsi bir az aşağıda yerləşir, buna görə də *ABCD* paraleloqramdır, o, şəkil 2, *b*-dəki kvadratın kəsildiyi hissələrlə örtülmür. Paraleloqramın sahəsi düz bir damanın sahəsinə bərabərdir.

Gətirilən misallar göstərir ki, qeyri – dəqiq şəkil səhv nəticəyə gətirə bilər və "şəkildə göründüyü kimi" dəlili sübut deyil.



Şəkil 1.



Şəkil 2.

adəti meydana gəldi. Aydındır ki, verilmiş faktı nəinki xəbər vermək, həm də onun həqiqiliyini isbat etmək, yəni dinləyicini inandırmaq tələbatı meydana gəldi.

Qədim yunan isbatları, demək olar ki, qüsursuz idilər. *XVII* əsrdən riyaziyyata dəyişən kəmiyyətlər və limitə keçid anlayışı gələndə işlərin durumu dəyişməyə başladı. Üç yüz ildən artıq müddət keçsə də, dəyişən və limit haqqındakı təsəvvürlər kifayət qədər aydın görünmür, buna görə də ciddi təsir bağışlamır (Eylerin kitabından sitatı yada salaq). Lakin o da əlamətdardır ki, bu cür qeyri-ciddi isbatlar riyaziyyatın cəbbəxanasına möhkəm daxil olan ciddi nəticələrə gətirib. *XIX* əsrin 20-ci illərində fransız riyaziyyatçısı Ogüsten Koşinin (1789 – 1857) işləri meydana gəldi. Onun işlərində limit və ona söykənən anlayışlar ilk dəfə müasir məntiqi forma aldı. Koşinin təşəbbüsü sonralar bir çox riyaziyyatçılar, ilk öncə, *XIX* əsrin ikinci yarısında alman riyaziyyatçısı Karl Veyerştrass tərəfindən inkişaf etdirildi. Lakin ciddiliyin zəruri səviyyəsi haqqında təsəvvürlər riyaziyyata uzun müddət ərzində daxil olurdu.

ƏKSİNİ FƏRZ ETMƏK ÜSULU İLƏ İSBAT

Əksini fərz etmə üsulu ilə isbat aşağıdakından ibarətdir. İsbatı tələb olunan *A* hökmünün əksi olan *B* hökmünün doğruluğunu fərz edirlər. Sonra isə bu *B*-yə istinad edərək ziddiyyətə gəlirlər və onda, qərara gəlirlər ki, *B* doğru deyilsə, onda *A* doğrudur.

Misal 1. Fərz edək ki, üçbucaq və onun bərabər olmayan iki tərəfi verilib. *A* hökmünü isbat etmək tələb olunur: böyük bucağın qarşısında böyük tərəf durur.

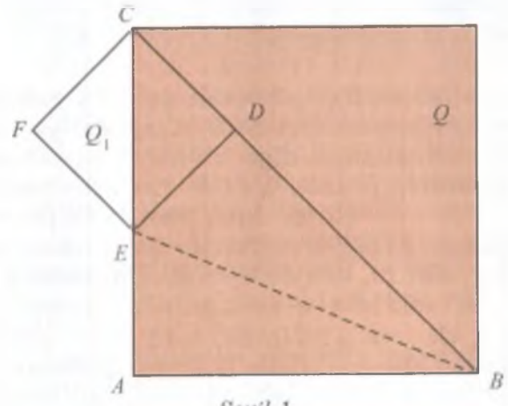
Əks *B* fərziyyəsi edək: bizim üçbucaqda böyük bucağın qarşısında duran tərəf kiçik bucağın qarşısında duran tərəfdən böyük deyil. *B* fərziyyəsi ixtiyari üçbucaqda bərabər tərəflərin qarşısında bərabər bucaqların durduğu, tərəflər bərabər olmayanda isə böyük tərəfin qarşısında böyük bucağın durması haqqında əvvəllər isbat olunmuş teoremlə ziddiyyət təşkil edir. Deməli, *B* hökmü doğru deyil və *A* hökmü doğrudur.

Əksini fərz etmək üsulu daha çox verilmiş xassəli obyektin mövcud olmadığını isbat etmək üçün istifadə olunur. Həqiqətən, bu obyektin mövcudluğunu isbat etmək tələb olunursa, onu sadəcə irəli sürmək olar. Bəs onun olmadığını necə isbat etmək olar? Onu sonlu sayda ünsür arasında axtarmaq lazım olarsa, heç olmazsa seçmə üsuluna əl atmaq olar. Bəs ünsürlərin sayı sonsuz olsa necə? Əksini fərz etməklə "mövcud olmamanın sübut edilməsinə " üç misal göstərək.

Misal 2. Kvadratın diaqonalının və tərəfinin ortaq ölçüyə malik olmamasını isbat etmək tələb olunur.

Xatırladaq ki, *a b* – də tam ədəd dəfə yerləşirsə, *a* düz xətt parçası *b* parçasının ölçüsü adlanır. Onda iki parçanın ümumi ölçüsü onların hər biri üçün ölçü olan parçadır. İki parçanın ümumi ölçüsü mövcuddursa, parçalar ölçülə bilən, əks halda ölçülə bilməyən adlanır.

İsbat üçün seçmə üsulu burada tətbiq edilə bilməz: bütün parçaları seçmək və özü də onların hər birinin kvadratın tərəfinin və diaqonalının ümumi ölçüsü olmadığına əmin olmaq olmaz. Verilmiş faktın bütün məlum isbatları əksini fərz etmə üsulu ilə aparılır. Biz onların birini gətirək.



Şəkil 1.

Fərz edək ki, *a* parçası *Q* kvadratının tərəfinin və diaqonalının ümumi ölçüsüdür. Elə bir başqa, kiçik *Q′* kvadratı quraq ki, kvadratın tərəfinin və diaqonalının ixtiyari ümumi ölçüsü *Q Q′* – in diaqonalının və tərəfinin ümumi ortaq ölçüsü olsun. İlkin kvadratın *BC* dioqonalında kvadratın tərəfinə bərabər olan *BD* parçası ayıraq (şək. 1). *D*-dən *AC* ilə *E* nöqtəsində kəsişənədək

TƏSDİQ VƏ İNKAR

Sizin hər biriniz, şübhəsiz, doğru və yalan müddəalara rast gəlmisiniz. Müddəanı (hökmü) isbat etmək və təkzib etmək üçün hansı mühakimələri aparmaq lazım olduğunu müqayisə etmək maraqlıdır.

Sadə misaldan başlayaq. Fərz edək ki, siz belə bir sözü eşitmisiniz: "$(x+1)^2$ ifadəsi müsbətdir." O, doğrudur, ya yox? Yoxlayaq. $x=1$ yazıb $(1+1)^2=(2)^2=4>0$ alırıq. $x=2, x=3$ və s. yazaq. Hər dəfə müsbət ədəd alınacaq. Gətirilən mühakiməni isbat saymaq olarmı? Əlbəttə, yox. Hökmü isbat etmək üçün x-in bütün mümkün qiymətlərini ifadəyə yazmaq lazımdır. Onlarsa sonsuz çoxdur.

Həmin sözü təkzib etmək üçün nə etmək lazımdır? Fərz edək ki, $x=-1$. Alırıq ki, $(-1+1)^2=0^2=0$. 0 ədədi müsbət deyil, bununla da isbat olunur ki, "$(x+1)^2$ ifadəsi müsbətdir" ifadəsi doğru deyil. İfadəni təkzib etmək üçün onun doğru olmadığı bir misalı gətirmək kifayətdir. Məşhur "Sökmək tikmək deyil" deyimi yada düşür.

Bu amildən tez-tez istifadə edilir. Fərz edək ki, "Bu cilddə eyni miqdarda söz çap olunmuş heç olmasa iki səhifə var" müddəasını isbat etmək tələb olunur. Əlbəttə ki, arzulayan şəxs cildin hər səhifəsində neçə söz olduğunu sayıb ifadənin doğru olub-olmadığını təyin edə bilər. Lakin başqa cür də etmək olar. "Bu cilddə ixtiyari iki səhifədəki sözlər müxtəlifdir" ifadəsini təkzib etməyə çalışaq. Məlumdur ki, belə formatlı səhifəyə 600-dən çox söz yerləşmir. Bəs bu cilddə neçə səhifə var? Gətirilən müqayisə göstərir ki, şərtləri ödəyən iki səhifə mütləq mövcuddur. Hökm sübut olunub, bizimsə məhz hansı səhifələrdə sözlərin eyni olduğundan xəbərimiz belə yoxdur.

BC-yə perpendikulyar qaldıraq. CED üçbucağı bərabəryanlıdır: ECD bucağı 45°-yə bərabər olduğundan, digər iti bucaq da 45°-yə bərabərdir; deməli, $\angle ECD=\angle CED$; buradan $CD=ED$ alırıq. Buna görə də CED üçbucağını $EDCF$ kvadratına qədər tamamlamaq olar ki, onu da Q' əvəzi götürəcəyik.

Q' kvadratı Q kvadratından kiçikdir: $BC<AB+AC=2BD$, $BC-AB<AC$ olduğundan, alırıq ki, $CD<AC$, yəni Q' kvadratının tərəfi Q kvadratının tərəfindən kiçikdir. Özü də, Q kvadratının tərəfinin və diaqonalının ümumi ölçüsü nə olursa-olsun, o, həm də Q' kvadratının tərəfinin və diaqonalının ümumi ölçüsüdür. Doğrudan da, BEA və EBD düzbucaqlı üçbucaqları iki tərəflərinə görə bərabərdir, deməli, $AE=ED$. Əgər $CD=ED$- dirsə, onda $AE=CD$. İndi fərz edək ki, Q kvadratının tərəfinin və diaqonalının müəyyən ümumi ölçüsü onun tərəfində p dəfə, diaqonalında isə q dəfə yerləşir. Onda o, CD parçasında və ona bərabər AE parçasında düz $q-p$ dəfə yerləşəcək. Deməli, EC parçasında o, $p-(q-p)$ dəfə yerləşəcək. Beləliklə, bu ölçü Q' kvadratının CD tərəfində və EC diaqonalında tam ədəd dəfə yerləşir, yəni onların ümumi ölçüsüdür.

Q' ilə də eyni qaydada davranaraq elə bir Q'' kvadratı alacağıq ki, Q'-in diaqonalının və tərəfinin ümumi ölçüsü Q''-in diaqonalının və tərəfinin ümumi ölçüsü olacaq. Oxşar şəkildə Q'' kvadratı üçün Q''' kvadratı quraq və s. Get-gedə azalan $Q, Q', Q'', Q''', \ldots$, kvadratlar ardıcıllığı peyda olacaq, özü də Q kvadratının diaqonalının və tərəfinin ümumi ölçüsü eyni zamanda Q', Q'', Q''' və s. kvadratlarının diaqonal və tərəflərinin ümumi ölçüsü olacaq.

İndi isə fərz edək ki, a parçası, yəni Q kvadratının diaqonalının və tərəfinin ümumi ölçüsü Q kvadratının tərəfində n dəfə, Q' kvadratının tərəfində n' dəfə Q'' kvadratının tərifində n'' dəfə və s. yerləşir. Bir halda ki, bu kvadratlar kiçilir, onda $n>n'>n''>n'''>\ldots$. Nəticədə azalan natural ədədlərin sonsuz ardıcıllığı alınır ki, bu da, əlbəttə, mümkün deyil. Deməli, Q kvadratının tərəfinin və diaqonalının ümumi ölçüyə malik olması haqqında müddəa doğru deyil.

Burada istifadə olunmuş, baş qaldıran ziddiyyətin azalan natural ədədlərdən ibarət sonsuz ardıcıllığın peyda olmasından ibarət olan əksini fərz etmə yolu ilə isbat variantı sonsuz (və ya sərhədsiz) endirmə üsulu adlanır.

Misal 3. "Riyaziyyatda isbatlar" məqaləsində deyilirdi ki, $x^4+y^4=z^2$ tənliyinin tam ədədlər içərisində həlli yoxdur. Adətən bu faktı əksini fərz etmə üsulu ilə isbat edirlər: fərz edirlər ki, tənliyin həlli olan üç a, b, c tam ədədləri var, yəni $a^4+b^4=c^4$, bundan sonra sərhədsiz endirmə variantı üsulunu tətbiq edirlər: tənliyin həlli olan daha üç a', b', c' tam ədədlər tapırlar, özü də $|c'|<|c|$. Sonra tənliyin həlli olan daha üç a'', b'', c'' tam ədədlər götürürlər, özü də $|c''|<|c'|$. Nəticədə natural ədədlərin azalan $|c|>|c'|>|c''|>|c'''|>\ldots$ və s. ardıcıllığı alınır ki, bu da mümkün deyil. Deməli, fərziyyəmiz doğru deyil və $x^4+y^4=z^2$ tənliyinin tam ədədlər içində həlli yoxdur.

Misal 4. İsbat edək ki, bütün ikilik ardıcıllıqlar çoxluğu hesabi deyil (Ədədi

ZƏRURİ VƏ KAFİ ŞƏRT

Riyazi mətnlərdə tez-tez "zəruri" və "kafi" sözlərinə rast gəlmək olur. Bu sözlərin gündəlik mənası, əlbəttə, hər kəsə aydındır, lakin riyaziyyatçılar onlara daha dəqiq məzmun verirlər.

Hər hansı hökm üçün zəruri şərt ixtiyari elə bir müddəadır ki, onsuz verilmiş hökm doğru deyil. Kafi şərt elə bir müddəadır ki, ondan verilən hökm alınır. Kafi şərt zəruri olmaya bilər, eləcə də zəruri şərt kafi olmaya bilər.

Zəruri, lakin kafi olmayan şərtə misal gətirək. Dördbucaqlının düzbucaqlı olması üçün onun diaqonallarının bərabər olması zəruridir, lakin kafi deyil. Doğrudan da, bərabəryanlı trapesiyanın da diaqonalları bərabərdir. Şərtin kafi olub, zəruri olmamasına bir misal göstərək. Dördbucaqlının paraleloqram olması üçün tərəflərinin bərabər olması kafi şərtdir, lakin zəruri deyil. Doğrudan da bütün tərəfləri bərabər olan dördbucaqlı romdur, paraleloqram isə romb olmaya da bilər. Bəzən bir yox, bir neçə kafi (və ya zəruri) şərtlər göstərilir. Məsələn, dördbucaqlının paraleloqram olması üçün aşağıdakı şərtlərin birinin ödənməsi kafidir:

1) dördbucaqlının iki qarşı tərəfi bərabər və paraleldir;

2) diaqonalların kəsişmə nöqtəsi onları yarı bölür;

3) dördbucaqlı simmetriya mərkəzinə malikdir.

Eyni zamanda həm zəruri, həm kafi olan şərtlər xüsusi ilə vacibdir. Verilmiş hökmün çıxdığı ixtiyari müddəa zəruri və kafi şərtdir. Birinci müddəa isə özü ikincidən çıxır.

Məsələn, natural ədədlərin yaxşı məlum olan bölünmə əlamətləri zəruri və kafi şərtlərdir. Belə ki, ədədin 3-ə bölünməsi üçün onun rəqəmləri cəminin 3-ə bölünməsi zəruri və kafidir. Həndəsədə də oxşar hökmlər az deyil: qabarıq dördbucaqlının daxilinə çevrə çəkmək üçün onun qarşı tərəflərinin cəminin bərabər olması zəruri və kafidir.

"Zəruri və kafidir" ifadəsini formulələrdə tez-tez "yalnız və yalnız o halda ki, onda" və s. sözlərlə əvəz edirlər. Məsələn, aşağıdakılar kimi demək mümkündür:

1) Cisim yalnız və yalnız o zaman kürədir ki, onun müstəvi ilə ixtiyari kəsiyi dairə olsun;

2) Tərəfləri a, b, c olan üçbucaq yalnız və yalnız o zaman düzbucaqlıdır ki, $a^2+b^2=c^2$ şərti ödənsin.

Zəruri və kafi şərti ifadə edən teoremi meyar adlandırırlar. Məsələn, ədədi silsilənin meyarı belədir: ədədi ardıcıllıq onda və yalnız onda ədədi silsilədir ki, onun ikinci həddən başlayaraq hər bir həddi əvvəlinci və sonrakı hədlərin ədədi ortası olsun.

ardıcıllığın hər bir həddi sıfıra və ya vahidə bərabərdirsə, ədədi ardıcıllıq ikilik adlanır. Hesabi və qeyri-hesabi çoxluqlar haqqında "Sonsuz çoxluqlar" məqaləsinə bax.).

Fərz edək ki, bütün ikilik ardıcıllıqların M çoxluğu hesabidir. M çoxluğunu sayaq və onun n-ci ünsürünü a_n ilə işarə edək. Bu ünsür $\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2}, \alpha_{n,3}, \ldots$ ikilik ardıcıllığıdır. Beləliklə, $\alpha_{n,k}$ n-ci ardıcıllığın k-cı ünsürüdür.

İndi a_1-dən 1-ci həddi, a_2-dən 2-ci həddi, a_3-dən 3-cü həddi və s. fərqlənən b ardıcıllığına baxaq. Aydındır ki, b nə a_1, nə a_2, nə a_3 və s. ilə, yəni a_n ardıcıllıqlarının heç biri ilə üst-üstə düşmür. b ardıcıllığı $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ olduqda $\beta_m=1-\alpha_{m,m}$ ardıcıllığıdır. Deməli, M çoxluğunun bütün ardıcıllıqlarını saymağımız haqqında fərziyyə doğru deyil. Deməli, M çoxluğu qeyri- hesabidir.

$a_1, a_2, a_3\ldots$ ardıcıllıqlarının hər birinə sətir ayırsaq, sətirləri də alt-alta yerləşdirsək, $\alpha_{m,m}$ hədlərinin diaqonallar boyu yerləşdiyi şəkil alınacaq. Buna görə də sübut üsulu özü diaqonal üsul adlanır. Ondan əksini fərz etmə isbatlarında tez-tez istifadə edilir. Diaqonal üsulunu XIX əsrdə çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsasını işləyən alman riyaziyyatçısı Georq Kantor icad etmişdir.

MÖVCUDLUQ (VARLIQ) İSBATLARI

Riyaziyyatda mövcudluq isbatları adlanan anlayış böyük əhəmiyyətə malikdir. Verilmiş xassəli obyektin mövcudluğunun isbatının ən adi yolu onu göstərmək və təbii ki, onun lazımi xassələrə malik olduğuna əmin olmaqdır. Məsələn, tənliyin həllə malik olduğunu isbat etmək üçün onun hər hansı həllini göstərmək kifayətdir. Belə növ mövcudluq isbatları birbaşa və ya konstruktiv adlanır. Məsələn, xüsusi halda, parçaların ölçüsüzlüyünün mövcudluğunun isbatı birbaşa isbatdır: axı diaqonal və tərəf cütü birbaşa göstərilib ("Əksini fərz etmə yolu ilə isbat" məqaləsinə bax).

Lakin göstərilən obyektin mövcudluğu faktının əsaslandırılmasının obyektin özünə birbaşa göstərişsiz baş verdiyi dolayı isbatlar da var. Bir neçə misala baxaq.

Misal 1. Şahmat partiyasında qaralar ağların 15-ci gedişindən sonra təslim oldular. İsbat etmək tələb olunur ki, heç olmazsa bir qara fiqur öz xanasını bir dəfə də tərk etməyib (piyadaları da fiqurlara aid edirik).

Şahmat gedişi qalaqurma deyilsə 1 fiqur, qalaqurma halında iki fiqur tərpənir. Qaralar 14 gediş ediblər və qaydalara görə onların yalnız biri qalaqurma ola bilər. De-

məli, gediş etmiş qara fiqurların maksimal sayı 15-dir. Cəmisi isə 16 qara fiqur var. Deməli, onların azı biri heç bir gediş etməyib.

Misal 2. Təyyarədə 380 sərnişin uçur. İsbat edək ki, onların azı ikisi ilin eyni günündə doğulub.

İldə 365, ya 366 gün, təyyarədə isə 380 sərnişin var – deməli, onların ad günləri yalnız müxtəlif günlərə təsadüf edə bilməz. Ümumiyyətlə, sərnişinlər 366-dan çoxdursa, onda heç olmazsa iki sərnişinin ad günləri üst-üstə düşür. 366 sərnişin olsa isə, istisna deyil ki, onların hamısı ilin müxtəlif günlərində doğulublar, lakin bu da azehtimallıdır. (Ehtimal nəzəriyyəsinə görə, sayı 22 adamdan çox olan təsadüfi seçilmiş qrupda onların bəzilərinin ad günlərinin üst-üstə düşməsi hamısının ad günlərinin ilin müxtəlif günlərinə düşməsindən daha ehtimallıdır.)

Gətirilmiş isbatdakı məntiqi fənd həmin üsulun müəllifi alman Peter Qustav Dirixlenin (1805–1859) şərəfinə Dirixle prinsipi adlanır. Dirixle prinsipinin ümumi formulu belədir:

✓ **Ümumilikdə n + 1-dən az olmayan əşyanın olduğu n yeşik varsa, onda mütləq elə yeşik var ki, onda azı 2 əşya var.**

Misal 3. Sübut etmək tələb olunur ki, azı bir irrasional ədəd – iki natural ədədin m/n nisbəti şəklində göstərilə bilməyən həqiqi ədəd mövcuddur ("İrrasional ədədlər" məqaləsinə bax). Belə ədəd $\sqrt{2}$ – dir. Doğrudan da, Pifaqor teoreminə əsasən, $\sqrt{2}$ tərəfi 1 olan kvadratın diaqonalıdır. Əgər o, m və n natural ədədlərinin nisbəti ilə ifadə olunsaydı, onda uzunluğu $1/n$ olan parça vahid kvadratın tərəfində n dəfə, diaqonalında isə m dəfə yerləşərdi və deməli, onların ümumi ölçüsü olardı ki, bu da mümkün deyil ("Əksini fərz etməklə isbat" məqaləsinə bax).

Dolayı isbat da təklif etmək olar. Bütün rasional ədədlər çoxluğu hesabi, bütün həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri-hesabi olduğundan, ("Sonsuz çoxluqlar" məqaləsinə bax), rasional olmayan, yəni irrasional həqiqi ədədlər mövcud olmalıdır.

Misal 4. Elə hallar olur ki, dolayı yolla isbatlar birbaşa isbatdan xeyli sadə olur. Məsələn, isbat edək ki, transendent ədədlər mövcuddur. Xatırladaq ki, həqiqi ədəd tam əmsallı çoxhədlinin kökləri olduqda o, cəbri ədəd, əks halda transendent ədəd adlanır ("Transendent ədədlər" məqaləsinə bax). Transendent ədədlərin mövcudluğunun birbaşa isbatı belə ədədlərin nümunələrinin təqdimindən ibarətdir. Sən demə, məşhur sabitlər e (natural loqarifmin əsası) və π (çevrənin uzunluğunun onun diametrinə nisbəti) məhz transendent ədədlərdir. Kifayət qədər mürəkkəb isbatdan qaçmaqdan ötrü bütün həqiqi ədədlər çoxluğunu və bütün cəbri ədədlər çoxluğunu müqayisə edək. Bildiyimiz kimi, onların birincisi qeyri-hesabidir. İkincisinin hesabiliyi oradan çıxır ki, hər bir cəbri ədədi "adlandırmaq" – ona ad vermək olar. Ad kimi ən asanı iki hissədən – 1) müvafiq çoxhədlinin yazılışından və 2) baxılan ədədin bu çoxhədlinin kökləri içində sıra nömrəsindən (köklər artma qaydasında götürülür) ibarət ifadə götürməkdir. Belə adları saymaq artıq çətin deyil. Əgər bütün həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri-hesabi, bütün cəbri ədədlər çoxluğu hesabidirsə, cəbri olmayan, yəni transendent ədədlər var.

BƏZİ TEOREMLƏRİN İSBATI

PİFAQOR TEOREMİ

Dillər əzbəri olan Pifaqor teoremi!

Nəyə görə bu teorem riyaziyyatda daha mühüm və qiymətli teoremləri kölgədə qoymuşdur!

Nə hesabın, nə cəbrin – heç bir teoremi onunla "yarışa" bilmir. Burada görünür bir sirr vardır! Nəyə görə hətta həndəsəni bilməyən insanlar arasında belə bu teoremi əzbər bilənlər var. Məktəbli dostlarının adını unutmuş yaşlılar belə Pifaqor teoremini unutmamışdır! Nəyə görə?!

Bu polemikanı oxucuların öz düşüncələrinə buraxıb başqa bir sual verək; bu qədər məşhur və məlum teorem haqqında yenidən danışmağa dəyərmi?

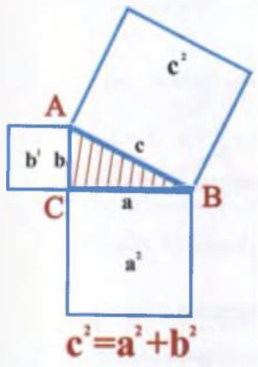
Deyilənə görə bu teorem Pifaqordan qabaq Falesə, Falesdən əvvəl 6 müdrikə (Fales yeddinci–sonuncu müdrik sayılmışdır) məlum idi. Müdriklərdən əvvəl isə Babil və Misir kahinlərinə məlum idi. Qədim misirlilər katetləri 3 və 4, hipotenuzu 5 vahid olan üçbucağın köməyi ilə düz bucağı qururdular. Uzunluğu 12 vahid olan kəndirdə 3 və 4 vahiddən sonra nişan qoyulurdu və sonra həmin kəndiri ağız-ağıza gətirib düzbucaqlı üçbucağı alırdılar.

Çin və hind alimlərinin söylədiklərinə görə Pifaqor teoremi eramızdan əvvəl II minillikdə məlum idi. Bəs onda nəyə görə bu teorem tarixə Pifaqor teoremi adı ilə yazılmışdır?

Rəvayətə görə Pifaqor bu teoremi isbat etməyənə kimi evlənməyəcəyinə söz verir və əgər bu teoremi isbat edərsə Allahlara yüz öküz qurban (hekatomba) kəsəcəyini bildirir. Bu rəvayəti Diogen söyləmişdir. Onun nə dərəcə doğru olduğu müəmmalıdır. Ancaq əsas fakt budur ki, düzbucaqlı üçbucaq haqqında olan bu teorem onun adı ilə məşhurdur.

Pifaqor teoreminin iki formada deyilişi vardır:

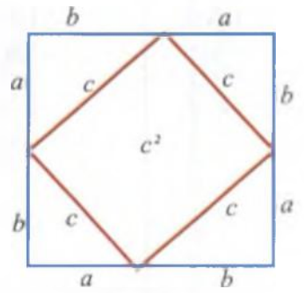
Klassik variant: Dübzucaqlı üçbucağın katetləri üzərində qurulmuş kvadratların sahələri cəmi, onun hipotenuzu üzərində qurulmuş kvadratın sahəsinə bərabərdir. (şək. 1).



Şəkil 1.

Müasir variant: Düzbucaqlı üçbucağın katetlərinin kvadratları cəmi, onun hipotenuzunun kvadratına bərabərdir.

Pifaqor teoreminin məşhurluğu–populyarlığı ona gətirib çıxarıb ki, zamanının hər bir riyaziyyatçısı onunla məşğul olmuş, ən azı onun yeni bir isbatını tapmağa çalışmışlar. Buna görə Pifaqor teoremi isbatlarının sayına görə birinci yerdədir. Milli fəxrimiz N. Tusi (1201-1274) "Təhriri eqlidis" əsərinin I nəşrində onun 36, II nəşrində isə 12 isbatını verir. Pifaqor teoreminin isbatlarını toplamağa çalışan B. Litsmanın fikrincə onun isbatları sayı 1000-dən çoxdur. Onları həm toplamaq, həm araşdırmaq çox müşkül bir işdir. Belə araşdırmalar bizim məqsədimizdən kənardır, lakin gənc həvəskarlardan kiminsə bu yaradıcılıqla məşğul olması çox gözəl olardı.



Şəkil 2.

İndi isə Pifaqor teoreminin bir neçə isbatını verək:

İsbat: Tərəfi $a+b$ olan kvadrat quraq və onun tərəfində şəkildəki kimi düzbucaqlı üçbucağı ayıraq (şəkil 2). Kvadratın və düzbucaqlı üçbucağın sahəsi düsturuna görə:

$$(a+b)^2 = 4\cdot\frac{1}{2}ab + c^2.$$

Buradan:

$a^2 + b^2 = c^2$ alarıq.

Ən qısa isbatlardan biridir.

STÜART TEOREMİ

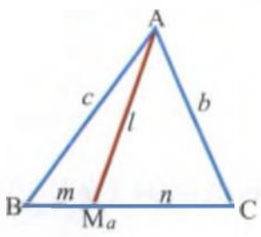
Şotland riyaziyyatçısı M.Stüart (1717-1765) tərəfindən söylənilən aşağıdakı teorem üçbucaqda metrik münasibəti ifadə edən ən ümumi teoremlərdən biridir. Ehtimal edilir ki, bu teorem Arximedə məlum imiş.

Teorem: ABC verilmiş üçbucaq, M nöqtəsi BC-nin daxili nöqtəsi olarsa, onda

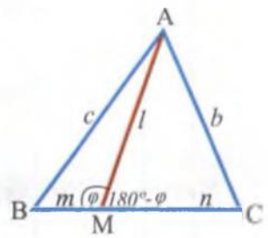
$$AM^2 = \frac{AB^2\cdot MC + AC^2\cdot BM}{BC} - BM\cdot MC$$

Kiçik hərflə yazsaq

$$l^2 = \frac{c^2\cdot n + b^2\cdot m}{a} - m\cdot n.$$



Şəkil 3.



Şəkil 4.

İsbatı: Kosinuslar teoreminin tətbiqi ilə isbatı həyata keçirək (şəkil 3).

ΔBMA-dan; $AB^2=c^2=l^2+m^2-2lm\cdot\cos\varphi$

ΔAMC-dən; $AC^2=b^2=l^2+n^2-$

$-2ln\cdot cos(180c-\varphi)=l^2+n^2+2ln\cdot cos\varphi$

birinci bərabərlikdən $\cos\varphi=\frac{l^2+m^2-c^2}{2lm}$,

ikinci bərabərlikdən $\cos\varphi=\frac{b^2-l^2-n^2}{2nl}$

Bu bərabərliklərdən $\frac{l^2+m^2-c^2}{2lm}=\frac{b^2+l^2-n^2}{2nl}$.

Buradan $\left(l^2+m^2-c^2\right)\cdot n=m\left(b^2-l^2-n^2\right)$ alırıq.

Çevirmələr aparaq:

$$l^2\cdot n+l^2\cdot m=mb^2+nc^2-mn^2-nm^2$$

$$l^2\cdot a=nc^2+mb^2-mna$$

$$l^2=\frac{nc^2+mb^2}{a}-mn$$

Teorem isbat olundu.

İsbatı yadda saxlama metodu: $cos\varphi$-nin hər iki ifadəsi yazılır.

Qeyd edək ki, bəzi kitablarda üçbucağın təpəsi ilə qarşıdakı tərəfin daxili nöqtəsini birləşdirən parçanı ***Çevan*** adlandırırlar (İtalyan riyaziyyatçısı M.Çevanın şərəfinə). Tənbölən və median hər ikisi çeviandır.

Nəticə 1. M-orta nöqtə olsun. AM-mediandır.

$$AM=l=m_a.\quad BM=MC=\frac{1}{2}a$$

$$m_a^2=l^2=\frac{c^2n+b^2m}{a}-mn=\frac{c^2\frac{1}{2}a+b^2\frac{1}{2}a}{a}-\frac{1}{2}a\frac{1}{2}a=$$

$$=\frac{1}{2}\left(c^2+b^2\right)-\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}\left(2\left(c^2+b^2\right)-a^2\right)$$

Buradan da məlum

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2\left(c^2+b^2\right)-a^2}$$

düsturunu alırıq.

Nəticə 2. AM-tənbölən olsun $l_a=l$.

Onda $\frac{c}{m}=\frac{b}{n}\Rightarrow cn=bm$ olar.

$$l_a^2=l^2=\frac{c^2n+b^2m}{a}-mn=\frac{c\cdot cn+b\cdot bm}{a}-mn=$$

$$\frac{c\cdot bm+b\cdot cn}{a}-mn=\frac{c\cdot b(m+n)}{a}-mn=$$

$$=\frac{cb\cdot a}{a}-mn=bc-mn$$

$l_a^2=bc-mn$; burada $m+n=a$, $l_b^2=a\cdot c-pq$;

burada $p+q=b$.

Yadda saxlama qaydası: "tərəflərin hasili çıxılsın hissələrin hasili".

Bu düsturu bir az irəli aparaq:

$$\frac{m}{c}=\frac{n}{b}=\frac{m+n}{b+c}=\frac{a}{b+c}.$$

Buradan; $m=\frac{ac}{b+c}$ və $n=\frac{ab}{b+c}$

$$l_a^2=bc-\frac{ac}{b+c}\cdot\frac{ab}{b+c}=bc\cdot\left(1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\right)=\frac{bc}{(b+c)^2}\text{x}$$

$$\text{x}\left((b+c)^2-a^2\right)=\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot(b+c+a)(b+c-a)=$$

$$=\frac{bc}{(b+c)^2}\cdot 4p(p-a)=\frac{4}{(b+c)^2}\cdot bcp(p-a)$$

Burada $a+b+c=2p$ və $b+c-a=2(p-a)$.

Buradan da tənbölənin məşhur düsturu alınır.

$l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ Analoji olaraq l_b və l_c-nin də düsturlarını yazmaq olar.

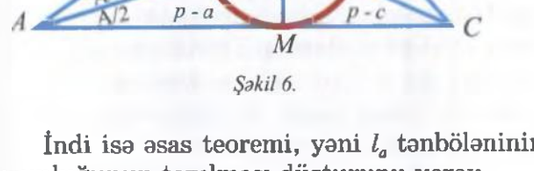
$$l_b=\frac{2}{a+c}\cdot\sqrt{a\cdot c\cdot p\cdot(p-b)}$$

$$l_c=\frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{a\cdot b\cdot p\cdot(p-c)}$$

ŞTEYNER-LEMUS TEOREMİ VƏ YA BİR DAHA TƏNBÖLƏN HAQQINDA

Tənbölənin özü və xassələri haqqında məktəbdə kifayət qədər məlumat verilir. Bununla belə tənbölənlə yenidən görüşməyi məsləhət görürük.

1. Tənbölənə həndəsi yer kimi baxmağı tövsiyyə edirik. Bucağın tərəflərindən bərabər məsafədə duran nöqtələrin həndəsi yeri bu bucağın tənbölənidir (şəkil 5).



Şəkil 5.

2. Tənbölən üzərindəki hər bir nöqtədən tərəflərə qədər məsafələr bərabərdir.

3. Bucağın tərəflərinə toxunan çevrənin mərkəzi tənbölənin üzərindədir.Bucağın tərəflərinə toxunan çevrələrin mərkəzlərinin həndəsi yeri bu bucağın tənbölənidir.

4. Üçbucağın tənbölənlərinin kəsişmə nöqtəsi onun daxilinə çəkilmiş mərkəzidir (şəkil 6).

5. Bəzi düsturlar:

$AM=AN=p-a$; $BN=BL=p-b$ və $CM=CL=p-c$.

$r=\frac{S}{p}$. $r=(p-a)tg\frac{A}{2}=(p-b)tg\frac{B}{2}=(p-c)tg\frac{C}{2}$

Şəkil 6.

İndi isə əsas teoremi, yəni l_a tənbölənin uzunluğunun tapılması düsturunu verək.

Tənbölənin uzunluğunun onun tərəfləri vasitəsi ilə ifadə olunması çox-çox qədimdən məlumdur. Bu teoremin onlarla isbatı məlumdur. Əvvəlcə məlum teoremi isbat edək:

Şəkil 7.

Teorem. AL tənbölən BC tərəfini AB və AC tərəfləri ilə mütənasib parçalara bölür.

Yəni; $\frac{c}{m}=\frac{b}{n}$ yaxud $\frac{c}{b}=\frac{m}{n}$ (şəkil 7).

Sinuslar teoreminə görə;

$$\frac{c}{\sin\varphi}=\frac{m}{\sin\frac{A}{2}}\text{ və }\frac{b}{\sin(180^\circ-\varphi)}=\frac{n}{\sin\frac{A}{2}}$$

Buradan alarıq: $\frac{c}{b}=\frac{m}{n}$ və ya $\frac{m}{c}=\frac{n}{b}$.

Yaddasaxlama qaydası: tənbölənin bir tərəfində olanlar mütənasibdir.

İndi l_a uzunluğunun tapılması ilə məşğul olaq.

Yuxarıda almışdıq ki;

$$m=\frac{ac}{b+c}\text{ və }n=\frac{ab}{b+c}.$$

Kosinuslar teoremini tətbiq edək və çevirmələr aparaq:

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow 1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2bc}=$$

$$=\frac{4p(p-a)}{2bc}\cos^2\frac{A}{2}=\frac{p(p-a)}{bc}\Rightarrow\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}.$$

Bu çevirməni oxucuya bir neçə dəfə etməyi məsləhət bilirik.

$$S_1+S_2=S\Rightarrow\frac{1}{2}cl_a\sin\frac{A}{2}+\frac{1}{2}bl_a\sin\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}cb\sin A\frac{1}{2}l_a(b+c)\sin\frac{A}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}bc\,2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}l_a(b+c)=2bc\cos\frac{A}{2}=$$

$$=2bc\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}=2\sqrt{p(p-a)bc}$$

Buradan $l_a=\frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$.

Son ifadəni yadda saxlamaq üçün bəzən belə də yazırlar.

$$l_a=\frac{\sqrt{bc}}{\frac{b+c}{2}}\sqrt{p(p-a)}\rightarrow\frac{\text{həndəsi orta}}{\text{ədədi orta}}\sqrt{p(p-a)}.$$

Bununla tənbölənin uzunluğu haqqında teoremin isbatı başa çatdı.

İndi isə üçbucaqların bərabəryanlılığının bir əlaməti haqqında: İki tənböləni bərabər olan üçbucaq bərabəryanlıdır.

Bu teoremi C.Lemus 1840-cı ildə Y.Şteynerə göndərir və ondan onun həndəsi isbatını xahiş edir. Şteyner çox uzun və ağır həndəsi isbat tapır. Ona görə teorem Şteyner-Lemus teoremi adlanır. Şteynerdən sonra bu teoremin onlarla isbatı tapılmışdı. Gənc oxucular üçün bu teoremin isbatını tənbölənin uzunluq düsturlarına görə həyata keçirək. Yəni cəbri isbatını verək;

$l_a=l_b$ olarsa, $a=b$ olduğunu isbat edək:

İsbatı:

$$l_a^2=l_b^2 \Rightarrow \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}=\frac{4acp(p-b)}{(a+c)^2}$$

$$\frac{b(p-a)}{(b+c)^2}=\frac{a(p-b)}{(a+c)^2} \Rightarrow (a+c)^2(bp-ba)=$$

$$=(b+c)^2(pa-ab),$$

$$\big((a+c)^2b-(b+c)^2a\big)p+ab\big((b+c)^2-(a+c)^2\big)=0,$$

$$\big((a^2b-b^2a)+c^2(b-a)\big)p+ab(b-a)(b+a+2c)=0,$$

$$(b-a)(c^2-ab)p+(b-a)ab(b+a+2c)=0,$$

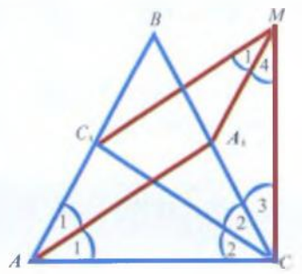
$$(b-a)\big((c^2-ab)p+ab(b+a+2c)\big)=0.$$

İkinci mötərizə daxilində olan ifadə müsbətdir (bunu sərbəst araşdırın). Deməli, $b-a=0$.

Buradan; $b=a$ alınır.Yəni, iki tənböləni bərabər olan üçbucaq bərabəryanlıdır. İsbatda əsas ideya l_a və l_b-nin düsturları üzərində çevirmələr aparmaqdı. Oxucularda eynilik çevirmələrinə marağın güclü olduğunu güman edirik və ümid edirik ki, bu isbatı bir neçə dəfə həyata keçirib ondan zövq alacaqlar.

İndi teoremin həndəsi isbatını verək.

II isbat. Əksini fərz etmə üsulu ilə isbat (şəkil 8):



Şəkil 8.

Bu üsulun gözəlliyi onun sadəliyində və qısalığındadır. ABC-ixtiyari bir üçbucaq, AA_1 və CC_1-onun A və C bucaqlarının tənbölənləri həm də $AA_1=CC_1$ olsun.

İsbat edək ki, $\angle A=\angle C$-dir. Yaxud $BA=BC$.

Tutaq ki: $AA_1=CC_1$ ancaq $\angle A\neq\angle C$. Müəyyənlik üçün $\angle A>\angle C$ götürək. Onda $\angle A_1AC<\angle C_1CA \Rightarrow \angle 1<\angle 2$.

ΔC_1AC və ΔA_1CA üçbucaqlarının iki bərabər tərəfi var: $C_1C=AA_1$ və $AC=CA^2$. $\angle A<\angle C$ olduğundan

$$CA_1<AC_1.$$

C_1 nöqtəsindən $C_1M//AA_1$ və $C_1M=AA_1$ quraq. Onda $AC1MA1$-paraleloqram olar. $A_1M=AC_1$.

C nöqtəsi ilə M-i birləşdirək. Alınan $MCC1$ üçbucağı bərabəryanlıdır: $C_1M=C_1C$. CM oturacaqdır. Ona görə $\angle C_1MC=\angle C_1CM$. Buradan; $\angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3$ alarıq. $\angle 1<\angle 2$ olduğundan $\angle 4>\angle 3$ alınar. Hər bir üçbucaqda böyük bucaq qarşısında böyük tərəf durduğundan $\angle 4>\angle 3$ bərabərsizliyindən $CA_1>A_1M$ alarıq (ΔCA_1M-dən).

Deməli; $CA_1>A_1M=AC_1 \Rightarrow CA_1>AC_1$.

Bu isə yuxarıda qeyd etdiyimiz $CA_1<AC_1$-şərtinə ziddir. Əgər $\angle A>\angle C$ olsaydı, analoji mühakiməni davam etdirib yenə ziddiyyət alardıq. Deməli nə $\angle A>\angle C$ və nə də, $\angle A<\angle C$ ola bilməz. Yeganə $\angle A=\angle C$ halı qalır. Buradan da, $AB=AC$ alırıq. Teorem isbat olundu.

EYLER TEOREMİ
(ÜÇ NÖQTƏ HAQQINDA)

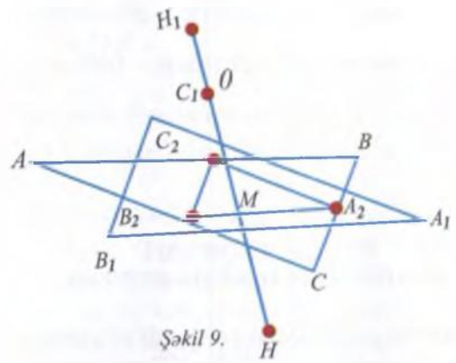
XVIII əsrin və həmçinin bütün zamanların ən görkəmli riyaziyyatçılarından biri olan Leonard Eyler (1707-1783) riyaziyyatın, mexanikanın, astronomiyanın və s. inkişafında çox kəşflər etmişdir. Eylerin zamanında "Elementar həndəsə" inkişafını sanki başa vurmuşdu. Heç kim elementar həndəsədə heç nə axtarmırdı. Lakin Eyler üçbucağın, çevrənin və dördbucaqlının elə incə xassələrini aşkar və isbat etmişdir ki,

onun bu nailiyyətlərinə heyran olmamaq olmur. Belə sadə kəşflərdən biri hazırda Eyler düz xətti adı ilə məşhur olan aşağıdakı teoremdir.

Teorem: İxtiyari üçbucaqda xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzi, medianların kəsişmə nöqtəsi və hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi bir düz xətt üzərindədir.

Qeyd: Bu üç nöqtənin bir düz xətt üzərində olmasını Eylerə qədər yəqin həndəsəşünasların çoxu müşahidə etmişdir. Lakin bu sadə faktın isbatı görünür ciddi əngəllər yaratmışdır.

İsbatı: O-xaricə çəkilmiş çevrənin mərkəzi (şəkil 9).



Şəkil 9.

M-medianların kəsişmə nöqtəsi və H-hündürlüklərin kəsişmə nöqtəsi olsun.

Addım 1: M nöqtəsinə nəzərən ABC-yə simmetrik $A1B1C1$ üçbucağını quraq.

Bu simmetriyada; $A\to A_1$, $B\to B_1$, $C\to C_1$, $H\to H_1$ olsun.

Onda; $MA_1=MA$, $MB_1=MB$, $MC_1=MC$ və $MH_1=MH$ olar.

Addım 2: M-nəzərən əmsalı $\frac{1}{2}$ olan homotetiyaya baxaq. Bu homotezida $A1B1C1$-in obrazı $A2B2C2$ olsun. Onda $MA_2=\frac{1}{2}MA_1=\frac{1}{2}MA$ olar. Deməli A_2 nöqtəsi A-dan çəkilən medianın oturacağıdır. Uyğun olaraq B_2 və C_2 nöqtələri də B və C təpələrindən çəkilən medianların oturacaqları olacaqdır. Yəni $A2B2C2$ üçbucağı ABC üçbucağının orta üçbucağıdır.

Addım 3: $A1B1C1$-üçbucağının hündürlüklərinin kəsişmə nöqtəsi H_1-in obrazı O nöqtəsinin üzərinə düşür. Çünki, orta üçbucağın hündürlüklərinin kəsişmə nöqtəsi, əsas üçbucağın xaricinə çəkilmiş çevrənin mərkəzidir. Doğrudan da C_2-dən A_2B_2-yə çəkilmiş hündürlük AB-nin ortasından qaldırılmış perpendikulyardır.

Aldıq ki, mərkəzi M və əmsalı $k=\frac{1}{2}$ homotetiyada $H_1\to O$ olur.

$$MO=\frac{1}{2}MH_1=\frac{1}{2}MH$$

$MO=\frac{1}{2}MH$ ifadəsindən alırıq ki, O, M və H-bir düz xətt üzərindədir. Bu düz xətt Eylerin şərəfinə Eyler düz xətti adlanır.

M nöqtəsi OH parçasını 1:2 nisbətində bölür.

Oxucuya bu teoremi düzbucaqlı üçbucaqda ayrıca araşdırmağı məsləhət görürük.

EYLER TEOREMİ
(İKİ MƏRKƏZ ARASINDAKI MƏSAFƏ)

L. Eylerə qədər mərkəzlər arasındakı məsafə həndəsəşünasların hamısını maraqlandırmaya bilməzdi. Görünür mətncə bu - sadə məsələ Eylerə qədər həll oluna bilmədiyinə görə Eyler bu məsələnin həlli ilə məşğul olmuş və $d^2=R^2-2Rr$ düstürunu tapmışdır.

Teorem: Üçbucağın xaricinə və daxilinə çəkilmiş çevrələrin radiusları R və r onların mərkəzləri arasındakı məsafə d olarsa, onda $d^2=R^2-2Rr$.

İsbatı: ABC üçbucağını hələlik itibucaqlı götürək.

O-xaricə və O_1-daxilə çəkilmiş çevrənin mərkəzi, OO_1-mərkəzləri birləşdirən parça olsun (şəkil 16).

$O_1D\perp AB$ çəkək. BO_1 tənbölənini çevrəni E nöqtəsində kəsənə kimi uzadaq. Daha sonra E nöqtəsindən EM-diametrini çəkək. Bununla, hazırlıq işlərini başa çatdırdıq.

İndi isbata keçək; $\angle MAE=90^\circ$.

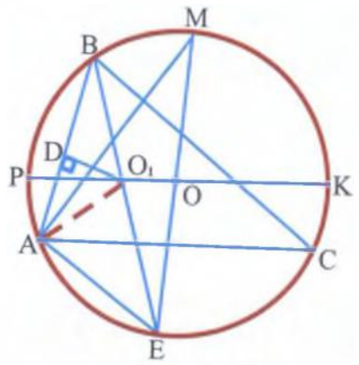
$$\angle DBO_1=\angle ABE=\angle AME=\frac{1}{2}AE$$

$\Delta BDO_1 \sim \Delta MAE$,

$\frac{DO_1}{BO_1} = \frac{AE}{ME} \Rightarrow DO_1 \cdot ME = BO_1 \cdot AE$

$DO_1 = r$ və $ME = 2R$ olduğundan

$BO_1 \cdot AE = r \cdot 2R = 2Rr$



Şəkil 10.

$BO_1 \cdot AE = 2Rr.$

$\angle O_1AE$ -yə baxaq;

$\angle O_1AE = \angle O_1AC + \angle CAE = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}.$

$\angle CAE = \frac{1}{2} \cdot \overset{\smile}{EC} = \frac{1}{2} \angle B.$

$\angle AO_1E = 180° - \angle AO_1B =$

$= 180° - (\angle AO_1D + \angle DO_1B) =$

$= 180° - \left(90° - \frac{\angle A}{2} + 90° - \frac{\angle B}{2}\right) = \frac{\angle A}{2} + \frac{\angle B}{2}$

Aldıq ki, $\angle AO_1E = \angle O_1AE$. Yəni AEO_1-bərabəryanlı üçbucaqdır. $AE=O_1E$. Buradan da, alırıq $BO_1 \cdot AE = BO_1 \cdot O_1E$- bu, heyrətamiz nəticədir!

Vətərlərin xassəsinə görə;

$BO_1 \cdot O_1E = PO_1 \cdot O_1K.$

$BO_1 \cdot O_1E = BO_1 \cdot AE = 2Rr$

olduğundan $PO_1 \cdot O_1K = BO_1 \cdot O_1E = 2Rr$ alarıq.

Digər tərəfdən

$PO_1 \cdot O_1K = (PO - O_1O) \cdot (O_1O + OK) = (R-d) \cdot (d+R) = R^2 - d^2.$

Son iki bərabərliyi tutuşdurub $R^2 - d^2 = 2Rr$, buradan isə $d^2 = R^2 - 2Rr$ alınır. Bununla teorem isbat olundu. Siz bu isbatı ciddi təhlil etsəniz "Həndəsi görmənin" nələr yaratdığının şahidi olacaqsınız və tədricən sizdə də isbat üçün çox vacib keyfiyyət – "Həndəsi görmə" yaranacaqdır.

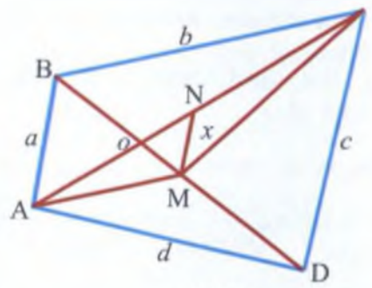
Bərabərtərəfli üçbucaqda; $d=0$ olduğundan $R=2r$, yaxud $r = \frac{1}{2}R$ alınır.

Düzbucaqlı üçbucaqda; $d^2 = \frac{1}{4}c(3c-2a-2b)$, bərabəryanlı düzbucaqlı üçbucaqda; $d^2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{4}c^2$ olduğunu müstəqil isbat edin.

EYLER TEOREMİ
(DÖRDBUCAQLILAR HAQQINDA)

Teorem. $ABCD$ qabarıq dördbucaqlısının tərəfləri $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$ və $DA=d$; diaqonalları $AC=d_1$ və $BD=d_2$;

Diaqonalların orta nöqtələri N və M olarsa, onda (şəkil 11)



Şəkil 11.

$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN^2$

Qısa: $a^2+b^2+c^2+d^2=d_1^2+d_2^2+4x^2$.

İsbatı: Baza məlumat kimi medianın düsturunu götürək. Tərəfləri a, b və c üçbucaqda

$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2} \Rightarrow 4m_a^2 = 2b^2+2c^2-a^2$

olduğu məlumdur.

AMC üçbucağının MN medianı üçün düsturu yazaq

$4MN^2 = 2AM^2 + 2MC^2 - AC^2$ (1)

ΔBAD-dən: $4AM^2 = 2AB^2 + 2AD^2 - BD^2$ (2)

ΔBCD-dən: $4CM^2 = 2BC^2 + 2CD^2 - BD^2$ (3)

(2) və (3) bərabərliklərini tərəf-tərəfə toplayıb sonra 2-yə bölək;

$4AM^2 = 4CM^2 =$

$= 2AB^2 + BC^2 + 2CD^2 - 2DA^2 - 2BD^2$ (4)

(4) bərabərliyini (1)-də nəzərə alaq:

$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - BD^2 - AC^2$

və ya $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4MN2$ yaxud; $a^2+b^2+c^2+d^2=d_1^2+d_2^2+4x^2$. Burada $MN=x$. İsbat etdik ki, qabarıq dördbucaqlının tərəflərinin kvadratları cəmi onun diaqonallarının kvadratları cəmi ilə diaqonallarının orta nöqtələri arasındakı məsafənin dörd mislinin cəminə bərabərdir. Teorem isbat olundu.

Paraleloqramın diaqonalları orta nöqtələrində kəsişdiyindən $x=0$ olur və ona görə

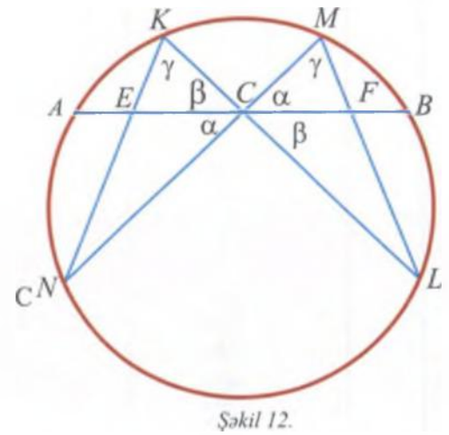
$d_1^2+d_2^2=a^2+b^2+c^2+d^2=2(a^2+b^2).$

Yəni paraleloqramın diaqonallarının kvadratları cəmi, onun tərəflərinin kvadratları cəminə bərabərdir. Bu teorem düzbucaqlıda; $d^2=a^2+b^2$, rombda $d_1^2+d_2^2=4a^2$ və kvadratda $d^2=2a^2$ şəklini alır.

KƏPƏNƏK TEOREMİ

Əslində vətərlər haqqında olan bu teorema şəklin kəpənəyin qanadlarına oxşamasına görə belə romantik ad verilmişdir. Kitabların çoxunda bir isbat məsələsi kimi gedir. Lakin bu teoremin də çoxlu isbatları mövcuddur. Biz onun sizə iki isbatını təqdim edirik. Əvvəl teoremin özünü qeyd edək:

Teorem: Çevrənin AB vətərinin ortasından (C nöqtəsi) MN və KL vətərləri keçirilmişdir. KN və ML ilə AB-nin kəsişmə nöqtələri E və F olarsa, onda $CE=CF$ olar. Yəni, C nöqtəsi EF parçasının da orta nöqtəsidir (şəkil 12).



Şəkil 12.

İsbat: Triqonometrik isbat:

$\angle ECN = \angle MCF = \alpha,$

$\angle ECK = \angle LCF = \beta,$

$\angle NKL = \angle NML = \gamma$

işarə edək. $EC=x$ və $AC=a$ olsun.

Bir nöqtədə kəsişən vətərlərin xassəsinə görə;

$NE \cdot EK = AE \cdot EB = (a-x)(a+x) = a^2 - x^2$

$NE \cdot EK = a^2 - x2$ (1)

NEC-üçbucağına sinuslar teoremini tətbiq edək;

$\angle ENC = 180° - (\alpha+\beta+\gamma) \Rightarrow \sin\angle ENC = \sin(\alpha+\beta+\gamma)$

$\frac{EC}{\sin\angle ENC} = \frac{NE}{\sin\alpha} \Rightarrow NE = \frac{x\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$ (2)

İndi KEC üçbucağına sinuslar teoremini tətbiq edək;

$$\frac{EK}{\sin\beta}=\frac{x}{\sin\gamma}\Rightarrow EK=\frac{x\sin\beta}{\sin\gamma} \qquad (3)$$

(2) və (3) bərabərlıklərini tərəf-tərəfə vuraq

$$NE\cdot EK=\frac{x^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\gamma}=a^2-x^2.$$

Buradan

$$x^2+\frac{x^2\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\gamma}=a^2$$

$$x^2\left(1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\gamma}\right)=a^2 \qquad (4)$$

alarıq.

$CF=y$ qəbul edib; $LF\cdot FM=a^2-y^2$ yazıb, sonra LFC və MCF-üçbucaqlarına yuxarıdakı kimi sinuslar teoremini, müvafiq əməliyyatları apardıqdan sonra,

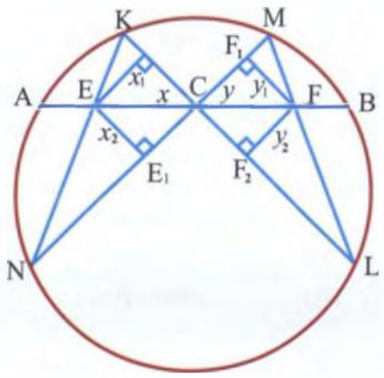
$$y^2\left(1+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)\sin\gamma}\right)=a^2 \qquad (5)$$

alarıq.

(4) və (5) tutuşdurduqdan sonra, $x=y$ alınır. Yəni $CE=CF$. Başqa sözlə, C nöqtəsi EF parçasının orta nöqtəsidir. $CE=CF$ olmasından $AE=FB$ alınır.

II İsbat: (Oxşarlığa görə isbat)

E və F nöqtələrindən MN və KL vətərlərinə perpendikulyar çəkək (şəkil 13):



Şəkil 13.

$EE_1=x_1$; $EE_2=x_2$; $FF_1=y_1$; $FF_2=y_2$. $CE=x$ və $CF=y$ işarə edək. Bu şəkildə çoxlu sayda oxşar üçbucaqlar cütü var. Birinci isbatda göstərmişdik ki, $NE\cdot EK=a^2-x^2$ və $LF\cdot FM=a^2-y^2$.

Üçbucaqların oxşarlığından tərəflərin nisbətlərini yazaq:

$$\Delta KEE_1\sim\Delta MFF_1\Rightarrow\frac{KE}{MF}=\frac{x_1}{y_1}$$

$$\Delta NEE_2\sim\Delta LFF_2\Rightarrow\frac{NE}{LF}=\frac{x_2}{y_2}$$

Tərəf-tərəfə vuraq;

$$\frac{NE\cdot KE}{LF\cdot MF}=\frac{x_1\cdot x_2}{y_1\cdot y_2} \qquad (6)$$

$$\Delta ECE_1\sim\Delta FCF_2\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{x_1}{y_2},$$

$$\Delta ECE_2\sim\Delta FCF_1\Rightarrow\frac{x}{y}=\frac{x_2}{y_1}.$$

Son iki bərabərliyi tərəf-tərəfə vuraq:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2} \qquad (7)$$

(6) və (7) bərabərliklərindən:

$\frac{KE\cdot NE}{MF\cdot LF}=\frac{x_1x_2}{y_1y_2}=\frac{x^2}{y^2}$ alınır.

Alırıq ki, $\frac{x^2}{y^2}=\frac{KE\cdot NE}{MF\cdot LF}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}$.

Tənasübün xassəsini tətbiq edək:

$$\frac{x^2}{y^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2-y^2}=\frac{a^2-x^2+x^2}{a^2-y^2+y^2}=\frac{a^2}{a^2}=1$$

Buradan, $x=y$ alınır.

Yəni, $CE=CF$. Bununla bu gözəl teoremin isbatı başa çatır.

CEVA TEOREMİ

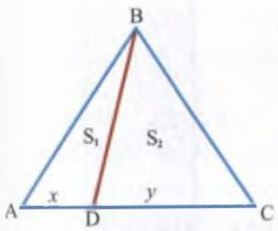
İtalyan riyaziyyatçısı və mühəndisi C. Ceva (1648-1734). 1678-ci ildə bu maraqlı teoremi kəşf etmişdir. Bu teorem Proyektiv həndəsənin əsas teoremlərindən biridir. Əvvəlcə hər bir məktəblinin bildiyi aşağıdakı teoremi verək.

Teorem 1: BD parçası AC tərəfini hansı nisbətdə bölürsə, onun sahəsini həmin nisbətdə bölür. Yəni, $S_1:S_2=x:y$ (şəkil 14).

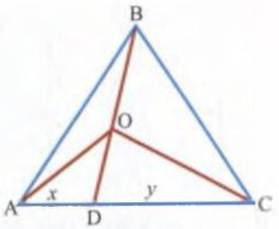
Müstəqil isbat etmək daha yaxşıdır!

Teorem 2: BD parçasında O nöqtəsi götürülmüşdür.

İsbat edin: $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{AD}{DC}=\frac{x}{y}$ (şəkil 15).



Şəkil 14.



Şəkil 15.

İsbatı: Teorem 1-ə görə

$\frac{AD}{DC}=\frac{S_{ADB}}{S_{DBC}}=\frac{S_{AOD}}{S_{DOC}}=\frac{S_{ABD}-S_{AOD}}{S_{DBC}-S_{DOC}}=\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}$ olar.

Yəni, $\frac{S_{AOB}}{S_{BOC}}=\frac{AD}{DC}=\frac{x}{y}$. Üçbucağın təpəsi ilə qarşıdakı tərəfin daxili nöqtəsini birləşdirən parçaya **Çevian** deyilir.

Teorem 3 (Ceva teoremi): AA_1, BB_1 və CC_1 çevianları O nöqtəsində kəsişərsə, onda

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$

İsbatı: Teorem 2-yə görə

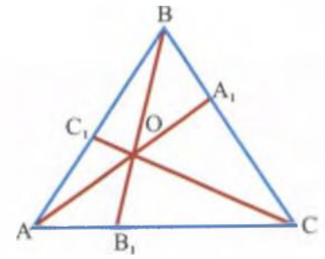
$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}};\quad\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}};\quad\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}$$

Bu bərabərlikləri tərəf-tərəfə vuraq:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{S_{AOC}}{S_{BOC}}\cdot\frac{S_{AOB}}{S_{AOC}}\cdot\frac{S_{BOC}}{S_{AOB}}=1$$

Aldıq ki, $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$. Bununla Ceva teoreminin isbatı başa çatdı. Diqqət edin, necə gözəl və effektli bir isbatdır!

Tərs teorem: A_1, B_1 və C_1 nöqtələri müvafiq olaraq ABC üçbucağının BC, AC və AB tərəfləri üzərində və $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$ olarsa, onda AA_1, BB_1 və CC_1 parçaları bir nöqtədə kəsişir (şəkil 16).



Şəkil 16.

İsbatı: AA_1 və BB_1-in kəsişmə nöqtəsi O olsun.

CO-nun AB ilə kəsişmə nöqtəsi C ' olsun.

Onda düz teoremə görə

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$$

olar.

Şərtə görə $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1$

Bu iki bərabərlikdən

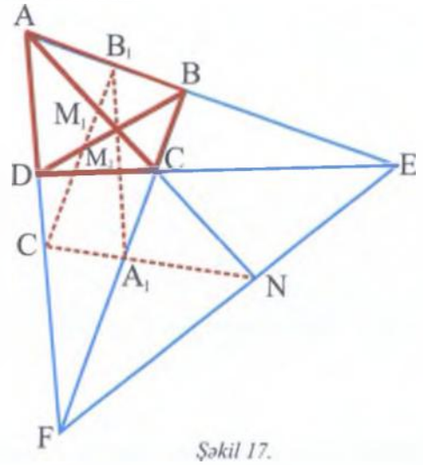
$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC_1}{C_1B}$$

olar. Bu isə o, deməkdir ki, C' və C üst-üstə düşür. Yəni CC_1 parçası AA_1 və BB_1-in kəsişmə nöqtəsi O-dan keçir. Bununla teorem isbat olundu. Cevra teoremini tətbiq edərək üçbucağın medianlarının, tənbölənlərinin və hündürlüklərinin bir nöqtədə kəsişdiyini isbat edin.

QAUS TEOREMİ

Bu teoremdə üç nöqtənin bir düz xətt üzərində olması (kollinearlıq) haqqındadır. Bu teoremi bəzi tədqiqatçılar Nyutonun adına yazırlar. Teoremin müxtəlif yazılışları vardır. Onun sadə variantı aşağıdakı kimidir.

Teorem: Tərəfləri paralel olmayan dördbucaqlının dioqonallarının orta nöqtələri və qarşı tərəflərin kəsişmə nöqtələrini birləşdirən parçanın orta nöqtəsi bir düz xətt üzərindədir.



Şəkil 17.

İsbatı: *ABCD* tərəfləri paralel olmayan dördbucaqlı olsun. *AB* ilə *CD* kəsişmə nöqtəsi *E*, *AD* ilə *BC*-nin kəsişmə nöqtəsi *F* olsun. *AC*-nin ortası isə M_1 olsun. *AB*-nin ortası B_1, *AF*-in ortası C_1 və *BF*-in ortası A_1 olsun. Aydındır ki, *B1C1* orta xətti (*ABF* üçbucağına görə) M_1-dən, C_1N orta xətti isə A_1 nöqtəsindən (*AFE* üçbucağına görə) keçəcəkdir (şəkil 17).

Fales teoreminə görə (*BD* şüası paralel *B1A1* və *AF* düz xətlərini kəsir)

$$\frac{A_1M_2}{M_2B_1}=\frac{FD}{DA}. \qquad (1)$$

Yenə Fales teoreminə görə (*AC* şüası paralel *B1C1* və *BF* düz xətlərini kəsir)

$$\frac{B_1M_1}{M_1C_1}=\frac{BC}{CF}. \qquad (2)$$

Bir daha Fales teoreminə görə (*FB* şüası paralel C_1N və *AE* düz xətlərini kəsir)

$$\frac{C_1N}{NA_1}=\frac{AE}{EB}. \qquad (3)$$

İndi (1), (2) və (3) bərabərliklərini tərəf-tərəfə vuraq:

$$\frac{A_1M_2}{M_2B_1}\cdot\frac{B_1M_1}{M_1C_1}\cdot\frac{C_1N}{NA_1}=\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}$$

Menelay teoreminə görə $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BC}{CF}\cdot\frac{FD}{DA}=1$.

Çünki, *ABF* üçbucağının tərəflərini *DCE* düz xətti kəsir (Menelay düz xətti).

$$\frac{A_1M_2}{M_2B_1}\cdot\frac{B_1M_1}{M_1C_1}\cdot\frac{C_1N}{NA_1}=1$$

Bu isə o deməkdir ki, *A1B1C1* üçbucağı üçün *M1M2N* –Menelay düz xəttidir. Başqa sözlə M_1, M_2 və *N*-bir düz xətt üzərindədir. Heyrətamiz nəticədir. Bununla nadir həndəsi incilərdən olan Qaus teoreminin isbatı başa çatdı.

RİYAZİ İNDUKSİYA ÜSULU

İnduksiya üsulu ən ümumi anlamda xüsusi formuldan universal formula keçiddən ibarətdir. Müəyyən müddəanın bütün natural ədədlər üçün doğruluğunu sübut etmək istəyəndə riyazi induksiya üsulu tətbiq olunur.

Misal 1. İsbat edək ki, həmişə

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2} \qquad (*)$$

Bunun üçün əvvəlcə iki faktı müəyyən edək. Əvvəla, $n=1$ üçün (*) müddəası doğrudur. Doğrudan da,

$$1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$$

İkincisi, fərz edək ki, (*) ifadəsi $n=k$ üçün doğrudur və onun $n=k+1$ üçün də doğru olduğunu isbat edək:

$$1+2+3+\ldots+(k+1)=(1+2+3+\ldots+k)+$$

$$+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Deməli, (*) müddəası bütün *n*-lər üçün doğrudur: $n=1$ üçün (birinci fakt), ikinci

fakta görə isə $n=2$ üçün, buradan yenə həmin fakta görə $n=3$ üçün və s.

Misal 2. Həmin üsulla bütün *n*-lər üçün aşağıdakı bərabərliklərin həqiqiliyinə asanca əmin olmaq olar:

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3+2^3+3^3\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$$

Beləliklə, şərh edilmiş muhakimə üsulu iki faktın müəyyən edilməsini tələb edir:

1) verilmiş müddəa 1 üçün doğrudur;

2) bizi maraqlandıran müddəa hər hansı *k* ədədi üçün doğrudursa, ondan sonra gələn $k+1$ ədədi üçün də doğrudur. Hər iki fakt müəyyənləşdirilməndən sonra 1-dən 2-yə, 2-dən 3-ə və s. keçərək əmin oluruq ki, baxılan müddəa bütün natural ədədlər üçün doğrudur.

Birinci fakt induksiya bazisi, ikinci – induksiya keçidi və ya induksiya addımı adlanır. İnduksiya keçidi özündə induksiya mühakiməsini (və ya fərziyyəsini) (müddəa $n=k$-da doğrudur) və nəticəsini (müddəa $n=k+1$-də doğrudur) ehtiva edir. Başqa sözlə, induksiya addımı muhakimədən nəticəyə keçiddən, yəni mühakimə doğru olduqda nəticənin doğru olması qənaətindən ibarətdir. Başqa sözlə, madam ki, həm bazis, həm keçid doğrudur, deməli baxılan müddəa bütün natural ədədlər üçün doğrudur nəticəsini almağa imkan verən məntiqi fənd riyazi induksiya prinsipi adlanır. Riyazi induksiya üsulu elə ona da əsaslanıb.

Bu üsul o halda uğurla tətbiq oluna bilər ki, natural qiymətlər alan parametrdən asılı müəyyən *A* hökmü mövcuddur və *A*-nın parametrin ixtiyari qiymətində doğru olduğunu sübut etmək tələb olunur. Misal 1-də *A* hökmü aşağıdakı şəkildə idi:

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

n parametri özü induksiyanın parametri adlanır. Deyirlər ki, verilmiş parametr üzrə induksiya baş verir.

Parametrin 1-ə bərabər olan qiymətində *A* müddəasını *A*(1), parametrin 2-yə bərabər olan qiymətində *A*(2) və s. işarə etmək qəbul olunub. Misal 1-də *A*(10) müddəası belədir:

$$1+2+3+\ldots+10=\frac{10(10+1)}{2}$$

A(1), *A*(2), *A*(3)...hökmləri xüsusi formul, "ixtiyari *n* üçün *A*(*n*) doğrudur" hökmü isə universal formul adlanır. Başqa cür ifadə etsək, induksiyanın bazisi *A*(1) xüsusi formulundan; "*n*-in ixtiyari qiymətində *A*(1) xüsusi formulunun həqiqiliyindən *A*($n+1$) xüsusi formulunun həqiqiliyi çıxır" müddəası induksiya addımından başqa bir şey deyil.

Biz həm bazisi, həm addımı isbat etmişiksə, onda universal formulun həqiqiliyi aşağıdakı standart mühakiməyə əsaslanır: "*A*(1) hökmü həqiqidir, çünki induksiya bazisidir. Ona induksiya keçidi tətbiq edərək alırıq ki, *A*(2) hökmü həqiqidir. Ona induksiya keçidi tətbiq edərək alırıq ki, *A*(3) hökmü həqiqidir. Ona induksiya keçidi tətbiq edərək alırıq ki, *A*(4) hökmü həqiqidir. Bu üsulla biz n-in ixtiyari qiymətini sınaqdan keçirə və əmin ola bilərik ki, *A*(*n*) həqiqidir. Deməli, ixtiyari n üçün *A*(*n*) doğrudur".

Beləliklə, riyazi induksiya metodunun prinsipi, mahiyyətcə, hər bir konkret situasiyada standart mühakimədən istifadə etməməyə icazə verməkdir, yəni o, universal formulun həqiqiliyi haqqında dərhal, induksiya bazisinin və induksiya keçidinin həqiqiliyi müəyyən olunan kimi nəticə çıxarmağa imkan verir.

Misal 3. Riyazi induksiya prinsipinin köməyi ilə

$$(1+\alpha)^n\geq 1+n\alpha$$

bərabərsizliyini isbat edək, burada $\alpha\neq 0$, $\alpha\geq -1$.

İnduksiya bazisi yerinə yetirilib, çünki $n=1$ olduqda bərabərsizliyin sağ və sol tərəfləri eynidir. İnduksiya addımını formulə etməyə verilmiş müddəanın $n=k$ üçün doğru olması fərziyyəsindən başlayaq; onda induksiya mühakiməsi $(1+\alpha)^{k+1}\geq(1+k\alpha)(1+\alpha)$. olacaq. Həmin bərabərsizliyi mənfi olmayan $1+\alpha$ ədədinə vuraraq alırıq

$$(1+\alpha)^{k+1}\geq(1+k\alpha)(1+\alpha)$$

Axırıncı bərabərsizliyi aşağıdakı hala salaq:

$$(1+\alpha)^{k+1}\geq 1+(k+1)\alpha+k\alpha^2$$

Eyni zamanda

$$1+(k+1)\alpha+k\alpha^2\geq 1+(k+1)\alpha$$

buradan alırıq ki,

İXTİRAÇI PARADOKSU

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

bərabərsizliyini riyazi induksiya üsulu ilə isbat etməyə çalışaq.

İnduksiya bazisi asanca yoxlanılır:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1} = \frac{1}{\sqrt{1}}$$

İnduksiya fərziyyəsinə əsasən,

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k\cdot (2k+2)} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$$

və bizə isbat etmək qalır ki,

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldərək və məxrəclərdən azad edərək

$$(k+1)(2k+1)^2 \le k(2k+2)^2 \qquad (**)$$

Ekvivalent bərabərsizliyinə, sonra isə mötərizələri açaraq

$$4k^2 + 8k^2 + 5k + 1 \le 4k^3 + 8k^2 + 4k$$

bərabərsizliyinə gəlirik.

Stop! Bu bərabərsizlik doğru deyil! Deməli, (**) və (*) bərabərsizlikləri də doğru deyil. İlkin bərabərsizliyin də doğru olmadığını hesab etmək olarmı?

Yox, olmaz. Bizim uğursuzluğumuz yalnız onu göstərir ki, konkret isbat üsulu – induksiya – yaramır.

İndi

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} \qquad (***)$$

bərabərsizliyini isbat etməyə çalışaq.

(***) bərabərsizliyi bizim ilkin bərabərsizliyimizdən güclüdür və elə görünür ki, onu eyni üsulla – induksiya ilə isbat etmək ümidsiz işdir. Hər halda sınayaq.

İnduksiya bazisi yenə də asandır:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1}}$$

İnduksiya fərziyyəsinə görə alırıq ki,

$$\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k\cdot (2k+2)} =$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2k} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} < \frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2}$$

Və biz isbat etməliyik ki,

$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} \le \frac{1}{\sqrt{k+2}}$$

Yenə də bərabərsizliyin hər iki tərəfini kvadrata yüksəldək, məxrəclərdən azad olaraq və mötərizələri açaraq

$$4k^3 + 12k^2 + 9k + 2 \le 4k^3 + 12k^2 + 12k + 4$$

ekvivalent bərabərsizliyinə gəlirik.

Möcüzə! Bu bərabərsizlik doğrudur! Deməli biz (***) bərabərsizliyini (induksiya üsulu ilə) isbat etdik və oradan da ləngimədən ilkin bərabərsizliyimizi çıxarırıq.

Bu necə alındı? Məsələ bundadır ki, ikinci halda bizə daha güclü nəticəni isbat etmək lazım gəlsə də, biz daha güclü induksiya fərziyyəsindən istifadə edə bildik. Belə vəziyyət ixtiraçı paradoksu adlanır.

$$(1+\alpha)^{k+1} \ge 1 + (k+1)\alpha$$

Bu da elə induksiya addımının nəticəsidir. Biz həm bazisin, həm addımın həqiqiliyini isbat etdik. Riyazi induksiya üsulu ilə isbat başa çatdı.

Bəzən bütün natural ədədlər üçün deyil, müəyyən ədəddən başlanılan müddəaları isbat etmək lazım gəlir.

Misal 4. İsbat edək ki, qabarıq n-bucaqlının bucaqları cəmi $\pi(n-2)$ – yə bərabərdir, burada π – açıq bucaqdır. Aydındır ki, gətirilən hökm yalnız $n \ge 3$ olduqda doğrudur.

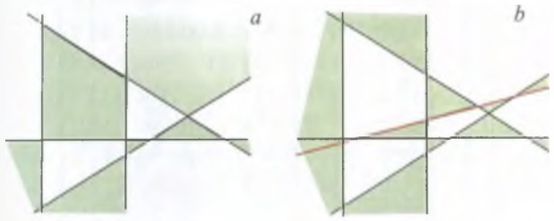
Riyazi induksiya üsulunu tətbiq etmək üçün formulu bir qədər dəyişək: qabarıq $(n+2)$ bucaqlının bucaqları cəmi πn-ə bərabərdir. Belə müddəanın artıq bütün n-lər üçün mənası var. Bazis üçbucağın bucaqları haqqında teoremin köməyi ilə isbat olunur. İndi "tərəflərinin sayı $(k+2)$ olan çoxbucaqlının bucaqları cəmi πk-ya bərabərdir" mühakiməsindən "tərəflərinin sayı $(k+1)+2$ olan çoxbucaqlının bucaqları cəmi $\pi(k+1)$-ə bərabərdir" induksiya keçidi nəticəsini çıxaraq. Tərəflərinin sayı $(k+1)+2$ olan çoxbucaqlının hər hansı bir təpəsinə ən yaxın iki təpəsini götürək və onları iki hissəyə: üçbucağa və $(k+2)$ bucaqlıya bölən diaqonalla birləşdirək. Verilmiş çoxbucaqlının bucaqları cəmini üçbucağın bucaqları cəmini (o, π-yə bərabərdir) və $(k+2)$ bucaqlının bucaqları cəmini – o, (keçid mühakiməsi!) πk təşkil edir – toplamaqla almaq olar. Bu cəmləri toplayıb $\pi(k+1)$ alırıq ki, bunu da isbat etmək tələb olunurdu.

Bəzən müddəa parametri aşkar şəkildə saxlamır və onu daxil etmək üçün müəyyən bacarıq tələb olunur.

Misal 5. Müstəvi üzərində düz xətlərin sonlu çoxluğu verilib. İsbat etmək tələb olunur ki, müstəvinin düz xətlərlə parçalandığı hissələri iki rənglə "düzgün" rəngləmək olar – yəni nəticədə ümumi sərhədə malik olan iki hissədən heç biri eyni rəngdə olmayacaq. Coğrafi xəritələri məhz belə rənglə-

yirlər. Bizim halımızda da hissələrə bölünən müstəvini xəritə adlandıraq.

Səslənmiş müddəada natural ədədlər haqqında heç nə deyilməyiib, buna görə də onu başqa cür formulə edək: n düz xəttin yaratdığı ixtiyari xəritəni iki rənglə düzgün rəngləmək olar. Bazis doğrudur: $n = 1$ olanda düz bir dənə düz xətt var və onun müstəvini böldüyü iki hissəni biz sadəcə iki rənglə boyayırıq. İnduksiya addımının mühakiməsi k düz xətlər halında düzgün rəngləməni həmişə həyata keçirmək olar fərziyyəsindən ibarətdir. Mühakimədən nəticəyə keçid ($k+1$ düz xətt üçün düzgün rəngləməni həmişə həyata keçirmək olar) şəkil 1-də göstərilib.

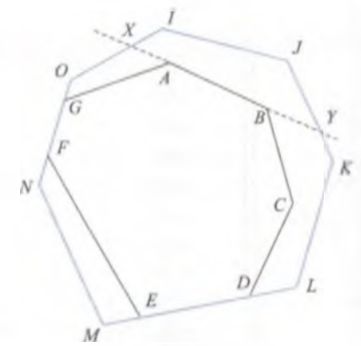


Şəkil 1.

Misal 6. Qabarıq çoxbucaqlı bütövlükdə digər qabarıq çoxbucaqlı ilə örtülüb. İsbat etmək tələb olunur ki, daxili çoxbucaqlının perimetri xarici çoxbucaqlının perimetrini aşmır.

Daxili çoxbucaqlının xarici coxbucaqlının heç bir tərəfi üzərində yerləşməyən hər bir tərəfini sərbəst tərəf adlandıraq. İnduksiya parametri olaraq sərbəst tərəflərin sayı plyus vahidi qəbul edək (çünki sərbəst tərəflər olmaya da bilər, induksiya parametri isə natural ədəddir). İlkin hökmün formulunu dəqiqləşdirək: n natural ədədi necə olursa-olsun, bir-birinə yerləşdirilmiş $n-1$ sərbəst tərəfli çoxbucaqlılar cütündə daxili çoxbucaqlının perimetri xarici çoxbucaqlının perimetrini aşmır.

Sərbəst tərəflər ümumiyyətlə olmadıqda (induksiya bazisi bundadır!) müddəanın doğruluğu aşkardır. Fərz edək ki, bir-birinə yerləşdirilmiş çoxbucaqlılar cütündə k sərbəst tərəfi olduqda müddəa doğrudur. Bir-birinə yerləşdirilmiş çoxbucaqlılar cütündə $k+1$ sərbəst tərəfi olduqda müddəanın doğruluğunu sübut edək. Beləliklə, fərz edək ki, R – daxili, T – xarici çoxbucaqlıdır və $k+1$ sərbəst tərəf var. $p(R) \le p(T)$ olduğunu isbat etmək tələb olunur, burada $p(R)$ və $p(T)$ R və T çoxbucaqlılarının perimetrləridir. Sərbəst tərəflərdən birini (AB) hər iki istiqamətdə T çoxbucaqlısının tərəfləri ilə kəsişənə kimi uzadaq. Aralıq S çoxbucaqlısı əmələ gələcək, belə ki, R S-ə, S T-yə yerləşdirilib. S çoxbucaqlısının perimetrini $p(S)$-lə işarə edək. Şəkil 2-dən görünür ki, $p(S) < p(T)$, çünki sınıq xəttin sonlarını birləşdirən parça sınıq xətdən kiçikdir. İndi bir-birinə yerləşdirilmiş R və S cütünə baxsaq, görərik ki, bu cütdə sərbəst tərəflərin sayı R və T cütündəki sərbəst tərəflərin sayından bir vahid azdır, o, k-ya bərabərdir. Həqiqətən, R çoxbucaqlısının biz əlavə qurğunu başladığımız tərəfi (şəkil 2-də AB tərəfi) sərbəst tərəf olmaqdan qurtardı. Deməli, induksiya fərziyyəsinə görə $p(R) \le p(S)$. Bu bərabərsizliyi $p(S) < p(T)$ ilə birləşdirərək tələb olunan $p(R) \le p(T)$ bərabərsizliyinə gəlirik.



Şəkil 2.

ƏN KİÇİK ƏDƏD PRİNSİPİ

Riyazi induksiya üsulu ilə sıx bağlı daha bir isbat üsulu – ən kiçik ədəd üsulu mövcuddur. Onda deyilir: natural ədədlərin boş olmayan hər bir çoxluğunda ən kiçik ədəd mövcuddur. Bu prinsip "standart mühakimənin" yeni variantını qurmaq üçün istifadə oluna bilər ki, o da universal formulun həqiqililiyini əsaslandırır. Onun əsaslandırılması üçün biz əgər $A(1)$-dən $A(2)$-yə, $A(2)$-dən $A(3)$-ə və s. keçidlər edirdiksə, indi

əksini fərz etmə üsulundan istifadə edəcəyik.

Misal 5-ə qayıdaq. Fərz edək ki, düzgün rənglənməsi mümkün olmayan hər hansı xəritə var. O, n düz xətlə yaranıb. Bu n ədədini "pis" adlandıraq. "Pis" ədədlər varsa, belə ədədlər çoxluğu boş deyil. Ən kiçik ədəd prinsipinə əsasən "pis" ədədlər çoxluğunda ən kiçik a "pis" ədədi var. İnduksiya bazisinə görə $a \neq 1$. Deməli, $a = k + 1$, burada k natural ədəddir. a "pis" ədədlərin ən kiçiyi olduğundan, k "pis" ədəd deyil. Deməli, k düz xəttin yaratdığı xəritəni düzgün boyamaq olar. Biz ilkin fərziyyəyə zidd olan nəticə aldıq. Deməli, n düz xəttin yaratdığı xəritəni düzgün rəngləmək olar.

TAM VƏ NATAMAM İNDUKSİYA

Ümumiyyətlə induksiyadan (yəni təkcə riyaziyyatda yox) danışanda tam və natamam induksiyanı fərqləndirirlər. Tam induksiyanı tətbiq edərək biz universal formulun n-in istisnasız bütün qiymətlərində həqiqiliyinə əmin olduqdan sonra universal formulun həqiqiliyini hesab etməyə haqlıyıq. Natamam induksiya üsulu xüsusi formulların ayrıca, amma n-in bütün qiymətləri üçün olmayan yoxlamalarından sonra universal formula keçiddən ibarətdir.

Gündəlik həyatda biz daim natamam induksiyadan istifadə edirik. Məsələn, alma almaq istərkən birini yoxlayırıq. Xoşumuza gəlirsə: "Almanın biri yaxşıdırsa, deməli hamısı yaxşıdır" mühakiməsi yürüdüb, məsələn, 2 kq alırıq. Lakin istisna deyil ki, bütün alınan almalar, yoxlanılandan başqa, pis çıxacaq. Başqa bir misal. Mağaza alma partiyası alır və əmtəəşünas hər yeşikdən bir yox, bir neçə alma yoxlayır. Əgər seçilmiş almalar yetişmişdirsə, mağaza "bütün almalar yetişib" qərarını qəbul edir, yəni natamam induksiya üsulundan istifadə edir və bütün yeşikləri alır. Hətta təbiətin universal qanunları belə ayrı-ayrı müşahidələr əsasında ifadə olunur. Buna görə də bizim gündəlik qərarlarımız da (məsələn, almanın keyfiyyəti haqqında), elmi nəticələr də (məsələn, təbiət qanunları haqqında) universal formullar şəklində ifadə olunubsa, mütləq deyil, ən yaxşı halda yüksək dərəcədə doğrudurlar.

Riyaziyyat isə başqa aləmdir, burada həqiqətlər sarsılmaz sayılır. Təbiət elmlərində istifadə olunan natamam induksiya üsulu riyaziyyatda mövcudluq hüququna malik deyil. Tez-tez olur ki, $A(n)$ xüsusi formulu n-in ayrı-ayrı qiymətləri üçün doğrudur və bununla belə doğru olmadığı qiymətlər tapıla bilmir. Onda fərz etməyə əsas var ki, universal formul həqiqidir, lakin yalnız fərz etməyə, çünki bu gün tapılması mümkün olmayan sabah açıla bilər. Natamam induksiyanın riyaziyyatda işləməməsinə üç misal göstərək.

Ferma ədədləri. *XVII* əsrin məşhur riyaziyyatçısı Pyer Ferma $2^{2^n} + 1$ şəklində olan ədədləri öyrənib. Onları elə Ferma ədədləri də adlandırıblar. Alim fərz edirdi ki, bütün bu ədədlər sadədir. Və onun buna, elə bil, əsası da vardı: həqiqətən, $n = 0, 1, 2, 3, 4$ üçün $2^{2^n} + 1$ şəkilli ədədlər sadədirlər. Lakin *XVIII* əsrdə Leonard Eyler aşkar etdi ki, $2^{2^5} + 1$ ədədi iki sadə 641 və 6 700 417 ədədlərinin hasilidir. Bundan əlavə, yuxarıda göstərilən beş ədəddən başqa sadə Ferma ədədlərinin mövcud olub-olmaması məlum deyil.

Eyler üçhədlisi. $x^2 + x + 41$ üçhədlisinin aldığı qiymətlər (Leonard Eyler göstərib) $x = 0, 1, 2, \ldots 39$ olduqda sadə ədədlərdir. Lakin $x = 40$ üçün onun qiyməti mürəkkəb, məhz 41^2 olacaq.

$x^n - 1$ ikihədlisi. $x^n - 1$ ikihədlisini n-in müxtəlif qiymətlərində vuruqlarına ayırsaq, məlum olar ki, çoxhədli-vuruqların hər birinin əmsalları ya 1-ə, ya da -1-ə bərabərdir. Məsələn, $x^6 - 1 = (x - 1)(x + 1) \times (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$. Bunun ixtiyari n üçün doğru olması fərziyyəsi söylənilmişdi. Lakin bu fərziyyəni isbat etmək alimlərə nəsib olmurdu. 1941-ci ildə isə məlum oldu ki, $x^n - 1$ ikihədlisinin vuruqlara ayrılmasının göstərilən xassəsi 104-ə qədər n-lər üçün doğrudur, n=105 olduqda isə 2-yə bərabər olan ayrı-ayrı əmsallar yaranır.

AKSİOMLAR

Böyük qədim yunan mütəfəkkiri Aristotel (e. ə. *IV* əsr) məntiqin əsaslarını yaratmışdır. Bu zamana qədər Fales artıq

riyaziyyata mühakimələr və isbatlar daxil etmişdi ("Fales və ilk isbatlar" məqaləsinə bax). Aristotel öyrədirdi ki, nəzəriyyənin şərhi sonrakı faktların çıxarıldığı ilkin təkliflərdən – aksiomlardan başlamalıdır.

Həndəsənin birinci aksiomatik qurulşunu Evklid təklif etmişdir ("Evklidin "Başlanğıclar"ı məqaləsinə bax). Evklid teoremlərin isbatlarını araşdıraraq ən adi, "aşkar" müddəaları ayırdı ki, onların da köməyi ilə bütün teoremlər isbat edilir. Beləliklə, o, həndəsənin aksiomlar sistemini (aksiomatika da deyirlər) aldı. Evklidin ifadə etdiyi iki aksiom: "iki nöqtədən bir düz xətt keçirmək olar"; ayrı-ayrılıqda üçüncüyə bərabər olanlar bir-birinə bərabərdir".

Müəyyən nəzəriyyənin aksiomatik qurulmasına müasir yanaşma aşağıdakından ibarətdir. Ən əvvəl ilkin (tərif verilməyən) anlayışlar göstərilir. Həndəsədə onlara nöqtə, düz xətt, nöqtənin düz xətt üzərində yerləşməsi, fiqurların bərabərliyi və s. daxildir. Sonrakı anlayışlar tərifl ərin köməyi ilə daxil edilir. Doğrudur, Evklid ilkinlər də daxil olmaqla bütün anlayışları təyin etməyə çalışmışdı. Məsələn: "nöqtə hissələri olmayandır", yəni ideallaşdırılmış, həndəsi nöqtənin ölçüləri yoxdur. Əlbəttə, bu, dəqiq riyazi tərif yox, nöqtənin son dərəcədə kiçik kimi əyani təsviridir. Nöqtənin belə aydın olmayan tərifindən Evklid heç yerdə istifadə etmir.

İkincisi, ilkin (tərif verilməyən) anlayışların sadalanmasından sonra aksiomlar – anlayışlar arasında əlaqəni göstərən müddəalar ifadə edilir. Aksiomların "aşkarlığına" baxılmır (bir də ki, bir adama aşkar görünən başqasına heç də aşkar görünməyə bilər). Sonrakı faktlar – teoremlər, aksiomların və artıq isbat olunmuş teoremlərin köməyi ilə isbat edilir. Bu onu göstərir ki, üçüncü, nəticə qaydaları – isbatlarda istifadə edilməyən məntiqi vasitələr dəqiq ifadə olunmalıdır.

Aydındır ki, aksiomlar (eləcə də anlayışlar) bəşəriyyətin çoxəsrlik təcrübəsinin bəhrəsidir. Buna görə də mücərrəd ifadə olunmuş aksiomlar və onlardan çıxarılmış teoremlər həyatla sıx bağlıdır. Lakin nəzəriyyənin təmiz aksiomatik qurulmasında aksiomların mənşəyi, onların praktik əhəmiyyəti haqqında məsələyə baxılmır.

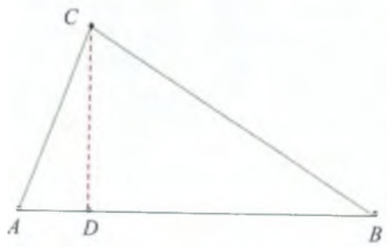
Evklid həndəsənin aksiomatik qurulmasını tam həyata keçirmədi. O tez-tez cizgilərin əyaniliyinə müraciət edirdi ki, nəzəriyyənin təmiz aksiomatik qurulmasında buna yol verilmir. Məsələn, düzbucaqlı üçbucağın xassələrindən danışarkən Evklid (cizgiyə istinad edərək) şəksiz hesab edirdi ki, düz bucağın təpəsindən hipotenuza endirilən perpendikulyar üçbucağın daxilindən keçir, yəni perpendikulyarın oturacağı hipotenuzun ucları arasındadır (üçbucağın xaricində yox; şəkil 1) . Lakin "arasındadır" nə deməkdir? Aydındır ki, söhbət həndəsənin daha bir anlayışından gedir və deməli, onu təsvir edən aksiomlar lazımdır. Axı "bax!" və "aşkardır" sözləri ciddi aksiomatik nəzəriyyə üçün hər hansı müddəanın isbatı kimi yersizdir.

Buna görə də Evklidin "Başlanğıclar"ı-nın əla yazılmasına və iki min il ərzində həndəsə dərsliyi kimi işlənməsinə baxmayaraq bir çox riyaziyyatçılar Evklid sistemini tamamlamaq və onu kamilliyə çatdırmaq istəyirdilər.

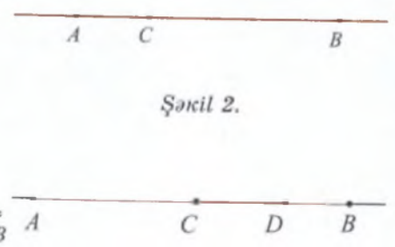
XIX əsrdə alman riyaziyyatçısı Moris Paş nöqtələrin və düz xətlərin qarşılıqlı yerləşməsi haqqında bir neçə aksiom ifadə etdi. Məsələn: düz xətt üzərindəki üç müxtəlif nöqtədən biri və yalnız biri iki digərinin arasındadır (şəkil 2). "Arasındadır" anlayışının xassələrinə aidliyi olan bu və digər teoremlər parçanı təyin etməyə imkan verir: A və B iki müxtəlif nöqtələrdirsə, ucları A və B olan düz xətt parçası AB düz xəttinin bütün nöqtələrini, eləcə də A və B nöqtələrini (parçanın ucları) özündə saxlayır. Tərifdən və aksiomlardan məntiqi surətdə parçanın bir sıra xassələrini çıxarmaq olar. Xüsusi halda belə bir xassə: C və D AB parçasının iki nöqtəsidirsə, bütün CD parçası AB parçasında yerləşir (Şəkil 3).

Digər Paş teoremi düz xətlərin müstəvidə yerləşməsindən danışır: əgər üçbucağın müstəvisində yerləşən və onun təpələrinin heç birindən keçməyən düz xətt üçbucağın tərəflərindən birini kəsirsə, onda o mütləq üçbucağın iki digər tərəfindən birini də kəsəcək (şəkil 4). Başqa sözlə, üçbucağa bir tərəfdən daxil olan düz xətt onun içində qala bilməz, o, digər iki tərəfin hər hansı birini kəsərək üçbucaqdan çıxır.

Daha bir aksiomu Evklidin başlanğıcları yazmasından azacıq sonra) qədim dövrün dahi riyaziyyatçısı Arximed əlavə

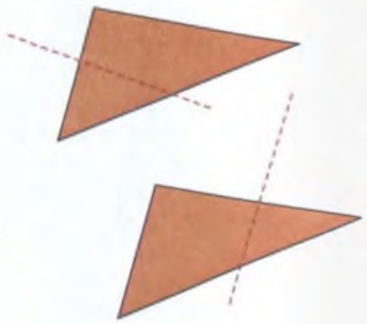


Şəkil 1.



Şəkil 2.

Şəkil 3.



Şəkil 4.

etmişdi: "eyni uzunluqlu parçaları bir-birinə birləşdirərək biz geci-tezi ixtiyari parçanı ötüb-keçəcəyik". Arximed aksiomu parçaların ölçülməsi zamanı mühüm rol oynayır ("Uzunluq, sahə, həcm" məqaləsinə bax). Eləcə də qeyd edək ki, Arximed aksiomundan riyazi analizdə də həqiqi ədədlər çoxluğunun (yəni ədəd oxunun) aksiomatik təsviri zamanı istifadə olunur. Bununla belə, son zamanlar Arximed aksiomunun onun inkarı ilə əvəzləndiyi qeyri-arximed həndəsəyə, qeyri-arximed (qeyri-standart) analizə və digər nəzəriyyələrə maraq artıb.

Evklid həndəsəsinin aksiomlaşdırılması *XIX* və *XX* əsrlərin qovşağında başa çatdırıldı. Alman alimi David Hilbert bütün əvvəlki araşdırmaları yekunlaşdıraraq "Həndəsənin əsaslandırılması" kitabında (1899-cu il) Evklid həndəsəsinin aksiomlarının tam siyahısını təqdim etdi.

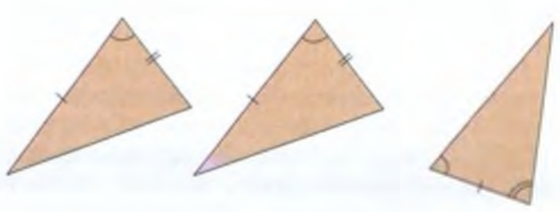
Kitab iyirmi aksiomdan ibarətdir və müəllif onları beş qrupa bölüb.

Evklidin ilk aksiomları birinci qrupa daxil olur – onları birləşmə aksiomları adlandırırlar. Onlara iki nöqtədən düz xətt, özü də yalnız biri keçir; hər düz xətt üzərində azı iki nöqtə var (sonra düz xətt üzərindəki nöqtələrin sonsuz sayda olmasını sübut etmək üçün bu, kifayətdir); bir xətt üzərində olmayan üç nöqtə var və s. aksiomlar aiddir.

İkinci qrup nöqtənin düz xətt üzərində iki digər nöqtə "arasında yerləşmək" xassəsini təsvir edən sıra aksiomlarıdır. Moris Paşın düz xəttin üçbucaqla kəsişməsi haqqında və digər aksiomlar da bura aiddir.

Üçüncü qrup – konqruentlik (yəni həndəsi bərabərlik) aksiomlarıdır. Üçbucaqların bərabərliyinin birinci və ikinci əlamətləri onların arasındadır (şəkil 5). Onlar Hilbertdə teorem yox, aksiomlardır. Məsələ bundadır ki, Evklid öz isbatlarını: "Bir üçbucağı o birinin üzərinə elə qoyaq ki, ..." sözləri ilə başlayır. Başqa sözlə, Evklid hərəkət tətbiq edir, hərçənd ki, əvvəllər bu xassələr haqqında söz açmır. Deməli, ciddi desək, Evklid üçbucaqların bərabərliyi prinsiplərini isbat yox, yalnız izah edir. Buna görə də Hilbert bu əlamətləri teorem yox, aksiom adlandırıb. Bu qrupun digər aksiomları yaxşı tanışdır: onlarda hökm edilir ki, fiqurların bərabərliyi ekvivalentlik münasibətidir ("Münasibətlər" və "Həndəsə və çevirmə qrupları" məqalələrinə bax).

Dördüncü qrupa yalnız bir aksiom *p* paralellik aksiomu daxildir (Evklidin "Başlanğıclar"ı və "Lobaçevski həndəsəsi" məqalələrinə bax).



Şəkil 5.



Şəkil 6.

Nəhayət, beşinci qrup kəsilməzlik aksiomlarını birləşdirir. Məsələn, bu aksiom qrupundan alınır ki, müstəvi üzərində *A* və *B* nöqtələri *l* düz xəttindən müxtəlif tərəflərdə yerləşmişlərsə, *AB* düz xətti *l* düz xətti ilə ortaq nöqtəyə malikdir (şəkil 6).

AKSİOMATİKANIN ZİDDİYYƏTSİZLİYİ NƏDİR

Hilbert nəinki Evklid həndəsəsinin aksiomlarının tam sistemini vermiş, həm də onun nisbi ziddiyyətsizliyini isbat etmişdir. Üç aksiomlu sadə misalda (Hilbert aksiomatikasında olduğu kimi daha iyirmi aksiomla yox) bunun nə demək olduğunu aydınlaşdıraq.

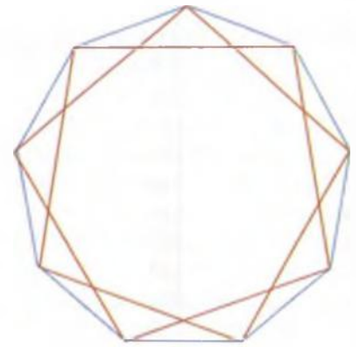
Şagirdlər şahmat turniri təşkil etmək istəyirdilər. Bunu daha qısa müddətdə etmək üçün onlar yarışı sadələşdirilmiş sxemlə keçirməyi qərara aldılar: hər kəs (əvvəldən tərtib olunmuş cədvəllə) üç partiya oynayır, ağ və ya qara fiqurlarla oynamağı püşk həll edir. Lakin cədvəl tərtib etmək heç cür alınmadı və uşaqlar müəllimlərinə müraciət etdilər. Onun, iştirakçıların sayı cütmüdür, sualına şagirdlər siyahıya baxıb, təkdir, cavabını verdilər. Onda müəllim məsələyə aksiomatik yanaşmağı təklif etdi.

O belə mühakimə yürütdü. Üç ilkin anlayış: "oyunçu", "partiya", "oyunçunun partiyada iştirakı" və aşağıdakı aksiomlar var: 1) oyunçuların sayı təkdir; 2) hər bir oyunçu üç partiyada iştirak edir; 3) hər bir partiyada iki oyunçu iştirak edir. Bu aksiomların köməyi ilə teoremlər isbat etmək olar ki, bundan ötrü yeni anlayış daxil edək: əgər *g* hər hansı bir partiya və *A* onda iştirak edən oyunçulardan biridirsə, onda (*g*,*A*) cütünü oyunçunun çıxışı adlandıraq. Sonra müəllim belə bir teoremi isbat etdi: oyunçuların bütün çıxışlarının sayı təkdir. Doğrudan da, hər bir oyunçu düz üç partiyada iştirak edir (aksiom 2), buna görə də oyunçuların bütün çıxışlarının sayı 3*n*-dir, burada *n* turnir iştirakçılarının sayıdır. *n* tək olduğundan (aksiom 1) 3*n* də təkdir.

Lakin məktəblilərin biri etiraz etdi ki, o, oyunçuların çıxışlarının cüt olduğunu isbat edə bilər. Həqiqətən, əgər *g* partiyasında *A* və *B* oyunçuları iştirak edirsə (aksiom 3), oyunçuların iştirakı iki: (*g*, *A*) və (*g*, *B*)-dir. Deməli, oyunçuların bütün çıxışlarının sayı bütün partiyaların sayından ikiqat çox olduğuna görə cütdür.

Beləliklə, üç ilkin aksiomdan bir-birinə zidd olan iki teorem aldıq, belə ki, eyni bir ədəd həm tək, həm cüt ola bilməz. Başqa sözlə, götürülmüş aksiomatika ziddiyyətlidir, deməli, uşaqların ifadə etdikləri tələblər uyuşmazdır. İndi aydındır ki, uşaqlar niyə yarış cədvəli tərtib edə bilmirdilər – o, sadəcə mövcud deyil. Onda müəllim turniri ayrı cür təşkil etməyi təklif etdi: hər bir oyunçu digər oyunçularla üç yox, dörd partiya oynamalıdır, yəni 1 və 3 aksiomları dəyişməsin, 2 aksiomu isə 2′ – hər bir oyunçu dörd partiyada iştirak edir – ilə əvəz olunsun. Özü də müəllim şagirdləri inandırdı ki, ziddiyyət alınmayacaq. Müəllim şagirdləri buna belə əmin etdi.

Düzgün doqquzbucaqlıya (şəkil 7) ya da tərəflərinin sayı üçdən böyük ixtiyari tək ədəd olan düzgün çoxbucaqlıya baxaq. Onda təpələri birini buraxmaqla birləşdirən bütün diaqonalları çəkək. Doqquzbucaqlının təpələrini oyunçular, tərəfləri və diaqonalları



Şəkil 7.

partiyalar, parçanın ucunu verilmiş partiyada iştirak edən oyunçular hesab edəcəyik. Nəticədə bizi maraqlandıran turnirin modelini qurduq, belə ki, 1, 2′, 3 aksiomları burada ödənilir. Özü də modeli ziddiyyətsizliyinə heç kəsin şübhə etmədiyi elmin – həndəsənin materialından qurduq. Əgər 1, 2′, 3 aksiomlarından çıxış edərək bir-birinə zidd olan iki teorem almış olsaydıq, onda sonunculuların isbatını alınmış modeldə də təkrar etmək olardı. Başqa sözlə, düzgün doqquzbucaqlı haqqında mühakimə yürüdərək biz

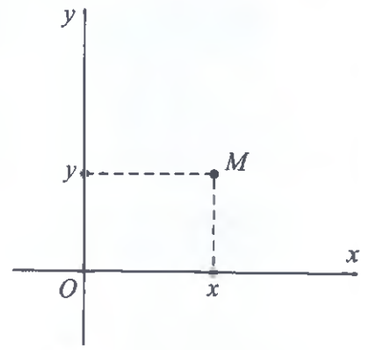
bir-birinə zidd iki teoremə, deməli, həndəsənin ziddiyyətli elm olması nəticəsinə gəlib-çıxardıq ki, bunu da heç birimiz qəbul etmərik. Aydındır ki, 1, 2′, 3 aksiomları əsasında bir-birinə zidd iki teorem çıxarmaq olmaz.

Ümumi halda fərz edək ki, iki A və X nəzəriyyələrinə baxılır, özü də X nəzəriyyəsi aksiomatik verilir (və onun ziddiyyətsizliyinə biz əvvəlcədən əmin deyilik). A nəzəriyyəsi bizə yaxşı məlumdur və onun ziddiyyətsizliyinə şübhə etmirik. Əgər A nəzəriyyəsinin materialından X nəzəriyyəsinin bütün aksiomlarının ödəndiyi modeli qurmaq olursa, bununla X nəzəriyyəsinin ziddiyyətsizliyi bərqərar olur.

"Lobaçevski həndəsəsi" məqaləsində danışılır ki, Nikolay İvanoviç Lobaçevski öz "xəyali" həndəsəsinin materialından istifadə edərək Evklid həndəsəsinin orisfer adlandırdığı səth üzərində modelini qura bilmişdi. Lakin Lobaçevskini ilk əvvəl əks nəticə maraqlandırırdı: əgər biz Evklidin həndəsəsinin ziddiyyətsizliyinə şübhə etmiriksəsə, onda "xəyali" həndəsə də ziddiyyətsizdir. Yəni Evklid həndəsəsinin materialından Lobaçevski həndəsəsinin modelini qurmaq lazım idi. Lakin o belə modeli qura bilmədi. Onu (Lobaçevskinin ölümündən sonra) Felikx Kleyn və digər alimlər qurdular. Və bununla da müəyyən etdilər ki, həm Evklid, həm də Lobaçevski həndəsələri ziddiyyətsizdir. Biri ziddiyyətsizdirsə, bu o biri üçün də doğrudur və tərsinə.

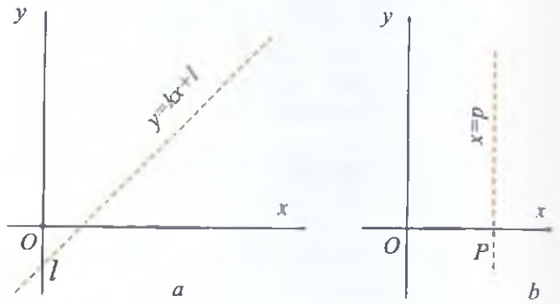
Lakin Evklid həndəsəsinin ziddiyyətsizliyini necə isbat etməli? Onun bütün Hilbert aksiomları ödənən modelini qurmaq lazımdır. Lakin onun üçün material kimi ziddiyyətsizliyinin heç kimdə şübhə doğurmadığı hansısa A nəzəriyyəsi olmalıdır. Hilbert belə bir modeli təsvir etmişdir.

Ziddiyyətsizliyi şübhəsiz olan A nəzəriyyəsi kimi o, həqiqi ədədlər nəzəriyyəsini götürmüşdür. Modelin qurulmasının ideyası müstəvi üzərində koordinat sisteminin baxılmasından ibarətdir. Belə sistemdə müstəvi üzərindəki hər bir M nöqtəsinə iki həqiqi x və y ədədləri – onun koordinatları uyğun gəlir (şəkil 8). Modelin qurulmasının mahiyyətini anlamaq üçün müstəvini və onun üzərindəki koordinat sistemini unudaq; nizamlanmış (x,y) həqiqi ədədlər cütünü "nöqtələr" adlandıracağımızı şərtləşək, yəni müxtəlif x və y-li $(x;y)$ və $(y;x)$ cütlərini müxtəlif hesab edəcəyik.



Şəkil 8.

Beləliklə, "nöqtələrimiz" artıq var. Bəs "düz xətt" nədir? Yada salaq ki, hər bir düz xətt koordinatlarda $ax + by + c = 0$ xətti tənliyi ilə təsvir edilir ki, burada a və b əmsallarının heç olmazsa biri sıfırdan fərqlidir. Məsələn, ordinat oxuna paralel olmayan düz xəttin tənliyi $y = kx + l$ və ya başqa cür ifadə etsək, $ax + by + c = 0$, burada $a = k$, $b = -1$, $c = l$-dir (şəkil 9, *a*). Düz xətt ordinat oxuna paralel olarsa, ona $x = p$ tənliyi (yəni $ax + by + c = 0$ tənliyi, burada $a = 1$, $b = 0$, $c = -p$) uyğun gəlir (şəkil 9, *b*). Bu zaman $ax + by + c = 0$ tənliyinin bütün əmsallarını eyni bir $k \neq 0$ ədədinə vursaq, alınmış yeni



Şəkil 9.

tənlik yenə həmin düz xətti təsvir edir. İndi isə həndəsəni unudacaq və baxılan modeldə a və b əmsallarının heç olmazsa birinin sıfırdan fərqli olduğu ixtiyari $ax + by + c = 0$ xətti tənliyini düz xətt adlandıracağıq. Özü də əmsallar sıfırdan fərqli ixtiyari mütənasiblik vuruğu dəqiqliyi ilə baxılır ($k \neq 0$ üçün

$ax + by + c = 0$ və $(ak)x + (bk)y + (ck) = 0$ tənlikləri eyni düz xətt hesab olunurlar.

Daha sonra, (x_1,y_1) "nöqtəsi" o zaman $ax + by + c = 0$ "düz xəttinin" üzərində olur ki, x_1 və y_1 ədədləri verilmiş tənliyi ödəyirlər. Gördüyümüz kimi, "düz xətləri", "nöqtələri" və nöqtənin "düz xətt" üzərində yerləşdiyini təyin etmək üçün ancaq həqiqi ədədləri bilmək kifayətdir. Asanca yoxlamaq olar ki, baxılan modeldə, məsələn, aşağıdakı aksiomlar doğrudur:

✓ **iki müxtəlif nöqtədən düz xətt keçir;**

✓ **"düz xətt" üzərində azı iki "nöqtə" olur.**

Hansı halda "düz xətt" üzərindəki üç "nöqtədən" birinin digər ikisinin "arasında" yerləşdiyini asanca təyin etmək olar. $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ və $C(x_3;y_3)$ bir "düz xətt" üzərində yerləşən nöqtələrdirsə, x_2, x_1 və x_3 arasında yerləşdikdə ($x_1 = x_2 = x_3$ olduqda y_2, y_1 və y_3 arasında yerləşdikdə), B "nöqtəsi" A və C "arasında" yerləşir. Onda aydındır ki,

✓ **bir "düz xətt" üzərində yerləşən üç "nöqtədən" biri və yalnız biri o biri ikisinin arasında yerləşir.**

Digər sıra aksiomları (xüsusi halda yuxarıda gətirilən "Paş aksiomu") da ödənilir. Qeyd edək ki, biz bilərəkdən aksiomların məzmununu cizgilərlə illüstrasiyalamırıq; belə ki, sırf aksiomatik şərhdə adət etdiyimiz həndəsi təsəvvürlərdən istifadə etmək lazım deyil.

Əgər a_1, b_1 və a_2, b_2 əmsalları mütənasibdirlərsə, onda deyəcəyik ki, iki $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ və $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ düz xəttləri "paraleldirlər". Asanca yoxlamaq olar ki, iki "paralel" "düz xətt" ya heç bir ümumi nöqtəyə malik deyillər, ya da üst-üstə düşürlər (adi həndəsədə də tez-tez qəbul edirlər ki, düz xətt özü-özünə paraleldir). Daha sonra

✓ **İxtiyari $A_1(x_1; y_1)$ "nöqtəsindən" verilmiş $Ax + By + C = 0$. düz xəttinə paralel ancaq və ancaq bir "düz xətt" keçir.**

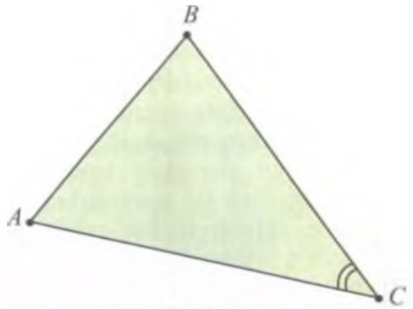
Başqa sözlə, verilmiş modeldə paralellik aksiomu ödənilir.

Burada parçaların uzunluğundan və bucaqların qiymətlərindən danışmaq olar. Məsələn iki $A_1(x_1; y_1)$ və $A_2(x_2; y_2)$ "nöqtələri" arasındakı "məsafə"

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ədədi adlanır.

Daha sonra, adi Evklid həndəsəsində kosinuslar teoremi doğrudur (şəkil 10):



Şəkil 10.

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C.$$

Bizim yalnız həqiqi ədədlərin baxılmasına əsaslanan modelimizdə yuxarıda yazılan bərabərlik bucağın qiymətini təyin etmək üçün istifadə olunur.

$$\cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC}$$

(C bucağının qiyməti bərabərliyin sağ tərəfinin arkkosinusuna bərabərdir). Etiraz etmək olar ki, triqonometrik funksiyalar (xüsusi halda kosinus) həndəsi təyin olunur və adət etdiyimiz Evklid həndəsəsi olmadan burada keçinmək olmaz. Lakin bu, doğru deyil. Riyazi analizdə isbat edilir ki, $\cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

sonsuz sırası ilə verilir və bu sıra ixtiyari həqiqi x üçün yığılır. Beləliklə, baxılan modeldə həm məsafələr, həm də bucaqların qiymətləri haqqında danışmaq olar.

İndi yoxlamaq olar ki, onda konqruentlik aksiomları (xüsusi halda üçbucaqların bərabərliyinin birinci və ikinci əlamətləri) ödənilir. Nəticədə (Evklid aksiomlarının inkişaf etdirilməsi və dəqiqləşdirilməsi olan) bütün Hilbert aksiomları baxılan modeldə ödənilir. Bu da o deməkdir ki, Evklid həndəsəsinin aksiomlar sistemi şərti olaraq ziddiyyətsizdir. Başqa sözlə, həqiqi ədədlər

nəzəriyyəsinin ziddiyyətsiz olması şərti ilə o, ziddiyyətsizdir.

AKSİOMATİKANIN TAMLIĞI

Belə aksiomlar sisteminin ziddiyyətsizlikdən başqa daha bir – tamlıq adlanan mühüm səciyyəsi var. Onu əvvəlcə kommutativ qrupların misalında aydınlaşdıraq ("Qruplar" məqaləsinə bax). Kommutativ qruplar nəzəriyyəsi cəmi dörd aksiomdan ibarətdir (üç qrup aksiomu və ixtiyari a və b ünsürləri üçün $a + b = b + a$ kommutativlik aksiomu). Əgər bir modelin digərinə əməlləri saxlayan qarşılıqlı birqiymətli inikası varsa (bizim misalımızda elədir ki, iki ünsürün cəmi onların surətləri cəminə keçir), kommutativ qrupun iki modeli izomorf adlanır. Məsələn, müstəvinin E eynilik inikası və O verilmiş nöqtəsinə nəzərən I simmetriyası kompozisiya üzrə iki ünsürdən ibarət kommutativ qrup təşkil edir. C və T (cüt – tək) rəmzləri də cəmin cütlüyü: $C + C = T + T = C$, $C + T = T + C = T$ qaydası ilə təyin olunan kommutativ qrupdur. Bu iki qrup izomorfdur. Ümumiyyətlə, hər birində iki ünsür olan ixtiyari iki qrup, eləcə də yeddi ünsürdən ibarət ixtiyari iki kommutativ qrup bir-birinə izomorfdur. Səkkiz ünsürdən ibarət kommutativ qruplarda isə üç müxtəlif, cüt-cüt qeyri-izomorf şəkil var.

Verilmiş sistemi təmin edən ixtiyari iki model izomorfdursa, ziddiyyətsiz aksiom sistemi tam adlanır. Kobud desək, aksiomların tam sistemi izomorfizm dəqiqliyi ilə ancaq bir nəzəriyyəni təyin edir. Məsələn, kommutativ qrupun dörd aksiomuna daha birini – qrupda düz yeddi ünsür var – əlavə edərək biz tam aksiom sistemi alırıq (belə ki, yeddi ünsürdən ibarət ixtiyari iki qrup izomorfdur). Kommutativ qrupun aksiomlarına digər aksiom əlavə edərək – qrupda düz səkkiz ünsür var – biz natamam aksiomlar sistemi alırıq (belə ki, hər biri səkkiz ünsürdən ibarət olan, bir-birinə izomorf olmayan kommutativ qruplar mövcuddur). Beləliklə, kommutativ qrupun aksiomları da natamamdır.

Məlum olmuşdur ki, Hilbert aksiomatikası tamdır. Başqa sözlə, o (izomorfizm dəqiqliyi ilə) yeganə nəzəriyyəni – Evklid həndəsəsini təyin edir.



Aksiomatik metod hansı sahədə aparılmasından asılı olmayaraq hər bir dəqiq araşdırmanın ruhuna ən böyük ölçüdə cavab verən münasib və qiymətsiz alət olaraq qalır.

David Hilbert

Daha bir misal kimi mütləq həndəsəyə, yəni Evklid həndəsəsinin paralellik aksiomundan başqa bütün aksiomlarından çıxan teoremlər sisteminə baxaq. Aydındır ki, mütləq həndəsənin aksiomlar sistemi natamamdır. Onun aksiomlarına paralellik aksiomunu əlavə edərək biz bir nəzəriyyə – Evklid həndəsəsi alırıq. Həmin aksiomlar sisteminə paralellik aksiomunu inkar edən aksiomu daxil edərək digər, qeyri-izomorf birinci nəzəriyyəyə – Lobaçevski həndəsəsinə gəlirik.

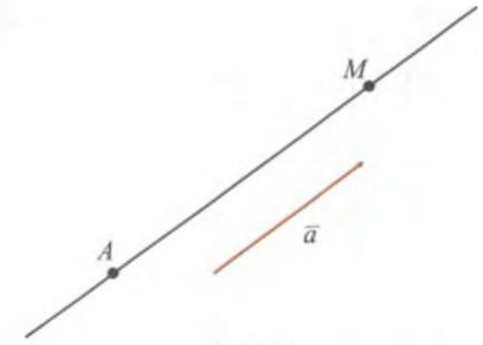
AKSİOMATİKANIN MÜSTƏQİLLİYİ

İxtiyari aksiomlar sistemi müstəqillik xassəsinə (o, ziddiyyətsizlik və tamlıqdan az əhəmiyyətli olsa da) malik olmalıdır. Aksiomlardan heç birini digər aksiomlardan çıxış etməklə teorem kimi isbat etmək mümkün deyilsə, aksiomlar sistemi müstəqil adlanır. Məsələn, paralellik aksiomu həndəsənin digər aksiomlarına görə müstəqildir (belə ki, nəinki bu aksiomun ödəndiyi aksiomlar sistemi ziddiyyətsizdir, həm də paralellik aksiomunun inkarının ödəndiyi aksiomlar sistemi də ziddiyyətsizdir). Ümumiyyətlə, hər hansı aksiomun digərlərindən asılı olmamasını isbat etmək üçün iki model qurmaq lazımdır ki, birində seçilmiş aksiom da daxil olmaqla bütün aksiomlar ödənilir, digər modeldə isə seçilən aksiom ödənilmir, digərləri ödənilir.

HƏNDƏSƏNİN DİGƏR AKSİOM SİSTEMLƏRİ

Hilbert aksiomatikası yarandandan on il sonra Falesin və Kleynin ideyalarından çıxış edən Fridrix Şur hərəkətlərin baxılmasına əsaslanan digər həndəsə aksiomları sistemi təklif etdi. Şurun sistemində hərəkətin (hansı həndəsənin – müstəvi, yoxsa fəza – nəzərdə tutulduğundan asılı olaraq müstəvinin, ya fəzanın hərəkətinin) çevirmə qrupu yaratdığını bəyan edən üç aksiom var ("Həndəsə və çevirmə qrupları" məqaləsinə bax). Şurun nəzəriyyəsində ilkin fiqurlar (planimetriyada) "nöqtələr", "düz xətlər", "hərəkət" və "arasında" anlayışıdır, fiqurların konqruentliyi isə hərəkətin köməyi ilə (üçbucağın konqruentliyi əlamətləri ilə yox) təyin olunur.

Daha on il sonra alman riyaziyyatçısı German Veyl həndəsənin vektor aksiomatikasını yaratdı. Veyldə ilkin anlayışlar "nöqtə" və "vektor"dur, düz xətt və parça isə onların köməyi ilə təyin olunur. Vektorların toplanması (vektorların kommutativ qrup əmələ gətirdiklərini ifadə edən) aksiomları, vektorun həqiqi ədədə vurulması aksiomu, vektorların ayrılışı aksiomları (xüsusi halda üçbucaq $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ aksiomu), vektorların skalyar hasili aksiomları və ölçü aksiomu (planimetriya üçün onda hökm edilir ki, əgər üç sıfırdan fərqli $\bar{a}, \bar{b}$ və $\bar{c}$ vektorları verilmişsə, onların ixtiyari biri digər ikisinin kombinasiyası şəklində ifadə olunur $\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$). Verilmiş A nöqtəsində və sıfırdan fərqli $\bar{a}$ vektorunda (A, a') düz xətti



Şəkil 11.

$\bar{a}$ vektoruna mütənasib olduğu $\overline{OM}$ vektorunun M nöqtələr çoxluğu kimi təyin olunur, yəni elə bir t ədədi tapılar ki, $\overline{AM} = t\bar{a}$ (şəkil 11). Daha sonra parçalar, bucaqlar, çoxbucaqlılar, çevrə və digər fiqurlar, məsələn, A və B arasındakı məsafə $\overline{AB}$ vektorunun skalyar kvadratının kvadrat kökü kimi, yəni $AB = \sqrt{\overline{AB} \cdot \overline{AB}}$ təyin edilir. Pifaqor teoremi skalyar hasilin köməyi ilə, paralellik aksiomu isə düz xəttin vektor tərifi və ölçü aksiomunun köməyi ilə asanca isbat olunur.

Sonda qeyd edək ki, həndəsənin Hilbert aksiomatikası Evklidin iki min il əvvəl yaratdığı tam olmayan aksiomlar sistemini tam dəqiqləşdirdi. Fridrix Şur və German Veylin aksiomatikaları Evklid həndəsəsini müasir riyaziyyatın, fizikanın, iqtisadiyyatın, kimyanın, biologiyanın və digər bilik sahələrinin bölmələrində mühüm rol oynayan çevirmələr qrupu anlayışları ilə əlaqələndirdilər.

RİYAZİ MƏNTİQ

MÜHAKİMƏLƏR, TƏKLİFLƏR, MÜLAHİZƏLƏR

Riyazi məntiq fənnə görə məntiq, metoda görə riyaziyyatdır.

Platon Sergeyeviç Poretski,
rus riyaziyyatçısı

Məntiq mühakimələr və isbatlar üsulları haqqında, onların harada və nədən ötrü: mübahisədə, elmi araşdırmada, yoxsa məhkəmə zalında istifadə edilməsinə biganə olmaqla, təlimdir.

Riyazi məntiq riyaziyyatda tətbiq olunan mühakimə üsullarını araşdırır. Başqa baxış da mövcuddur ki, ona əsasən riyazi məntiq riyaziyyatın üsulları ilə ixtiyari mühakimələri öyrənir. Nəhayət, riyazi üsullar riyazi mühakimələrin öyrənilməsi üçün tətbiq olunurlarsa, metariyaziyyatdan və ya isbatlar nəzəriyyəsindən danışılır.

Riyazi məntiq elementlərini artıq qədim yunan filosoflarının əsərlərində tapmaq olar. *XVII* əsrdə Q. V. Leybnis belə bir ideya söylədi ki, mühakimələr müəyyən hərəkətlərin qoyulmuş qaydalarla mexaniki yerinəyetirilməsinə gətirilə bilər. Lakin riyazi məntiq riyaziyyatın müstəqil bölməsi kimi yalnız *XIX* əsrin ortalarından formalaşmağa başladı.

XX əsrdə riyazi məntiqin çərçivələrində yeni bölmə – alqoritmlər nəzəriyyəsi meydana gəldi ki, burada da mühakimə etmək üsulları deyil, sözün ən geniş mənasında hesablama üsulları öyrənilir.

Riyazi məntiqin inkişafı iki əks istiqamətdəki uğurlarla başa çatdı. Bir tərəfdən, riyaziyyatın formalaşması elə dərəcəyə çatdı ki, indi sanki bütün teoremlər müəyyən dəqiq qaydalar əsasında çıxarıla bilər və prinsipcə, bunu kompyuter də edə bilər. Digər tərəfdən, riyazi nəticələr alan ixtiyari "mexaniki" sistemin zəruri məhdudluğu müəyyənləşmişdi. Beləliklə, Leybnisin arzusu qismən həyata keçdi, qismən də yerinə yetirilməyən oldu.

Bu fəslin əsas məzmunu ənənəvi, necə deyərlər, klassik riyazi məntiqə həsr olunub. Digər məntiqlər haqqında siz "Kim haqlı, kim müqəssirdir", "Çörək, yoxsa tamaşa", "Mövsüm dəbləri" əlavə oçerklərindən öyrənə bilərsiniz.

> İnsan fikirlərinin müəyyən əlifbasını fikirləşib-tapmaq və bu əlifbanın hərflərinin kombinasiyası və onlardan tərtib olunmuş sözlərin köməyi ilə hər şey kəşf oluna və həll edilə bilər.
>
> * * *
>
> Bu yazı ... ən ümumi cəbr kimi bir şey olmalı və hesablamalar vasitəsi ilə mühakimə etmək imkanı verməlidir: beləliklə, mübahisə etmək əvəzinə demək olacaq: hesablayaq! Onda aydın olacaq ki, mühakimələrdəki səhvlər hesablamalarla bağlı səhvlərdir və onları hesabda olduğu kimi yoxlama yolu ilə aşkar etmək olacaq.
>
> *Q. V. Leybnis*

* * *

Mühakimə yeritmək üçün insan hansısa dildən – türk dilindən, ingilis dilindən...istifadə etməlidir. Təəcüblü deyil ki, riyazi məntiq bizim təbii dillərdə necə danışmağımız və yazmağımızın təhlilindən başlayıb və onun inkişafı süni formal dillərin qurulması yolu ilə gedib.

Riyazi məntiqlə tanışlığa biz nəqli cümlələrə baxmaqla başlayaq.

Bu, doğru və ya yalan ola biləcək ən kiçik dil konstruksiyalarıdır.

Oxucu, yəqin ki, tərəddüdsüz razılaşar ki, aşağıdakı hökmlər doğrudur:

İkinin kvadratı dörddür.

Yer Günəş sisteminin Günəşdən üçüncü planetidir.

Eləcə də aşkardır ki, aşağıdakı hökmlərin səhv olması heç kəsdə şübhə doğurmur:

Üçün kvadratı səkkizə bərabərdir.
Qurğuşun suda batmır.

Siz aşağıdakı müddəaların doğru olub-olmamağını söyləməyə hətta çətinlik belə çəkirsinizsə, onda lazımi məlumat kitabına baxmaqla bunu aydınlaşdıra bilərsiniz:

Osmimum metalının ərimə temperaturu 3000°C-dən çoxdur;
$2^{2\,976\,221} - 1$ ədədi sadədir.

Daha bir sıra təkliflər gətirək:

Marsda həyat olmuşdur.

$2^n - 1$ şəklində sonsuz çox sadə ədəd var.

Dinozavrlar istiqanlı heyvanlar olmuşlar.

Yeni eranın 1-ci ili martın birində müasir Moskvanın ərazisində yağış yağıb.

Bunların hansının doğru olmasını heç bir ensiklopediyadan bilmək olmaz. Lakin ilk üçü barəsində ümid var ki, bu, haçansa məlum olacaq. Lakin sonuncu müddəanın həqiqi və ya yalan olmasının haçansa təyin olunacağı az ehtimallı olsa da, şübhə yoxdur ki, o ya doğru, ya da yalandır.

Lakin digər təkliflər də olur. Təsdiq edə bilərsinizmi, aşağıdakı ifadələri ağıllı şəkildə doğrulara və yalanlara ayırmaq olar:

Sakit bataqlıqda şeytanlar dolaşır.

Fəlsəfə daşının köməyi ilə qurğuşunu qızıla çevirmək olar.

Bu səhifədə göy fonda verilmiş təsdiq yalandır	***Bu səhifədə qırmızı fonda verilmiş təsdiq həqiqətdir***

Çərçivələrdəki müddəalara gəlincə, burada hətta həqiqiliyin aydınlaşdırılmasına hansından başlamaq lazım gəldiyi aydın deyil. İki mümkün halı araşdıraq.

"HƏR ŞEYİ BİLMƏK İSTƏYİRƏM"

Maraqlıdır, aşağıdakı təkliflər haqqında oxucuların fikri necə olacaq? Onların hansı doğru, hansı yalandır?

Mayakovski "Hərb və sülhü" yazmışdır.

Dünyada ən hündür dağ Saqarmatha adlanır.

İynəli ağacların iynələri şəklini dəyişən yarpaqlardır.

Yeni eranın üçüncü minilliyi 1 yanvar 2000-ci ildən başlayır.

Puşkinin qəhrəmanı Tatyana Larinanın atasının adı Dmitridir.

Yevgeni Oneginin əmisinin adı Andrey Petroviç idi.

Fil balinadan güclüdür.

1. Göy çərçivədəki müddəa doğrudur. Bu o deməkdir ki, qırmızı çərçivədəki müddəa da doğrudur. Bundan da öz növbəsində çıxır ki, göy çərçivədəki müddəa yalandır. Beləliklə, göy çərçivədəki müddəanın doğruluğu haqqında fərziyyə ziddiyyətə gətirib-çıxarır.

2. Göy çərçivədəki müddəa yalandır. Deməli, qırmızı çərçivədəki müddəa da yalandır. Göy çərçivədəki müddəanın yalan olması haqqında fərziyyə də ziddiyyətə gətirir.

EDAM ETMƏLİ, YOXSA BAĞIŞLAMALI

Birinci olaraq onun yanına [Sançо Pansanın] bir müsafir gəldi və majordomun və digər nökərlərin yanında bildirdi:

- Senyor, bir kübarın mülklərindən onları iki hissəyə bölən gur sulu çay axır. Bu çayın üzərindən körpü salınıb və onun yanında dar ağacı və məhkəmə var. Məhkəmədə dörd hakim çayın, körpünün və malikanənin sahibinin çıxardığı aşağıdakı qanunun yerinə yetirilməsinə nəzarət edir: "Körpünü bir sahildən digərinə adlayan hər bir kəs and içərək hara və hansı məqsədlə getdiyini bildirməlidir və o doğru deyirsə, onu getməyə qoyurlar, aldadırsa, heç bir güzəştsiz yaxındakı dar ağacından asaraq həyatdan məhrum edirlər". Bu qanunun sərt şərtləri hamıya məlum olandan körpüdən çox adam keçmişdi və onların həqiqəti dediyi məlum olanda hakimlər onlara sərbəst öz yollarını davam etdirməyə imkan verirdilər. Lakin bir dəfə elə oldu ki, and içən bir adam öz sözlərini andı ilə təsdiq edərək bildirdi ki, o bura dar ağacından asılmaq üçün gəlib. Bu and hakimləri pərt elədi və onlar dedilər: "Əgər biz bu adama yolunu davam etdirmək imkanı versək, belə çıxacaq ki, o, yalandan and içib və bu halda, qanuna görə, ölməlidir; əgər onu assaq, axı o, and içib ki, bura asılmaq üçün gəlib, - deməli, onun andı doğrudur və həmin qanuna görə o, azadlığa buraxılmalıdır". Və mən, zati – aliləri, cənab qubernator, sizdən soruşuram, hakimlər bu adamla necə etsinlər, çünki onlar bu günə qədər pərt və qətiyyətsizdirlər.

Servantes. "Don Kixot"

* * *

Servantesin romanını oxumayanları sakitləşdirməyə tələsək: qubernator Sançо Panso hakimlərə həmin müsafiri buraxmağı əmr etdi. Axı Don Kixot ona məsləhət görmüşdü ki, məhkəmə işi şübhə doğurursa, həmişə şəfqət tərəfə meyl etmək lazımdır. Hüquqi dildə desək, Sançо təqsirsizlik prezumpsiyası əsasında qərar çıxarmışdı.

Görürük ki, təbii dil düşünülmüş müddəalar kimi nəzərə çarpan qrammatik düzgün konstruksiyalara imkan verir ki, onların da doğru və ya yalan olmasını prinsipcə həll etmək mümkün deyil. Lakin biz

BƏRBƏR PARADOKSU

Deyirlər ki, bir kənddə cəmi bir bərbər vardı. O yalnız özləri təraş etməyən kişiləri təraş edirdi. O özünü təraş edirdimi?

riyazi isbatlarda oxşar müddəalardan – "kabuslardan" sığortalanmışıqmı? Sən demə yox. *XIX – XX* əsrlərin qovşağında riyaziyyatın fundamental bölmələrinin birində – çoxluqlar nəzəriyyəsində paradokslar – elə bil, tamamilə korrekt mühakimələrin nəticəsində yaranan ziddiyyətlər meydana gəldi (məsələn, "bərbər paradoksu").

Paradokslardan necə qaçmalı? Təklif olunan yollardan biri təbii dillərin "şıltaqlıqlarından" azad olan süni formal dilin yaradılmasıdır.

BUL FUNKSİYALARI

Fərz edək ki, haqlarında onların doğru və ya yalan olduqlarını demək mümkün olan mülahizələr dəsti mövcuddur. Bu mülahizələri işarə etmək üçün *A*, *B*, *C* və s. latın hərflərindən istifadə edəcəyik.

Əgər iki sadə cümləmiz varsa, "və ya" və "və" bağlayıcılarının köməyi ilə onlardan yeni, mürəkkəb cümlə düzəltmək olar. Riyazi məntiqdə oxşar məqsədlər üçün xüsusi simmvollardan; ∨ dizyunnksiya işarəsindən və & konyunksiya işarəsindən (bəzən eləcə də ∧ simvolunu tətbiq edirlər) istifadə edilir.

Beləliklə, *A* və *B* hökmlərindən dizyunksiya və konyunksiya işarələrinin köməyi ilə yeni hökmlər alırıq:

A ∨ *B* ("*A* və ya *B*" oxunur),

A & *B* (*A* və *B* oxunur).

İlkin hökmlərin heç olmazsa biri doğru olarsa, onda və yalnız onda *A* ∨ *B* hökmü; hər iki hökm doğru olarsa, *A* & *B* hökmü doğru sayılır.

Dizyunksiya və konyunksiyaya ədədlər üzərində deyil, DOĞRU və YALAN məntiqi qiymətləri üzərində təyin edilmiş xüsusi əməliyyatlar kimi baxmaq olar. Bu əməliyyatlar üçün vurma cədvəlinə oxşar cədvəllər mövcuddur.

DOĞRU ∨ DOĞRU = DOĞRU
DOĞRU ∨ YALAN = DOĞRU
YALAN ∨ DOĞRU = DOĞRU
YALAN ∨ YALAN = YALAN
DOĞRU & DOĞRU = DOĞRU
DOĞRU & YALAN= YALAN
YALAN & DOĞRU= YALAN
YALAN & YALAN= YALAN

Belə həqiqilik cədvəlləri üçün aşağıdakı yazılış forması daha ənənəvidir:

A	*B*	*A* ∨ *B*
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	YALAN

A	*B*	*A* & *B*
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	YALAN

DOĞRU və YALAN məntiqi qiymətləri *XIX* əsrdə müasir riyazi məntiqin əsasını qoymuş ingilis riyaziyyatçısı Corc Bulun şərəfinə bul qiymətləri də adlanır. Arqument və qiymətləri DOĞRU və YALAN olan funksiyalar bul funksiyaları adlanır. Konyunksiya və dizyunksiya əməliyyatları iki arqumentli bul funksiyalarına iki misaldır.

İki arqumentli cəmisi neçə bul funksiyası var? Asanca yoxlamaq olar ki, onlar on altıdır. Həqiqətən,

A	*B*	
DOĞRU	DOĞRU	?
DOĞRU	YALAN	?
YALAN	DOĞRU	?
YALAN	YALAN	?

cədvəlini doldurараq sual işarələrinin hər birinin yerinə istər DOĞRU, istər YALAN qiyməti yaza bilərik, bu da $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$ variant edir.

PROQRAMLAŞDIRMADA BUL ƏMƏLİYYATLARI

Konyunksiya və dizyunksiya əməliyyatları bütün proqramlaşdırma dillərinin ayrılmaz hissəsidir. Kompyuterlərin klaviatturunda ∨ işarəsi yoxdur və dizyunksiyanı işarə etmək üçün tez-tez ingilis sözü OR (və ya) – dan istifadə olunur. Uyğun olaraq konyunksiya bu zaman AND (və) ilə işarə olunur.

Simvollar əvəzinə sözlərin işlədilməsi tez-tez təzə başlayan proqramçıların səhv etmələrinə gətirib-çıxarır. Onlar sadəlövhcəsinə fərz edirlər ki, proqramlaşdırma dilində OR və AND adi dildəki kimi istifadə oluna bilər. Nəticədə düzgün

IF X>Y AND Z THEN...
(əgər *x y*-dən böyük və
x z-dən böyükdürsə, onda...)

əvəzinə

IF X > Y AND Z THEN...
(əgər *x y və z*-dən böyükdürsə, onda...)

yazan cavanlar səhv haqqında məlumat alırlar.

* * *

Sultan müharibədən zəfərlə evə qayıdırdı. Ənənəyə görə, paytaxtda ordunu atəşfəşanlıqla qarşılamalıydılar, lakin toplar susurdu. Sultan baş vəziri yanına çağırdı və izahat tələb etdi.

– Hökmdar, - baş vəzir sözə başladı, – buna on iki səbəb vardı, əvvəla, barıt yox idi...

– Kifayətdir! – sultan dedi və vəzirin boynunu vurmağı əmr etdi.

Toplananların yerini dəyişdikdə cəm dəyişmədiyi kimi, "*A* və *B*" və ya "*B* və *A*" deməyin fərqi yoxdur. Proqramlaşdırmada isə *A* AND *B*-ni *B* AND *A*-ya dəyişmək proqramın işini əhəmiyyətli dərəcədə dəyişə bilər. Məsələn, bütün proqramlaşdırma dillərində əgər operatorun

IF Y/X > Z AND X > 0 THEN

yerinə yetirməsindən əvvəl X dəyişəninin qiyməti 0-a bərabərdirsə, "Sıfıra bölünmə" haqqında xəbərdarlıq veriləcək. Eyni zamanda

IF X > 0 AND Y/X > Z THEN...

yazılarsa, heç bir qəza dayanması baş verməz.

Məsələ bundadır ki, bəzi proqramlaşdırma dillərinin semantikasına əsasən, kompyuter yuxarıda xatırlanan sultan kimi hərəkət edir, əvvəlcə konyuksiyanın birinci həddinin qiyməti hesablanır və o, YALANdırsa, ikinci həddə, sadəcə, baxılmır. Oxşar olaraq, birinci həddin qiyməti DOĞRUdursa, dizyunksiyanın ikinci həddinə baxılmır.

Bütün ikiarqumentli bul funksiyaları üçün Azərbaycan dilində uyğun konstruksiyalar mövcuddur. Misal olaraq

A	*B*	*A* ⇒ *B*
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	DOĞRU

cədvəli ilə verilmiş əməliyyata baxaq. Bu əməliyyat məntiqi gözləmə və ya implikasiya adlanır. *A* ⇒ *B* funksiyasını "*A*-dan *B* çıxır" və ya "əgər *A*, onda *B*" sözləri ilə ifadə etmək olar.

Diqqət yetirin ki, implikasiya *A* ⇒ *B* ancaq *A* doğru olanda, *B* olmayanda yalandır. *A* yalandırsa, onda *B* haqqında heç nə hökm edilmir və buna görə də bu halda *B*-nin qiymətindən asılı olmayaraq implikasiya həqiqi sayılır.

Konyunksiya və dizyunksiyadan fərqli olaraq implikasiyada arqumentlərin yerlərini dəyişmək olmaz. Bunu etsək digər bul əməliyyatı – tərs implikasiya almış oluruq.

Onu "*B*-dən *A* çıxır" sözləri ilə vermək olar. Müvafiq cədvəl belədir:

A	*B*	*A* ⇐ *B*
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	DOĞRU

Aşağıdakı cədvəlin verdiyi ⇔ əməliyyatı ekvivalentlik (və ya eynigüclülük) adlanır.

A	*B*	*A* ⇔ *B*
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	DOĞRU

A ⇔ *B* "*A* onda və yalnız onda, *B* olduqda" ifadəsinə uyğundur.

⇔ işarəsi ilə yanaşı eynigüclülüyü göstərmək üçün ≡ və = işarələrindən də istifadə olunur.

A	*B*	
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	YALAN

cədvəli ilə verilən əməliyyat istisna edən dizyunksiya adlanır. Onu sözlə belə ifadə etmək olar: "ya *A*, ya *B*". $A \vee B$ dizyunksiyasından fərqli olaraq istisna edən dizyunksiya həm A, həm *B* doğru olanda yalandır. Bu əməliyyatın ümumi qəbul edilmiş işarəsi yoxdur, məsələn, EQU simvolundan istifadə etmək olar.

Aşağıdakı cədvələ diqqətlə baxın:

A	*B*	
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	DOĞRU

Formal olaraq burada iki arqumentli müəyyən bul funksiyası verilib. Lakin asanca əmin olmaq olar ki, funksiyanın qiyməti ikinci arqumentdən asılı deyil və həmişə birinci arqumentin qiymətinə əksdir. Buna görə də onun yerinə bir arqumentli EQU əməliyyatına baxılır:

A	$\neg A$
DOĞRU	YALAN
YALAN	DOĞRU

$\neg$ əməliyyatı məntiqi inkar adlanır.

İnkarı vermək üçün Azərbaycan dilində "ma" şəkilçisi işlədilir. Məsələn;

Seymur dondurma almadı.

Məntiqi inkar bu cümlədə olduğu kimi xəbərdəki "ma" şəkilçisinə uyğun gəlir. Məntiqi inkarın verilməsinin digər üsulu mülahizə-arqumentə "doğru deyil ki," sözlərinin əlavə edilməsidir. Birinci cümləni ikinci ilə müqayisə edin:

Doğru deyil ki, Seymur dondurma aldı.

Mətbəə imkanlarından asılı olaraq inkar işarəsi müxtəlif şəkildə ola bilər: $\neg$ və ya ¬, bəzən eləcə də ~ simvolundan istifadə edilir. İnkarı işarə etməyin daha bir üsulu arqument üzərində duran üfüqi xətdir: $\overline{A}$.

İki arqumentli bul funksiyalarının miqdarını hesablamağımıza oxşar olaraq, bir arqumentin $2 \times 2 = 4$ bul funksiyası olmalıdır. Onlardan biri ilə, inkarla biz artıq tanış olmuşuq. Digər üçü cədvəllərlə verilir:

A	
DOĞRU	DOĞRU
YALAN	DOĞRU

A	
DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN

A	
DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN

Bu funksiyalardan birincisi arqumentin qiyməti ilə üst-üstə düşən qiymətə malikdir və onun ifadəsi üçün heç bir xüsusi dil konstruksiyası tələb olunmur (istəyirsinizsə, "doğrudur ki, *A*" deyə bilərsiniz). Digər ikisi ümumiyyətlə öz arqumentlərindən asılı deyillər, bunlar sadəcə artıq bizə məlum olan DOĞRU və YALAN-dır.

İki arqumentli bul funksiyalarına qayıdaraq qeyd edək ki, qiymətləri bütün arqumentlərindən asılı olmayan bir neçəsi var. Onlara aşağıdakı cədvəllər uyğun gəlir:

A	*B*	*A*
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	YALAN

A	*B*	*B*
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	YALAN

A	*B*	$\neg B$
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	DOĞRU

A	*B*	DOĞRU
DOĞRU	DOĞRU	DOĞRU
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	DOĞRU

A	*B*	*YALAN*
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	YALAN

Şeffer ştrixi adlanan | əməliyyatını

A	*B*	$A \mid B$
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	DOĞRU

cədvəli verir. $A|B$-ni "doğru deyil ki, *A* və ya doğru deyil ki, *B*" sözləri ilə vermək olar.

Növbəti cədvəl Pirs oxu adlanan $\downarrow$ əməliyyatını təqdim edir:

A	*B*	$A \downarrow B$
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	DOĞRU

$A \downarrow B$ –ni "doğru deyil ki, *A* və doğru deyil ki, *B*" kimi oxumaq olar.

Hamı tərəfindən qəbul olunmuş adlara və işarələrə malik olmayan daha iki bul funksiyası var:

A	*B*	
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	DOĞRU
YALAN	DOĞRU	YALAN
YALAN	YALAN	DOĞRU

A	*B*	
DOĞRU	DOĞRU	YALAN
DOĞRU	YALAN	YALAN
YALAN	DOĞRU	DOĞRU
YALAN	YALAN	YALAN

Onlar uyğun olaraq "doğru deyil ki, *A*-dan *B* çıxır" və "doğru deyil ki, *B*-dən *A* çıxır" sözləri ilə ifadə oluna bilərlər.

PROPOZİSİONAL DÜSTURLAR

Sərəncamımızda olan riyazi əməllərin – toplamanın, çıxmanın, vurmanın və s. – işarələrinə malik olaraq biz onların köməyi ilə ədədlərdən və dəyişənlərdən riyazi ifadələr qururuq. Oxşar şəkildə həm də bul və ya propozisional düsturlar adlanan məntiqi ifadələr də qurmaq olar (Sonuncu ad latınca propositio – "təklif" sözündəndir). Bul funksiyası işarələrindən başqa bundan ötrü bul (və ya propozisional) dəyişənlər, yəni DOĞRU və ya YALAN qiymətlər alan dəyişənlər tələb olunur. Belə dəyişənlər kimi böyük latın hərflərindən istifadə etmək qəbul edilib.

Propozisional düsturun tərifini verək.

1. Hər bir propozisional dəyişən propozisional düsturdur.

2. F – propozisional düsturdursa, onda $\neg$ F də propozisional düsturdur.

3. F_1 və F_2 propozisional düsturlardırsa, onda $(F_1 \& F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \Rightarrow F_2)$, $(F_1 \Leftarrow F_2)$, $(F_1 \equiv F_2)$, $(F_1 \equiv F_2)$, $(F_1 \mid F_2)$, $(F_1 \downarrow F_2)$ də propozisional düsturlardır.

4. Bu tərifin əvvəlki bəndlərinə əsasən propozisional düstur olanlardan başqa heç bir digər obyekt propozisional düstur deyil.

Biz ilkin sadə düsturları (1-ci bənd), sonra isə qurulmuş düsturlardan yenilərinin qurulması (2-ci və 3-cü bəndlər) qaydalarını təsvir etdik. Belə təyin üsulu induktiv və ya konstruktiv adlanır. Elmi nəşrlərdə 4-cü bənd həmişə nəzərdə tutulur, lakin onun haqqında danışılmır, çünki düsturların qurulması haqqında heç bir informasiya daşımır.

Propozisional düsturlarda mötərizələr cəbrdə oynadıqları rolu oynayırlar, əməliyyatların yerinə yetirilməsi sırasını təyin edirlər. Cəbrdə olduğu kimi, əməliyyatların "üstünlüyü" haqqında şərtləşib bir sıra mötərizələri buraxmaq olar. Ənənəvi olaraq məntiqi inkar ixtiyari ikiyerli əməliyyatdan güclü sayılır (yəni əvvəl yerinə yetirilir), konyunksiya dizyunksiyadan, o da öz növbəsində implikasiyadan güclü sayılır. Bu o deməkdir ki, $A \& \neg B \Rightarrow C \vee D$ düsturunda mötərizələr belə bərpa olunmalıdır:

$$((A \& (\neg B)) \Rightarrow (C \vee D)$$

Cəbrdə çoxhədliyə daxil olan bütün dəyişənlərin qiymətini bilməklə onun qiymətinin hesablanmasının mümkünlüyünə oxşar olaraq, propozisional düstür daxil olan dəyişənlərin verilmiş məntiqi qiymətlərində propozisional düsturun məntiqi qiymətini (DOĞRU və ya YALAN) hesablamaq olar. Bununla da hər bir belə düstur bir və ya bir neçə arqumentli bul funksiyasını verir. Eləcə də məlum olur ki, ixtiyari bul funksiyasını ancaq $\neg$, & və $\vee$ işarələrini saxlayan düstur vasitəsi ilə vermək olar. Bir neçə misal göstərək:

$$A \Rightarrow B = \neg A \vee B,$$
$$A \equiv B = (A \& B) \vee (\neg A \& \neg B),$$
$$A \equiv B = (A \& \neg B) \vee (\neg A \& B),$$
$$A \mid B = \neg A \vee \neg B,$$
$$A \downarrow B = \neg A \& \neg B$$

KİM HAQLI, KİM MÜQƏSSİRDİR

A-dan *W* çıxırsa, doğrudurmu ki, *A* & *B*-dən *W* çıxır? Riyaziyyatçılar deyəcəklər ki, əlbəttə bu belədir, axı

$$(A \Rightarrow W) \Rightarrow (A \& B \Rightarrow W).$$

formulu dəyişənlərin ixtiyari qiymətlərində doğrudur.

Lakin belə bir situasiyanı təsəvvür edin. Andlı iclasçılar məhkəməsi maddi sübutlara və $A_1, A_2, \ldots, A_m$ şahid ifadələrinə baxaraq bir səslə *W* nəticəsinə gəldi ki, müttəhim təqsirlidir:

$$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m \Rightarrow W$$

Appelyasiya məhkəməsi eləcə də yeni maddi sübutları və $B_1, B_2, \ldots, B_n$ şahid ifadələrini nəzərə alaraq bütün materiallar əsasında əks "təqsirsiz" nəticəsinə gəldi:

$$A_1 \& A_2 \& \ldots \& A_m \& B_1 \& B_2 \& \ldots \& B_n \Rightarrow \neg W$$

Oxşar situasiyaların formal təsviri üçün qeyri-monoton məntiqlər icad olunmuşdur.

Öz növbəsində, ixtiyari bul funksiyasını vermək üçün bir Şeffer ştrixi və ya bir Pirs oxu kifayətdir.

Bir sıra bul əməliyyatlarının digərləri ilə ifadə edilməsi propozisional düsturların qurulması zamanı bütün əməliyyat işarələrindən deyil, bir neçə əsasından istifadə etməyə imkan verir. Aşağıda biz yalnız $\neg$, &, $\vee$ və $\Rightarrow$ işarələrindən istifadə edəcəyik, yəni hesab edəcəyik ki, propozisional düsturun tərifinin 3-cü bəndində ancaq $(F_1 \& F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$ və $(F_1 \Rightarrow F_2)$ qalıb. Qeyd edək ki, F_1 düsturu $F_1 \Rightarrow F_2$ implikasiyasının mühakiməsi, F_2 onun nəticəsi adlanır.

EYNİLİKLƏ DOĞRU DÜSTURLAR

Propozisional düsturlar içində dəyişənlərin ixtiyari qiymətlərində DOĞRU qiymət alanları xüsusi rol oynayır. Belə düsturlar eynilikə doğru düsturlar və ya tavtologiyalar adlanır. Tavtologiyalara bir neçə misal gətirək:

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A),$$
$$(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C)),$$
$$(A \& B) \Rightarrow A,$$
$$(A \& B) \Rightarrow B,$$
$$A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \& B)), \qquad (*)$$
$$A \Rightarrow (A \vee B),$$
$$B \Rightarrow (A \vee B),$$
$$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow C)),$$
$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A),$$
$$\neg\neg A \Rightarrow A$$

Dil dərslərində öyrədilir ki, tavtologiyalardan (doğrudur, digər mənada) qaçmaq lazımdır. Riyaziyyatçıları isə məhz tavtologiyalar maraqlandırır, belə ki, öz formalarına görə onlar doğrudurlar.

MÜLAHİZƏLƏR MƏNTİQİNİN BİR SIRA QANUNLARI

Tavtologiya mülahizələri hesablama düsturu olduğundan, özünün bir formasına görə doğru olan tavtologiyaları mülahizələr məntiqinin formal qanunları adlandırmaq olar Belə qanunlara bir neçə misal gətirək.

Ziddiyyət qanunu. *A* mülahizəsi eyni zamanda doğru və yalan ola bilməz:

$$\neg(A \& \neg A)$$

Üçüncünü istisna qanunu. Ya doğrudur ki, *A*, ya doğru deyil ki, *A*, üçüncü ola bilməz:

$$A \vee \neg A$$

İkiqat inkar qanunu. *A*-nın doğru olmadığı doğru deyilsə, onda *A* doğrudur:

$$\neg\neg A \Rightarrow A$$

Üçqat inkar qanunu. *A*-nın doğru olmadığının doğru olmadığı doğru deyilsə, onda *A* yalandır:

$$\neg\neg\neg A \Rightarrow \neg A$$

Kontrapozisiya qanunu. Əgər *A*-dan *B* çıxırsa və doğru deyil ki, *B*, onda doğru deyil ki, *A*:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Cəfəngiyyata gətirmə qanunu. Əgər *A*-dan çıxırsa ki, *B* doğrudur və *B* doğru deyil, onda *A* yalandır:

$$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow \neg A)$$

Ortaya sual çıxır: ixtiyari propozisional düstur üçün necə bilmək olar ki, o, tavtologiyadır? Bir üsul aşkardır: düstürda *n* dəyişən varsa, bu dəyişənlərin bul qiymətlərinin bütün 2^n mümkün kombinasiyalarını götürmək və hər bir kombinasiya üçün düsturun qiymətini hesablamaq lazımdır. Təəssüf ki, *n* artdıqca proses daha əziyyətli olur. Məsələn, artıq 2100 kombinasiyanı heç bir müasir kompyuter saf-çürük edə bilməz.

Tavtologiyaları ayırmağın digər üsulu mülahizələrin hesablanmasıdır. Burada əsas ideya induktiv tərifdəki kimidir: düsturların müəyyən sonlu çoxluğu ilkin elan edilir və bir qism tavtologiyalar əsasında digərlərini qurmağa imkan verən qaydalar verilir.

MÜLAHİZƏLƏR HESABI

Mülahizələrin hesablanmasının çoxlu müxtəlif variantları təklif olunmuşdur. İlkin düsturlar kimi bütün (*) düsturlarını götürək. Yeni düsturlar qurmaq üçün iki qayda olacaq. Onlardan birincisi, mahiyyətcə, sizə məktəb cəbr kursundan tanışdır. Belə ki,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

eyniliyi isbat olunubsa, *a* dəyişəninin yerinə ixtiyari cəbri ifadə yazmaq olar. Deyək ki, $a = x^2y + y^3$ götürsək, alırıq:

$$(x^2y + y^3 + b)^2 = (x^2y + y^3)^2 + 2(x^2y + y^3)b + b^2$$

Mülahizələrin hesablanmasında da eyni qaydalar işləyir.

1-ci qayda (əvəzetmə qaydası). Propozisional düstur çıxarılıbsa, hər hansı dəyişənin bütün daxilolmalarının yerinə başqa propozisional düstur qoymaqla ondan yeni propozisional düstur almaq olar. Məsələn,

$$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

tavtologiyasından alırıq:

$$(\neg\neg C \Rightarrow C) \Rightarrow (B \Rightarrow (\neg\neg C \Rightarrow C)) \qquad (**)$$

2-ci qayda. Əgər $F_1 \Rightarrow F_2$ şəkilli hər hansı düstur və F_1 düsturu çıxarılıbsa, onda bu iki düsturdan F_2 düsturunu çıxarmaq olar. Məsələn, (**) və $\neg\neg C \Rightarrow C$ düsturlarından

$$B \Rightarrow (\neg\neg C \Rightarrow C)$$

düsturunu alırıq.

Modus nonsens adlanan 2-ci qaydanı düzgün hökm üsulu kimi ilk dəfə Aristotelin e. ə. *IV – III* əsrlərdə yaşamış şagirdi Teofrast vermişdir. Əlbəttə ki, insanlar intuitiv olaraq bu qaydadan Teofrastdan çox-çox əvvələr istifadə edirdilər.

Əgər elə $F_1, F_2, \ldots, F_n, F$ düsturlar siyahısı mövcuddursa ki, ondakı hər düstur ya ilkindir, ya da ondan əvvəlki düsturdan əvəzetmə qaydası ilə alınır, ya da əvvəlki iki düsturdan modus nonsens qaydası ilə alınır, *F* propozisional düsturu çıxarıla bilən düstur hesab olunur. Belə siyahı *F* düsturunun çıxarılışı adlanır.

İlkin düsturları və çıxarılma qaydalarını təsvir edərək biz mülahizələrin hesabının formal tərifini başa vurduq.

Beləliklə, mülahizələrin hesablanması formaca propozisional düsturun tərifinə çox oxşardır. Lakim əhəmiyyətli fərq də vardır. Hər hansı yeni anlayışı, məsələn, bizim halımızda məntiqi düsturu təyin edərkən biz heç nə ilə bağlı deyilik və bunu istədiyimiz kimi edə bilərik (yeni anlayışın tədqiqə layiq olub-olmayacağı özgə məsələdir). Mülahizələrin hesablanmasını qurarkən biz müəyyən məqsəd – artıq təyin etdiyimiz obyektlərin

ÇÖRƏK VƏ YA TAMAŞA

Fərz edək ki, kinoya bilet 1 manatdır və kökə də 1 manatdır. Onda

$A \Rightarrow B$: Seymurun 1 manatı varsa, o, kinoya baxa bilər.

$A \Rightarrow C$: Seymurun 1 manatı varsa, o, kökə yeyə bilər.

$((A \Rightarrow B)\&(A \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow (B\&C))$

düsturunun tavtalogiya olduğunu asanca yoxlamaq olar. Bunun əsasında hökm verə bilərikmi ki,

$A \Rightarrow (B\&C)$: Seymurun 1 manatı varsa, o, filmə baxa və kökə yeyə bilər?

Yox, biz deyərik "...filmə baxa, ya kökə yeyə". Nə baş verib?

İzahı konyunksiya və dizyunksiya ilə bağlılıqda deyil. Əgər riyaziyyatçı müəyyən A teoremini isbat etmişsə, o sonra onu digər teoremlərin isbatı üçün, məsələn, $B,C,D...$ modus nonsens qaydası ilə $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, $A \Rightarrow D$,... qeyri-məhdud sayda istifadə edə bilər. A teoreminin istifadəsi onu qətiyyən "korlamır".

Seymurla misalımızda "əgər..., onda..." qrammatik konstruksiyası riyazi implikasiyada olduğu kimidir, lakin mühakimə və nəticə arasındakı əlaqə başqadır, belə ki, müəyyən xərclənən ehtiyatın – pulun istifadəsini tələb edir. Digər məsələlərdə enerji, obyektlətin tutduğu sahə və həcm, kompyuterin yaddaşı və s. oxşar ehtiyat ola bilər. Oxşar hallarda fəaliyyətin düzgün planlaşdırılması üçün fransız riyaziyyatçısı Jirarın yaratdığı xətti məntiqdən istifadə olunur.

MÖVSÜM DƏBLƏRİ

Şənbə günü axşam Seymur qərara alır ki, sabahısı gün kəndə nənəsinin yanına getsin.

$A \Rightarrow C$: Bazar günü hava isti və günəşli olacaqsa, Seymur səhər necə geyinəcəyini bilmir.

$B \Rightarrow C$: Bazar günü leysan yağarsa, Seymur sabah səhər nə geyinəcəyini bilmir.

Seymur radionu qoşur və sabaha hava proqnozunu dinləyir:

$A \vee B : B$: Bazar günü bütün gün ərzində qızmar hava olacaq və ya leysan yağacaq.

Formal olaraq buradan belə nəticə çıxarmaq olar:

C: Seymur bilir ki, sabah səhər necə geyinəcək.

Razı deyilsiniz? Bəs səhv hardadır?

Burada modallığın əvəzlənməsi baş verib. Bu vaxta qədər DOĞRU və YALAN modallıqları ilə işləyirdik, burada isə onlardan fərqli yeni Seymur bilir modallığı peyda olub. Doğrudan da, müəyyən müddəa doğru olsa belə, Seymur bu barədə bilməyə də bilər.

Misalımız "həyatdandır", riyaziyyatda isə DOĞRU və YALAN –dan başqa (müəyyən formal sistemdə) İSBAT OLUNA BİLƏN mühüm modallıq sayılır. Hökm doğru, lakin verilmiş sistemin vasitələri ilə isbat oluna bilməyən ola bilər. Təcrübədə vacib olan digər modallıqlar bələləridir: ZƏRURİDİR, HƏQİQƏTƏUYĞUNDUR, MÜMKÜNDÜR. Modal məntiqlərdə modallığın işarələnməsi üçün xüsusi simvollardan istifadə olunur və aksiomların uyğun dəstinin köməyi ilə modallıqların xassələri verilir.

Yuxarıda dizyunksiyanın köməyi ilə gətirilən hava proqnozu az sərfəlidir. Biz onun əsasında davrana bilmərik, belə ki, dizyunksiyanın məhz hansı həddinin doğru olduğunu bilmirik. Riyaziyyatda dizyunksiyanın mənasının şərhi qızğın reaksiya doğurdu. Xüsusi halda, $A \vee \neg A$ üçüncünü istisna qanunu şübhə altına alındı. Biz A və ya $\neg A$ hökmlərinin hansının doğru olduğunu bilmiriksə, dizyunksiyanı doğru hesab etməkdə haqlıyıqmı? Nəticədə üçüncünü inkar qanunu olmayan məntiqi sistemlər – intuisionist məntiq (*XX* əsrin başlanğıcında) və konstruktiv riyazi məntiq (alqoritmlər nəzəriyyəsinin

(tavtalogiyaların) hesablanması üsulunu göstərmək məqsədi güdürdük. Bununla bağlı iki faktı isbat etmək lazımdır.

Korrektlik haqqında teorem. Mülahizələrin hesablanmasında çıxarılan hər bir düstur tavtalogiyadır.

Tamlıq haqqında teorem. Hər bir tavtalogiya mülahizələrin hesablanmasında çıxarıla biləndir.

Mülahizələrin hesablanmasının tamlığı teoremi daha dərin və gözlənilməz faktdır. Həqiqətən, tavtalogiyaların sonsuz çoxluğu mövcuddur, bizsə başlanğıc kimi yalnız onların sonlu və o qədər də böyük olmayan miqdarını götürdük. Sonra, hökm verməyin çox üsulları vardır, bizsə cəmisi iki qayda ilə kifayətləndik. Heyrət etmək olar ki, vasitələrin bu çox məhdud dəsti bütün tavtalogiyaların yaranması üçün kifayət etdi.

Beləliklə, hər hansı düsturun tavtalogiya olmasını təyin etmək üçün iki metodumuz var: ona daxil olan dəyişənlərin bütün mümkün qiymətlərini yoxlamaq və ya mülahizələrin hesablanmasında düsturun çıxarılışını tapmaq. Çıxarılışın axtarışı prosesi çox çətin proses ola bilsə də, çıxarılışın özü kifayət qədər qısa olacaq. İkinci metodun üstünlüyü bununla əlaqədardır. Həqiqətən, əgər biz hər hansı düsturun birinci metodla tavtalogiyalılığını müəyyən etmişiksə və kimsə nəticəni yoxlamaq istəyirsə, onda o, mahiyyətcə bütün qiymətlərin seçilməsi üzrə bizim işimizi bütövlükdə təkrarlamalıdır. İkinci metoda gəlincə isə çıxarılşın axtarışı prosesini yoxlamağa və səhvlər yolu ilə təkrarlamağa ehtiyac yoxdur – artıq tapılmış çıxarılışı yoxlamaq kifayətdir.

ÖDƏNİLƏ BİLƏN DÜSTURLAR

Tavtalogiyalardan başqa, xüsusən texniki məsələlərin həlli üçün, ödənilə bilən düsturlar mühüm rol ounayır. Φ məntiqi düsturu ona daxil olan dəyişənlərin qiymətlərinin heç olmazsa bir seçimində DOĞRU qiymətini alırsa, ödənilə bilən düstur adlanır.

Aydındır ki, hər bir tavtalogiya ödənilə bilən düsturdur. Bundan əlavə, tavtalogiyalılıq və ödənilə bilənlik arasında dərin bağlılıq var, belə ki:

- ✓ **Φ düsturu onda və yalnız onda ödənilə biləndir ki, onun inkarı $\neg$ tavtalogiya deyil;**
- ✓ **Φ düsturu onda və yalnız onda tavtalogiyadır ki, onun inkarı $\neg$ ödənilə bilən düstur deyil.**

Beləliklə, tavtalogiyaların öyrənilməsi və ödənilə bilən düsturların öyrənilməsi mahiyyətcə eyni problemdir.

Bir çox məsələləri ödənilə bilən terminlərində ifadə etmək daha təbiidir. Birinci misal kimi məktəb cədvəlini necə tərtib etmək məsələsinə baxaq.

K_1, K_2, ..., K_l siniflər çoxluğu, hərəsi müəyyən bir fənni tədris edən P_1, P_2,..., P_m müəllimlər çoxluğu, $U_1,U_2,...,U_n$ dərslər çoxluğu (həftədə 6 tədris gününün hər birində 6 dərs olursa, $n = 36$).

B_{ijk} bul dəyişənlərinə baxa bilərik, burada $i = 1,2,...,\kappa$; $j = 1,2,...,m$; $\kappa = 1,2,...,n$ –dir və hesab edə bilərik ki, yalnız və yalnız həftənin κ-cı dərsini i-ci sinifdə müvafiq fənn üzrə j-ci müəllim apardıqda $B_{ij\kappa}$ = =DOĞRU-dur. $B_{ij\kappa}$-dan istifadə edərək cədvələ tələbləri asanlıqla məntiqi düsturlar şəklində yazmaq olar, məsələn

- hər bir müəllim dərsi ancaq bir sinifdə aparır:

$$B_{ijk} \Rightarrow \neg B_{ij'k} \quad (i \neq i')$$

- verilmiş sinifdə hər bir dərsi yalnız bir müəllim aparır:

$$B_{ijk} \Rightarrow \neg B_{ij'k} \quad (i \neq i')$$

- sinif heç vaxt müəllimsiz qalmır:

$$B_{i1\kappa} \vee B_{i2\kappa} \vee ... \vee B_{im\kappa}$$

Daha sonra, məsələn, verilmiş sinfin həftədə iki idman dərsi olsun, özü də bu dərslər eyni gündə keçməsin (və ya eyni gündə və dalbadal olsun), 4 riyaziyyat dərsi olsun və s. tələbləri yazmaq lazımdır. Cədvəl tərtib etmək dəyişənlərin elə qiymətini tapmaqdır ki, bütün oxşar düsturların konyunksiyası doğrudur.

Başqa bir məsələ. Formaca o, məntiqdən uzaq görünsə də, əslində onu asanca müəyyən bul düsturlarının ödənilə bilən olması məsələsi şəklində təqdim etmək olar.

N natural ədədi verilib. Onun sadə, yoxsa mürəkkəb olmasını bilmək tələb olunur.

N ədədi onda və yalnız onda mürəkkəbdir ki, o, hər biri 1-dən böyük, lakin N-dən kiçik olan iki P və Q ədədlərinin hasili şəklində göstərilə bilsin. N, P və Q ədədlərini ikilik hesablama sistemində təqdim edək:

$$N = \sum_{\kappa=0}^{m} n_\kappa 2^\kappa, \quad P = \sum_{\kappa=0}^{m} p_\kappa 2^\kappa, \quad Q = \sum_{\kappa=0}^{m} q_\kappa 2^\kappa$$

Burada n_κ, p_κ və q_κ ədədlərinin hər biri ya 0, ya 1-dir. P və Q ədədlərinin ikilik yazılışının necə olmasını bilmirik, lakin yalnız və yalnız p_κ=1 olduqda P_κ=HƏQİQƏT (uyğun olaraq yalnız və yalnız q_κ=1 olduqda Q_κ=HƏQİQƏT) hesab edərək P_0, P_1, ...,P_m; Q_0, Q_1, ...Q_m bul dəyişənlərinə baxa bilərik.

P_0, P_1, ...,P_m; Q_0, Q_1, ..., Q_m dəyişənli Φ_0,Φ_1,...,Φ_m məntiqi düsturlarını, PQ hasilinin ikilik yazılışındakı κ-cı hədd 1-ə bərabər olduqda Φ_κ HƏQİQƏT qiyməti alır şərti ilə tərtib etmək çətin deyil. Misal üçün iki başlanğıc düsturlar bunlardır:

$$\Phi_0 = P_0 \& Q_0,$$
$$\Phi_1 = (P_0 \& Q_1) \neq (P_1 \& Q_0)$$

P və Q-nün 1-dən böyük olması şərti belə yazılır:

$$P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_m$$
$$Q_1 \vee Q_2 \vee ... \vee Q_m$$

İndi isə yalnız və yalnız N mürəkkəb ədəd olanda ödənilə bilən düsturu yazmaq olar. Bu düstur iki axırıncı dizyunksiyanın – κ-nın n_κ=1 olan qiymətləri üçün Φ_κ düsturları və κ-nın n_κ=0 olan qiymətləri üçün $\neg\Phi_\kappa$ düsturlarının dizyunksiyasıdır.

Məktəb cədvəli haqqında və mürəkkəb ədədlər haqqında məsələlər bir ümumi cəhətə malikdir: onlar həll olunandan sonra onları yoxlamaq çətin deyil (P və Q ədədlərini vurub nəticəni N-lə müqayisə etmək və ya cədvə'ə qoyulan bütün tələblərin yerinə yetirilməsinə əmin olmaq). Oxşar məsələlərin həlli asan yoxlanılan böyük bir sinfi (bir

neçə min) aşkar edilib. Sübut edilmişdir ki, onlar hamısı bul düsturlarının ödənməsinin tanınması məsələsinə gətirilir. Lakin onun tez həll üsulunu tapmaq riyaziyyatçılara heç cür nəsib olmur. Yəqin ki, bul məchullarının sanki bütün mümkün qiymətlərini seçməkdəm başqa özgə yol yoxdur. Bu halda digər məqsəd – dəyişənlərin verilmiş bul düsturlarının DOĞRU qiymətini aldığı qiymətlərini tez tapmağa imkan verən metodun mövcud olmamasını isbat etmək məqsədi yaranır. Nəzəri maraqdan başqa, belə isbat mühüm praktiki əhəmiyyətə malikdir. Məsələ bundadır ki, rabitə xətləri vasitəsi ilə bank hesablarının həyata keçirilməsində istifadə edilən bir çox müasir kriptoqrafiya (şifrləmə) sistemləri ödənilən düsturların tez tanınması üsulunun mümkünsüzlüyü fərziyyəsinə əsaslanıb.

PREDİKATLARIN HESABLANMASI DİLİ

İxtiyari tavtalogiyanı götürüb ondakı bütün bul dəyişənlərini riyazi mülahizələrlə əvəzləsək, doğru müddəa – teorem alınar. Məsələn, $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ düsturundan belə doğru hökm alınır:

119-un sadə ədəd olmasından alınırsa ki, bərabərtərəfli üçbucağın bucaqları cəmi 180°-dir, onda bərabərtərəfli üçbucaqda bucaqların cəminin 180°-yə bərabər olmamasından 119-un sadə ədəd olmaması alınır.

Lakin belə "teoremlər" elmi maraq kəsb eləmir. Axı dəyişənlərin yerinə qoyduğumuz mülahizələr, yuxarıdakı misalda olduğu kimi, mənaca bir-birləri ilə qətiyyən bağlı olmaya bilərlər. Bu yeni müddəalar məzmunlarına görə yox, ancaq formalarına görə doğrudurlar. Daha inkişaf etmiş formal dilin – *predikatların hesablanması dilinin köməyi ilə "əsil" teoremlər ifadə etmək olar.*

PREDMETLƏR VƏ ADLAR

Xatırladaq ki, biz mülahizələrin hesablanmasına bütöv cümlələri bul dəyişənləri ilə əvəz etməklə gəldik. Bizi onların quruluşu yox, yalnız onların doğru və ya yalan ola biləcəyi maraqlandırırdı. İndisə o biri addımı atırıq və aşkar edirik ki, ixtiyari mülahizədə bir və ya bir neçə obyekt ayırmaq olar ki, onda onlar haqqında nə isə iddia olunur. Bu obyektlər bizi əhatə edən şeylər və ya canlı varlıqlar, real predmetlər və ya mücərrəd mahiyyətlər ola bilər, cümlədə onların aşkar şəkildə adı çəkilə və ya onlar nəzərdə tutula bilərlər, lakin ixtiyari halda onlar var. Riyazi müddəalarda ədədlər, fiqurlar, funksiyalar və s. obyektlərdirlər.



Kurt Qedel.

Riyazi obyektlərin hansı mənada və harada mövcud olması sualı riyaziyyatçıları çoxdan narahat edir və mübahisə doğururdu. Lakin biz bu fəlsəfi problemi bir kənara qoyacaq və sadəcə hesab edəcəyik ki, müəyyən *predmet oblastı* – riyazi obyektlər çoxluğu var ki, yeni dilin cümlələri bu obyektlər haqqında nəyi isə israr edəcəklər.

Hər bir təbii və ya süni dildə predmetləri adlarla işarə edirlər. Onların bəziləri konkret obyektləri ifadə edir. Məsələn, riyaziyyatda yunan hərfi π ənənəvi olaraq çevrə uzunluğunun diametrə nisbətini bildirir. Natural ədədlərin onluq yazılışına da fərdi adlar kimi baxmaq olar.

Riyazi dilin mühüm fərqi dəyişənlərin olmasıdır. Dəyişənlər obyektləri konkretləşdirmədən predmet oblastının ayrı-ayrı obyektləri haqqında danışmağa və düşünməyə imkan verirlər. Azərbaycan dilində hansısa ölçüdə həmin işi görməyə imkan verən vasitələr var, məsələn, "hər hansı" əvəzliyini göstərək. "Hər hansı nöqtəyə baxaq"-demək olar. Müəyyən zamandan sonra yenə həmin nöqtə haqqında danışarkən çətinliklər yaranacaq. Əvvəllər baxılan nöqtə nəzərdə tutulursa, "hər hansı nöqtədən düz xətt keçirək" demək olmaz. Artıq başqa – "bu" əvəzliyindən istifadə etmək gərəkdir. Lakin bir-iki, hər halda, azsaylı obyektlərdən söz gedəndə belə demək olar. Onlar çoxdursa, mahiyyətcə zaman adları olan dəyişənlər daxil etmək daha münasibdir.

Mümkün olan qiymətləri predmet oblastının obyektləri olan dəyişənlər predmet

dəyişənləri adlanır. Belə dəyişənləri bul dəyişənlərindən fərqləndirmək üçün kiçik latın hərflərindən istifadə etmək qəbul olunub. Predikatların hesablanmasının tanış olacağımız variantı birinci tərtib predikatların hesablanması adlanır və yalnız predmet dəyişənlərdən ibarətdir; daha yüksək tərtibli predikatların hesablanmasında digər növ dəyişənlərdən də istifadə olunur.

PREDİKATLAR

Predmet oblastının ünsürləri müxtəlif xassələrə malikdir: deyək ki, natural ədədlər tək, cüt, sadə və s. olur. Xassələrə arqumenti predmet oblastının ünsürü, qiyməti DOĞRU və ya YALAN məntiqi sahibi olan funksiya kimi baxmaq olar. Xassələri işarə etmək üçün müvafiq Azərbaycan sözləri götürəcək və onları funksiyaların adları kimi istifadə edəcəyik, məsələn, CÜT (x), SADƏ (y).

Xassələrdən – bir predmet arqumentli funksiyalardan fərqli olaraq qiymətləri DOĞRU və ya YALAN olan, predmet arqumentləri isə iki və daha artıq olan funksiyalara baxmaq olar. Belə funksiyalar predmet oblastının ünsürləri arasında münasibətlər verir. Misal üçün ədədlər arasında "kiçikdir" münasibətini götürək. Ənənəvi olaraq o, $x<y$ kimi yazılır, lakin birmənalılıq üçün biz KİÇİKDİR (x,y) yazacağıq.

Xassə və münasibətləri predikat ümumi adı altında birləşdirirlər.

Riyaziyyatda dəyişənlər, sabitlər, xassələr və münasibətlərlə yanaşı qiymətləri predmet oblastının ünsürləri olan əməliyyat və funksiyalardan da istifadə edilir. İfadəni sadələşdirmək üçün predikatların funksiyalarsız hesablanması variantına baxaq. Bu məhdudiyyət əslində dilin ifadə imkanlarını azaltmır. Məsələn, toplama əməliyyatı əvəzinə üçyerli CƏM (x,y,z) predikatından istifadə edib onun ancaq və ancaq $x+y=z$ olduqda doğru olduğunu hesab etmək kifayətdir.

PREDİKATLARIN HESABLANMASI DİLİNİN DÜSTURLARI

Predikatlara, konkret predmet oblastı obyektlərinin və predmet dəyişənlərinin adlarına malik olaraq biz atomar (ən sadə) düsturlar qura bilərik. Məsələn, BÖYÜKDÜR (x, 2), BÖLÜNÜR (x, y), HASİL (p, q, r).

Propozisional dəyişənlərin yerinə atomar düsturlardan istifadə edərək inkar, konyunksiya, dizyunksiya və implikasiyanın köməyi ilə, məsələn, aşağıdakılar kimi daha mürəkkəb məntiqi düsturlar qurmaq olar:

KİÇİKDİR (3, 4) & KİÇİKDİR (4, 6), (*)
KİÇİKDİR (3, x) & KİÇİKDİR (x, y) (**)

Birinci düsturda predmet dəyişənləri yoxdur, buna görə də ona daxil olan atomar düsturların qiymətlərini hesablayaraq biz bütün (*) düsturunun qiymətini də tapmış oluruq. Aydındır ki, o, doğrudur.

(**) düsturunun məntiqi qiyməti, ona daxil olan x və y predmet dəyişənlərinin qiymətləri göstərilməyibsə, təyin olunmayıb. Bununla belə, bu dəyişənlərə konkret qiymət vermədən, məsələn, soruşmaq olar ki:

- düzdürmü ki, x və y-in bütün qiymətlərində (**) konyunksiyası həqiqətdir;
- düzdürmü ki, x və y-in elə qiymətləri var ki, onların qiymətlərində (**) konyunksiyası həqiqətdir;
- düzdürmü ki, x-in hər bir qiyməti üçün y-in elə bir qiyməti var ki, onun üçün (**) konyunksiyası həqiqətdir;
- düzdürmü ki, y-in elə bir qiyməti var ki, bu qiymətdə x-in bütün qiymətləri üçün (**) konyunksiyası həqiqətdir?

Riyazi məntiqdə "mövcuddur" və "bütün... üçün" sözlərinin əvəzinə kvantorlar adlanan xüsusi simvollardan istifadə edilir: mövcudluq kvantoru $\exists$ və ümumilik kvantoru $\forall$-dir. (Bu simvollar exists – "mövcuddur" və all - "bütün" ingilis sözlərinin baş hərfidir). Onların köməyi ilə əvvəlki ifadələr belə yazılır:

$(\forall x(\forall y$ KİÇİKDİR $(3,x)$ & KİÇİKDİR $(x, y)))$,
$(\exists x\ (\exists y$ KİÇİKDİR $(3,x)$ & KİÇİKDİR $(x, y)))$,
$(\forall x(\exists y$ KİÇİKDİR $(3,x)$ & KİÇİKDİR $(x, y)))$,
$(\exists y(\forall x$ KİÇİKDİR $(3,x)$ & KİÇİKDİR $(x, y)))$

Kvantorlar bir-biriylə sıx bağlıdır və biri o biri ilə ifadə olunur. Məsələn, "bütün x-lər üçün $A(x)$ doğrudur" yerinə "doğru deyil ki, elə x mövcuddur ki, $A(x)$ doğru deyil", "x mövcuddur ki, onun üçün $A(x)$ doğrudur" yerinə isə "doğru deyil ki, bütün x-lər üçün doğru deyil ki, $A(x)$" demək olar.

Propozisional düsturların tərifinə ox-

şar olaraq biz predikatların hesablanması düsturunun induktiv tərifini verə bilərik:

1. Hər bir atomar düstur predikatların hesablanması düsturudur.

2. Əgər Φ predikatların hesablanması düsturudursa, onda (¬Φ) – də predikatların hesablanması düsturu olacaq.

3. Əgər Φ_1 və Φ_2 predikatların hesablanması düsturudursa, onda $(\Phi_1 \& \Phi_2)$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2)$, $(\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2)$, $(\Phi_1 \equiv \Phi_2)$ ifadələri də predikatların hesablanması düsturları olacaq.

4. Əgər Φ predikatların hesablanması düsturudursa və x predmet dəyişənidirsə, onda $(\forall x\Phi)$ və $(\exists x\Phi)$ ifadələri də predikatların hesablanması düsturları olacaq.

5. Yuxarıdakı bəndlərə əsasən predikatların hesablanması düsturu olanlardan başqa heç bir digər obyektlər predikatların hesablanması düsturu deyil.

Artıq deyildiyi kimi, predmet dəyişənləri obyektlərin zaman adlarıdır. Predikatların hesablanması düsturunun təyininin 4-cü bəndindəki mötərizələr x dəyişəninin "öz simasını saxladığı" zonanı məhdudlaşdırır. Məsələn, heç bir ədəd eyni zamanda cüt və tək deyilsə də,

$(\exists x\,(\text{CÜTDÜR}\,(x)\,\&\,\text{BÖYÜKDÜR}\,(x,2)))\,\&$
$\&\,(\exists x\,(\text{TƏKDİR}\,(x)\,\&\,\text{KİÇİKDİR}\,(x,5)))$ (***)

düsturu doğrudur. Düsturda yalnız bir predmet dəyişənindən istifadə olunub, lakin burada iki ədədin mövcudluğu iqrar olunur: birincisi – cüt – 2-dən böyük, ikincisi isə - tək – 5-dən kiçik. Analoji səbəbə görə

$(\exists x\,(\text{CÜTDÜR}\,(x)\,\&\,\text{BÖYÜKDÜR}\,(x,12)))\,\&$
$\&\,\text{TƏKDİR}\,(x)$ (***)

düsturunun doğru olub-olmayacağını soruşa bilmərik, belə ki, TƏK predikatının arqumenti olan x-in mövcudluq kvantorundan sonra dayanan x-ə heç bir aidiyyəti yoxdur. Demək qəbul olunub ki, x dəyişəni TƏK predikatının arqumenti kimi bu düstura sərbəst, CÜT və BÖYÜKDÜR predikatlarının arqumenti kimi isə bağlı daxil olur.

Predmet dəyişənlərinin bütün daxilolmalarının qapalı olduğu düstur ((***) misalında olduğu kimi) qapalı düstur adlanır. Düstur qapalı deyilsə, onun həqiqi, ya yalan olması haqqında ancaq düstura sərbəst daxil olan bütün dəyişənlərin qiymətlərini göstərək danışmaq olar. Belə ki, (****) düsturu x=3-də doğru, x=4-də yalandır.

Lakin "cüt", "tək", "böyük", "kiçik" sözlərinin mənasını bilməyən adam bu düsturlar haqqında nə deyə bilər? Onun üçün əvvəlcə nəzərdə tutduğumuz modeli təsvir etmək, məhz seçdiyimiz predmet oblastının natural ədədlər, CÜT, TƏK, BÖYÜK və KİÇİK anlayışlarının bu ədədlərə və ədədlər arasındakı münasibətlərə uyğun xassələr olduğunu demək lazım gələcək.

MÜHÜM DÜSTURLAR

Beləliklə, (***) düsturunun doğru sayılması üçün ona daxil olan sözlərin mənasını bilmək tələb olunur. Bu şərt ona dəlalət edir ki, biz hələ tam formalaşmağa çatmamışıq. Bu və ya digər riyazi nəzəriyyənin qurulmasında oxşar problem baş qaldırmır. A_1, A_2, ..., A_m qapalı düsturlarının aksiomlar adlanan müəyyən miqdarı verilir. İndi isə düsturun doğru olub-olmaması sualının yerinə o, verilmiş aksiomlardan çıxırmı sualını qoyuruq. Məhz belə: Φ qapalı düsturu A_1, A_2, ..., A_m düsturlarının hamısının doğru olduğu ixtiyari modeldə doğrudursa, A_1,A_2, ..., A_m aksiomlarının məntiqi nəticəsi hesab olunur. Belə modellər, ümumiyyətlə, çox ola bilər.

Misal olaraq aşağıdakı aksiomatikanı götürək:

A_1. $\forall_x\forall_y\,(\text{CƏM}(x,1,y) \Rightarrow (\text{QOŞA}(x) \equiv$
$\equiv \neg\text{QOŞA}(y)))$,

A_2. $\forall_x\forall_y\,(\text{CƏM}(x,2,y) \equiv$
$\equiv \exists z(\text{CƏM}(x,1,z)\,\&\,\text{CƏM}(z,1,y)))$

Hər iki aksiomun doğru olduğu birinci model kimi CƏM münasibətinin ənənəvi anlamı ilə natural ədədlərə baxaq, QOŞA xassəsi altında isə CÜT başa düşəcəyik. Bu modeldə A_1 aksiomu göstərir ki, əgər x cütdürsə, onda x+1 təkdir və tərsinə. A_2 aksiomu x+2=(x+1)+1 elementar eyniliyinə uyğundur.

İkinci model birincidən onunla fərqlənir ki, QOŞA xassəsi altında TƏK başa düşülür. Bu iki modeldə QOŞA xassəsinin fərqli anlamda təfsirinə (izahına) baxmayaraq A_1 və A_2 aksiomları doğru olaraq qalır.

Φ düsturu A_1 və A_2 aksiomlarının nəticəsinə misaldır:

$\forall_x\forall_y\,(\text{CƏM}(x,2,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\text{QOŞA}(x) \equiv (\text{QOŞA}(y)))$

Birinci modeldə o, belə izah olunur: əgər x natural ədədi cütdürsə, onda x+2 də cütdür və tərsinə. Yuxarıda baxılan hər iki modeldə hər iki aksiomun doğruluğundan çıxır ki, yenə də QOŞA xassəsinin əks anlamına baxmayaraq onlarda Φ düsturu da doğrudur.

Nəticənin tərifində Φ düsturu A_1, A_2, ..., A_m aksiomlarının doğru olduğu bütün modellərdə doğrudur demək əvəzinə – demək olar ki,

$A_1\,\&\,A_2\,\&\,\ldots\,\&\,A_m \Rightarrow \Phi$

ixtiyari modeldə doğrudur. Həqiqətən, aksiomların biri hər hansı modeldə doğru deyilsə, onda implikasiyanın mühakiməsində dayanan bütün konyunksiya doğru deyil, deməli, implikasiya doğrudur. Digər tərəfdən, hər hansı bir model üçün bütün aksiomlar ödənirsə, onlardan və $A_1\,\&\,A_2\,\&\,\ldots\,\&\,A_m \Rightarrow \Phi$ düsturundan modus nonsens qaydasına əsasən Φ-in doğruluğunu alırıq.

Bizim misalda

$(\forall_x\forall_y\,(\text{CƏM}(x,1,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow(\text{QOŞA}(x) \equiv \neg\,\text{QOŞA}(y))))\&$
$\&\,(\forall_x\forall_y\,(\text{CƏM}(x,2,y) \equiv$
$\equiv \exists z(\text{CƏM}(x,1,y)\&(\text{CƏM}(x,1,y))) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\forall_x\forall_y\,(\text{CƏM}(x,2,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (\text{QOŞA}(x) \equiv \text{QOŞA}(y))))$

düsturu bütün modellərdə doğru olur.

Predikatların hesablanması düsturlarının qurulması qaydalarını verərkən biz qavramanın asanlaşdırılması üçün predikatların adları kimi Azərbaycan sözlərindən istifadə etdik. Latın əlifbasının hərflərindən istifadə daha ənənəvi və beynəlmiləldir. Belə, daha mücərrəd yazılışda sonuncu düstur aşağıdakı şəkli ala bilər:

$(\forall_x\forall_y\,(S(x,a,y) \Rightarrow (P(x) \equiv \neg\,P(y))))\&$
$\&(\forall_x\forall_y\,(S(x,b,y) \equiv \exists z(S(x,a,z)\&$
$\&\,S(z,a,y)))) \Rightarrow (\forall x\forall y(S(x,b,y) \Rightarrow$
$\Rightarrow (P(x) \equiv P(y))))$

Mahiyyətcə bu artıq riyazi yox, sırf məntiqi teoremdir. Müxtəlif predmet oblastları seçərək və P və S predikat simvollarına, eləcə də konkret obyektləri bildirən a və b simvollarına müxtəlif təfsir verərək ondan müxtəlif riyazi teoremlər almaq olar.

Qapalı düsturun ixtiyari modeldə doğru olması xassəsi mühümlük adlanır. Predikatların hesablanmasının mühüm düsturları mülahizələrin hesablanmasının eynilikləri doğru düsturlarının (tavtalogiyaların) oxşarlarıdır. Riyaziyyatın bu və ya digər sahəsinin aksiomatik qurulması zamanı T teoreminin isbatı

$A_1\,\&\,A_2\,\&\,\ldots\,\&\,A_n \Rightarrow T$

implikasiyasının, burada A_1, A_2, ..., A_n uyğun aksiomlardır, mühümlüyünün isbatına gətirilir.

Verilmiş qapalı düsturun ixtiyari modeldə doğruluğunu necə müəyyən etməli? Tavtalogiyalardan fərqli olaraq burada bütün mümkün halları seçmək olmaz. Buna görə də predikatların hesablanmasının qurulmasını riyazi məntiqin əsas uğurlarından biri hesab etmək olar. Mühakimələrin sayılmasına oxşar olaraq, predikatların sayılması müəyyən ilkin mühüm düsturlar və yeni düsturların qurulması qaydaları ilə (bu qaydalar kifayət qədər mürəkkəb olduqlarından burada gətirilmir) verilir. Predikatların hesablanması haqqında, mülahizələrin hesablanmasına oxşar olan iki teorem isbat olunmuşdur:

EVKLİDDƏN HİLBERTƏ

Tarixi olaraq riyaziyyatın qurulmasının aksiomatik metodu həndəsədən başlayıb. Evklid klassik "Başlanğıclar" əsərində tələb olunan aksiomların tam siyahısını verməyə cəhd göstərib.

Sonrakı yüzilliklərdə aşkar edildi ki, bu aksiomlar kifayət etmir, ona görə də isbatlarda seyrçi obrazlara apellyasiya baş verir. *XIX* əsrin sonunda öz elementar həndəsə aksiomatikasını təklif etmiş D. Hil- bert bu nöqsanlardan qaçа bildi. Hilbertin aşağıdakı kəlamı dillər əzbəri oldu: "Ona nail olmaq lazımdır ki, nöqtələrin, düz xətlərin və müstəvilərin yerinə stol, stul və pivə fincanlarından danışılsın".

Korrektlik haqqında teorem. Predikatların hesablanmasında çıxarılan bütün düsturlar mühümdür.

Tamlıq haqqında teorem. İxtiyari mühüm düstur predikatların hesablanmasında çıxarıla biləndir.

Tamlıq haqqında teoremi 1930-cu ildə birinci tərtib predikatların hesablanması üçün Kurt Gödel çıxarıb. Daha yüksək tərtibli hesablamalar üçün tamlıq haqqında oxşar teorem yoxdur.

SVİFTİN "MƏNTİQİ MAŞINI"

Professor mənə izah elədi ki, o, ayrı-ayrı həqiqətlərin kəşfi üçün nəzərdə tutulmuş xüsusi mexaniki cihazların hazırlanması üzərində işləyir... Onun ixtirası sayəsində ən nadan və istedadsız insan vəsaitinin və fiziki qüvvəsinin kiçik hissəsini sərf etməklə fəlsəfə, poeziya, siyasət, hüquq, riyaziyyat və ilahiyyat üzrə kitablar yaza bilər. Burada o məni yanlarında onun bütün tələbələri dayanmış çərçivəyə tərəf apardı. Bu çərçivə iyirmi kvadrat fut idi və otağın ortasında yerləşmişdi. Onun səthi hər biri böyüklü-kiçikli zər boyda olan çoxlu taxta lövhədən ibarət idi. Onlar hamısı bir-birləriylə nazik tellərlə birləşdirilmişdi. Lövhələr üzərinə kağız parçaları yapışdırılmış və bu kağızlarda Balnibarbi dilində müxtəlif şəkillərdə, zamanlarda və hallarda, lakin heç bir qaydaya uyğun olmayan, Balnibarbi dilinin bütün sözləri yazılmışdı.

Professor maşını işə salmağa hazırlaşdığı üçün diqqət xahiş elədi. Onun komandası ilə tələbələr çərçivənin kənarına taxılmış dəmir dəstəkdən yapışdılar və onu cəld döndərdilər. Bütün lövhələr döndülər və sözlərin yerləşməsi tamamilə dəyişdi. Professor onda otuz altı tələbəsinə yaranan sətirləri onlar çərçivədə yerləşdiyi qaydada oxumağı əmr etdi. Əgər üç ya dörd söz müəyyən mənalı ifadənin hissəsi kimi səslənirdisə, onu katib rolu oynayan qalan dörd tələbəyə diqtə edirdilər. Bu məşğələ üç-dörd dəfə təkrar edildi. Maşın elə qurulmuşdu ki, hər dövrdən sonra lövhələr dönür və hərəkət edir, sözlər yeni qaydada yerləşirdi.

Conatan Svift.
"Qulliverin səyahəti"

RİYAZİ MƏNTİQİN UĞURLARI

Əgər hər hansı qapalı düstur mühümdürsə, buna predikatların hesablanmasının köməyi ilə sonlu sayda addımla əmin olmaq olar. Bəs düstur mühüm deyilsə, nə etməli? Burada propozisional düsturlarla oxşarlıq qurtarır ki, onların da tavtalogiyasızlığı, ən azı prinsipcə, dəyişənlərin sonlu sayda mümkün qiymətlərini seçməklə müəyyən olunur. Riyazi məntiqin mühüm uğurlarından biri ondadır ki, belə bir hökm sübut olunmuşdur:

✓ **Elə bir universal metod mövcud deyil ki, predikatların hesablanmasının ixtiyari qapalı düsturu ilə bu düsturun mühüm olmasını bilməyə imkan versin.**

Bu faktı isbat etmək üçün riyazi məntiqin yeni bölməsini – alqoritmlər nəzəriyyəsini yaratmaq tələb olundu. O nəyi isbat etmək olar, nəyi olmaz yox, nəyi hesablamaq olar, nəyi olmazın öyrənilməsi ilə məşğul olur. Riyaziyyatın hər hansı bölməsinin aksiomatik qurulması zamanı $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aksiomlarının seçiminə, mahiyyətcə, yalnız bir tələb – ziddiyyətsizlik tələbi irəli sürülür, yəni bütün aksiomların doğru olduğu heç olmazsa bir model mövcud olmalıdır. Əks halda ixtiyari düstur aksiomların məntiqi nəticəsi olacaq. Xüsusi halda, qapalı T düsturu necə olursa-olsun, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ predikatlarının hesablanmasında həm T, həm də onun inkarı ⌉T-ni çıxartmaq olar. Aydındır ki, hər şeyin doğru və hər şeyin yalan olduğu belə nəzəriyyə heç bir qiymətə layiq deyil.

Aksiomatikanın digər arzu olunan, lakin mütləq olmayan xassəsi – onun tamlığıdır. Bu, aşağıdakını bildirir: əgər biz elə bir qapalı T düsturunu götürsək ki, predikatların ona daxil olan simvollarına aksiomlarda rast gəlinir, onda ya T düsturu, ya da onun ⌉T inkarı aksiomdan məntiqi çıxır. Məlum oldu ki, o qədər də sadə olmayan aksiomatik nəzəriyyə üçün, məsələn, artıq natural ədədlər hesabı üçün aksiomatikanın ziddiyyətsizliyi və tamlığı uyuşmayan xassələrdir ki, bunu da Gödelin məşhur natamamlıq haqqında birinci teoremi iddia edir. Onu gücləndirilmiş formada belə ifadə etmək olar:

✓ **İxtiyari ziddiyyətsiz $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aksiomlar sistemləri üçün elə çoxdəyişənli tam əmsallı M çoxhədlisi göstərmək olar ki,**

$$M(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0$$

tənliyi tam ədədlərdə həllə malik deyil, lakin bunu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – dən çıxarmaq olmaz.

Beləliklə, riyaziyyatçıların fəaliyyət növlərindən biri – aksiomlar sistemlərinin işlənməsi – heç vaxt tükənməyəcək. Adama elə gəlir ki, bu, (teoremlərin isbatından fərqli olaraq) sadə işdir, lakin əslində aksiomatikanın ziddiyyətsizlik tələbinə əməl etmək asan deyil. Doğrudan da, aksiomların

DUZ GÖR NƏDƏDİR

İnsanın yox, maşının yoxladığı formal isbat çox qeyri-standart formaya malik ola bilər ki, bununla da son illərin heyrətamiz nəticələri bağlıdır.

Ənənəvi riyazi isbat, predikatların hesablanmasındakı və ya mülahizələrin hesablanmasındakı nəticə kimi, zəncirdən asılan yükə bənzəyir. Hər bir halqa möhkəm olmalıdır: bir halqa qırılsa, yük düşəcək. Riyaziyyatçı və kompyuter ənənəvi isbatı yoxlayarkən hər bir addımın düzgünlüyünə əmin olmağa borcludur. Bəs isbatı tam oxumadan "yoxlamaq" olarmı? İlk baxışdan ideya cəfəng görünür. Lakin belə bir oxşarlığa baxaq.

Bir banka şəkər tozumuz var (isbat) və şübhələnirik ki, bankaya duz dənəsi düşüb (isbatda səhv vəsilə). Əlbəttə, hər bir dənənin dadına baxmaqla bankadakını sərf-nəzər etmək olar (ənənəvi yoxlama üsulu). Lakin başqa cür də hərəkət etmək olar. Bankadakını suda həll edək və bir damlanın kimyəvi analizini keçirək. Duz aşkarlanarsa, "isbat səhv olub". Əgər yoxlama üçün götürülmüş damlada duz molekulu aşkarlanmasa, duz dənəsinin ümumiyyətlə olmamasına zəmanət yoxdur – birdən damla götürülən anda bütün duz molekulları bankanın o biri hissəsinə keçib. Lakin bankadakı dənələrin miqdarının dənədəki molekulların miqdarı ilə müqayisəsi göstərir ki, bunun ehtimalı xeyli kiçikdir.

Formallaşdırılmış riyazi isbatlar üçün oxşar "əridici" fikirləşib-tapmaq mümkün olub. Budur o: ixtiyari ənənəvi l isbatını qeyri-ənənəvi Q isbatına ("su ilə", buna görə daha uzun) çevirmək olar. Bütün Q isbatının yoxlanması teoremin doğruluğuna zəmanət verir.Eyni zamanda əgər teorem doğru deyilsə, onda Q isbatının sanki ixtiyari hissəsi səhv ("az duzlu") olacaq. Belə ki, gözəyarı l uzunluğuna malik Q fraqmenti götürsək, Q-nin səhv olması verilmiş fraqment üzrə l-dən asılı olan müəyyən p ehtimalı ilə müşahidə olunacaq. Fərz edək ki, hətta p böyük deyil, deyək ki, $p = 1/2$. Hər dəfə yeni fraqment seçməklə yoxlamanı n dəfə davam etdirsək, onda səhvi aşkar etməmək ehtimalı (əslində o varsa) 2^n-dən çox olmayacaq. Artıq n =100 olanda bu ehtimal, 2^{100}, kompyuterin aparat nasazlığı ehtimalından xeyli azdır, deməli, adamın buraxdığı səhvdən də çox-çox azdır.

Müəyyən ehtimalla yoxlanılan oxşar isbatlar üçün bir neçə ad təklif olunub ki, onlardan biri də holoqrafik isbatdır. Holoqramın kiçik fraqmenti bütün "şəkil" haqqında informasiya daşıyan kimi, səhv holoqrafik isbatın kiçik "parçası" da özü çox ehtimalla səhvə malikdir.

verilmiş dəstinin ziddiyyətsiz olduğunu necə isbat etməli? Hər hansı $A_1, A_2, \ldots, A_n$ aksiomlar çoxluğunun ziddiyyətsizliyinin isbatını digər $A'_1, A'_2, \ldots, A'_m$ aksiomlar çoxluğu əsasında aparmağa cəhd etmək olardı. Təəssüf ki, yeni aksiomatika ziddiyyətsizliyini isbat etmək istədiyimiz o biri aksiomatikadan zəif olmamalıdır. Bu, Gödelin natamamlıq haqqında ikinci teoremindən çıxır.

✓ **Heç bir trivial olmayan sistemin ziddiyyətsizliyi bu sistemin öz vasitələri ilə isbat edilə bilməz.**

Bizim günlərdə riyaziyyata yeni aksiomlar çox az gəlir, lakin əslində bu onun sonrakı inkişafı üçün mühüm deyil. Çoxdan məlumdur ki, müasir riyaziyyatın böyük hissəsinin əsasında çoxluqlar nəzəriyyəsi durur ki, onun üçün də sonlu aksiomatika, özü də birinci tərtib predikatların hesablanması dilində, qurmaq mümkün olub. Bu aksiomatikanın müxtəlif variantları mövcuddur, ən məşhurları Sermelo – Frenkel aksiomlarıdır. Demək olar ki, bütün riyazi teoremlər predikatların hesablanması qaydası ilə onlardan çıxarılır və əksər riyaziyyatçılar bu çərçivədən kənara çıxmırlar.

NƏSİRƏDDİN TUSİNİN ƏSƏRLƏRİNDƏ MƏNTİQ

İslam xilafətinin ilk dövrlərində əksər xalqların – yunan, fars, hind və s. kimi - elmi, ədəbi irsi ərəb dilinə tərcümə edilmiş, onlara çoxlu şərhlər verilmiş və bu bilgilər daha da inkişaf etdirilmişlər. Bunların arasında klassik Yunan elmi irsinin yerini xüsusilə qeyd etmək lazımdır. Mübaliğiyə yol vermədən söyləmək olar ki, klassik Yunan elmi irsinin əksər əsərləri məhz bu tərcümələr və şərhlər əsasında günümüzə kimi saxlanmışlar. Orta əsrlər yaxın şərqində elmin bütün sahələrində yunan elmi irsinin təsiri danılmazdır. Təsadüfi deyil ki, Aristotel həmişə bizim klassiklərimiz tərəfindən "Birinci Müəllim" sayılmış və ona "Sahib əl-məntiq" ləqəbi verilmişdir. Qeyd edək ki, əl-Farabi yalnız "İkinci müəllim" sayılmışdır. Şərq məntiqçiləri Aristotel irsinin tam daşıyıcısı olmaqla yanaşı, onun davamçıları olmuşlar.

Hazırkı məqalədə əksərən əl-Fərabi, İbn Sina və N.Tusinin əsərlərində faydalanmışıq. Tərcümələr bizim tərəfdən aparılmışdır.

N.Tusinin klassik məntiqə həsr edilmiı üç əsəri dövrümüzə kimi gəlib çatmış-



dır. Bunların arasında böyük həcmli "Əsas əl-iqtibas" ("Bilgilərin əldə edilməsinin əsasları". Fars dilində) traktı ən funtamental olanıdır.

İkinci əsər İbn Sinanın "Əl-işarat vət-tənbihat" kitabına Tusinin şərhlərindən ibarət olan "Əş-şərh əl-işarat vət-tənbihat" əsəridir. Əsər ərəb dilindədir. Bu əsərin Ibn Sinanın vəfatından sonra onun irsinin yenidən canlanmasında böyük rolu olmuşdur. "Əş-şərh əl-işarat vət-tənbihat" əsərinin bir hissəsi 2004-cü ildə S.Bayramov tərəfindən azərbaycan dilinə tərcümə edilərək, ayrıca kitab şəklində nəşr edilmişdir. Görülən bu nəcib işin dəyərini şübhə altına almadan, qeyd etmək lazımdır ki, müasir oxucu üçün kitabın bəzi məqamalarını anlamaqda müəyyən çətinliklər də mövcuddur. Bu səbəbdən orta əsr müəlliflərinin, o cümlədən N.Tusinin fikirlərinin müasir formal məntiq dilində ifadə edilməsini aktual məsələlərdən hesab etmək olar.

"Təcrid əl-məntiq" Tusininin digər iki böyük həcmli əsərləri kimi klassik məntiqə həsr edilmişdir. Adı çəkilən əsər digərlərindən özünün yığcam olması və lakonik fikirləri ilə seçilsə də, onlarda baxılan bütün məsələləri əhatə edir. Bu barədə N.Tusi kitabın əvvəlində yazır:

"Bismillahir-rəhmanir-rəhim

Allahı şükr edənlərin həmdilə həmd edirəm. Və Mühəmməd və onun pak ailəsinə səlavət göndərirəm.

Amma bundan sonra – məntiqin əsaslarının və onun məsələlərini sistematik şəkildə təcrid edib (ayıraraq), lakonikliyin və izahların inciləri ilə örtməklə, elə bir təcridlə ki, hafiz (bu elmlə tanış olanlar) üçün onun təkrarı, öyrənmək istəyənlər üçün isə onun zikr edilməsi (öyrənilməsi) yüngül olsun. Və onu doqquz fəsildə tərtib etdik".

Tusinin əksər əsərləri kimi "Təcrid əlməntiq" əsərini də bir sıra alimlər dəfələrlə şərh etmişlər. Bunların arasında N.Tusinin tələbəsi olmuş Əllamə Hillinin şərhlərindən ibarət olan "Cövhər ən-nəzid fi şərh təcrid əl-məntiq" ("Mücərrəd məntiqin nizamlanmış cövhəri") əsəri xüsusilə məşhurdur. Materialın təhlilindən aydın olur ki, cox vaxt Hillinin şərhləri N.Tusinin İbn Sinanın "Əl-işarat vət-tənbihat" əsərinə verdiyi şərhlərlə üst-üstə düşürlər.

KLASSİK MƏNTİQ ELMİ VƏ ONUN MƏSƏLƏLƏRİ

Məntiq sözü ərəb dilində "nətəqə" danışmaq sözündən götürülmüşdür. Hərfən dil, nitq deməkdir. Məntiq elminə iki yanaşma olmuşdur. Bir qism orta əsrlər alimləri onu elm deyil, incəsənət saymışlar. Digərləri isə – əl- Farabi, İbn Sina, N.Tusi və s. – məntiqi elm saymışlar. Necə ki, Tusuinin İbn Sinaya etdiyi şərhlər arasında aşağıdakını tapırıq: "Beləliklə, məntiq özlüyündə bir elmdir və başqa elmlər üçün də bir alətdir"

Məntiqin məqsədinə gəldikdə isə xülasə şəkildə aşağıdakını söyləmək olar: məntiq elə qanunlar və qaydlar sistemidir ki, onları rəhbər tutmaqla, insan düşüncə çaşqınlığından qorunmuş olur, məlum olan sağlam əsaslardan əldə edilməsi mümkün olan hər bir anlayışın əldə edilməsi üçün düzgün keçidlər (yollar) müəyyən edilir, bu analyışların durumları əldə edilir və düzgün olmayan keçidlər (yollar), bu keçidlər və onların növləri, sayları, səbəbləri müəyyən edilirlər.

Elmi üsullar üç sayılmışlar:

1. Silloqizmlər (qiyas). Qiyas hərfən tutuşdurulma, müqayisə edilmə, ölçülmə, qəlibə tutulma kimi tərcümə edilə bilər. Metodun mahiyyəti isə ən ümumi olanın xüsusiliyə tətbiqindən ibarətdir. Məsələn "A B-dir, B C-dirsə, onda A C-dir" ümumi qanunauyğunlunun "Hər bir kvadrat paraleloqramdır, istənilən paraleleoqramın diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünürlər" təklifindən "onda istənilən kvadratın diaqonalları kəsişmə nöqtəsində yarıya bölünürlər" təklifinin əldə edilə bilməsi kimi. Silloqistik tərkibdə hədlər arasında ortaq olanlar var ki, əsas məqsəd onların aradan götürülərək, ortaq olmayanlar arasında düzgün əlaqənin əldə edilməsindən ibarətdir.

2. İnduksiya (istiqra). Silloqizlmlərdən fərqli olaraq burada xüsusi halların araşdırılması ilə ümumi nəticə əldə edilir. "İstiqra" sözünün hərfən mənası kənd və kəndi gəzməkdir.

3. Analogiyalar (təşbeh). Bir şeyin özünün deyil ona bənzər olanların araşdırılması ilə həmin şey haqqında düşüncənin, hökmün əldə eidlməsindən ibarətdir. Məsələn, düzgün çoxbucaqlının sahəsinin onun yarımperimetri ilə mərkəzdən tərəfə endirilmiş hündürlük hasilinə bərabər olduğunu müəyyən edib, buradan dairənin sahəsinin onun radiusu ilə çevrəsinin uzunluğunun yarısına hasilinə bərabər olduğu qənaətinə gəlmək kimi.

Beləliklə, klassik məntiqin əsas məsələsi silloqistik mülahizələr və onlardan düzgün nəticələrin alınması və onların çeşidli tətbiqlərindən ibarətdir. Burada iki məsələni qeyd etmək lazımdır: birincisi silloqizmlərin əldə edilməsi və onların düzümlənməsi üçün zəruri olan ilkin əsasların bəyan edilməsi; ikincisi isə silloqizmlərin düşüncənin müxtəlif sahələrinə tətbiqi ilə bağlı olan məsələlər.

Bu iki məsələ ilə klassik məntiqin məsələlərinin təsnifatı əldə edilərək səkkiz qismdə tərtib edilirlər. Bunu əl-Fərabinin "Elmlərin təsnifatı" kitabında da görmək olar. Adı çəkilən əsər mərhum ərəbşünas, aramızdan vaxtsız köçmüş Əmirşah Əmirəhmədov tərəfindən 2006-cı ildə dilimizə tərcümə edilərək, nəşr edilmişdir. Kitabın 50-52-ci səhifələrində aşağdakalarla rastlaşırıq: "Beləliklə, məntiqin hissələri zərurətlə səkkizdir. Onlardan hər biri ayrıca bir kitabda əhatə edilmişdir".

Bu kitablardan ikisi silloqizmlərə kimi zəruri bazanın əldə edilməsinə həsr edilib. Üçüncü kitab silloqizmlər, son beş məsələ isə silloqizmlərin tətbiqi ilə bağlı məsələləri əhatə edir.

Birinci kitab tək-tək sözlər və onların haqqında qanunları ehtiva edir. Bunlara ərəb dilində "Əl-Məqulat", yunan dilində isə "kateqoriyalar" adlanırlar. Burada təktək varlıqlar və onlara dəlalət edən sözlər haqqında qanunauyğunluqlar tədqiq edilirlər. İlk olaraq simvolun – sözün mənayla qarşılıqlı əlaqəsi, mahiyyət etibarı ilə onunla bağlılığı – onun zatının, əslinin, ya ondan zahir olan arizliyin işarəsi olması və s. kimi məsələlərə baxılır. Kateqoriyalar və onların geniş izahı ilə N.Tusinin fəlsəfi "Təcrid əl-etiqad" əsərində tanış olmaq mümkündür. Adı çəkilən məntiqi əsərdə isə bu məsələlər zəruri şəkildə öz əksini tapmışlar. "Zatı olan odur ki, onun zatı (əsli, özlüyü) ondan kənar olaraq biçimlənmir "canlı olmaq" və "natiqliyin" insan üçün və "insan"ın Zeyd üçün misalında olduğu kimi. Ərəzi olanlar isə onun zatı (özlüyü) biçim tapandan sonra ona aşkar ayrılmaz olaraq – bucağın üçbucağa münasibətində olduğu kimi, – ya aşkar olmayaraq, müəyyn bir vasitə ilə – "onun üçün (üçbucaq üçün) onun bucaqlarının cəmi iki düz bucağa bərabər olması kimi – qoşulanlardandırlar. Ya da "gəncliyin" Zeyd üçün misalında olduğu kimi ondan lənglıklə ayrılmaqla, ya da sürətli olaraq – "ayaq üstə olmağın" onun üçün olduğu kimi".

Kateqoriyaların sayı ondur:

1. Cövhər. Onun beş növü var: surət, maddə, onlardan təşkil edilmiş mürəkkəb cism, əql və nəfs. Yerdə qalan doqquzu isə ərəzlərdirlər (aksidensiyalardırlar): 2. Kəmiyyət, 3. Keyfiyyət, 4. İzafəlik (mənsub olma), 5. Harada, 6. Nə vaxt, 7. Xislət, 8. Təsir edici olma və 9. Təsirə məruz qalma.

Bundan əlavə bu kitabda şeyin mahiyyəti, cins, növ, fəsl kimi məsələlərə baxılır. Bütün bunlar anlayışın tərif edilməsində zəruri bilgilərdəndirlər.

İkinci kitab istənilən təklif, hökm müəyyən simvollar, sözlər və onların birləşməsindən təşəkkül tapmalıdır. Buna görə də ayrıca sözlər və onlardan təşkil edilmiş birləşmələrin halları, çeşidliyi ayrıca öyrənilməlidir ki, bu da klassik məntiqin ikinci kitabını təşkil edir. Bunlar ibarələr deyil. Biz bunları ifadələr və ya deyimlər adlandıracağıq. Bu, ərəb dilində "əl-İbarat" kitabı, yunan dilində isə "Barirnimas" adlanır.

Üçüncü kitab silloqizmlər (qiyas) və onların halları, formaları, çeşidlərinə həsr edilmişdir. Aristoteldə "Birinci analitika" adlanır. İrəlidə bu məsələlər daha geniş şə-

kildə işıqlandırılıcaqlar.

Sonra gələn beş kitab silloqistik mühakimələrin düşüncənin hansı sahəsinə tətbiqi və nəyin ilkin əsas götürülməsi ilə bağlıdır.

Dördüncü kitab sübuti (apodiktik) hökmlərlə bağlıdır. Buna "Əl-Bürhan", yunan dilində isə "İkinci analitika" deyilir. Bu kitabda elmi bilgilərin növləri, elmlərin əsaslanması, aksiom, postulat, əsas anlayışlar, tərifin verilməsi qaydaları və s. kimi məsələlərə baxılır. Bu hökmlər yalnız birqiymətli olaraq doğru elmi bilgilərin əldə eidlməsini təmin edir. Tusi deyir: "*Bürhan yəqinliklərdən təşkil edilmiş və özlüyündə yəqini nəticəni məcburi olaraq doğuran silloqizmdir. Silloqizm onun surəti (forması), yəqinliklər onun maddələri, əldə edilən (edilmək istənilən) yəqinlik isə onun qayesidir*". Bu mənada bu kitab məntiqin ən şərəfli hissəsi hesab edilir. Necə ki, əl-Fərabi qeyd edir: "*Bunlardan dördüncü hissə öz şərəfinə və üstünlüyünə görə daha irəlidədir (ilkindir)*".

Beşinci kitab "Kitab əl-məvadi əl cədəliyyə" (dialektika, topika, cədəl) adlanan hökmləri əhatə edir. Ərəb dilində "cədəl" sözü mübahisə, dartışma, dialektika kimi tərcümə edilə bilər. Yunan dilində isə "topika" adlanır. Tusi söyləyir: "*Cədəl istənilən (arzu edilən) mətləbin əldə eidlməsi üçün ilkin (müsəlləm) müqəddimələrdən istifadə edərək, hansısa bir razılaşmaya əsaslanmaqla, imkan daxilində ona ziddiyyətə yol vermədən höccətin ortaya gətirilməsi üçün bir elmi sənətdir*".

Altıncı kitab "əl-Müğalat", yunanca "Sofistika" adlanır. Bu hökmlər doğru yoldan sapdırmaqla, səhv yola yönəldir. Əl-Fərabidə qeyd edilidyi kimi "sofiya" hikmət, "istas" isə aldanma kimi tərcümə edilə bilərlər. Bu mənada "Sofistika" yalançı hikmət mənası kəsb edir.

Yeddinci kitab ərəb dilində "əl-Xitabə", yunan dilində isə "Ritorika" elmi adlanır. Tusi bu elmə aşağıdakı kimi tərif verir: "*Xitabə kütləni imkan daxilində arzu edilən şeyə inandırmaq üçün elmi sənətdir*".

Səkkizinci kitab şeiriyyatla bağlı hökmlərdən bəhs edir. Yunan dilində bunlar "Poetika" adlanırlar. Bu hökmlərlə təxəyyüldə olan şeylər haqqında təsəvvürlər yaranır. Bunlar, biz hətta onların tam doğru olmadığını da bilsək də, daha çox emosional təsir qüvvəsinə malik olan hökmlərdirlər.

Materialın təhlilindən klassik məntiqin əsasında üç mühüm prinsipin durduğu aydın olur. Bunlar aşağıdakılardırlar:

1. Kontrapozisiya qaydası. Qarşılıqlı inkarlar (kontradiktor olanlar) – hər ikisi eyni zamanda doğru və eyni zamanda onların hər ikisi yalan ola bilməzlər.

2. Təzadlar (kontrarlıq) – hər ikisi eyni zamanda doğru ola bilməzlər. Ancaq onlar hər ikisi eyni zamanda yalan ola bilərlər. Başqa sözlə, hər iki tərəfin eyni zamanda ödənilməsi qeyri-mümkündür. Bu prinsipi "cəm edilmənin maneəli olması" adlandırırlar.

3. Mütədaxil (qarşılıqlı daxil) olanlar - hər iki tərəfin eyni zamanda ödənilməməsi qeyri mümkündür. Bu prinsipi "olmamağın maneəli olması" adlandirirlar. Bu halda nəticənin iki tərəfindən heç olmasa biri ödənilir.

Bunlar öz növbəsində verilən təklif ilə ondan bilavasitə əldə edilə bilən təkliflərin qarşılıqlı vəziyyətinin ən ümumi şəkildə öyrənilməsini tələb edir. Verilən təklifdəki, kəmiyyətin və ya keyfiyyətin dəyişməsi, predikatla mövzunun (təklifin tərkib hissələrinin) yerinin dəyişdirilməsi və həmçinin onların keyfiyyət və kəmiyyətinin dəyişməsi ilə əldə edilirlər. Məsələn, "İstənilən *A B*-dir" təklifindən aşağıdakı kimi təkliflər əldə edilə bilərlər: "Bəzi *A B*-dir", "İstənilən *A B* deyil", "Bəzi *A B* deyil", "İstənilən *B A*-dır", "Bəzi *B A* deyil", "İstənilən *A* olmayan B-dir", "Bəzi *A* olmayan *B*-dir", "İstənilən *B* olmayan *A*-dır" və s. Verilən təkliflə yeni alınmış təkliflər arasında qarşılıqlı vəziyyətin ən ümumi şəkildə öyrənilməsi sözsüz ki, məntiqin ilkin məsələlərindən hesab edilməlidir.

Hazırkı vəsaitdə adı çəkilən əsərin təkliflər, onların növləri, qarşılqlı vəziyyətləri, inkar məsələləri, silloqizmlər, dörd məntiqi fiqurla bağlı olan müddəaları tərcümə edilərək onlara şərhlər verilmişdir.

Əvvəlcədən bəzi qeyd və razılaşmaları haqqında danışmaq istərdik:

"Qəziyyə" sözünü təklif kimi tərcümə etmişik. Bəzən mülahizə, teorem, tezis kimi də tərcümə edilə bilər.

"Hər bir", "istənilən" məhdudlaşdırıcı ədatları ilə xarakterizə edilən təkliflər "külli" təkliflər kimi tərcümə edilmişlər. Avropa dillərinin təsiri altında dilimizdə və rus dilində bu ümumilik kvantoru adlandırılmışdır. Klassik irsin araşdırılması bunun müəyyən çatışmazlıqları olduğunu göstərir. Belə ki, "ümumi" olmaq digər bir xüsusi ilə müqayisədə əldə edilir. Söylənilən kvantor isə hökmün baxılan obyektləri külliyyat şəklində əhatə etməsini göstərir.

"Var ki, müəyyən bir" kvantoru rus və azərbaycan dilli ədəbiyyatlarda "varlıq" kvantoru (ekzistensiya) adlandırılır. Biz isə bunu "bəzi" olaraq "cüziyyət" kvantoru adlandıracağıq. Belə ki, varlıqla inkar təşkil edən yoxluqdur. "Elə bir var ki," kvantoru heç də olmamağın inkarı deyil, hökmün baxılan obyektlərdə təşəkkül tapdığını əvvəlcədən təsdiq edərək, onun yalnız külli deyil, məhz onların bir hissəsi üçün doğru olduğunu göstərir.

$A \to B$ imlikasiyasının ilk həddi bəzən antesedent, ikinci həddi isə koseksvent adlandırılır. Biz isə dilimizdə anlaşılan müqəddimə və nəticə terminlərindən istifadə edəcəyik.

Uyğun terminlərin dilimizdə ərəb mənşəli olduğunu, rus dilində uyğun terminologiyaların isə tarixən daha gec və adətən digər dillərdən gəldiyini nəzərə almaqla, ərəb dilli terminologiyada yunan dilindəki terminologiyanın ruhunun və müxtəlifliyinin daha dolğun şəkildə saxlandığını nəzərə alaraq bunlara üstünlük verdik. Materialda ara-sıra ərəb mənşəli sözlərə rast olunur. Uyğun məqamlarda mötərizələrdə tərcümələr verilmişdir. Bəzən bir şeyin inkar edilməsi onun səlb edilməsi kimi işlədilmişdir. Qeyd edək ki, təklifin inkarı verilən təklifdən onun inkarının (səlbinin) əldə edilməsini, inkarı təklif isə həmin təklifin təsdiqi deyil inkari (səlbi) olmasını göstərir. Təsdiqi təklif isə ərəb dilində icabi (müsbət mənalı) təklif adlanır. Bu da tərcümə üçün müəyyən çətinliklər törədir. Belə ki, təsdiq sözü ərəb dilində doğru olmaq mənasında olan sidq sözündən yaranmışdır və ərəb dilində doğru təkliflər sidqi təkliflər adlanırlar.

Vəsaitdə Tusinin fikirləri kursivlə verilmişdir və ərəb dilindən tərcümələr bizim tərəfdən aparılmışdır. İstifadə edəcəyimiz bəzi işarələmələri qeyd etmək istərdik:

$\sim A$ ilə A təklifinin inkarı;

$A \wedge B$; $A \vee B$ ilə isə A və B təkliflərinin uyğun olaraq konyunksiya və dizyunksiyası nəzərdə tutulur. Xatırladaq ki, konyunksiya hər iki təklif doğru olduqda doğru olur. Dilimizdəki "və" bağlayıcısına uyğun gəlir. Dizyunksiyada isə təkliflərdən birinin doğru olması kifayət edir. Dilimizdəki "və ya" bağlayıcısına uyğun gəlir.

$A \to B$ implikasiyasında, ilk təklifin doğru olmasından ikinci təklifin də doğru olduğu alınır.

$\frac{A \to B}{C \to D}$ sxemi isə yuxarı sətirdəki təklifin (təkliflərin) fərzində aşağı sətirdəki təklifin alınmasını göstərir.

"İstənilən *A B*-dir" təklifi kvantorlar vasitəsilə aşağıdakı kimi yazacağıq: $\forall(x)[A(x) \to B(x)]$.

"Bəzi *A B*-dir" təklifi kvantorlar vasitəsilə aşağıdakı kimi yazacağıq: $\exists(x)[A(x) \to B(x)]$.

"İstənilən *A B* deyil" təklifi kvantorlar vasitəsilə aşağıdakı kimi yazacağıq: $\forall(x)[A(x) \to \sim B(x)]$.

"Bəzi *A B*-dir" təklifi kvantorlar vasitəsilə aşağıdakı kimi yazacağıq: $\exists(x)[A(x) \to \sim B(x)]$.

"TƏCRİD ƏL-MƏNTİQ" ƏSƏRİNDƏN FRAQMENTAL TƏRCÜMƏLƏR VƏ TƏHLİLLƏR.

TƏKLİFLƏR VƏ ONLARIN NÖVLƏRİ

Traktatın 3-cü fəsli təkliflər, onların növləri, modallığı, qarşılıqlı inkarı, əksilikləri və s. kimi ümumi məsələlərə həsr edilmişdir. "Təklif" dilimizdə işlənən "qazi" sözü ilə eyni kökdən olan "qəziyyə" məfhumu ilə ifadə edilir. Sual, məsələ, təklif, problem, teorem, tezis, hökm və s. Kimi mənalarda da işlədilə bilər.

Dəlalət. "*Yazıda bir şeyin olması, əksərən, onun ibarədə olmasına dəlalət edir. O da öz növbəsində onun zehndə olmasına dəlalət edir – bunların hər ikisi vəzi olaraq*

(şərtləşilmiş əsasda) baş verir – o isə öz növbəsində əyani olana (dəlalət edir ki) – o təbii olur – ətraflar (uzaqlar) isə vasitələrin vasitəçiliyi ilə (anlaşılır)".

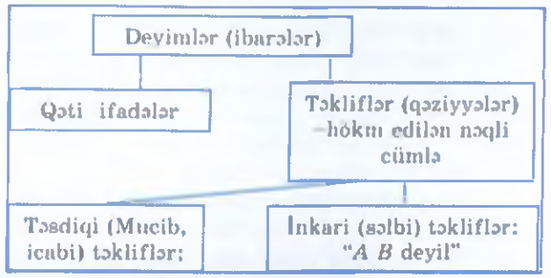
İfadələr (ibarələr). *"İfadələr (ibarələr, deyimlər qövllər) bir neçə növ olurlar: təqyidi (müqəyyəd olanlar, məhdudlaşmış, şərtlərlə məhdudlaşdırılmışlar) – onlar sadə olanlar kimidirlər (qüvvəsindədirlər). "Danışan canlı" misalında olduğu kimi. O "insan" mənzilindədir (bərabərindədir)".*

Dəlalət müəyyən bir şeyin digər bir şeyi göstərməsidir: tüstünün varlığının odun yanmasını, divarın arxasındakı danışığın orada danışanın olmasını, svetaforun yaşıl işığının hərəkətə icazənin olmasını, "ah" iniltisinin ağrını, sözün onun mənadaşıyıcısını və s. kimi göstərməsi kimi. Məntiq elmində ilk olaraq dəlalətlər və onların növləri geniş şəkildə araşdırılır. Bunların arasında xüsusən "vəzi" adlanan, "şərtləşilmiş", "qəbul edilmiş" kimi mənalandırıla bilən dəlalətlər əsas diqqət mərkəzində olurlar. Sözlər, onların birləşmələri, simvollar və s. kimi əldə edilən dəlalətlər bu biçimdəndirlər. O cümlədən yazı da bu sıraya aiddir. Yazıdakı ibarə zehndə uyğun assosiasya ilə müşayiət olunur. Bu assosiasiya da xarici aləmdəkilər ilə uyğunluqda olur. "Ətraflar" dedikdə daha uzaqdakılar, ilkin olmayanlar nəzərdə tutulur. İlkin olmayan şeylərin öyrənilməsi müəyyən bir vasitələrlə ilkin bilgilərdən əldə edilirlər.

İfadə sözlərdən təşkil edilmiş tərkibdir. Onlar bitkin və qeyri-bitkin mənalı ola bilərlər. Bitkin mənalı olmayanlardan təqyidi olanlarda bir hissə digər hissə ilə şərtləşilib, məhdudlaşaraq, qaydalanmış biçim əldə edirlər. Qrammatik mürəkkəb tərkibli olmasına baxmayaraq, onlar sadə olana dəlalət edirlər. Buna görə də onlar sadə olanlar misalındadırlar. Bunlar tərifdə, təsviri tərifdə istifadə edilirlər. Məsələn, "nitq qabiliyyəti olan canlı" söz birləşməsi "insan" məfhumuna dəlalət edir. Bunlar "qəti ifadə" adlanırlar. Müasir riyaziyyatda hansısa bir məfhumun və ya çoxluğun təyin edilməsində bu üsuldan çox istifadə edilir. Məsələn, "ikiyə bölünən ədədlər", "adi kəsr şəklində göstərilə bilən ədədlər" və s. kimi. Birinci misalda cüt ədədlər, ikinci misalda isə rasional ədədlər nəzərdə tutulur.

"Onlar arasında xəbəri (nəqli) olanlar doğru və ya yalan olmaqla səciyyələnirlər və "qəti ifadə" və "təklif" adlanırlar. Bu ikisi elmlərə xasdırlar. Digər növlər – sual, əmr, təəccüb və qeyriləri – danışığa xasdırlar. Hər bir təklif iki hissədən ibarət olur: haqqında hökm edilən (şey) və o şey ki, onunla hökm edilir. İlkin konstruksiya bitkin mənalı olub, sadə ünsürlərdən (fərdlərdən) təşkil edilir. Onun hissələrindən (birincisi) şərtsiz olaraq isim olur ki, mövzu, (ikincisi isə) predikat (atribut olan) müəyyən rabitə ilə onunla (mövzu ilə) əlaqəli olur. Bəzən bu rabitə söylənmir. Onda təklif ikitərkibli olur. "Zeyd katib(dir)" deyimində söylədiyimiz kimi. Bəzən də söylənir. Onda (təklif) üçtərkibli olur. "Zeyd o katibdir" misalında söylədiyimiz kimi. Fars dilində isə onun olması labüddür. Bu onların dilində "əst" ləfzidir. Bu konstruksiya predikativ (təklif) adlanır. Ya təsdiqi olur ki, onda predikatla mövzuya aid olmaqdan xəbər verilir. İstər onun (mövzunun) özü, istərsə onun əlaməti işlədilsin. "İnsan – və ya güləyən – yazardır" misalında söylədiyimiz kimi; ya da inkari olur – "insan –və ya güləyən – yazar deyil" deyimində söylədiyimiz kimi".

"Onlar" dedikdə qəti mənalı ifadə və özündə hökm daşıyan bitkin mənalı xəbər cümləsi nəzərdə tutulur. Müəyyən bir şey haqqında doğru ya da yalan olan istənilən hökm ikinciyə misaldır. Bunları "təkliflər" adlandıracağıq. Qeyd edildiyi kimi elmlərdə yalnız bu iki qismdən olan ibarələrdən istifadə edilirlər. Sual, arzu, istək, təmənna, rica kimi deyim və söyləmlər elmlərin tədqiq mövzusundan hesab edilmirlər.



Təkliflərdən ən sadə konstruksiyalı olanlar "kitab böyükdür", "iki cütdür" və

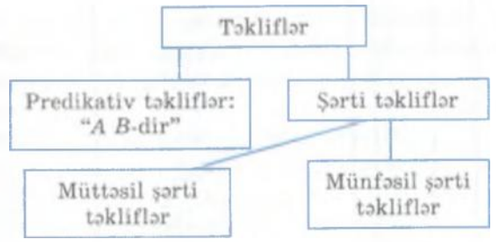
s. kimi şəklində sadə nəqli cümlələrlə ifadə edilirlər. Bu tip təkliflər ərəb dilində "həmliyyə" ("daşıyıcı", "yüklənmiş", "atributiv") təkliflər adlanırlar. Biz isə onları predikativ təkliflər adlandırırıq. Predikativ təklifin ilk hissəsi – yəni haqqında danışılan – onun mövzusu (subyekti) adlanır. İkinci hissədə isə mövzu haqqında xəbər verilir. Bu hissə predikat (ərəb dilində "məhmul" – hərfən daşınılan, yüklənmiş, aparılan) adlanır. Sxematik olaraq bunu aşağıdakı kimi yazacağıq: $A \to B$ (□). Burada A və B arasında müxtəlif münasibətlər ola bilər: aid olma, implikasiya, xarakteristik xüsusiyyət, əlamətlə təsvir edilmə və s. kimi.

Təklifin iki, üç tərkibli olaraq siniflərə bölünməsi ərəb dilinin xüsusiyyətlərindəndir. Ərəb dilində "Zeyd katib" ifadəsi "Zeyd katibdir" kimi anlaşılır. Şeyxin özünün də söylədiyi kimi fars dilində bu belə deyil. Belə ki, fars dilində də -dır, -dir, -dur, -dür xəbər şəkilçiləri "əst" (rus dilindəki, "est", ingilis dilindəki "ist" kimi) ləfzi ilə ifadə edilir. Buna görə də azərbaycan, fars, ingilis dillərində ikitərkibli konstruksiyalar mövcud deyildirlər. Rus dilində isə bu mümkündür.

Predikatla mövzuda müəyyən bir şeyin olması haqqında xəbər verilirsə, təklif təsdiqi, mövzuda mövcud olmaması haqqında xəbər verilirsə, təklif inkari təklif adlanır.

Şərti təkliflər və onların növləri. *"İkinci konstruksiya isə təkliflərdən tərtib edilir. Bunlardan biri şərti (olandır). Onun cüzləri (hissələri) müqəddimə və nəticə adlanırlar. O ya "günəş çıxmışsa, gündüzdür" təsdiqi, "günəş çıxmışsa, yarasa görən deyil" inkari misalında olduğu kimi həmahənglikla olur və müttəsil (bitişik) adlanır. Ya da qarşılıqlı ayırıcılıqla olur ki, ayırıcı (münfəsil) adlanır - "Ədəd ya cüt, ya da tək olur" təsdiqi, "ədəd ya cüt olur, ya da iki bərabər hissəyə bölünmür" inkari misallarında olduğu kimi. Onun bağlayıcıları şərt, ayırıcı, və qarşıqoyma ədatlarıdır. Şərtiyyətlər bir neçə şərti və predikativ olanlardan tərkib oluna bilərlər".*

Predikativ təklliflərdən fərqli olaraq, şərti təkliflərdə xəbər ilkin hissədə danışılan şərtlərlə bağlı olur: $A \Rightarrow B$. İlkin hissə (A)



müqəddimə (antesedent), ikinci hissə (B) isə nəticə (konsekvent) adlanır. Nəticə forma etibarı ilə iki təbiətdə ola bilər: 1) nəticə bir halla əhatə edilir. Yəni, nəticə dizyunktiv təklif deyil, sadə təklifdir $A \Rightarrow B$. Bunlar bitişik (müttəsil) şərti təkilflər adlanırlar. 2) nəticə qarşılıq təşkil edən bir neçə halla əhatə edilir. Yəni, nəticə mürəkkəb dizyunktiv tərkibli təklifdən ibarət olur: $A \Rightarrow (B_1 \vee B_2 \vee ... \vee B_n)$. Bunlar ayırıcı (münfəsil) şərti təkliflər adlanırlar.

Şərti təkliflərdə rabitə rolunda "əgər", "onda", "ya ...ya" bağlayıcıları iştirak edirlər. Şərti təkliflər hər ikisi predikativ, hər ikisi şərti, biri predikativ, digəri şərti olan hissələrdən təşkil edilə bilərlər.

"Bu konstruksiya özünün tərkib hissələrini müstəqil təklif olmaqdan xaric edir. Təsdiqi ya inkarilik və onların qarşılığı yalnız rabitə ilə bağlı olur. Onun hissələrinin halına diqqət yetirilmir".

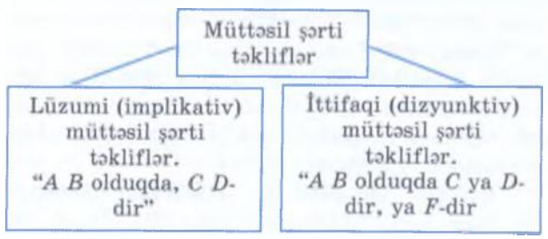
"Günəş çıxmışsa, gündüzdür" şərti təklifinin müqəddimələri olan - "günəş çıxmışdır" və "gündüz olmuşdur" - hissələri müstəqil təklif olmaqdan xaricdirlər. İki yalan təklifdən doğru təklif tərkib edilə bilər: "insan daşdırsa, o cansızdır" şərti təklifinin hər iki hissəsi yalan təkliflərdir. Ancaq baxılan təklif doğru təklifdir. Burada hissələrin halına deyil, nəticənin necə alınmasına diqqət yetirilir.

Bitişik təkliflərin (müttəsil olanların) qismləri. *"Müttəsil olanlar "Zeyd yazırsa, onun əli hərəkət edir" misalında olduğu kimi lüzumi, "insan danışırsa (natiq), uzunqulaq anqırır" misalında olduğu kimi ittifaqi (təsadüfi, razılaşma ilə) olurlar. (Lüzumi müttəsillərdə) yalan doğru və yalanı lazım edə bilər (vacib olaraq doğura bilər). Doğru isə yalanı lazım edə bilməz (doğrudan isə yalan alına bilməz). Onlar*

üçün mümkün və qeyri-mümkünlüyün qaydasına əsasən. (İttifaqi müttəsil isə) yalnız hər ikisinin doğru olması halında (məna kəsb edir)"

Bitişik şərti təkliflərdə müqəddimə və nəticə səbəb–nəticə ilə bağlıdırlarsa, lüzumi, onlar arasında səbəb-nəticə əlaqəsi olmadan, təsadüfi xarakterli süni tərtib yaradılmışsa, ittifaqi (təsadüfi) şərti təklif adlanırlar. Lüzumi təkliflər müasir dildə implikasiyaya uyğun gəlir. Dilimizdə qəbul edilmiş mənadan fərqli olaraq, ərəb dilində "lazım olmaq" əksərən "ayrılmazlıq" mənasında işlənir. Bu mənada lüzumi təkliflər riyaziyyatda tez-tez rastlaşdığımız və nəticəsi şərti üçün zəruri olan teoremlərə uyğun gəlirlər. İttifaqi təkliflərdə şərt ədatının işlədilməsinə baxmayaraq, onlar bir-birilə bağlı olmayan iki təklifdən təşkil edilmişlər ki, bu da onların konyunksiyasına uyğun gəlir.

Lüzumi təkliflərdə doğru müqəddimədən yalnız doğru nəticə, yalan müqəddimədən isə həm yalan, həm doğru nəticə alına bilər. "Zeyd yazırsa, onun əli hərəkət edir" təklifində hər ilk hissə doğrudursa nəticə doğrudur. İlk hissə doğrudursa nəticə yalan ola bilməz. Hətta ilk hissə yalan olsa belə nəticə doğru ola bilər: Zeyd yazmadıqda belə onun əli tərpənə bilər. İlk hissə yalan olduqda nəticə də yalan ola bilər: Zeyd yazmırsa, ola bilər onun əli hərəkət etmir. Həmçinin "İnsan daşdırsa, o cismdir" təklifində müqəddimənin yalan olmasına baxmayaraq, nəticə doğru təklifdir.



Bunlara səbəb odur ki, eyni zamanda mümkün olmamaqdan mümkün alına bilər, mümkün olmaqdan isə mümkün olmamaq alına bilməz. Yəni, ola bilər bütün hallar iki kəsişməyən hadisə ilə əhatə edilmirlər. Məsələn, $A \subset B, C \subset B, A \cap C = \varnothing$ halında $A \cap C = \varnothing$ şərti, A və C-nin eyni zamanda mümkün olmasını qeyri mümkün edir. Bununla belə "hər bir A C-dirsə, hər bir A B-dir" təklifi doğrudur. Baxmayaraq ki, baxılan təklifin müqəddiməsi yalandır, onun nəticəsi doğrudur. Doğru müqəddimədən isə yalan nəticə alına bilməz.

İttifaqi təkliflər isə, yuxarıda söylədiyimiz kimi, iki təklifin konyunksiyasına uyğun gəlir. Onun doğru olması yalnız hər iki təklifin doğru olması halında mümkün olur.

Ayırıcı təkliflərin (münfəsillərin) qismləri. *"Münfəsillərdən*

-həqiqi olanlarda – yuxarıda söylənmiş (misaldakı) kimi - cəm (eyni zamanda) olma və olmamaq maneəlidir. Onlar iki qarşılıqlı inkar qüvvəsində olanlardan təşkil edilirlər.

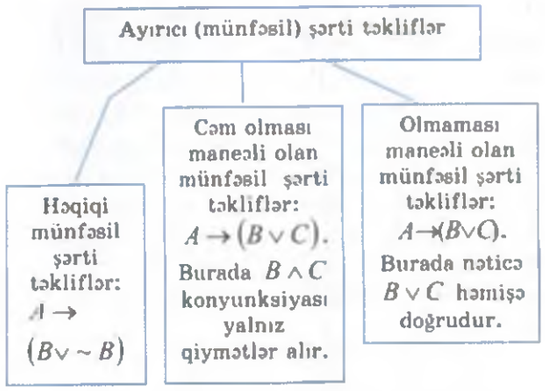
-yalnız cəm (eyni zamanda) olma qeyri mümkün olur. "Bu fərd ya daşdır, ya da ağacdır" deyimində söylədiyimiz kimi. Tərəflərdən birinin xüsusi olması səbəbindən baş verir.

- yalnız olmamaq qeyri-mümkün olur. "Zeyd ya sudadır, ya da boğulmur" deyimində söylədiyimiz kimi. Onun ümumi olmasından baş verir.

Son iki həqiqi olana şamil olduqda sadə, qeyri halda isə mürəkkəb adlanırlar".

Şərti təklifin nəticəsindəki ayırıcılıq üç formada təzahür edə bilər: 1. hər ikisinin eyni zamanda olması qeyri-mümkündür və həmçinin hər ikisinin olmaması qeyri-mümkündür; 2. hər ikisinin eyni zamanda olmaması qeyri-mümkündür; 3. hər ikisinin eyni zamanda mövcudluğu qeyri mümkündür. Bunlardan asılı olaraq münfəsil şərti təklifin nəticəsi üç halla xarakterizə edilə bilər. Bu da üç növ münfəsil təklif formalaşdırır.

1. Birinci halda nəticədə iştirak edən təkliflərin eyni zamanda doğru olması da mümkün deyil, həmçinin hər ikisinin eyni zamanda yalan olması da qeyri-mümkündür. "(İstənilən natural) ədəd ya cütdür, ya da təkdir" təklifində olduğu kimi. Başqa sözlə, bu halda nəticə $B \vee \sim B$ dizyunksiyasından ibarət olur. "İki qarşılıqlı inkar qüvvəsində olan" ifadəsi ilə təklif və onun inkarı olan təklifin ekvivalent formaları nəzərdə tutulur. "Ədəd ya cütdür, ya da



iki bərabər hissəyə bölünmür" təklifində olduğu kimi. Bu tip təkliflər həqiqi münfəsil təkliflər adlanırlar.

İkinci və üçüncü hallarda nəticənin tərəfləri qarşılıqlı inkar qüvvəsində olmurlar. Bu da öz növbəsində iki cür ola bilər:

2. İki tərəfin eyni zamanda ödənilməsi qeyri-mümkündür. Bunları "cəm edilmənin maneəli olması" adlandırırlar. Gətirilən misaldakı kimi. Burada ola bilər tərəflərdən heç biri olmasın. Ancaq onların birlikdə ödənilməsi qeyri-mümkündür. Yəni, $\frac{A}{B \vee C}$ təklifi doğru qiymətlər ala bilər, ancaq $\frac{A}{B \wedge C}$ təklifi yalnız yalan qiymətlər alır. Çoxluqlar dilində bu $B, C \subset X$, $B \cap C = \varnothing$ və $B \cup C \neq X$ kimi izah edilə bilər. Yəni, B və C kəsişməyən, biri digərinin tamamlayıcısı olmayan çoxluqlardır.

3. Hər iki tərəfin eyni zamanda ödənilməməsi qeyri-mümkündür. Bunlar "olmamağın maneəli olması" adlanırlar. Bu halda nəticənin iki tərəfindən heç olmasa biri ödənilir. Yəni, $\frac{A}{B \vee C}$ təklifi yalnız doğru qiymətlər alır. Bununla yanaşı $\frac{A}{B \wedge C}$ təklifi də doğru qiymətlər ala bilər. Çoxluqlar dilində bunu aşağıdakı kimi ifadə etmək olar:

$$A \subset X, B \subset X, A \cap B \neq \varnothing, A \cup B = X$$

Hökmlərin çeşidliyi. *"Cüzlərin çoxtərkibliliyində, hökmlərdə çoxluq (çeşidlilik) olarsa, onlar təklifi çeşidləndirirlər, olmazsa onu çeşidləndirmirlər".*

"İki tam rasional ədəddir" təklifinin nəticəsində olan çoxtərkibliliklən "iki tam ədəddir", "iki rasional ədəddir" kimi iki təklif alınır. Buna səbəb nəticədə iştirak edən tərkib hissələrinin çeşidliliyə imkan yaratmasıdır. Ancaq "beş iki və üçün cəmidir" təklifinin nəticəsində çoxtərkiblilik çeşidli hökmlərə imkan vermir.

"Predikativ təklifin mövzusu cüziyyət olduqda o individual təklif olur və individual (müşəxxəs) (təklif) adlanır. "Zeyd yazardır" və ya "yazar deyil" deyimində söylədiyimiz kimi.

Külli olmaqla bərabər hökmün ümumi ya xüsusunda baş verməsi ariz olmursa, konkretləşməmiş (mühməl (bəyənilməyən) təklif) adlanır. "İnsan yazıçıdır" və ya "insan yazıçı deyil" misalında söylədiyimiz kimi. Baş verərsə, konkretləşmiş ("məhsurah" və ya "musəvvər") adlanır.

Əgər hökm mövcud olanın, fərz edilənin, varlığı inkar edilməyənin fərdlərinin hər birini əhatə edirsə, külli (təklif) adlanır. "Hər bir insan" və ya "heç bir insan" misallarında söylədiyimiz kimi. Yalnız qeyri-müəyyən olan "bəzi" ilə xüsusiləşmişsə, cüziyyə adlanır. "Bəzi insanlar", "onların bəzisi deyil", "onların hamısı olmadan" misallarında söylədiyimiz kimi. Çünki, ümuminin inkarı, inkarın ümumiliyi ehtimal edilsə də, qəti olaraq onun xüsusiliyini lazım edir. Həmçinin xüsusilik ilgisi də belədir. Onunla ümuminin doğru və ya yalan olması ehtimal edilsə də, yalnız xüsusa dəlalət edir. Konkretləşməmişdə də bu belədir. Ümumun ehtimalı olsa da belə, o ancaq xüsusiliyi lazım edir. Konkretləşməmiş (təklif) cüziyyə qüvvəsindədir.

İndividual olanlar elmlərə xas deyildirlər. Beləliklə, (elmlərdə) hesablaşılası təkliflər dörddürlər".

İndividual və ya şəxsi təkliflərdə mövzu dəyişəndən asılı olmur. O yalnız konkret bir fərdi göstərir. "Zeyd yazıçıdır" misalında olduğu kimi.

"İnsan canlıdır", "insan canlı deyil" misallarında hökmün hər bir fərdi və ya müəyyən bir hissəni əhatə etməsi aşkar deyil. Bunlar konkretləşməmiş təkliflərdir. "Hər bir insan canlıdır", "bəzi insanlar ya-

zıçıdırlar" misallarında isə hökmün əhatə dairəsi aydındır. Birinci təklifdə bütün fərdlər haqqında, ikinci misalda isə yalnız qeyri-müəyyən bəzi fərdlər haqqında hökm edilir. İlk misal külli, ikinci misal isə cüzi olan təkliflərdəndirlər. Bunlar konkretləşmiş təkliflərdirlər.

Konkretləşməmişlərdə (ərəb dilində "mühməl" hərfən bəyənilməyən, diqqətəlayiq olmayan kimi tərcümə edilir) ümumun ehtimalı olsa belə onlar cüziyyə qüvvəsindədirlər. "İnsan canlıdır" misalında olduğu kimi. Təklifin hər bir insan üçün doğru olmasına baxmayaraq, o cüzilər hökmündədir.

İndividual təkliflər elmlərə xas deyildirlər. Belə ki, bürhanlardakı (isbatlardakı, ikinci analitikadakı) müqəddimələrdə fərdlərin davamlılığı deyil, doğruluğun daimi olması şərtdir.

Nəticədə dörd təklif alınır: **külli təsdiq, külli inkar, cüzi təsdiq, cüzi inkar**.

"Zeyd yazıçıdır" kimi individual təkliflərdən fərqli olaraq, predikativ təklifin hissələri "ixtiyari (bəzi) A (B)" kimi müəyyən kəmiyyətlə səciyyələnirlər.

""Ümumi" ("külli) və "bəzi"("cüzi") məhdudlaşdırıcı ədatları kvantorlar adlanırlar. Onun (təklifin) külli ya cüzi olması onun (təklifin) kəmiyyəti, təsdiqi yoxsa inkari olması isə onun (təklifin) keyfiyyəti hesab edilir".

Adı çəkilən iki kvantordan və təkliflərin təsdiqi ya inkarı olmasından asılı olaraq mövzu (A) və predikat (B) arasında dörd münasibət mümkündür:

Ümumi (külli) təsdiqi təklif: $\forall(x)[A(x)\to B(x)]$. Bunu "ixtiyari A B-dir" kimi oxuyacağıq.



Cüzi təsdiqi təklif: $\exists(x)[A(x)\to B(x)]$. Bunu "bəzi A B-dir" kimi oxuyacağıq. Külli inkari təklif: $\forall(x)\sim[A(x)\to B(x)]$. Bunu "ixtiyari A B deyil" kimi oxuyacağıq.

Cüzi inkari təklif: $\exists(x)\sim[A(x)\to B(x)]$. Bunu "bəzi A B deyil" kimi oxuyacağıq.

"O predikativ təklif ki, kvantor onun predikatına qoşulub, münhərif adlanır. Şərtilərdə onun qurulmasında (quruluşunda) kənara çıxma baş veribsə, – "belə olmur və ya belə olur" deyimində olduğu kimi–, münhərifdir".

Münhərif yəni, inhirafa yol verilmiş, kənara cıxmaya məruz qalmış mənasındadır. "İnsan bəzi canlıdır" misalında kvantor predikatla işlənmişdir. Bu tip təkliflər münhərif predikativ təkliflərdirlər. "Ədəd ya cüt deyil, ya da iki bərabər hissəyə bölünür" şərti ayırıcı təklifi də münhərif ayırıcı təklifdir.

TƏKLİFLƏRİN MADDƏLƏRİ VƏ CƏHƏTLƏRİ (MODALLIĞI)

"Hər bir məhmul (predikat) hər bir mövzu ilə müəyyən bir münasibətdədir: ya vacib olaraq, ya mümkün olaraq, ya da imtina ilə. "İnsan heyvandır" və ya "yazardır" və ya "daşdır" deyimlərimizdə söylədiyimiz kimi. Bu nisbət öz-özlüyündə maddədir. Tələffüz edilməklə, ya da tələffüz edilmədikdə belə təklifdən nisbətlə başa düşülən isə cəhətdir (modallıqdır)".



"İnsan canlıdır" misalında məhmulun mövzu ilə münasibəti vacib xarakterlidir. "İncan katibdir" misalında isə məhmulun mövzu ilə münasibəti imkan xarakterlidir. Yəni, bəzi fərdlər üçün bu doğru, digər fərdlər üçün doğru olmaya bilər. "İnsan daşdır" misalında isə məhmulun mövzu ilə münasibti imtinalıdır. Yəni, qeyri-mümkündür. Bu münasibət təkliflərin təsdiqilik və inkariliyinin keyfiyyət dərəcəsini səciyyələndirir.

Bu keyfiyyət yalnız öz-özlüyündə baxılırsa, maddə adlanır. Ancaq bu münasibət tələffüz edilirsə, və ya təsəvvür edilirsə cəhət (modallıq) adlanır. "İnsan canlıdır" misalına ayrılıqda baxıldıqda, bu münasibətin vacibliyi, mümkünlüyü, qeyri-mümkünlüyü söylənmədikdə və ya nəzərdə tutulmadıqda qeyri-modal təklifdir.

Modal və mütləq təkliflər. *"Modallar dördtərkiblidirlər. Onun zikr edilmədikləri isə mütləqdirlər".*

Modal təkliflərdə mövzu, predikat, onlar arasında bağlayıcı ədat, və modallıq iştirak etdiyi üçün dördtərkiblidirlər. Təklifdə cəhət (modallıq) qeyd edilmirsə, o mütləq təklif adlanır.



Modallığın əsasları. *"Vaciblik və imtinalı olmaq hökmün zəruriliyində ortaq (oxşar) olub, təsdiqilik və inkarilikdə isə birbirindən fərqlənirlər. Təklif ya zəruri, ya mümkün, ya da mütləq olur".*

Zəruri olmaq iki cür olur: ya təsdiqi, ya da inkari. Bu mənada vacibilik və imtinalı olmaq hökmün zəruriliyində ortaqdırlar. "İnsan canlıdır" misalında nisbət təsdiqi doğru olaraq zəruri, "İnsan daşdır" misalında isə nisbət yalan olaraq zəruridirlər. Vacib və imtinalılıqda zərurilik yalnız təsdiqilik və inkarilikdə fərqlənirlər.

Ümumi və xüsusi imkan. *"Hər iki zərurət üçün qarşılıq (müqabil) imkanı digərinə də şamildir (digərini əhatə edir). Buna görə də ümumi olmaqla qaydalanmışdır (müqəyyəd edilmişdir(lər)). O ki, onların hər ikisinin (zərurətin) birlikdə (eyni zamanda) olmasından xalidir xüsusidir. O iki imkandan tərkib tapmışdır".*

Təsdiqi və inkari zəruriliyinin qarşılığı imkandır. "Zəruri olaraq insan canlıdır" təsdiqi zərurətin qarşılığı "mümkündür insan canlı deyil" təklifi imkan xarakterli olub, hər iki hala – insanın canlı və canlı olmamasına – şamil edilə bilər.

Hər iki zərurət (təsdiqi və inkari) üçün qarşılıq olan imkan digərinə də (təsdiqi və inkari) imkan yaradır. "A zəruri olaraq B-dir" təklifinin qarşılığı "mümkündür A B deyil" təklifidir. Bu təkliflə "mümkündür A B-dir" təklifinin imkanı da ortadan götürülmür.

Təsdiqiliyin zərurəti inkar edildikdə "inkari ümumi mümkün", inkariliyin zəruriliyi inkar edildikdə isə "təsdiqi ümumi mümkün" adlanırlar.

"İnkari ümumi imkan" üç halı əhatə edə bilər: inkari zərurəti və hər iki tərəfin imkanını. Təsdiqi zəruri təklif: "zəruri olaraq A B-dir".

Onun qarşılığı olan inkari ümumi mümkün: "Mümkündür A B deyil". Bu təklif üç formada reallaşa bilər: 1. "Zəruri olaraq A B deyil"; 2. "mümkündür A B deyil" və "Mümkündür A B-dir".

"Təsdiqi ümumi imkan" isə təsdiqi zərurəti, və hər iki tərəfin imkanına şamil ola bilər. İnkari zəruri təklif: "Zəruri olaraq A B deyil". Onun qarşılığı olan təsdiqi ümumi inkari təklif: "Mümkündür A B-dir". Bu təklifin aşağıdakı formada reallaşmaları ola bilər: 1. "Zəruri olaraq hər bir A B-dir". 2. "A-nın B olması mümkündür";



3. "A-nın B olmaması mümkündür".

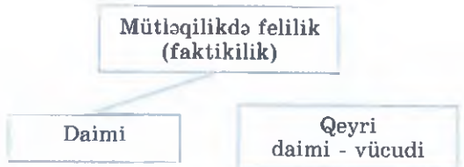
Buna görə də onların hər ikisi ümumi adlanırlar.

İmkan ilə hər iki zərurət ortadan götürüldükdə isə o xüsusi adlanır. "Mümkündür B C-dir" təklifini bu mənada işlətdikdə

anlaşılan "*B*-nin *C* olması vacib deyil və həmçinin bundan imtina da edilmir" təklifidir. Bu mənada anlaşılan təklifdə hər iki zərurət – "zəruri olaraq *A B*-dir" və "zəruri olaraq *A B* deyil" – ortadan götürülmüşdür. Deməli, təklifin reallaşmasında yalnız iki hal – imkanlarla əhatə edilən – ola bilər. Buna görə də o xüsusi adlanır.

İmkan imtinanın qarşılığıdır. İşlənməsində isə iki zərurətdən birinin inkarının qarşılığı kimi işlənir. "Mümkündür *C B*-dir" təklifi "*B*-nin *C* olmaması vacib deyil" təklifinin mümkün olmasına gətirib çıxarmır.

Təsdiqiliyin zəruri olmasının inkarı inkari ümumi mümkünlükdür.



Şərhlərdə qeyd edilir ki, hükəma "İmkan" sözü hər iki zərurətin birlikdə inkari üçün işlədildikdə, öndəkindən fərqli olaraq xüsusi olur. "*C*-nin *B* olması mümkündür" təklifinin mənası "*B*-nin *C* üçün olması vacib deyil və ondan imtina da edilmir" deyimidir. Bu əvvəlkindən daha xüsusidir. Buna görə də xüsusi imkan adlanır.

Ümumi mütləqilik. "*Mütləqilik iki tərəfdən fəqət (yalnız) birinin faktiki (feli) olmağının isbatını tələb edir. Daimi və ya qeyri daimi olmağı əhatə edir. Fəqət (yalnız bir) qarşılıq daimdən xali olan ümumidir*".

Predikatın mövzuya nisbəti təsdiqiliyin ya da inkariliyin daimi, ya da onların hər ikisinin davamlı olmaması ilə ola bilər. Ümumi mütləqilikdə nisbət feli – faktiki, artıq şərtsiz olur.

Təkliflərin digər üsulla təqsimatı. "*Digər qövm təkliflərin təqsimatında mütləq, zəruri və mümkünlüyündə cəm olma və xülvun (boşluğun) maneəli olması üsulunu seçmişlər. Mütləqiliyi zəruri olmamaqla xüsuslandırmışlar. Feliliyi onların (ikisinə) qismlənməsi üçün. O xüsusi mütləqilikdir ki, vücudilik ondan daha xüsusidir. Müqəyyəd zərurətlik ona daxildir. Mümkünliyi isə fəqət qüvvədə olmaqla xüsuslandırmışlar. Belə ki, feliliyə cıxış nəyinsə zərurəti olur. Daha xüsusi olmaqla müqəyyəd (şərtləndirmək üçün) etmək üçün. Bəzən də gələcəklə müqəyyəd edilmişdir. Çünki baş vermənin feliliyi (baş verməsi) digər zamanlarda mümkünsüz olmur*".

İlk olaraq təkliflər mütləq, zəruri və mümkün olmaqla üç qrupa bölünmüşdür. Bu iki üsulla mümkündür:

Birincisi təklifdə onun modallığı ya söylənir, ya da söylənmir. Söylənmədikdə mütləq adlanır. Birincisi ya zəruri olur, ya da zəruri olmur. Birincisi zəruri, ikincisi mümkün olur.

İkinci üsul isə aşağıdakından ibarətdir: Hökm ya feli (faktiki), ya da qüvvədə olan (potensial) olur. İkincisi imkandır. Birincisi isə zəruri, ya da qeyri-zəruri olur. İkincisi mütləqdir.

Yuxarıda birinci üsulla təsnifata baxılıb. Mütləq olan zəruriliyə şamil də ola bilər, olmaya da bilər. Xülv (olmamaq) maneəli olur. Cəm haqqında isə bunu demək olmaz. Çünki, zərurət və mütləqilik, mümkün və mütləqilik eyni zamanda mövcud ola bilərdilər.

İkinci üsulla mütləqilikdə təsdiqilik və ya inkarilik qeyri-zəruri olaraq hökm edilir. Burada cəm olma və xülvün hər ikisi üçün eyni zamanda olması maneəlidir. Beləliklə, mütləqliyi qeyri-zəruriliklə xarakterizə edərək, feli olanları bu ikisinə təqsim etmişlər. Bu mütləqilik qeyri-zəruri vücudiyyət adlandırılır. O qeyri-daimi vücudiyyətdən daha ümumidir.

QARŞILIQLI İNKAR VƏ ONUN MƏCRASINDA OLANLAR HAQQINDA

"*Hər iki təklifdən onların cüzlərində (tərkib hissələrində) və onlara qoşulanlarda – izafədə, şərtdə, zamanda, məkanda, küllilikdə, cüzilikdə, feldə və qüvvədə - ittifaqın olması (şərt edilir). Belə ki, onlardan (təkliflərdən) hər biri eynilikla digərinin özüdür. Və halı da o haldır*".

Onun məcrasında olanlar dedikdə iki təklifin aşağıda izahları veriləcək – daxil olmaq, müqabillik, təzad olmaq kimi – qarşılıqlı vəziyyətlərindən söhbət gedir.

Yuxarıda sadalanan şərtlərdən aydın olur ki, qarşılıqlı inkar üçün təkliflərin keyfiyyət və kəmiyyətində vəhdət tələb edilmir. İki təklifin qarşılıqlı münasibitəndən danışmaq üçün ən azı onların müqqədimələrində – mövzu və predikatlarında – vəhdət olmalıdır. Əks halda onların qarşılıqlı vəziyyəti haqqında danışmağın mənası yoxdur. Belə ki, onlarla iki qarşılıqlı asılı olmayan hadisələr və xəbərlərdən söhbət aparılmış olardı.

Qarşılıqlı inkar üçün müqqədimələrdəki vəhdətdən başqa digər altı ünsürdə də vəhdət şərt edilir.

1.İzafədə (mənsubiyyətdə) ittihad. Məsələn birinci təklifdə "üçbucağın tərəfi



..." haqqında, ikinci təklifdə "dördbucağın tərəfi..." haqqında söhbət gedirsə, onların inkariliyi haqqında danışmağa dəyməz;

2. Şərtlərdə eynilik. "*A* şərtləri ödənildikdə *B C*-dir" və "*B C* deyil" təkliflərinin inkariliyindən danışmaq olmaz. Çünki, təkliflərin şərtləri eyni deyildirlər;

3. Zamanda eynilik. "Dünən yağış yağırdı" və "İndi yağış yağmır" təkliflərində zamanda eynilik yoxdur. Onların qarşılıqlı inkar olması mümkün deyil;

4. Məkanda eynilik. "Kitab stolun üstündə deyil" və "kitab rəfdədir" təkliflərində məkanlar müxtilif olduqları üçün onlar qarşılıqlı inkar təşkil etmirlər;

5. Küllik və cüzilikdə eynilik;

6. Fel və qüvvədə olmaqda eynilik.

Təkliflərin qarşılıqlı vəziyyətləri: təqabül, tədaxül, təzad, tənaqüz. "*Yalnız kəmiyyətlərində müxtəlif olanlar mütədaxil (biri digərinə daxil olan) olanlardır. Keyfiyyətində (müxtəlif olanlar) mütəqabillərdir; hər ikisinin eyni zamanda doğruluğu mümkün deyilsə, təzadlardırlar (kontrarlar); zatında (həqiqətlərində) qismlənmişlər isə tənaqüzlərdir (qarşılıqlı inkardırlar, kontradiktorlar)*".

Mütədaxil olanlar $\forall(x)[A(x)\to B(x)]$ və $\exists(x)[A(x)\to B(x)]$. Çoxluqlar dilində $A\subset B$.

Mütəqabil olanlar $\forall$ ya $\exists(x)[A(x)\to B(x)]$ və $\forall$ *ya* $\exists(x)[A(x)\to\sim B(x)]$. Çoxluqlar dilində külli halında: $A\subset B$ və $A\subset CB$; cüziyyət halında isə $A\cap B\neq\varnothing$ və $A\cap CB\neq\varnothing$

Təzadlar $\forall(x)[A(x)\wedge B(x)]$ yalnız yalan qiymətlər alır.

Tənaqüzlər $\forall(x)[A(x)\vee B(x)]$ dizyunksiyası doğru, $\forall(x)[A(x)\wedge B(x)]$ konyunksiyası isə yalan qiymətlər alır.

İndividual təkliflərin tənaqüzü (inkarı) onların təqabülüdür.

"*İndividual təkliflərin tənaqüzü (qarşılıqlı inakrı) onların təqabülüdür (müqabilidir). Onlar üçün təzad və tədaxül yoxdur*".

"*A B*-dir" individual təklifinin inkarı "*A B* deyil" təklifidir. Göründüyü kimi onlar yalnız keyfiyyətləri ilə fərqlənirlər. Deməli onlar müqabildirlər ki, o da eyni zamanda verilən təklifin inkarıdır. Məsələn, "Zeyd müəllimdir" individual təsdiqi təklifinin inkarı "Zeyd müəllim deyil" inkarı təklifidir. Və onlar eyni zamanda müqabil təkliflərdirlər.

Konkretləşmiş təkliflər arasında münasibət

Riyaziyyatda xüsusən konkretləşmiş təkliflərlə rastlaşırıq. Bu mənada konkretləşmiş təkliflərin qarşılıqlı vəziyyətinin təyin edilməsi maraqlıdır.

"*Konkretləşmişlərə gəldikdə -*

- Keyfiyyətlərində müvafiq olanlar mütədaxildirlər;

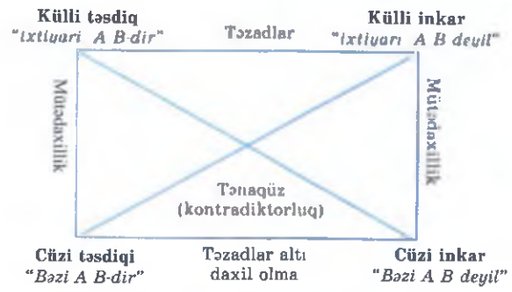
- Külliyyatlarında (müvafiq olanlar) təzadlardır.

- Cüziyyətlərində (müvafiqlər) təzadlar altında daxil olanlardır. Onlar yalanlıq da cəm olmurlar.

Keyfiyyət və kəmiyyətlərində müxtəlif olanlar tənaqüzlərdir. Konkretləşməmişlər iki cüziyyət kimidirlər. Hamısında maddə-

lərdə etibar edirik".

Yuxarıda artıq bu formal dildə yazılmışdır. Cüziyyətlərində müvafiq olanlar təzadlar aldında daxil olma (subkнotrarlıq) adlandırılmışlar. Bu munasibətlər ənənəvi olaraq aşağıdakı sxem vasitəsilə verilir:



Sxemdən də göründüyü kimi, kontradiktor konkretləşmiş təklifl ər həm keyfiyyət, həm də kəmiyyətlərində bir-biri ilə müxalifdirlər.

Modallıqların inkarı

"Modallıqlara gəldikdə onların tənaqüzü (inkarı) ya onların modallığının inkarı (səlbi), ya da bərabərlik (müsavat) üsulu ilə olur. Mütləq zəruriliк ümumi mümkünlük ilə tənaqüzdür (inkar təşkil edir)".

Mütləq zəruriliyin inkarı yuxarıda araşdırılmışdır: "Zəruri olaraq hər bir *A B*-dir" təklifinin tənaqüzü "zəruri olaraq (mümkündür) bəzi *A B* deyil", "zəruri olaraq bəzi *A B*-dir" təklifinin inkarı "zəruri olaraq istənilən *A B* deyil", "Mümkündür hər bir *A B*-dir" təklifinin inkarı "zəruri olaraq bəzi *A B* deyil", "mümkündür bəzi *A B*-dir" təklifinin inkarı "zəruri olaraq bəzi *A B* deyil" kimi təkliflərdir. Buradan göründüyü kimi kvantorların saxlanması şərt deyil. Mümkünlüyün inkarı zərurətdir.

Digər üsul isə predikat və mövzunun yerdəyişməsi ilə olur.

Şərti təkliflərin inkarı.

Şərtiyyətlərdə isə, keyfiyyət və kəmiyyətdə müxtəliflikla yanaşı, səlb (inkari) olmalıdır - lüzumiyyətdə lüzumun səlbi. İttifaqilərdə ittifaqın səlbi; inkari (səlbi) həqiqi inadilikdə - hansındakı cəm və xülvun imkanı doğru ola bilər - cəmsiz, xülvun maneəsi yolu ilə ümumi imkan ilə olmağı etibar edilir.

Cəm (birlikdə olma) və xülvu (hər ikisinin omaması) maneəli olan iki bəsit üçün - yəni həqiqilikdən təşkil edilmişlərdə - yalnız onların ümumi imkanlığı;

İki mürəkkəbilikdə - yəni, onlardan (həqiqiliklərdən) təşkil edilməmişlərdə -ya bu imkan ilə, ya da cəmsiz xülvun məni yolu ilə digərinin məni.

"*A B* olduqda *C D*-dir" istər lüzumu, istərsə ittifaqi təklifinin inkarı "*A B* olduqda mümkündür *C D* olmasın" təklifidir. "ya *A B*-dir, ya da *C D*-dir" münfəsil təklifinin inkarı "ya *A B*-dir, ya da *C D*-dir deyil" təklifidir.

Lüzumiyyətdə səlbin lüzumi deyil, lüzumun səlbi olmalıdır. Məsələn, "*A B* olduqda, *C D*-dir" lüzumi təklifinin inkarında səlbin lüzumu ilə təşkil edilən təklif "*A B* olduqda *C D* deyil" təklifidir. Bu heç də ilkin təklifin inkarı deyil. İlkin təklifin inkarı yuxarıda söyləndiyi kimi lüzumun səlbi ilə - yəni, "*A B* olduqda" ayrılmaz olan "*C D*-dir" nəticəsinin ayrılmazlığı aradan götürülməlidir. Bu isə "*C*-nin *D* olmamasının mümkünlüyüdür".

ƏKSİLİKLƏR HAQQINDA

Təklifin əksi elə bir təklifdir ki, ya ilkin – hansı ki, əsldir - cüzlərdən biri digərinin yerini tutmuşdur, ya da onların hər ikisinin inkarilik və təsdiqilikdə müqabili olan – onun keyfiyyətinin və doğruluğunun halının saxlanması şərti ilə, hətta fərziyyə olsa da belə digərinin məqamını tutmuş olur.

Orada kəmiyyətin, modallığın və yalanın saxlanması şərt edilmir.

Birincisi müstəvi əksilikdir (bərabərlik, düzgün əksilik, əks teorem). İkincisi isə inkari (nəqiz) əksilikdir (tərs teorem). Ayrılıqda (mütləq mənada) işlədildikdə məhz birinci nəzərdə tutulur. İstənilən qəziyyəki digərini bu sifətlə ayrılmaz edir o münəksdir (əksilikdir, əks olandır).

Təklifin əksi iki üsulla əldə edilə bilər. 1) Təklifin keyfiyyətinin və onun doğruluğu saxlanmaqla, hissələrinin yerdəyişməsi ilə. "Hər bir *A B*-dir" təklifinin əksi olaraq "bəzi *B A*-dır" təklifi. Ilkin təklif doğrudursa, ikinci təklif də doğrudur. Bu

halda kəmiyyət artıq saxlanmır. Əsli olanda "hər bir" əksi olanda "bəzi" olur. Bu üsulla əldə edilən əksilik müstəvi əksilik adlanır. Riyaziyyatda biz bunu əks teorem adlandırırıq.

$$\underline{\forall(x)\left[A(x)\to B(x)\right]} \qquad \underline{\exists(x)\left[A(x)\to B(x)\right]}$$
$$\exists(x)\left[B(x)\to A(x)\right] \qquad \exists(x)\left[A(x)\to B(x)\right]$$
$$\underline{\forall(x)\sim\left[A(x)\to B(x)\right]}$$
$$\forall(x)\sim\left[B(x)\to A(x)\right]$$
$$\underline{\exists(x)\sim\left[A(x)\to B(x)\right]}$$

Riyazi ədəbiyyatda bu tip teoremlər əks teoremlər adlanırlar.

2) Hissələrdən hər birinin digərinin inkari olan təkliflə əvəz edilməsi ilə baş verir. Bu üsulla alınan əksilik nəqiz əksilik adlanır. Predikativ təkliflər üçün mövzu predikatın inkarı ilə, predikat isə mövzunun inkarı olan təkliflə əvəz edilir. "Hər bir *A B*-dir" təklifinin nəqiz əksiliyi "hər bir *B* olmayan *A* olmayandır" təklifidir.

$$\underline{\forall(x)\left[A(x)\to B(x)\right]} \qquad \underline{\exists(x)\left[A(x)\to B(x)\right]}$$
$$\forall(x)\left[\sim B(x)\to\sim A(x)\right] \qquad \forall(x)\sim[\ ]$$

Riyazi ədəbiyyatda bunları qarşılıqlı tərs teoremlər adlandırırlar.

Misallardan da kəmiyyətin saxlanmamasının vacib olmadığı aşkardır. "Hər bir *A B*-dir" təklifi doğru olmadıqda belə onun müstəvi əksi olan "bəzi *B A*-dır" təklifi doğru ola bilər.

Müstəvi əks.

Müstəvi olandan başlayırıq. Söyləyirik təsdiqi olan istər külli, istər cüzi olsun, feli (faktiki) olduqda, feli (faktiki) olanla əksilikləşdirilir. Çünki, mövzu adlanan hər bir şey predikatla vəsf edildikdə, predikat adlandırılanın özü də mövzu ilə vəsf edilmiş olur.

Feli olmaq yəni, faktiki olaraq deməkdir. "Hər bir *A B*-dir" külli təsdiqi və "bəzi *A B*-dir" cüzi təsdiqi təkliflərinin hər iki halda müstəvi əksləri "bəzi *B A*-dır" təklifidir. Bundan artığını ümümi olaraq söyləmək mümkün deyil. Birinci halda ola bilər *B A*-dan daha ümumidir. İkinci halda isə ola bilər *A* və *B* heç biri digərindən ümumi deyil.

Müəyyən bir *A* mövzusu *B* predikatı ilə vəsf edilmişsə, qarşılıqlı olaraq həmin *B* də *A* ilə vəsf edilmiş olur. "Çünki, mövzu adlanan hər bir şey predikatla vəsf edildikdə, predikat adlandırılan özü mövzu ilə vəsf edilmiş olur" dedikdə bu məqam nəzərdə tutulub.

Təsdiqi mümkünün əksi cüzi ümumi mümkündür. *Mümkün olduqda isə mümkün olur. Çünki, həmin şeyin predikatla vəsf edilməsi mümkün olmuşsa, onun – artıq faktiki mövzu ilə vəsf edilmiş olaraq - predikat adlandırılması mümkündür. Bu şeyin feli (praktiki) predikat adlandırılması qeyri-mümkün deyilsə, predikat olanın feli olaraq mövzu kimi vəsf edilməsi (olması) qeyri mümkün deyil.*

Müstəvi əksdə kəmiyyət. *Bu əksilikdə maddədəki kəmiyyəti saxlanmır. Bu hər bir hissənin digərindən daha ümumi olması ehtimalından baş verir. "Hər bir insan canlıdır" və "bəzi canlı insandır" deyimlərimizdə söylədiyimiz kimi. Külli olan bu misalımızdakı maddədə olduğu kimi cüziyyətlə və əksinə inikas edilir. Formaya (surətə) gəldikdə isə cüziyyəti saxlayır. Çünki o hər iki halda qəti olaraq doğrudur. Küllidə isə belə deyil".*

Bu yuxarıda baxılmış misallardan da aydındır. "Hər bir *A B*-dir", "bəzi *A B*-dir" təkliflərinin hər ikisindən yalnız "bəzi *B A*-dır" təklifini əldə etmək olar. Hər iki halda ola bilər *B A*-dan daha ümumidir.

İNKARİLİYİN ƏKSİLİKLƏRİ (ZƏRURİ KÜLLİ İNKARİLİK ÖZÜ KİMİ ƏKS EDİLİR)

Külli inkara gəldikdə, zəruri olduqda özü kimi inikas edilir. Çünki mövzu adlandırılan hər bir şeyin məhmulun sifəti ilə vəsf edilməsindəki imtina məhmul adlandırılan hər bir şeyin mövzunun sifəti ilə vəsf edilməsinin imtinasını tələb edir. edir. Bu ona görə belədir ki, məhmul adlandırılan hər bir şeyin mövzunun sifəti ilə vəsf edilməsinin mümkünlüyü ixtilaf tələb edir. O

bu şeyin mövzu adlandırılanın ailəsindən olmasından – yəni,o şeydən ki, onun məhmul adlandırılması aradan götürülüb - ibarətdir.

Çünki, mövzunun sifəti ilə feli vəsf edilməsinin fərzində, o qəti olaraq həmin küllliyatdan (cümlədən, ailədən) olur. Beləliklə, fərzdən öncə onun özlüyündə həmin külliyatdan (cümlədən) olması məlum olur. Çünki imkanın vaqe olmasının fərzi mövzunun zatından qeyrisinin onun üçün zat olmasına çevrilməyə imkan vermir. Əksinə (bəzən, çox vaxt) elm mövzunun özünün külliyyatından (ailəsindən) olması məlum olmayan şeyin həmin o külliyyatdan olması ilə əldə edilir..".

"İstənilən A B deyil" külli inkari təklifinin müstəvi əksi "İstənilən B A deyil" külli inkari təklifidir. Çünki, əks halda – yəni, bəzi B A olsaydı – bəzi A B olardı. Bu da ilkin təklifə ixtilaf təşkil edir. Bu küllilik "Yəni, məhmul adlandırılanın hər birindən aradan götürülür" şəklində ifadə edilmişdir.

"Zəruri olaraq heç bir A B deyil" təklifinin əksi "zəruri olaraq heç bir B A deyil" təklifidir.

SİLLOGİZMLƏR HAQQINDA

Sillogizmlər. Söylədiyimiz kimi məqalədə yalnız predikativ tərkibli sillogizmlərə baxılır və N.Tusinin fikirləri formal məntiqi yazılışda ifadə edilirlər.

Sillogizm bir neçə təklifdən təşkil edilmiş elə bir konstruksiyadır ki, onun quruluşundan zəruri şəkildə nəticə əldə edilməsi mümkündür. "Hər bir insan canlıdır, hər bir canlı cisimdir" misalında olduğu kimi. Onların fərz edilməsindən "hər bir insan cismdir" nəticəsi əldə edilir. O (birincisi) silloqizmdir, bu isə (ikincisi) onun nəticəsidir. Bu (birincidə iştirak edən) iki təklifdən hər biri müqəddimələrdir. Onlar silloqizmi təşkil edənlərdir. Onların hədləri isə silloqizmin hədləridir".

Silloqizm təkliflərin elə konyunktiv konstruksiyasıdır ki, bu konstruksiyadan birqiymətli nəticə əldə edilir. Silloqizmi təşkil edən təkliflər yalan təkliflər də ola bilərlər. Əsas məsələ konstruksiyanın özündən nəticənin əldə edilməsidir. Məsələn, "İnsan daşdır. Hər bir daş cansızdır" misalında birinci müqəddimə və alınan nəticənin yalan təkliflər olmalarına baxmayaraq, baxılan konyunktiv təklifdən birqiymətli olaraq "insan cansızdır" nəticəsi alınır.

Silloqizmlərin növləri. *"Silloqizmlər sadə və mürəkkəb ola bilərlər. Sadələr də öz növbəsində nəticəsi əks edilmədikdə ilgili, əks halda isə istisna edilmiş (seçilmiş) olurlar".*

Sadə silloqizmlərin iki müqəddiməsi olur. Nəticə qeyd edilmədikdə, ilgili adlanır; nəticə qeyd edilmişsə, istisna edilmiş (bu mənada seçilmiş) adlanırlar. Sxematik olaraq bunlar aşağıdakı kimi yazıla bilərlər:

ilgili	istisna
	$A-B$
$A-B$	$\underline{C-D}$
$C-D$	$E-F$

A,C,E mövzuları B,D,F predikatları ilə kəmiyyət və keyfiyyət baxımından müəyyən münasibətdə olurlar. İrəlidə göräcəyik ki, müqəddimələrin hədləri arasında müyyən bir ortaqlıq olmalıdır. Əks halda, asılı olmayan hədlərdən müəyyən bir nəticənin hasil olması mümkün deyil.

"... Predikativ olanlardan başlayacağıq. (Yuxarıda) misal kimi baxdığımız ilgili predikativlərdəndir. Onun nəticəsi hər iki müqəddimə ilə, həmçinin hər iki müqəddimə də öz aralarında ortaq hissəyə malikdirlər. Nəticənin mövzusu "kiçik hədd", bunda ortaq olan (müqəddimə) "kiçik müqəddimə", onun (nəticənin) predikatı "böyük hədd", bunda ortaq olan isə "böyük müqəddimə" adlanır. Müqəddimələrin ortaq həddi isə "orta hədd" adlanır. Onun rolu iki müqəddimə arasında əlaqə yaratmaqdan ibarətdir və nəticədə ortadan gedir. Onun iki müqəddimədə iştirakı isə fiqurları müəyyən edir".

Yuxarıda baxılan "hər bir insan canlıdır, hər bir canlı cismdir" və "hər bir insan cismdir" misalında nəticənin mövzusu olan "insan" birinci müqəddimədə iştirak edir və o kiçik həddir. Birinci müqəddəmə isə kiçik müqəddimədir. Nəticənin predikatı olan "cism" isə ikinci müqəddimədə iştirak edir, ikinci müqəddimənin özü isə böyük müqəddimədir. Birinci və ikinci müqəddimələrin ortaq həddi olan "canlı" məfhumu isə orta hədd adlanır və nəticədə aradan çıxır.

Dörd fiqur haqqında. *"Kiçiyin predikatı böyüyün mövzusu olarsa, birinci , predikatları ortaq olarsa, ikinci fiqur, mövzular ortaq olarsa, üçüncü fiqur, birinci fiqurun əksi olan isə dördüncü fiqur adlanır".*

Beləliklə, orta həddən asılı olaraq dörd məntiqi fiqur alınır:

1–*ci fiqur*	2–*ci fiqur*	3–*cü fiqur*	4–*cü fiqur*
$A-B$	$A-B$	$A-B$	$A-B$
$\underline{B-C}$	$\underline{C-B}$	$\underline{A-C}$	$\underline{C-A}$
$A-C$	$A-C$	$B-C$	$B-C$

"Hər bir fiqur müqəddimələr üzərində mümkün olan məhdudiyyətlərdən asılı olaraq on altı formaya malikdirlər. Bu aşkardır. Onlardan yalnız bəzilri nəticəyə malikdirlər, digərləri isə nəticəsizdirlər".

Məhdudiyyətlər dedikdə, kəmiyyət etibarı ilə hökmün ümumi (külli), ya cüzi olması, keyfiyyət etibarı ilə isə təsdiqi, yoxsa inkarı olması nəzərdə tutulur. Müasir məntiq və məntiqin tarixinə həsr edilmiş kitablarda dördüncü fiqur ayrılıqda deyil, brinici fiqurla birlikdə baxılır. İbn Sinaya şərhlərində Tusi bu məsələyə toxunaraq yazır: *"Söyləməliyəm ki, qədim alimlər onları aşağıdakı kimi siniflərə bölmüşlər: Orta hədd iki müqəddimədən biri üçün predikat, digəri üçün isə mövzudur; ya hər ikisi üçün mövzudur; ya da hər ikisi üçün predikatdır. Beləliklə, üç fiqura baxmışlar. Birinci fiqurun iki növə bölünməsini qanunauyğun hesab etməmişlər. Nəticədə dördüncü fiqur onlarda olmamışdır. Sonrakı alimlər onların qəbul etmədiyi dördüncü fiqurun təbii olmaması fikrinə etiraz etmişlər."*([3], səh.434-435 ərəb, səh. 285-286 az.)

İbn Sinanın əsərində də üç fiqura baxılır. Fikrimizcə, burada elə bir prinsipial fərq yoxdur. Sadəcə Tusinin təsnifatında birinci müqəddimə həmişə kiçik müqəddimə, ikinci müqəddimə isə böyük müqəddimə kimi iştirak edir.

Nəticəli olanlar. Bu barədə Tusi aşağıdakını söyləyir: *"Predikativ halında ilk iki fiqur üçün dörd, üçüncü fiqur üçün altı, dördüncü fiqur üçün isə beş nəticəli forma var".*

Birinci fiqurun nəticəli formaları haqqında. *"İlk forma iki təsdiqi külli halıdır, nəticədə külli təsdiq əldə edilir; İkinci forma böyüyü inkarı olmaqla, iki külli olan halıdır.. Nəticədə külli inkar əldə edilir; Üçüncü forma kiçiyi cüzi olmaqla, hər ikisinin təsdiqi halıdır. Nəticəsi cüzi təsdiqi olur. Dördüncü forma cüzi kiçik, inkari böyük olandır. Nəticə cüzi inkari olur. Bununla bütün hallar əhatə edilir. Və bütün məhdudiyyətlər verilmişdir. Və bu mütləqdir".*

Beləliklə, birinci fiqur dörd nəticəli formaya malikdir: Birinci forma "İxtiyari A B-dir. İxtiyari B C-dir". Nəticə "İxtiyari A C-dir" külli təsdiqi təklifidir.

1-ci forma:

$$\frac{\forall(x)[A(x)\to B(x)]}{\forall(x)[B(x)\to C(x)]}$$
$$\forall(x)[A(x)\to C(x)]$$

İkinci forma: "İxtiyari A B-dir. İxtiyari B C deyil". Nəticə "İxtiyari A C deyil" külli inkari təklifidir.

2-ci forma:

$$\frac{\forall(x)[A(x)\to B(x)]}{\forall(x)\sim[B(x)\to C(x)]}$$
$$\forall(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$

Üçüncü forma "Bəzi A-lar B-dir. İxtiyari B C-dir". Nəticəsi cüzi təsdiqi "Bəzi A-lar C-dir" təklifidir.

3-cü forma:

$$\frac{\exists(x)[A(x)\to B(x)]}{\forall(x)[B(x)\to C(x)]}$$
$$\exists(x)[A(x)\to C(x)]$$

Dördüncü forma "Bəzi A-lar B-dir. İxtiyari B C deyil". Nəticəsi "Bəzi A-lar C deyil" cüzi inkari təklifidir. Bunları aşağıdakı kimi yazmaq olar.

4-cü forma:

$$\exists(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$

İkinci fiqurun nəticəli formaları haqqında. *"Birinci forma kiçiyi təsdiqi olan iki küllü halıdır. "Hər bir insan gülə biləndir, hər bir at gülə bilməyəndir" misalındakı kimi. Bunun nəticəsi "heç bir insan at deyildir" təklifidir. Ikinci forma kiçiyi inkari olan iki küllidir. Nəticə yuxarıdakı kimidir. Üçüncü forma kiçiyin cüzi təsdiqi olmasından cüzi olan nəticə alınır. Dördüncü forma kiçiyin cüzi inkarı olmasından analoji nəticə alınır".*

Beləliklə, ikinci fiqurun yalnız dörd nəticəli forması var. Birinci forma "İxtiyari A B-dir. İxtiyari C B deyil" şəklində təklifdir. Nəticəsi "İxtiyari A C deyil" külli inkari təklifidir.

1-ci forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[C(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$

İkinci forma "İxtiyari A B deyil. İxtiyari C B-dir" şəklində təklifdir. Nəticəsi "İxtiyari A C deyil" külli inkari təklifidir.

2-ci forma:

$$\forall(x)\sim[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)[C(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$

Üçüncü forma "Bəzi A-lar B-dir. İxtiyari C B deyil" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi A-lar C deyil" şəklində cüzi inkari təklifdir.

3-cü forma:

$$\exists(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[C(x)\to B(x)]$$
$$\exists(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$

Dördüncü forma "Bəzi A-lar B deyil. İxtiyari C B-dir" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi A-lar C deyil" şəklində cüzi inkari təklifindən ibarətdir.

4-cü forma:

$$\exists(x)\sim[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)[C(x)\to B(x)]$$
$$\exists(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$

Üçüncü fiqurun nəticəli formaları. *"Birinci forma iki təsdiqi küllidən ibarət olandır. "Hər bir insan canlıdır. Hər bir insan yazardır" misalında olduğu kimi. Ikinci forma böyüyü inkari olan iki küllidən ibarət olandır. Üçüncü forma kiçiyi cüzi olan iki təsdiqdən ibarət olan haldır. Dördüncü forma böyüyü cüzi olan iki təsdiqdən ibarət olandır. Beşinci forma kiçiyi külli təsdiqi, böyüyü cüzi inkari olandır. Altıncı forma kiciyi cüzi, böyüyü inkari olandır".*

Beləliklə, üçüncü fiqur altı silloqizmlə səciyyələnir. Birinci forma "İxtiyari A B-dir. İxtiyari A C-dir" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C-dir" cüzi təsdiqi təklifidir.

1-ci forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)[A(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)[B(x)\to C(x)]$$

İkinci forma "İxiyari A B-dir. İxiyari A C deyil" şəklində təklifdir. Nəticə olaraq "Bəzi B-lər C deyil" cüzi inkari təklifi alınır.

2-ci forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$

Üçüncü forma "Bəzi A-lar B-dir. İxtiyari A C-dir" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C-dir" cüzi təsdiqi təklifdir.

3-cü forma:

$$\exists(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)[A(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)[B(x)\to C(x)]$$

Dördüncü forma "İxtiyari A B-dir. Bəzi A-lar C-dir" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C-dir" cüzi təsdiqi təklifdir.

4-cü forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\exists(x)[A(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)[B(x)\to C(x)]$$

Beşinci forma "İxtiyari A B-dir. Bəzi A-lar C deyil" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C deyil" cüzi inkari təklifidir.

5-ci forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\exists(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$

Altıncı forma "Bəzi A -lar B-dir. İxtiyari A C deyil" şəklində təklifdir. Nəticə olaraq "Bəzi B-lər C deyil" cüzi inkari təklifi alınır.

6-cı forma:

$$\exists(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[A(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$

Dördüncü fiqurun nəticəli formaları. *"Birinci forma iki küllidən ibarətdir. "Hər bir insan canlıdır. Hər bir natiq insandır" misalındakı kimi. Ikinci forma böyüyü cüzi olan iki təsdiqdən ibarətdir. Nəticəsi cüzidir. Böyüyün ortaq olmayıb, kiçiyin ortaq olmasının mümkin olması səbəbindən. Üçüncü forma böyüyü inkari olan iki küllidən ibarətdir. Nəticə küllidir. Dördüncü forma böyüyü inkari olan iki küllidən ibarətdir. Beşinci forma kiçiyi cüzi təsdiqi, böyüyü külli inkari olandır. Nəticəsi cüzidir".*

Beləliklə, dördüncü fiqurun beş nəticəli forması var. Birinci forma "İxtiyari A B-dir. İxtiyari C A-dır" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C-dir" şəklində cüzi təsdiqi təklifdir.

1-ci forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)[C(x)\to A(x)]$$
$$\exists(x)[B(x)\to C(x)]$$

İkinci forma "İxtiyari A B-dir. Bəzi C-lər A-dır" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C-dir" şəklində cüzi təsdiqi təklifdir.

2-ci forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\exists(x)[C(x)\to A(x)]$$
$$\exists(x)[B(x)\to C(x)]$$

Üçüncü forma " İxtiyari A B deyil. İxtiyari C A-dır" şəklində təklifdir. Nəticəsi "İxtiyari B C deyil" şəklində külli inkari təklifdir.

3-cü forma:

$$\forall(x)\sim[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)[C(x)\to A(x)]$$
$$\forall(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$

Dördüncü forma " İxtiyari A B-dir. İxtiyari C A deyil" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C deyil" şəklində cüzi inkari təklifdir.

4-cü forma:

$$\forall(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim(x)[C(x)\to A(x)]$$
$$\exists(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$

Beşinci forma " Bəzi A-lar B-dir. İxtiyari C A deyil" şəklində təklifdir. Nəticəsi "Bəzi B-lər C deyil" şəklində cüzi inkari təklifdir.

5-ci forma:

$$\exists(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[C(x)\to A(x)]$$
$$\exists(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$
$$\exists(x)[A(x)\to B(x)]$$
$$\forall(x)\sim[C(x)\to A(x)]$$
$$\exists(x)\sim[B(x)\to C(x)]$$

KOMPYUTER TEOREM İSBAT EDİR

Riyaziyyatı çoxluqlar nəzəriyyəsinin aksiomatikasının və predikatların hesablanmasının vasitələri ilə formallaşdırmaq imkanı riyaziyyatçıların işini şahmat oynamağa bənzər edir: ciddi qaydalar var və sadəcə onlara əməl etmək gərəkdir. Beləliklə, teoremlərin maşın isbatına dərhal yol açılır.

Kompyuter üçün predikatların hesablanmasında düsturun çıxarılmasının düzgünlüyünü yoxlayan proqram yazmaq mürəkkəb olmayacaq – bu, təxminən şahmat gedişlərinin düzgünlüyünü yoxlamaq kimidir. Yeni teoremlərin isbatını tapmaq üçün zarafatla "yüz min meymun alqoritmi" adlanan üsul tətbiq etmək olar. Təsəvvür edin: yüz min meymun kompyuterlərin klaviatürlərini döyəcləməyi öyrənib, kompyuterlərsə yoxlayırlar ki, meymunların "yığdıqları" isbatdır, yoxsa yox. Aydındır ki, meymunların yerinə təsadüfi mətnlərin mexaniki və ya elektron generatorlarından istifadə etmək, ya da tərsinə, kompyuteri isbat olmayanı ələməyə vadar etməklə sistematik olaraq bütün mümkün mətnləri yığmaq olar ki, bu da isbat deyil. *XX* əsrin 50-ci illərində teoremlərin isbatı üçün yazılmış ilk maşın proqramlarında məhz belə kor yığım üsulu reallaşmışdı. Təbiidir ki, az güclü maşınlar onda ancaq çox sadə teoremləri isbat edə bildilər.

Sonralar teoremlərin maşın isbatı metodu təsadüfiliyin və ya kor-koranə yığımın daha effektiv üsullarla əvəz olunması yolu ilə getdi. Bu zaman məlum oldu ki, predikatların riyazi isbatların formal şərhi üçün işlənilmiş ənənəvi hesablanması onların axtarışı üçün o qədər də yaramır. Axtarışa və onun insanın deyil, maşının aparmasına yönəlmiş digər formal sistemlər təklif olundu. Teoremlərin maşın isbatında müəyyən tərəqqi əldə olundusa da, bu, şahmat proqramlarındakı kimi təsirli olmadı.

HESABLAMA SƏNƏTİ

TƏQRİBİ HESABLAMALAR

Məlumdur ki, riyaziyyat dəqiq elmdir. Lakin praktiki məsələlərin həlli zamanı tez-tez təqribi hesablamalar etmək lazım gəlir. Məsələn, $v_0 = 32{,}1\ m/s$ sürətlə şaquli aşağı atılmış cismin $4{,}2\ s$ ərzindəki yolunu hesablayaq:

$$S = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 32{,}1 \cdot 4{,}2 + \frac{9{,}81 \cdot 4{,}2^2}{2} = 221{,}3442(m)$$

Lakin burada $g \approx 9{,}81\ m/s^2$ kəmiyyəti – qravitasiya sabiti – yuvarlaq götürülüb. Cismin başlanğıc sürətini və onun uçuş zamanını mütləq dəqiq təyin etmək olmaz, bu, ölçü cihazlarının imkanlarından asılıdır. Sual doğur: alınmış 221,3442 qiyməti nə qədər dəqiqdir? Bu ədəddə neçə doğru rəqəm var? Onun dəqiq qiyməti hansı hüdudlardadır? Təqribi kəmiyyətlərlə işləmə qaydalarını düsturlaşdıran xətalar nəzəriyyəsi bu suallara cavab verir.

TƏQRİBİ ƏDƏDLƏR VƏ XƏTALAR

Qədim zamanlarda insanlar dəqiq və təqribi ədədləri fərqləndirmirdilər. Belə ki, Babil mixi lövhələrində bildirilirdi ki, ikinin kvadrat kökü 7/5-ə bərabərdir və ya o, 17/12-yə bərabərdir. Babilistanda Süleymanın məbədinin təsviri zamanı diametri 10 dirsək, çevrəsi 30 dirsək olan metal camdan danışılır, yəni çevrə uzunluğunun diametrə nisbətinin 3-ə bərabər (təqribi yox) olduğu hesab edilirdi. O vaxtlar elə də dəqiq hesablamalara (əkinçilik və ya tikinti işlərində) ehtiyac yox idi.

Təqribi qiymətlər anlayışı çox sonralar, pifaqorçular irrasional ədədləri kəşf edəndən sonra meydana gəldi. Qədim yunan alimləri "bərabərdir" və "təqribən bərabərdir" anlayışlarını dəqiq fərqləndirirdilər. Bu anlayışlar son iki min ildə əsaslı dəyişikliklərə məruz qalmamışlar.

Dəqiq A ədədindən cüzi meyl edən və onu hesablamalarda əvəz edən a ədədi A ədədinin təqribi qiyməti adlanır. Əgər $a<A$-dırsa, onda a-nı A ədədinin əskiyi ilə təqribi qiyməti, $a > A$-dırsa, artığı ilə təqribi qiyməti adlandırırlar. Məsələn, $\pi \approx 3{,}14$ – əskiyi ilə, $\pi \approx 3{,}1416$ – artığı ilə yaxınlaşmadır.

a ədədinin səhvi və ya xətası: $\Delta a = A - a$ – bu, dəqiq və təqribi qiymətlər arasındakı fərqdir. A ədədi dəqiq hesablanıbsa, onda $\Delta a = 0$. Məsələn, $55/111 \approx 1/2$ yaxınlaşmasının xətası $55/111 - 1/2 = -1/222$-dir.

$\Delta = |\Delta a| = |A - a|$ a təqribi qiymətinin mütləq xətası adlanır. Belə ki, $55/111 \approx 1/2$ yaxınlaşmasının mütləq xətası $|-1/222| = 1/222$-dir.

Lakin bir çox hallarda A ədədi bizə məlum deyil və buna görə də onun yaxınlaşmasının xətasını hesablamaq olmaz. Belə halda $|\Delta a|$-nı yuxarıdan müəyyən ədədlə qiymətləndirmək olar: bu $\Delta_a > |\Delta a| = |A - a|$ ədədi son mütləq xəta adlanır. $a - \Delta_a < A < a + \Delta_a$.

Son mütləq xəta birqiymətli təyin olunmur: əgər Δ_a-nın bir qiyməti məlumdursa, onda ixtiyari daha böyük ədəd də son mütləq xəta olacaq. Təbiidir ki, hesablamalarda Δ_a-nın mümkün qədər kiçik olmasına çalışmaq lazımdır.

Bəzən onluq kəsrlərdə hesablamanın rahatlığı üçün mütləq xətanı son mütləq xəta ilə əvəz edirlər. Məsələn, $1/222 = 0{,}00450450450450...$ olduğundan məsələni nə qədər dəqiq həll edilməli olmasından asılı olaraq $55/111 \approx 1/2$ yaxınlaşmasının son mütləq xətası kimi 0,005, ya 0,0046, ya da 0, 004504504501 götürmək olar.

Son mütləq xəta öz-özlüyündə hesablamanın dəqiqliyini tam səciyyələndirmir. Belə ki, biz əgər Yerin və Ayın mərkəzləri arasındakı məsafəni ölçürüksə, $\Delta_a = 1\ m$ çox kiçik xətadır, yaşayış otağının uzunluğunu ölçürlərsə, həmin $\Delta_a = 1\ m$ çox böyük xəta olur.

$\delta = \Delta / |A|$ nisbəti a yaxınlaşmasının nisbi xətası, $\delta_a = \Delta_a / |A|$ isə a yaxınlaşmasının son nisbi xətası adlanır. Əgər $\Delta_a << |a|$ və deməli, $\delta_a << 1$ ($<<$ işarəsi "çox-çox kiçik" mənasındadır), onda hesab etmək olar ki, $\delta_a \approx \Delta_a / |a|$, $\Delta_a \approx |a|\delta_a$.

Xəta anlayışı nisbətən cavandır – o yalnız *XV* əsrdə meydana gəlib. Qədim zamanlarda əgər ədədi dəqiq hesablaya bilmirdi-

lərsə, lakin hesablamalarda səhvi bilmək zəruri idisə, riyaziyyatçılar bu ədədin yerləşdiyi dəqiq hüdudları təyin edirdilər. Məsələn, Arximed π ədədi üçün kifayət qədər dəqiq hüdudları hesablamışdır:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Sağ və sol yaxınlaşmaların səhvi 1/71-dən kiçikdir. Təqribi ədədlər daha çox onluq say sistemində yazılır. Ədədin ilk n rəqəmi (onluq işarəsi) o zaman doğru sayılır ki, səhv n-ci rəqəmlə ifadə olunan mərtəbə vahidinin yarısını aşmasın. Məsələn, $1{,}00 \approx 0{,}997$ yaxınlaşmasında bütün rəqəmlər doğrudur. Ədədin onluq yazılışda verilmiş son mütləq xətasını və ya son nisbi xətasını bilməklə onun doğru rəqəmlərinin sayını müəyyənləşdirmək olar.

ONLUQ ƏDƏDLƏRİ NECƏ YUVARLAQLAŞDIRIRLAR?

Onluq ədədlərlə işləyən zaman tez-tez ədədin sonunda rəqəmlərin bir qisminin atıldığı yaxınlaşmalardan istifadə etmək lazım gəlir. Məsələn, coğrafiyanı öyrənərkən biz bu ədəddə onluq və vahidləri ataraq deyirik ki, Yerin diametri $6400km$ ətrafındadır. Burada bizə dəqiq ədədi deyil, onun tərtibi – onlarla, yüzlərlə, yoxsa minlərlə kilometrlərlə ölçülməsini bilmək zəruridir.

Aşağıdakı yuvarlaqlaşdırma qaydalarına əməl edilir:

1. Atılan ədədlərin soldan birincisi 5-dən kiçikdirsə, qalan onluq işarələr dəyişmir.

2. Atılan ədədlərin soldan birincisi 5-dən böyükdürsə, qalan axırıncı rəqəmə 1 əlavə olunur.

3. Əgər atılan ədədlərin soldan birincisi 5-ə bərabərdirsə və qalan atılan ədədlər arasında sıfırdan fərqlilər varsa, onda qalan axırıncı rəqəmə 1 əlavə olunur.

4. Əgər atılan ədədlərin soldan birincisi 5-ə bərabərdirsə və qalan atılan ədədlər sıfıra bərabərdirsə, onda qalan axırıncı rəqəm cütdürsə, saxlanılır, təkdirsə, ona 1 əlavə olunur.

Bu şərtlər ödənilərkən yuvarlaqlaşdırmaların yekun səhvi orta qiymətcə 0-a yaxın olacaq.

Aydındır ki, "cüt ədəd qaydası" əvəzinə "tək ədəd qaydasından" da istifadə etmək olardı, lakin bu iki qayda arasında seçim bizə qədər edilib və biz ən yaxın cüt rəqəm tərəfə yuvarlaqlaşdırırıq.

$\pi = 3{,}141592653..$ ədədinin düzgün yuvarlaqlaşdırılması belədir: $\pi \approx 3{,}14159265$, $\pi \approx 3{,}1415927$, $\pi \approx 3{,}141593$, $\pi \approx 3{,}14159$, $\pi \approx 3{,}1416$, $\pi \approx 3{,}142$, $\pi \approx 3{,}14$.

HESAB ƏMƏLLƏRİNİN NƏTİCƏLƏRİNİN XƏTALARI

Təqribi ədədlər üzərində hesab əməlləri edərkən hansı qaydalara riayət edirlər? Hesablama nəticələrinin son mütləq və son nisbi xətasını necə təyin etməli?

Təqribi ədədləri toplayıb-çıxarkən onların son mütləq xətaları cəmlənir. Məsələn, son mütləq xətaları $\Delta_x = 0{,}06$ və $\Delta_y = 0{,}00001$ olan $x=121{,}3$ və $y=128{,}7$ təqribi kəmiyyətlərini toplayarkən onların $x+y=121{,}3+128{,}7=250$ cəminin son mütləq xətası

$$\Delta_{x+y} = \Delta_x + \Delta_y = 0{,}06 + 0{,}00001 = 0{,}06001 \approx 0{,}06$$

olacaq.

Bu cəmin son nisbi xətası

$$\delta_{x+y} = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{x+y} = \frac{0{,}06 + 0{,}00001}{250} \approx 0{,}00024$$

olacaq.

Yaxın təqribi ədədləri çıxarkən son nisbi xəta güclü şəkildə artır. Belə ki, mütləq xətaları $\Delta_x = 0{,}06$ və $\Delta_y = 0{,}00001$ olan həmin $x = 121{,}3$ və $y = 128{,}7$ təqribi kəmiyyətlərinin son mütləq xətaları

$$\delta_{x-y} = \frac{\Delta_x + \Delta_y}{|x-y|} = \frac{0{,}06 + 0{,}00001}{7{,}4} \approx 0{,}08 > 33{,}3\delta_{x+y}$$

olacaq.

Təqribi ədədləri vurub-bölərkən onların son nisbi xətaları toplanır. Məsələn, son mütləq xətaları $\Delta_x = 0{,}05$ və $\Delta_y = 0{,}01$ və son nisbi xətaları $\delta_x = 0{,}05/100 = 0{,}0005$ və $\delta_y = 0{,}01/250 = 0{,}00004$ olan $x=100$ və $y=250$ təqribi ədədlərini vuraraq $x \cdot y = 25000$ hasili üçün $\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y = 0{,}0005 + 0{,}00004 = 0{,}00054$ son nisbi xəta alırıq. Biz indi bu hasilin mütləq xətasını qiymətləndirə bilərik:

$$\Delta_{xy} = \delta_{xy} x \cdot y = 0{,}00054 \cdot 25000 = 13{,}5$$

Təqribi ədəd qüvvətə yüksəldilirsə, onun son nisbi xətası qüvvətin dərəcəsinə vurulur. Təqribi ədəddən kök alınan zaman onun son nisbi xətası kökün dərəcəsinə bölünür.

$\upsilon_0 = 32{,}1\ m/s$ sürəti ilə şaquli aşağı atılmış cismin $4{,}2\ s$ ərzində keçdiyi yol haqqında məsələdə bütün verilən rəqəmlərin doğru olduğunu fərz edərək aşağıdakı son mütləq xətaları götürə bilərik;

$\Delta_{\upsilon_0} = 0{,}05$, $\Delta_t = 0{,}05$, $\Delta_g = 0{,}005$.

Deməli, son nisbi xətalar belədir:

$$\delta_{\upsilon_0} = \frac{0{,}05}{32{,}1} = 0{,}00155763,$$

$$\delta_t = \frac{0{,}05}{4{,}2} = 0{,}00119047,$$

$$\delta_g = \frac{0{,}005}{9{,}81} = 0{,}000509684$$

Onda

$$\delta_{\upsilon_0 t} = \delta_{\upsilon_0} + \delta_t = 0{,}01346233,$$

$$\delta_{\frac{gt^2}{2}} = \delta_g + 2\delta_t + \delta_2 = 0{,}024319084$$

(dəqiq ədədin xətası həmişə sıfıra bərabərdir: $0 : \delta_2 = 0$). Daha sonra,

$$\Delta_{\upsilon_0 t} = \upsilon_0 \cdot t \cdot \delta_{\upsilon_0 t} = 1{,}815,$$

$$\Delta_{\frac{gt^2}{2}} = \frac{gt^2}{2} \cdot \delta_{\frac{gt^2}{2}} = 2{,}1042,$$

$$\Delta_S = \Delta_{\upsilon_0 t} + \Delta_{\frac{gt^2}{2}} = 3{,}9192$$

yəni bizim təqribi verilənlərimiz üçün son nisbi xəta

$$\delta_S = 0{,}0177063 < 2\%$$

S kəmiyyəti isə

$$217{,}425 < S < 225{,}2634$$

hüdudlarındadır.

Hesablamalarımızın nəticəsi iki doğru rəqəmə malikdir: $S \approx 221$-in xətası 5%-dən kiçikdir.

Bəzən qat-qat mürəkkəb məsələni həll edirlər: nəticənin son yol verilən səhvini bilərək ilkin verilənlərin hansı dəqiqliklə hesablanmasını (ölçülməsini) təyin edirlər. İlk dəfə əvvəlcədən verilmiş dəqiqliklə hesablamaları Teymurləngin nəvəsi, XV əsrdə Səmərqəndin hakimi olmuş Uluqbəyin rəsədxanasında işləyən ərəbdilli riyaziyyatçı və astronom Məsud əl-Kaşi uğurla həyata keçirdi. Göy qübbəsinin 600 000 Yer diametrinə bərabər olduğuna əmin olan əl-Kaşi onun çevrəsinin uzunluğunu at yalından götürülmüş tükün qalınlığı (0,06 mm ətrafı) dəqiqliyi ilə hesablamağı qət etdi. Alim əvvəlcə aydınlaşdırdı ki, belə böyük diametrli çevrəyə çəkilmiş 805 306 368-bucaqlı onun uzunluğundan tükün yarısı qədər fərqlənən perimetrə malikdir. Sonra o, 805 306 368-bucaqlının tərəfini və perimetrini dəqiq təyin etdi və beləliklə, π ədədinin 17 düzgün onluq işarəsini təyin etdi.

Əl-Kaşi altmışlıq sistemin 18 mərtəbəsində yazılmış ədədlərlə əməliyyat aparırdı və hər bir əməliyyatı iki-üç dəfə yoxlayırdı. Bu böyük hesablayıcı həqiqətən nəhəng iş görmüşdü.

KVADRAT KÖKÜN QİYMƏTİNİ NECƏ TƏYİN ETMƏLİ

Hətta riyazi məsələlərin həllində belə heç də həmişə mütləq dəqiq cavabı bilmək lazım olmur, onun məqbul dəqiqliklə təqribi həllini tapmaq kifayət edir. Üstəlik, çox vaxt dəqiq nəticəni sonlu ədəd şəklində göstərmək mümkün olmur. Məsələn, $x^2+x-1=0$ kvadrat tənliyini həll edib cavabı adətən

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

şəklində yazırlar.

Lakin praktik nəzər nöqtəsindən bu yalnız yarımcavabdır. Sonlu cavab almaq üçün kvadrat köklər cədvəlinə boylanmaq, ya da kalkulyatorla silahlanmaq gərəkdir. Lakin lazım olan anda əl altda onların heç biri yoxdursa, ancaq öz qüvvələrinə arxalanmaq lazım gəlir.

Kökləri təqribi hesablamağın çox üsulları var. Tam müsbət ədədlərdən kvadrat köklərin ən yaxşı rasional yaxınlaşmasını tapmağa imkan verən biri haqqında "Sonsuz kəsrlər" məqaləsində danışılıb. Təcrübədə faydalı olan daha bir neçə üsula baxaq.

Fərz edək ki, $\sqrt{1998}$ – in təqribi qiymətini tapmaq tələb olunur. Ən adi üsul kvadratı 1998-ə yaxınlaşan ədədləri seçməkdir. 44 ədədini yoxlayaq: $44^2 = 1936$ – azdır. Bəs 45 götürsək? $45^2 = 2025$ – çoxdur. Deməli, axtarılan ədəd kəsrdir və haradasa 44-lə 45 arasındadır. Sonrakı fəaliyyət kökün həqiqi qiymətini özündə saxlayan intervalı 44,6 – 44,7 hüdudlarınadək daraltmağa imkan verir. Əlbəttə, bu prosesi davam etdirmək olar. Lakin nəticə dəqiqləşdikcə aralıq hesablamalar bir o qədər böyük olur və hesablamalar ləng gedir.

İkinci məşhur metod məqsədə daha tez

aparır. O, ixtiyari iki müsbət a və b ədədlərinin üç orta – harmonik orta, həndəsi orta və ədədi orta qiymətləri arasındakı klassik bərabərsizliyə əsaslanıb ("Orta qiymətlər" məqaləsinə bax):

$$\frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

Harmonik orta $2ab/(a+b)$ və ədədi orta $(a+b)/2$ onunla əlamətdardırlar ki, onlar üçün, öz növbəsində, yeni harmonik orta və ədədi orta tapılsa, onlar $\sqrt{ab}$ üçün $a \ne b$-yə əvvəlki orta qiymətlərdən daha yaxın yerləşmiş olarlar. $\sqrt{A}$-nın təqribi hesablanmasının metodu bundan ibarətdir.

Verilmiş A ədədini iki ixtiyari $a_0 < b_0$ vuruğunun hasili şəklində göstərək: $A=a_0b_0$. Bu, $\sqrt{A}$-ya ilkin yaxınlaşma olacaq, özü də a_0 $\sqrt{A}$-nı əskiyi, b_0 isə artığı ilə yaxınlaşdırır.

Sonrakı (birinci) yaxınlaşmanı

$$a_1 = \frac{2a_0b_0}{a_0+b_0}, \quad b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$$

düsturu ilə hesablayaq. Sonra eyni qayda ilə ikinci, üçüncü, dördüncü və s. yaxınlaşma alaraq $\sqrt{A}$-nın düşəcəyi "darvazanı" tədricən daraldırıq.

Bu üsulu $\sqrt{1998}$-un hesablanmasına tətbiq edək. 1998 ədədini sonsuz sayda üsulla iki müsbət vuruğun hasilinə ayırmaq olar: $1998 = 50 \cdot 39{,}96 = 100 \cdot 19{,}98$ və s. Təbiidir ki, nə qədər "sıx" cüt seçsək, yaxşı yaxınlaşmanı daha tez taparıq. Məsələn, a_0=40, b_0=49,95 qoyaq. Ardıcıl olaraq alırıq

Addım sayı n	Harmonik orta a_n	Ədədi orta b_n	$b_n - a_n$
0	40	49,95	9,95
1	44,42468	44,975	0,55032
2	44,698146	44,69984	0,001694
3	44,698993	44,699065	0,000072

n-in artması ilə (a_n,b_n) intervalı sürətlə daralır, buna görə də intervalın sərhədləri – a_n və ya b_n ədədləri $\sqrt{1998}$-ə daha dəqiq yaxınlaşma kimi çıxış edirlər.

Təqribi kvadrat kök alınmasının növbəti üsulu çoxdankı tarixə malikdir. Ondan hələ II əsr əvvəl qədim yunan riyaziyyatçısı və astronomu Klavdi Ptolomey astronomik cədvəlləri tərtib edərkən istifadə edirdi. Üsul cəmin kvadratının məlum düsturuna əsaslanıb:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Fərz edək ki, kobud hesablama yolu ilə biz $\sqrt{1998}$-in onluq ədədini – 4-ü təyin etmişik və indi bizim vəzifəmiz təklik x rəqəmini tapmaqdır. $(40+x)^2 = 1600 + 80x + x^2$ olduğundan $80x + x^2 = x(80+x)$ kəmiyyəti 1998 – 1600 = 398-dən az fərqlənməlidir. Yəni elə x kəmiyyətini seçmək lazımdır ki,

$$\begin{array}{r} 8x \\ \times \\ x \\ \hline ??? \end{array}$$

hasilinin nəticəsi 398 ədədinə yaxın olsun. Aydındır ki, bundan ötrü $x = 4$ götürmək gərəkdir: $84 \cdot 4 = 336$. Beləliklə, $\sqrt{1998} \approx 44$.

Uğurdan qanadlanaraq öz ədədi axtarışlarımızı davam etdirsək, təbiidir ki, sonrakı addımda axtarılan kökün onluq kəsrində onda birlərin rəqəmini dəqiqləşdirmək istəyəcəyik. Artıq sınanmış sxemdən istifadə edək.

$$\left(44+\frac{y}{10}\right)^2 = 1936 + 2 \cdot 44 \frac{y}{10} + \frac{y^2}{100}$$

ifadəsinin qiyməti 1998-dən az fərqlənməlidir, bundan ötrü isə zəruridir ki, $\frac{y}{10}\left(88+\frac{y}{10}\right)$ ədədi 1998–1936=62=62,00 (y-in onda birlərin rəqəmi olduğuna və onda birlərin kvadrata yüksələrkən yüzdə birlərin mərtəbəsinə keçdiyinə görə iki sıfır əlavə edirik) ədədinə yaxın olsun.

Hansı y-də

$$\begin{array}{r} 88,y \\ \times \\ y \\ \hline ??,?? \end{array}$$

hasili 62,00 ədədinə ən yaxındır? Əlbəttə, y=6-da, belə ki, $88{,}6 \cdot 0{,}6 = 53{,}16$. Deməli, $\sqrt{1998} \approx 44{,}6$.

Yüzdə bir, mində bir və s. rəqəmləri ardıcıl təyin etməklə hesablamaları davam etirmək olar. Köməkçi hesablamaları təxminən, ədədin "bucaqlı" bölünməsində edildiyi kimi aparmaq rahatdır. Fərq ondadır ki, burada hər addımda sonrakı mərtəbənin bir yeni rəqəmi deyil, iki kiçik mərtəbənin ədədlər cütü cəlb olunur (aşağıya yazılır). Bundan ötrü əvvəlcə kökaltı ədədin bütün rəqəmlərini tam hissədə sağdan sola, kəsr hissədə isə soldan sağa cütlərə bölmək münasibdir (kənar sol rəqəm cütsüz də qala bilər).

1998 ədədindən kvadrat kök almağın ilk bir neçə addımını göstərək:

$\sqrt{1998} = 44{,}698...$

$$\begin{array}{r|l} & 16 \\ 84 & 398 \\ \times\ 4 & 336 \\ \hline 886 & 6200 \\ \times\ 6 & 5316 \\ \hline 8929 & 88400 \\ \times\ 9 & 80361 \\ \hline 89388 & 803900 \\ \times\ 8 & 715084 \\ \hline & 8881600 \\ & \cdots \end{array}$$

Təqribi kvadrat kökalmanın maraqlı bir üsulu aşağıdakı sadə faktа əsaslanıb. Əgər $\sqrt{A} - a$ ifadəsini Nyuton binomu düsturu ilə natural n-ci dərəcəyə yüksəltsək, sonra isə cüt dərəcəli kökləri atsaq, M və N-in tam ədədlər olduğu $M\sqrt{A} + N$ tipli ifadə alınacaq. Məsələn:

$$\left(\sqrt{1998}-44\right)^2 = 3934 - 88\sqrt{1998},$$

$$\left(\sqrt{1998}-44\right)^3 = 7806\sqrt{1998} - 348920,$$

$$\left(\sqrt{1998}-44\right)^4 = 30948868 - 692384\sqrt{1998}$$

Qeyd edək ki, A-nın kvadrat kökünün elə a yaxınlaşmasını götürsək ki, $|\sqrt{A} - a| < 1$, onda sonra $\sqrt{A} - a$ fərqini kvadrata, kuba, dördüncü dərəcəyə və s. yüksəldərək biz sıfıra getdikcə yaxın olan qiymətlər alacağıq. Buna görə də onları təqribən sıfıra bərabər hesab edərək ardıcıl surətdə alırıq:

$$\sqrt{1998} = \frac{3934}{88} \approx 44{,}704545,$$

$$\sqrt{1998} = \frac{348920}{7806} \approx 44{,}698949,$$

$$\sqrt{1998} = \frac{30948868}{692384} \approx 44{,}698993$$

Axırıncı halda vergüldən sonra bütün altı işarə dəqiqdir.

İndi isə praktiki olaraq bütün müasir kompyuterlərin "öyrəndiyi" alqoritm üzərində dayanaq. Bu üsulun iki min il yaşı var. Onun haqqında riyazi işləri antik tətbiqi riyaziyyatın özünəməxsus ensiklopediyası olan qədim yunan alimi İskəndəriyyəli Heron danışıb. Fərz edək ki, A müsbət ədədinin kvadrat kökünün əskiyi ilə müəyyən a_0 yaxınlaşması məlumdur. Onda A/a_0-ı $\sqrt{A}$-ya artığı ilə yaxınlaşma hesab etmək olar. $\sqrt{A}$-nın həqiqi qiyməti onların arasındadır və iki ədədin – a_0 və A/a_0 –ın a_1 ədədi ortasını götürsək:

$$a_1 = \frac{a_0 + A/a_0}{2}$$

a_1-in alınmış qiymətini daha dəqiq etmək üçün yaxınlaşmaları davam etdirmək olar (İlkin a_0 yaxınlaşması əskiyi ilə yox, artığı ilə götürüləndə də bütün deyilənlər doğrudur. Bu halda A/a_0-ın qiyməti $\sqrt{A}$ əskiyi ilə yaxınlaşma olacaq. Yeni alınmış a_1 qiymətinə sonrakı dəqiqləşmə prosesini tətbiq etmək olar və s.).

Məsələn, $\sqrt{1998}$ kökü üçün a_0 = 44 götürərək ardıcıl surətdə alırıq:

Yaxınlaşmanın sayı	Yaxınlaşmanın qiyməti
0	44,0000000000000
1	44,7045454545455
2	44,6989936220363
3	44,6989932772540
4	44,6989932772540

Cədvəldən göründüyü kimi, yaxınlaşmanın xətası hər bir addımla sürətlə azalır – sayca dördüncü qiymət vergüldən sonra 13-cü işarəyə kimi üçüncü ilə üst-üstə düşür.

* * *

Jül Vernin "Sirli ada" romanının qəhrəmanları taleyin hökmü ilə Sakit okeanın ənginliklərində itib-batmış bir quru parçasına düşürlər. Onların heç bir hesablama aləti yox idi, lakin bununla belə mühəndis Sayros Smitin ixtiraçılığı və qabiliyyəti nəticəsində onlar düşdükləri adanın dəqiq koordinatlarını qiymətləndirə bildilər. Mühəndis bunu

ancaq ona görə edə bildi ki, təqribi hesablamalar metodları, xüsusi halda kvadrat kökalmanın bir üsulu ilə tanış idi.

HESABLAMA MAŞINLARI NƏDİR?

Maşın nədir sualına ən adi cavab, deyəsən, aşağıdakıdır: maşın hər hansı işi insanın iştirakı olmadan görən qurğudur. Məktəb fizika kursundan bildiyimiz kimi, işə fiziki, mexaniki, elektrik, istilik enerjisi sərf olunur. Çox vaxt belə işləri yerinə yetirərkən bir enerji növünü digərinə: elektrik plitəsini qızdırmaq üçün elektrik enerjisini istilik enerjisinə, avtomobili və ya teplovozu hərəkətə gətirmək üçün istilik enerjisini mexaniki enerjiyə və s. çevirmək lazım gəlir. Lakin heç də hər bir iş təkcə enerji sərfi ilə bitmir. Saatsazın, mağazadakı kassirin və ya çətin məsələni həll edən şagirdin işini sərf olunmuş fiziki qüvvələrin miqdarı ilə ölçmək olarmı?

İş – gedişində müxtəlif əməllər yerinə yetirilən prosesdir. Onların bəziləri əhəmiyyətli enerji sərfi tələb edir – yük qaldırmaq, qayka burmaq, kötük yarmaq. Bu əməllər energetik və ya fiziki əməllərdir.

Digər əməllər fiziki qüvvənin tətbiqindən birbaşa asılı deyillər. Məsələn, şifahi hesablamalar və lüğətdə lazımi sözü axtarmaq belələrindəndir. Bu iş enerji ilə deyil, informasiya ilə bağlıdır. İnformasiya ilə nə etmək olar? Onu axtarmaq (sözü lüğətdə, telefonu məlumat kitabçasında, kitabı kitabxana kataloqunda), yadda saxlamaq (ağılda, kağıza və ya elektron yaddaşa yazmaqla), ötürmək (yazılı və ya şifahi formada, telefon və ya teleqrafla), çevirmək (riyazi əməliyyatlar yolu ilə bir qism ədədlərdən digərlərini almaq, mətnləri bir dildən digərinə tərcümə etmək) olar.

Nəhayət, məqsədi başqa əməllərə təsir etmək və ya bir əməli digəri ilə birləşdirmək, nəyisə qoşmaq və ya açmaq, televizorun səsini yüksəltmək, digər işçiyə daha sonra nə etmək barədə göstəriş vermək olan əməllər də mövcuddur. Belə əməllər idarəedici adlanır. Onların nəticəsi sərf olunan enerjinin miqdarından asılı deyil. Düyməni hansı qüvvə ilə basmaq vacib deyil – əsası basmaqdır. Bu yavaşca basmaq böyük energetik effekt doğura bilər: motor işə düşər, körpü partlayar və ya lift qalxar. Digər tərəfdən, mənası informasiya ötürülməsində olan əməl baş verə bilər: məktəb zəngi çalınar ("dərs başlayır"), sirena uğuldayar ("həyəcan"), həkimin kabinetinin qapısı üstündəki lampa yanar ("daxil olmaq olar").

Uzun müddət maşın yalnız bir və ya bir neçə əməl yerinə yetirə bilirdi, məsələn, yükü qaldırmaq və ya endirmək. Bir əməli digəri ilə yalnız bu maşını idarə edən adam birləşdirə bilirdi. İnsanların iştirakı olmadan müəyyən əməliyyatlar ardıcıllığını yerinə yetirə bilən maşınların, məsələn, toxucu dəzgahı, icadı mühüm hadisə oldu. Avtomatlaşdırma elə müxtəlif əməliyyatların mürəkkəb ardıcıllıqlarını yerinə yetirməyə qadir olan maşınları yaratmaqdadır.

Beləliklə, hesablama maşını hesablamaları avtomatlaşdıran maşındır; informasiya hesablama maşınlarının işlədiyi nəsədir; idarəetmə informasiyalar üzərində ayrıca sadə əməlliyyatları mürəkkəb hesablama proseslərinə birləşdirməyə imkan verir.

ALQORİTM

Bu və ya digər işi avtomatlaşdırmaq üçün onu sadə əməllərin dəqiq təyin olunmuş ardıcıllığı kimi təqdim etmək lazımdır ki, burada da işçi əməllər öz aralarında idarəedici göstərişlərin köməyi ilə birləşirlər. Sonra nə etməli? Hesablama maşınının yerinə yetirməli olduğu iş hesablama prosesidir. Bu prosesin sadə əməlləri riyazi obyektlərlə müxtəlif sadə əməllər: iki rəqəmin toplanması, düsturda dəyişənin yerinə ədədin qoyulması və başqalarıdır. İdarəedici göstərişlər, məsələn, düsturda mötərizələrin düzülməsində (əvvəlcə daxili mötərizələri hesablamaq lazımdır), bölmə zamanı əməllər ardıcıllığını təsvir edən qaydalarda, ən kiçik ortaq bölünənin tapılmasında və başqalarında olur. Sadə əməllər ardıcıllığı şəklində təqdim olunmuş hesablama prosesi üçün riyaziyyatda xüsusi alqoritm adı mövcuddur. Buna görə də bizim ilkin tərifimizi dəqiqləşdirərək demək olar ki, hesablama maşını və ya riyazi maşın alqoritmləri yerinə yetirməyə qadir olan qurğudur. Əlbəttə, riyaziyyatda alqoritm anlayışı hesablama maşınları ilə əlaqədar yox, çox-çox əvvəllər meydana gəlmişdi. Lakin məhz o, kompyuterlər haqqında bütün elmin əsasında durur.

Hər bir alqoritmin yaradılması üç mərhələdən keçir. Əvvəl alqoritmi fikirləşirlər. Sonra isbat etmək lazımdır ki, o, həqiqətən "işləyir", yəni qarşıya qoyulan məsələni həll edir. Nəhayət, riyaziyyatçı öz alqoritmini elə yazmalıdır ki, onu hətta o qədər də biliyə və istedada malik olmayan istənilən adam yerinə yetirə bilsin. Verilmiş alqoritmin riyaziyyatın hansı sahəsinə aid olmasından asılı olmayaraq alqoritmin təsviri tamamilə təyin olunmuş tələblərə cavab verir. Bu tələblər hansılardır?

1. Alqoritmin hər bir əməli elementar, yəni kifayət qədər sadə olmalıdır. Sadə əməlləri, adətən, alqoritmlərin addımları adlandırırlar. Belə ki, iki birrəqəmli ədədin toplanmasını elementar (bundan da sadəsi varmı?) hesab etmək olar, iki çoxrəqəmli ədədin "sütunla" toplanması isə birinci sinifdə öyrədilən tam alqoritmdir. Ədədləri bir-birinin altında (mərtəbə vahidlərinə uyğun) yazmaq və sağdan sola ardıcıl olaraq onların rəqəmlərini toplamaq lazımdır. İkirəqəmli ədəd alınırsa, onun yuxarı mərtəbə vahidlərini iki sonrakı rəqəmin cəminə əlavə edirlər.

2. Addımların ardıcıllığı dəqiq təyin olunmalıdır. Yəni təsvirdə hansı addımdan başlamaq, hər bir növbəti addımdan sonra hansı addımı yerinə yetirmək və sonuncu addım hansı olacağını göstərmək lazımdır. Məsələn, 23 və 45 ədədlərini cəmləyərkən axırıncı addım böyük mərtəbə vahidlərinin toplanması olacaq: 2 + 4 = 6. 23 və 49-u toplayan zaman axırıncı addımda böyük mərtəbə vahidlərinin cəminə "köçürməni", əvvəlki addımda yadda saxladığımız vahidi ("iki yazırıq, bir yadda") əlavə edirik. 83 və 45-i cəmlərkən axırıncı addım nəticəyə soldan 8 və 4-ü cəmlərkən alınmış böyük mərtəbə vahidini əlavə etməkdir.

Nəzərdən qaçırmayın ki, bizim üç müxtəlif çüt üçün olan sadə misalımızda axırıncı addımlar müxtəlif oldu. Lakin alqoritm bütün toplananlar üçün yararlı olmalıdır! Və bunu təmin etmək, yəni "ümumi halda" alqoritm təsvir etmək onu fikirləşənin işidir. Sütunla toplama alqoritmində axırıncı addımı təyin etmək üçün: böyük mərtəbə vahidlərinin toplanmasından sonra köçürmə varmı şərtinin yoxlanmasını daxil etmək lazımdır. Yoxdursa, bununla hər şey qurtarır. Varsa, köçürmənin qiymətini (vahidi) cəmin böyük həddi edirik. Alqoritmlərin ümumi təsvirinin ən yayılmış növlərindən biri də cəbri ifadələrdir. $(a + b)(2c + d)$ tipli ifadələrdə əməllərin ardıcıllığı hərflərin yerinə hansı ədədlərin qoyulacağından asılı deyil. Bu ardıcıllıq mötərizələrin yerləşməsi və mötərizələr olmadıqda vurma və bölmənin toplama və çıxmadan qabaq yerinə yetirilməsini tələb edən qayda ilə təyin olunur.

3. Verilənləri, yəni bütövlükdə alqoritmin işlədiyi obyektləri və onun ayrı-ayrı addımlarını dəqiq təyin etmək gərəkdir. Məsələn, həndəsi məsələlərdə obyektlərin bir neçə növü və onların elementləri (bucaqlar, hündürlüklər, diaqonallar), ədədlər (bucaqların qiymətləri, parçaların uzunluğu və s.) iştirak edir. Hər bir əməl obyektlərin ancaq müəyyən növünə tətbiq oluna bilər. Fiqurların yerini dəyişmək və onları döndərmək olar. Ədədləri toplamaq və vurmaq olar, ancaq heç də həmişə yox – bucağın qiymətinin parçanın uzunluğu ilə toplanmasının mənası yoxdur.

Müxtəlif ədəd növləri üçün eyni bir prosedur (deyək ki, toplama) müxtəlif cür təşkil olunacaq. 111 + 11 neçə edəcək? Siz - 122 deyəcəksiniz? Əgər bu ədədlər onluq say sistemində təqdim olunsalar, hə. Lakin onlar ikilik də ola bilərlər. Onda

111+11=1010

Başqa misal: tam ədədlər toplanırsa, sütunla yazılış zamanı toplananlar sağ kənara (kiçik mərtəbə vahidi) görə düzlənir. Onluq kəsrlər başqa cür yerləşir, onları tam hissəni kəsr hissədən ayıran vergülə (və ya nöqtəyə) görə düzləndirirlər. Adi kəsrləri isə ümumiyyətlə sütunlarla toplamaq mümkün deyil. Onların cəmlənməsi üçün tamam başqa alqoritm – ortaq məxrəcə gətirmək tətbiq olunur.

Gördüyümüz kimi, ədədlərlə işləyərkən onların təqdim formasını (say sistemini), tam və ya kəsrli olmalarını və kəsrlidirlərsə, onluq və ya adi olmalarını göstərmək lazımdır.

4. Alqoritm yaddaşın – ilkin verilənlərin, aralıq hesablamaların və son nəticənin yazıldığı yerin olmasını nəzərdə tutur. Artıq sadə toplama alqoritmində yazılması ("iki yazırıq") və yadda saxlanılması ("bir yadda") lazım gələn aralıq nəticələr peyda olur. Gündəlik hesablamalarda bizə bəzən öz

yaddaşımız kifayət edir. Onda alqoritmlər, onlar üçün müəyyən verilənlər (məsələn, vurma cədvəli), şifahi hesablamalarda isə - bütün aralıq hesablamalar yerləşir. Lakin tez-tez yaddaş "çatmır" və biz kağızdan istifadə edirik: çoxrəqəmli ədədləri kağızsız vurub-bölmək çətindir.

Böyük miqdarlı ilkin və aralıq nəticələrin olduğu hesablamalarda (məsələn, müəssisələrdə və mağazalarda pul hesablamaları, hava proqnozu, təyyarələrin layihələndirilməsi zamanı hesablamalar) yaddaşa arxayın olmaq olmaz. Verilənlərin yazılması üçün nəinki çoxlu miqdarda kağız lazımdır, həm də bu yazılışı müəyyən şəkildə təşkil etmək – onları cədvəllərdə qruplaşdırmaq, nömrələnmiş qovluqlara yığmaq, heç nəyin itməməsi və zəruri verilənlərin cəld axtarılması üçün kartotekalar aparmaq lazım gəlir.

Alqoritmin son dərəcədə dəqiq olması üçün onun təsviri zamanı kənara meyl etməyə, təsadüfən nəyi isə düz etməməyə, səhv eyməyə imkan verməyən çoxlu xırda detalları göstərmək lazımdır. Buna görə də bütün dəqiqlik və birqiymətlilik tələblərinə cavab verən "əsil" alqoritm həmişə uzun, iri və "xırdaçı" olur.

Riyaziyyat kitablarında şərh olunan alqoritmlərdə, adətən, bir çox detallar buraxılır. Hesab olunur ki, bəzi hesablamaları oxucu müfəssəl izahatsız edə bilər. Belə təsvirlərdə "sonra dördüncü dərəcəli hansısa tənliyi həll etmək lazımdır" və ya indi məsələ hansısa qrafda ən qısa yolu axtarmağa gətirilir" tipli ifadələrə rast gəlmək olur. Aydındır ki, dördüncü dərəcəli tənliyi həll edə bilməyən və ya qrafda ən qısa yolu axtarmağı bacarmayan şəxs verilmiş təsvirdən istifadə edə bilməz, deməli, bu, ciddi desək, "əsil" alqoritm deyil.

Məktəb dərsliklərində alqoritmlərin təsviri zamanı da (ortaq məxrəcin tapılması, düsturlarla hesablamalar, bucaqlı bölmə) bütün təfsilat göstərilmir. Fərz edilir ki, şagird vurma cədvəlini əzbərləyib, sütunla toplamağı, loqarifmik cədvəllərdən istifadə etməyi bacarır, bilir ki, $c + 2d$ ifadəsində 2 və d arasında vurma işarəsi durur: $c + 2 \cdot d$ (özü də burada vurmanı toplamadan əvvəl yerinə yetirmək lazımdır) və s.

Bəs o bütün bunları bilmirsə? O, alqoritmlərlə işləyə bilərmi? Əgər "fərz edilən" biliklər son dərəcə müfəssəl şəkildə alqoritmin təsvirinə salınsa, bəli. Darıxdırıcıdır? Əsil alqoritm darıxdırıcı olmalıdır. Onda fantaziyaya yer yoxdur, o nə isə bilik və istedad tələb etmir (və etməyə haqqı da yoxdur). Deyiləni elə və artıq heç nə. Etibarlı maşın kimi diqqətli və mexaniki işlə.

Budur, bizim üçün mühüm söz – maşın sözü deyildi. İstənilən alqoritmin mahiyyəti ondadır ki, o o qədər dəqiq və müfəssəl təsvir olunmalı və elə sadə addımlardan ibarət olmalıdır ki, onu maşın yerinə yetirə bilsin.

İLK HESABLAMA MAŞINLARINDAN FƏRDİ KOMPYUTERƏ

ELEKTRON ERASINA QƏDƏRKİ HESABLAMA MAŞINLARI

Yəqin ki, çoxları fikirləşir ki, riyaziyyatçılar saymağı xoşlayırlar. Əslindəsə riyaziyyatçılar teorem isbat edir, ədədlərin, fiqurların və digər obyektlərin xassələrini öyrənirlər. Və konkret əməllərlə edilən uzun hesablamalar, onlar üçün, adətən, maraqlı deyil. Hesablamalarda asanca səhv etmək olur, onlar çoxlu vaxt aparır və heç də həmişə yeni riyazi bilik vermirlər. Eyni zamanda mürəkkəb və dəqiq hesablamalar riyaziyyatdan istifadə olunan digər elmlərdə – əvvəlcə astronomiya, sonra fizikada – zəruri oldular. Buna görə də riyaziyyatçılar maşınların köməyi ilə hesablamaları necə asanlaşdırmaq üzərində fikirləşdilər.

1642-ci ildə fransız alimi Blez Paskal birinci mexaniki hesablama maşınını yaratdı. O hər biri onluq ədədin bir mərtəbəsinə uyğun gələn və üzərində 0-dan 9-dək rəqəmləri saxlayan qarşılıqlı təsirdə olan təkərlər sistemindən ibarət idi. Təkər tam bir dövr edəndə, digəri bir rəqəm yerini dəyişirdi (bu, əl hesablaması prinsipinə oxşayır). Paskalın maşını yalnız toplamaq və çıxmaq bacarırdı.

Alman riyaziyyatçısı Qotfrid Vilhelm Leybnis hesablamaların mexanikləşdirilməsi işinə böyük diqqət ayırırdı. Onun 1694-cü ildə yaratdığı hesab maşını daha böyük imkanlara malik idi – bütün hesab əməllərini yerinə yetirirdi. Lakin o çox böyük idi və ləng işləyirdi.

XIX əsrdə ingilis riyaziyyatçısı və ixtiraçısı Çarlz Bebbic hesablama texnikasının inkişafına böyük töhfə verdi. O, qırx

ildən artıq analitik adlandırdığı proqramlaşdırılan hesablama maşınının layihəsi üzərində işlədi. Hesablamaları proqramlaşdırmaq ideyası, eləcə də onun reallaşdırılması üsulu: proqramın maşına perfokartlarla daxil edilməsi Bebbicə məxsus idi. O ilk dəfə olaraq aralıq hesablamalar üçün yaddaşı daxil etdi, maşında ikilik say sistemindən istifadə etməyi də o təklif etdi.

Bebbicin maşını sırf mexaniki idi və böyük miqdarda ifrat dəqiq detalların hazırlanmasını tələb edirdi. Layihə yarımçıq qaldı. Artıq Bebbicin ölümündən sonra onun bəzi ideyaları elektromexaniki say maşınlarının yaradılması zamanı istifadə edildilər. *XX* əsrin ortalarına qədər belə maşınlarda mürəkkəb mühasibat əməlləri edir və statistik verilənləri emal edirdilər.

İLK ELEKTRON HESABLAMA MAŞINLARI (EHM)

XX əsrin 30-cu illərinin sonuna mürəkkəb hesablamaların avtomatlaşdırılmasına tələb xeyli artdı. Onlar həm təyyarələrin layihələndirilməsində, həm atom fizikasında, İkinci dünya müharibəsinin başlanması ilə isə bir çox hərbi məqsədlərdə: artilleriya atəşi zamanı hesablamalarda, düşmən kəşfiyyatının kodlarının deşifrlənməsində, atom bombasının hazırlanmasında və s. lazım oldular. Təbiidir ki, hərbi tələbat üçün olan işlər ciddi şəkildə məxfiləşdirilmişdi, lakin əvəzində onlara ən yaxşı mütəxəssislər cəlb edilirdi, eləcə də maliyyələşdirmə ilə problemlər olmurdu (Axı məhz pul çatışmamazlığına görə Çarlz Bebbic işlərini yarımçıq qoymuşdu).

1944-cü ildə Harvard (ABŞ) Universitetinin professoru Qovard Aykenin rəhbərliyi altında axırıncı elektromexaniki maşın "Mark 1" işlənib-hazırlandı. O, 15 m uzunluğunda idi və iki 23 mərtəbəli ədədi 4 saniyəyə sələflərindən qat-qat tez vururdu.

Artıq 1945-ci ildə ABŞ-da Con Mouçli və Con Ekkertin rəhbərlik etdiyi kollektiv ilk elektron hesablama maşını "ENİAK" yaratdı. Ölçülərinə görə (30 *m*) o, "Mark 1"-dən iki dəfə böyük idi və min dəfə tez sayırdı: saniyədə 300 vurma edirdi. Hesablamaları elektron lampa sxemləri yerinə yetirirdi. Proqramı isə maşına bilavasitə onun yerinə yetirilməsindən əvvəl daxil etmək lazım gəlirdi. Bu, şteker üsulu ilə edilirdi: ştekerləri müvafiq oyuqlara taxaraq maşın bloklarını lazımi ardıcıllıqla birləşdirirdilər.

1946-cı ildə *XX* əsrin ən böyük riyaziyyatçılarından biri olan Con Fon Neyman hesablama maşınının əsas cəhətlərinə görə indi də saxlanılan yeni strukturunu təklif etdi. O, Macarıstanda doğulmuşdu, bir müddət Almaniyada işləmişdi, ömrünün böyük hissəsini isə ABŞ-da keçirmişdi. Fon Neymanın riyaziyyatın ən müxtəlif oblastlarında: riyazi fizikada, riyazi iqtisadiyyatda

CON FON NEYMAN

Jon Fon Neyman (1903 – 1957) Budapeştdə varlı macar bankirinin ailəsində doğulub. Valideynləri ona Yanoş adı vermişdilər, İsveçrədə və Almaniyada təhsil və iş illərində o özünü İohan, ABŞ-a köçəndən (1930) sonra isə Con adlandırdı.

1933-cü ildə Prinstonda (ABŞ) Perspektiv araşdırmalar institutu işə başladı. İnstitutun əməkdaşları, xüsusən professorlar heç kim qarşısında hesabat vermir və onları maraqlandıran problemləri işləyir, institutsa onların araşdırmalarını maliyyələşdirirdi. Fon Neyman 1933-cü ildə, Albert Eynşteynin ardınca institutа qəbul edilmişdi.

İkinci dünya müharibəsi zamanı amerikalı alimlər hərbi sifarişləri yerinə yetirməyə başladılar. Fon Neymanı atom bombasının yaradılması üzrə ən məxfi və iri "Manhetten" layihəsində iştiraka cəlb etdilər.

Eyni zamanda o, digər hərbi layihə - "ENİAK" elektron hesablama maşını ilə tanış oldu. Onun quruluşunu təhlil edən fon Neyman EHM-nın yeni növ məntiqi təşkili ideyasına gəldi. O vaxtdan saxlanan proqram (yəni yaddaş qurğusunda ədədi formada saxlanan) prinsipi əsas prinsip olaraq qalır və ehtimal ki, o heç vaxt şübhə altına düşməyəcək. Layihələndirilməsində fon Neymanın bilavasitə iştirak etdiyi və onun şərəfinə "CONİAK" adlandırılan EHM-lərin biri (1954) hidrogen bombasının yaradılması zamanı informasiyanın emalında həlledici rol oynadı.

Avtomatların nəzəriyyəsinin qurulması müharibədən sonrakı dövrdə fon Neymanın ən böyük elmi uğuru oldu. 1952-ci ildə "Ehtimallı məntiq və etibarsız elementlərdən etibarlı orqanizmlərin sintezi" işində o, etibarlı EHM və digər avtomatların yaradılması yolunu göstərmişdir.

1954-cü ildə fon Neymanı ABŞ-ın atom enerjisi üzrə komissiyasının üzvü təyin etdilər və 1955-ci ilin yazında o, Prinstondan Vaşinqtona köçdü. Bir neçə ay sonra həkimlər onda sümük xərçəngi aşkar etdilər. 1957-ci il fevralın 8-də Con fon Neyman həyat yolunu vaxtsız başa vurdu. Onun işlədiyi axırıncı kitab – "Hesablama maşını və beyin" – tamamlanmamış qaldı.

işləri var. O, elmin yeni istiqamətlərini – oyunlar nəzəriyyəsini yaratmış, riyazi məntiq və alqoritmlər nəzəriyyəsi ilə məşğul olmuşdur.

Onun hesablama maşınları layihəsinin başlıca ideyalarından biri saxlanılan proqram prinsipidir. Bu proqram verilənlər və aralıq nəticələrlə birgə maşının yaddaşında saxlanılır. Bu prinsipin nəticəsində maşında eyni zamanda istənilən qədər proqram (təki yaddaş kifayət etsin) saxlanılır və onların ixtiyari birini dərhal işə buraxmaq olur. Saxlanılan proqramlı ilk maşın 1949-cu ildə M. Vilksin rəhbərliyi altında Böyük Britaniyada qurulmuşdu.

Rusiyada ilk EHM – "MESM" (kiçik elektron hesablama maşını) 1951-ci ildə akademik Sergey Alekseyeviç Lebedevin rəhbərliyi altında yaradılmışdı. Bu vaxtadək bütün maşınlar bir nüsxədə hazırlanırdı, 50-ci illərdəsə EHM-lərin kütləvi istehsalı və onların dünyanı fəth etməsi başladı.

Ötən yarım əsr ərzində hesablama maşınları xeyli dəyişmiş və daha çox da cəmiyyəti dəyişdirmişdir. Onların imkanları ilk EHM yaradıcılarının arzuları hüdudlarını xeyli aşmışdır. Müasir kompyuterlər nəinki hesablayır, eləcə də idarə edir, informasiya yığır, kitab çap etməyə, film çəkməyə kömək edir və hətta əyləndirirlər.

Bəs bu illər ərzində kompyuterdə yeni nə peyda olub və nə dəyişməz qalıb?

EHM ARXİTEKTURASI

EHM-in strukturu və ya deyildiyi kimi arxitekturası (yəni funksional bloklar və onların aralarındakı əlaqələr dəsti) 50 il ərzində praktiki olaraq dəyişməyib. Müasir kompyuterlər "fon-neyman" arxitekturasını saxlayırlar ki, bu da aşağıdakıları ehtiva edir:

– hesabi-məntiqi qurğu (HMQ) və ya elementar əməliyyatların (maşın komandalarının) yerinə yetirilməsi bloku;

– addımların sırasını göstərən, yəni hesablama prosesini idarə edən idarəetmə bloku;

– verilənlərin daxil edilməsi və nəticələrin çıxarılması qurğusu;

– yaddaş.

Verilənlər və proqramlar daxil edilmə qurğusu vasitəsi ilə yaddaşa daxil edilir və orada saxlanılır. Proqram maşın komandalarından ibarətdir. Hər komanda, öz növbəsində, yerinə yetirilməli əməliyyatın kodun- dan, bu əməliyyatların arqument və ya operandalarından (konkret ədədlərdən və ya onların yerləşdiyi oyuqların ünvanlarından) və nəhayət, nəticənin "qoyulmalı" olduğu oyuq ünvanından ibarətdir. Proqramın hər bir hesablama komandasını yerinə yetirmək üçün idarəetmə bloku aşağıdakı əməllər ardıcıllığını həyata keçirir:

1) növbəti komandanın ünvanını (yaddaşdakı yerini) müəyyən edir;

2) komandanı yaddaşdan oxuyur və şifrini açır;

3) operandanı yaddaşdan çağırır və onu HMQ-na göndərir;

4) HMQ-nu lazımi əməliyyatın yerinə yetirilməsinə kökləyir;

5) alınmış nəticəni komandada göstərilən ünvana göndərir.

Hesablama komandalarından başqa idarəetmə bloku digər: informasiyanın yaddaşın bir yerindən başqasına ötürülməsi, eləcə də informasiyanın daxil və xaric edilməsi komandalarını da yerinə yetirir.

Kompyuterdə yaddaş belə təşkil olunub: hər bir oyuq öz nömrəsinə (ünvanına) malikdir, bu ünvanlar ikilik kodlar şəklində maşın komandaları operandaları kimi göstərilir, xüsusi cihaz (deşifrator) isə girişdə ünvanın kodunu alaraq müvafiq oyuğa daxilolma kanalını açır. Yaddaşa ünvanlı daxilolmanın mövcudluğu fon-neyman arxitekturasının mühüm toplananıdır.

Hər cür alqoritmləri yerinə yetirmək iddiasında olan universal maşın sonsuz yaddaşa malik olmalıdır, lakin ünvanların sayı həmişə sonludur. Bir halda ki, ünvana daxilolma cihazla reallaşır, onda ünvanlanan (ünvana malik olan) oyuqların sayı maşın layihələndirilərkən qeyd olunmalıdır. O, verilmiş növ bütün maşınlar üçün eynidir və maşının iş prosesində dəyişə bilməz. Necə olsun?

Belə bir çıxış tapdılar: yaddaşı daxili və xarici yaddaşa böldülər. Operativ yaddaş adlanan daxili yaddaş ünvanlıdır və deməli, fiksə olunmuş həcmə malikdir. Operativ yaddaşın həcmi ixtiyari kompyuterin ən mühüm xarakteristikalarından biridir. Xarici yaddaş sayları dəyişə bilən maqnit diskləri və lentləridir. Maşın yalnız operativ yaddaşda olan verilənlərlə işləyir. Xarici yaddaşdan olan informasiyadan istifadə etməzdən əvvəl onu operativ yaddaşa yazmaq lazımdır. Operativ yaddaşın həddən artıq dolmaması üşün onun təmizlənməsi əməliyyatını keçirmək: cari hesablamalar üçün istifadə olunmayan informasiyanı xarici yaddaşa yazmaq, lazım olmayanı (köhnəlmiş verilənləri və proqramları, aralıq hesablamaların nəticələrini və s.) sadəcə kənarlaşdırmaq lazımdır. Bununla əlaqədar olaraq maşın komandalarının yeni növü – daxili və xarici yaddaş arasında informasiya mübadiləsi əməlliyyatları meydana gəlir.

Ünvanlaşma ilə bağlı digər məsələ, ünvan oyuğun ölçüsünün necə olmasıdır. Yaddaşın minimal vahidi bit – ya 0, ya 1-in saxlandığı oyuqdur. O, ikilik ədədin bir dərəcəsinə uyğundur. Lakin hər bir bit öz ünvanına malik olmalıdırmı? Bu, nə proqramçılara, nə də layihəçilərə münasibdir. Proqramçılara bir ədədin yazılışı və oxunması üçün yaddaşa bu ədəddəki ikilik dərəcələr (sıfırlar və vahidlər) qədər müraciət etmək lazımdır. Layihəçilərə, hər bir bitə daxilolmanı təmin etmək üçün, həddən artıq çox cihaz lazımdır.

Yaddaşın və saxlanan informasiyanın daha iri vahidi 8 ardıcıl bitdən ibarət olan baytdır. Klaviaturun simvollarının (böyük və kiçik hərflər, rəqəmlər, durğu işarələri, çoxlu müxtəlif və rəngbərəng şriftlər daxil olmaqla latın və rus hərfləri) sayı bu ədəddən kiçik olduğundan, bir baytda adi mətnin ixtiyari simvolunu (eləsini ki, onda çoxlu müxtəlif şriftlərdən və rəngbərəng hərflərdən istifadə edilmir) yerləşdirmək olar. Bu, baytı nəinki maşın, ümumiyyətlə mətn informasiyasının rahat ölçü vahidi edir – adi çap olunmuş mətndə simvolların sayı təxminən onun maşın təqdimatındakı baytların sayına bərabərdir. Böyük informasiya həcmlərinin yazılışı zamanı yaddaşda yerə qənaət etmək lazım gələrsə, onun daha yığcam ikilik kodlaşdırılmasından (onlar yerləşdirmə adlanır) istifadə olunur. Axı ona ancaq səkkizdərəcəli ikilik ədəd və ya üç onluq rəqəmdən artıq olmayan tam ədəd və ya kəsr yazmaq mümkündür, özü də hamısını yox. Böyük rəqəmlərlə işləmək və ya yüksək dəqiqlik tələb edən hesablamalar, yəni kəsrdə vergüldən sonra böyük miqdarda işarələr üçün bu, aşkar kifayət deyil. Bax, buna görə də əsas ünvanlanan vahid olaraq 32 ikilik dərəcə saxlayan maşın sözü götürülür.

EHM NƏSİLLƏRİ

50-ci illərin əvvəllərindən hesablama maşınlarının sənaye buraxılışı qərarlaşdı. Onda da onların parlaq inkişafı və təkmilləşməsi başladı. Onların əsas funksional blokları ümumi cəhətlərinə görə əvvəlki kimi qalsa da, EHM-lərin imkanları xeyli dəyişdi. İstifadəçi baxımından ilk hesablama maşınlarının və müasir kompyuterlərin oxşar heç nəyi yoxdur.

50-ci illərin EHM-ı böyük zal tutur, ona yüksək ixtisaslı mühəndislərin, proqramçıların və operatorların bütöv komandası xidmət edirdi. İstifadəçilər bu zala buraxılmırdı. Onlar öz proqramlarını perfokartlara "vurur" (özləri və ya xüsusi perforasiya xidməti), onları operatorlara verir və bir neçə saatdan sonra böyük kağız vərəqlərində çap olunmuş nəticəni alırdılar. Proqramda səhvlər olanda (böyük proqramı birinci dəfədən səhvsiz yazmaq praktiki cəhətdən mümkün deyil) səhv kartların vurulmasından başlayaraq maşınla bütün iş prosesi təkrarlanırdı. Bir maşında bir neçə istifadəçi işləyirdi. Onlar maşın vaxtını və maşın yaddaşını bölməli olurdular. O illərin EHM-ları isə, indiki ölçülərə görə çox ləng, saniyədə cəmisi bir neçə min əməliyyatı sürətlə hesablayırdılar.

Müasir fərdi kompyuter yığcam stolüstü cihazdır. Ondan, adətən, bir nəfər istifadə edir. Ekran vasitəsi ilə o, verilənlərin daxilolmasına nəzarət edir, hesablamalar qurtaran kimi onların nəticəsini görür, cəld düzəlişlər edir və özünə lazım olan şeyləri çap edir. Normal işləyən kompyuterə heç bir daimi xidmət tələb olunmur.

Belə radikal dəyişikliklər necə və nəyin hesabına baş verib? Hər şeydən əvvəl onlar elektronikanın nəhəng uğurları ilə bağlıdır. EHM-in elektron aparaturasının əsasında element bazası, yəni maşının əsas bloklarının qurulduğu elektron elementlər dayanır. Və maşının ölçüləri son nəticədə onun elementlərinin ölçüləri ilə ölçülür.

Birunci nəsil EHM-lərdə (40-cı illərin sonları, 50-ci illərin əvvəlləri) element bazası rolunu adi elektron – vakuum lampala-

rı oynayırdı ki, onlardan da son dövrlərədək televizorlarda istifadə olunurdu. Bir EHM-də naqillərlə birləşdirilmiş bir neçə min lampa olurdu. Lampalar tez-tez sıradan çıxırdı (hər ay lampaların 10%-ni dəyişmək lazım gəlirdi) və böyük miqdarda enerji sərf edilirdi. Buna görə də maşının blokларını qızmadan qorumaq ayrıca problem idi. Sürət saniyədə on minlərlə əməliyyatlarla ölçülürdü. Riyaziyyatçı-proqramçı bilavasitə maşının pultu arxasında proqramı tərtib edir, komandalarda iştirak edən yaddaş oyuqlarının bilavasitə ünvanını göstərərək komandaların kodlarını yazırdı. İş həddən artıq zəhmət tələb edən idi və ona heç cür nəzarət etmək olmurdu.

İkinci nəsil EHM-lər (50-ci illərin ortası, 60-cı illərin ortası) yarımkeçirici elementlər – tranzistorlar və diodlar bazasında işləyirdilər. Ölçülərinə görə onlar lampalardan xeyli kiçikdirlər və az enerji sərf edirlər. Elementlər çap plataları vasitəsi ilə birləşdirilirdi. Plata, elementlərin qoyulduğu yuvaları və bu yuvaları birləşdirən metallik zolaqları (naqil yerinə) olan lövhədir. Platalar maşınların yığılması üçün əsas konstruktiv vahidlər idilər (bu, ayrı-ayrı elementlərin əllə montajından xeyli sadədir). EHM-lərin istehsalı xeyli ucuzlaşdı, onların etibarlılığı artdı. Təmir də sadələşdi, nasazlıq olanda ayrıca elementi yox, platanı dəyişirdilər. Sürət saniyədə yüz min əməliyyatadək artdı.

Üçüncü nəsildən başlayaraq (60-cı illərin ortası – 70-ci illərin ortası) EHM-lərin element bazası mikroelekttron oldu. Onların əsasında inteqral sxemlər – bir silisium kristalında reallaşmış sxemlər durur. Onların ölçüləri bir neçə kvadrat miilimetrdir, belə ki, ayrıca element artıq adi gözlə görünmür. Belə sxemi əllə hazırlamaq mümkün deyil. Onların istehsalı üçün tam avtomatlaşdırılma və yüksək istehsal mədəniyyəti (məsələn, istehsal yerlərinin təmizliyinə tələblər çox yüksəkdir) lazımdır. Üçüncü nəsil maşınlarda belə sxemlərdən istifadə sürəti 10 – 20 dəfə yüksəltməyə, etibarlılığı artırmağa, hər bir elementin maya dəyərini və sxemlərin ölçülərini azaltmağa imkan verdi.

Sonralar element bazası inteqrasiya dərəcəsini artırmaq, yəni bir kristalda elementlərin sayını artırmaq hesabına təkmilləşdi. İlk inteqral sxemlər onlarla elementdən ibarət idi. Sonra böyük inteqral sxemlər (BİS) – 10 min elementə qədər və ifrat böyük inteqral sxemlər (İBİS) – on minlərlə element – meydana gəldi. Bu o deməkdir ki, bir İBİS-də bütöv birinci nəsil maşınında olan qədər element var. 70-ci illərin əvvəllərində yaradılan İBİS-ləri həm idarəetmə blokuna, həm də HMQ-ya yerləşdirirdilər. O vaxtdan komputerin iki mərkəzi bloku ümumi – prosessor adı altında birləşir, onların yerləşdiyi İBİS isə mikroprosessor adlanır.

İBİS yarananadək elementlərin ölçülərinin kiçilməsi EHM-nın ümimi ölçüsünə o qədər də təsir etmirdi. Ayrı-ayrı sxemlər xeyli kiçilsələr də, cihazların sayı artırdı və üçüncü nəsil maşınlar əvvəlki kimi böyük yer tuturdular. EHM-in arxitekturası da mürəkkəbləşdi, onların imkanları genişləndi: operativ və xarici yaddaş artdı, yeni komandalar əlavə edildi. Maşınlar eyni zamanda müxtəlif istifadəçilərin bir neçə məsələsini həll edirdi və işi elə təşkil etmək lazım idi ki, bir proses o birinə mane olmasın.

İBİS-lərin meydana gəlməsiylə vəziyyət kəskin dəyişdi. İBİS-lərə əsaslanan hesablama texnikası bir neçə müxtəlif istiqamətdə inkişaf etdi.

Ənənəvi inkişaf xətti – yüksək səmərəli bahalı maşınların işlənib-hazırlanması qaldı. Belə maşınlarda paralel hesablamalar, yəni eyni məsələnin (məsələn, tənliklər sisteminin) müxtəlif hissələrinin ümumi yaddaşla işləyən müxtəlif prosessorlarda eyni zamanda hesablanmaları mümkündür. Bu maşınlar mürəkkəb hesablamalarsız keçinmək mümkün olmayan sahələrə: nüvə fizikasına, kosmosa, geoloji-kəşfiyyata xidmət edir.

Digər tərəfdən, kompyuterin ölçülərini radikal azaltmaq imkanı hesablama texnikası üçün tamamilə yeni tətbiq oblastları açdı.

Əvvəla, stolüstü (fərdi) kompyuterlər meydana gəldi. Sürətlərinə və yaddaşlarının həcminə görə onlar üçüncü nəsil böyük maşınlarından geri qalmırlar, lakin eyni zamanda daha ucuzdurlar və xüsusi xidmət tələb etmirlər. İstifadəçi öz proqram təsərrüfatını sərbəst apara və bu zaman heç kəsdən asılı olmaya bilər. Məhz kompyuter təşkilat texnikası kimi – mətnlərin və sənədlərin hazırlanması və çapı üçün istifadə etmək sərfəli oldu. Onun adi yazı maşınlarına nisbətən böyük üstünlükləri var, tez düzəlişlər etmək, ixtiyari mətn parçalarını qoymaq, yerini dəyişmək, ləğv etmək, şriftləri dəyişmək, əvvəllər yaradılmış və ya daxil edilmiş hər şeyi saxlamaq, lazımi sayda surət çap etmək və s. mümkündür. Hər bir kiçik firmanın indi müasir hesablama texnikası var. Həm də hər bir adam istər evdə işləməyə, istərsə də şəxsi ehtiyacları üçün kompyuter ala bilər.

İkincisi, hesablama texnikası sənayenin müxtəlif sahələrində tətbiq olunmağa başladı. İndi müxtəlif cihazlarda, dəzgahlarda, idarəetmə pultlarında, rabitə qurğularında və s. mikroprosessorlardan istifadə olunur. Əvvəllər ayrı-ayrı elektromexaniki və elektron sxemlərdə işləyən bütün avtomatika tədricən mikroprosessorlara keçdi. Konkret sxemlərin layihələndirilməsi, montajı və sazlanması mikroprosessorlara qoyulmuş idarəetmə proqramlarının işlənməsi və sahmanlanması ilə əvəz edilir. Mühəndis-elektriklərin əməyi mühəndis-proqramçıların əməyi ilə xeyli dərəcədə sıxışdırılıb çıxarılır. Və nəhayət, inkişafın xüsusən son on illərdə fəallaşan üçüncü istiqaməti hesablama şəbəkələrinin yaradılmasıdır. Hesablama şəbəkəsi ümumi əlaqə ilə birləşdirilən kompyuterlər məcmusudur. Ayrı-ayrı kompyuterlərin müstəqilliyini və "fərdiliyini" pozmayan belə əlaqə onlara bir-biriylə informasiya mübadiləsi etmək imkanı verir. Bu, ümumi informasiyadan istifadə etməyə və birgə işi – istər bir müəssisə hüdudlarında, istərsə də müxtəlif müəssisələr və təşkilatlar (məsələn, bir korporasiyaya daxil olan) arasında koordinasiya etməyə imkan verir. Bundan başqa, qlobal İnternet şəbəkəsi peyda oldu və sürətlə inkişaf edir. O, həm xəbərləri konkret ünvanlara göndərmək (elektron poçt), həm müxtəlif informasiya axtarışı, həm də müxtəlif kommersiya məqsədləri üçün istifadə edilir.

Əlbəttə, belə sürətli tərəqqi təkcə element bazasının təkmilləşdirilməsi hesabına yaranmamışdı. Hesablama texnikasının digər tərəfləri də eyni zamanda inkişaf edirdi. Bu, ilk növbədə yaddaşa aiddir. Operativ yaddaşın həcmləri və onunla təmas sürətləri min dəfələrlə artdı. Xarici yaddaş da əsaslı surətdə dəyişdi. Hələ EHM-lərin üçüncü nəslində maşın zalında ayrıca dirəklər üzərində yerləşdirilən iri maqnit disklərindən istifadə olunurdu. Fərdi kompyuter ancaq kompyuterin korpusunda yerləşdirilən böyük tutumlu və kiçik ölçülü müasir "vinçester" diski, eləcə də elastik disklər yaradılandan sonra mümkün oldu.

Artıq üçüncü nəsildə "interfeysin" rahat ekran vasitələri (kompyuterlə təmas) – displeylər meydana gəldi, indi onları daha çox monitor adlandırırlar. Onlar istifadəçiyə hətta böyük maşınla belə birbaşa, operatorlarsız təmasda olmağa, proqram və verilənləri daxil və islah etməyə, proqramların yerinə yetirilməsini izləməyə və ekranda nəticələr almağa imkan verir. Monitorların meydana gəlməsi ilə verilənlərin perfokartda hazırlanması keçmişdə qaldı. Fərdi kompyuteri isə ümumiyyətlə monitorsuz təsəvvür etmək mümkün deyil.

"DƏMİR" VƏ "KAĞIZ"

Bu vaxtadək söhbət elektron və mexaniki cihazların tarixindən gedirdi. Lakin bu, müasir kompyuterin yalnız bir hissəsidir. O, rəsmi olaraq aparat təminatı, professionalların jarqonunda isə "dəmir" və ya ingilis sözü ilə "hardver" (hardware) adlanır. Hesablama maşınlarının bütün tarixi boyu onların işində "kağız" – proqram təminatı, "softver" (software) get-gedə böyük əhəmiyyət kəsb edib. Burada söhbət konkret hesablamalar üçün olan və hər bir istifadəçinin özününkü olan proqramlardan (tətbiqi proqramlar) yox, ümumi təyinatlı proqramlardan gedir. Onlar maşının özünün işini idarə edir və istifadəçinin klaviaturda yığdığı və kompyuter cihazları arasında əlaqəni həyata keçirirlər.

Birinci nəsil EHM-lər dövründə belə ümumi proqramlar yox idi və istifadəçi-proqramçı bilavasitə aparatura ilə işləyirdi. O öz proqramlarını maşın kodlarında yazırdı: komanda (deyək ki, toplama) yerinə onun kodunu, sonra bu komandanın operandasının yerləşdiyi oyuqların ünvanlarını, nəticənin qoyulacağı oyuğun ünvanını göstərirdi. İkinci və üçüncü nəsillərdə proqramlaşdırma dillərində proqramlar yazmağa başladılar. Proqramların mətnləri artıq maşın kodları ardıcıllıqları deyildilər və daha çox, bu dillərin sərt tələbləri əsasında yazılsalar da, daha çox adi riyazi mətnlərə bənzəyirdilər.

Hər bir dil üçün xüsusi proqram - translyator yaradılıb ki, o da səhvsiz mətni maşın kodları ardıcıllığına çevirir. Mətndə səhvlər varsa, onda translyator onları göstərir. Aydındır ki, belə translyator bu dildə yazanların hamısına lazımdır və o, maşının yaddaşında saxlanmalıdır. Bundan başqa, müxtəlif standart hesablamalar: triqonometrik funksiyalar, loqarifmlər və s. üçün tədricən proqram kitabxanaları yığılırdı. Buna görə də xidməti proqramlar – "kitabxanaçılar" lazım gəldi ki, onlar da ümumi kitabxanada və müxtəlif istifadəçilərin xüsusi kitabxanalarında nizam yaradır, avtomatik olaraq onları yaddaşda yerləşdirir və lazım olan proqramı tez tapmaqda kömək edirlər.

Üçüncü nəsildən başlayaraq maşında eyni zamanda bir neçə proqramın emalı adi iş oldu. Bununla maşın bloklarının tam yüklənməsi əldə olunur: bir proqramı prosessor hesablayır, ikinci öz nəticələrini çap edir, üçüncü xarici yaddaşla informasiya mübadiləsi edir. Belə iş rejiminin təşkili üçün xüsusi proqramlar – əməliyyat sistemləri yaradıldı. Sonralar əməliyyat sistemləri hesablama proseslərinin idarəedilməsinin bütün əsas funksiyalarını, kitabxanalara proqram xidməti, istifadəçinin kompyuterlə qarşılıqlı əlaqəsinin təşkilini, eləcə də proqramların (onların iş prosesində) xarici qurğularla (disklərlə, ekranla, printerlə və s.) əlaqəsini özlərində birləşdirdilər.

Əməliyyat sistemləri olmadan müasir kompyuterdə iş praktik olaraq mümkün olmazdı. İstifadəçi öz əməliyyat sisteminin menyüsünü çağırarkən düyməni bir dəfə basmaqla proqram və ya mətndən ibarət olan lazımi faylı seçir və bir daha düymə basmaqla proqramı işə salır və ya mətn çap eləməyə başlayırsə, hər dəfə minlərlə (mübaliğəsiz!) ondan "gizlədilən" komanda yerinə yetirilir. Onları əməliyyat sistemi həyata keçirir.

Lakin istifadəçinin özü də xeyli dəyişib. İndi proqramçılar öz proqramlarını işləyib-hazırlarkən müxtəlif köməkçi proqramlardan, hazır proqram kitabxanalarından, proqramların düzənlənməsi və onlara nəzarət vasitələrindən istifadə edirlər. İstfadəçilərin böyük əksəriyyəti isə ümumiyyətlə heç vaxt proqramçı olmamış və proqramlaşdırmanın nə olduğunu bilmirlər. Son 20 ildə kompyuter bazarı ilə yanaşı mətnlərin yazılışı və tərtibi (mətn redaktorları), şəkillərin və cizgilərin hazırlanması, mühasibat hesablamaları, statistik verilənlərin emalı, verilənlər bazasının yaradılması və s. hazır proqramlarının ("proqram məhsullarının") bazarı yarandı. İstifadəçiyə yalnız öz verilənlərini daxil etmək və ekrana baxıb vacib düyməni basmaqla proqramın işini idarə etmək qalır. Yeni proqramların işlənib-hazırlanması ilə isə xüsusi firmalarda işləyən professional proqramçıların böyük kollektivləri məşğul olur.

Beləliklə, kompyuterlərin istifadəsi zamanı proqram təminatının rolu durmadan artır. İndi yaxşı kompyuter almaq hələ kifayət deyil. Əməliyyat sistemindən başlayaraq lazımi proqramlar dəstinə malik olmadan siz sadəcə onda işləyə bilməyəcəksiniz. Ciddi peşəkar iş üçün istifadə olunan proqramların dəyəri, adətən, kompyuter aparaturasının dəyərindən xeyli yüksəkdir.

* * *

Aydındır ki, hesablamalarla bağlı hər şeydə kompyuter riyaziyyatçının işini xeyli asanlaşdırır. Lakin bu, işin yalnız bir tərəfidir. Riyaziyyatçılar ilk dəfə hesablamaların avtomatlaşdırılması ideyasını irəli sürdülər. Və kompyuter işlərində onların rolu bununla bitmədi, əksinə, artmaqda davam etdi. Kompyuterlərin aparat və proqram təminatının işlənib-hazırlanması tamamilə yeni riyazi məsələlər qoydu ki, onlar da riyaziyyatın ümumiyyətlə informatika (ingiliscə Computer Science) adlanan yeni oblastının yaranmasına gətirdi.

ÇARLZ BEBBİC

Çarlz Bebbic 1791-ci il dekabrın 26-da İngiltərənin cənub-şərqində, London ətrafındakı Volvortda anadan olub. Onun atası "Pred, Makvort və Bebbic" bank firmasının sahibi idi və ölümündən sora oğluna böyük sərvət qoyub-getmişdi. Çarlzla 11 yaşına kimi anası məşğul olurdu, sonra o, özəl məktəblərdə oxumuşdu. Uşaqlıqdan Çarlz iki şeylə – riyaziyyat və hər cür mexanizmlərlə məşğul olmağı xoşlayırdı.

19 yaşında o, Kembric universitetinin Triniti – kollecinə daxil oldu. Onda məlum oldu ki, Bebbic riyaziyyatı öz yaşıdlarından yaxşı bilir.



Çarlz Bebbic

1812-ci ildə Çarlz və onun yaxın dostları Con Herşel və Corc Pikok digər cavan riyaziyyatçılarla birgə "Analitik cəmiyyət" təsis etdilər. Onun təşkili Böyük Britaniyada riyaziyyatın inkişafında mühüm hadisə oldu.

1813-cü ildə "Analitik cəmiyyətin qeydlərində" Bebbic öz ilk elmi məqaləsini – "Sonsuz hasillər haqqında" – dərc etdirdi və tezliklə bakalavr dərəcəsi aldı. Onun "Funk- sional hesab oçerki" adlı ikinci məqaləsi ümumi şəkilli funksional tənliklərin öyrənilməsinə həsr olunub. O, London kral cəmiyyətinin (akademiya) iclasında oxunmuş və Bebbic cəmiyyətin üzvü seçilmişdi.

1817 – 1820-ci illərdə o, əsasən funksional analiz sahəsində daha bir neçə iş dərc etdirdi. *XX* əsrin 60-cı illərində isə Britaniya muzeyində Bebbicin 1821-ci ildə yazdığı çap edilməmiş "Analizin fəlsəfəsi" kitabı tapılır. Burada C. Pikokun cəbrdə aksiomatik prinsiplərin inkişafına ilk ciddi cəhd olan "Cəbr üzrə traktatında" şərh etdiyi ideyalara yaxın fikirlər var.

1821-ci ildən sonra Bebbic riyaziyyatla az məşğul olmuş və əsasən, onun işləri tətbiqi məsələlərlə bağlı olmuşdu. Bir sıra işləri ehtimal nəzəriyyəsinə həsr olunub. "Möcüzələr haqqında Yum arqumentinə dair qeydlər" (1837) xüsusilə maraqlıdır ki, burada ekstraordinar hadisələr ehtimalı şahid ifadələri əsasında – şahidlərin sayını və onlara etibarlılıq dərəcəsini nəzərə almaqla hesablanır.

Bebbic hesablama maşınları qurmağa başladı və bu onun həyatının mənası oldu. 1822-ci ildə o, mexaniki hesablama maşınının işləyən modelini – fərqlər maşını adlanan maşını qurdu. Lakin o, fikrini tam reallaşdıra bilmədi. O zaman belə maşının detallarını hazırlamağa, sadəcə, avadanlıq yox idi (məsələn, Bebbic 18-ci onluq işarələr dəqiqliyi ilə hesablamaları layihələndirmişdi).

Fərqlər maşını uzərində işləyən Bebbic cizgilərdə daim dəyişikliklər edir, hazır hissələrə yenidən baxırdı. Və 1834-cü ildə onun analitik adlandırdığı universal hesablama maşını yaratmaq fikri baş qaldırdı. Bu layihədə Bebbic ilk dəfə hesablama prosesini proqramla idarə etmək ideyasına gəldi. O, ədəd və komandaları maşına daxil etmək üçün perfokartlardan istifadə etdi və başlıcası, şərti keçid operatorları daxil etdi. Maşını dörd əsas blok: hesabi ("dəyirman"), yaddaş ("ambar"), idarəetmə və giriş-çıxış blokları formalaşdırırdı. Bebbic onun üzərində ömrünün son günlərinədək işlədi. Amma hər halda layihə yarımçıq qaldı.

Analitik maşın layihəsi öz zamanını yüz il qabaqlamışdı. Yalnız *XX* əsrin 30 - 40-cı illərində Almaniyada Konrad Puze, ABŞ-da Hovard Aiken və Corc Stibiç elektromexaniki reledən istifadə etməklə imkanlarına görə Bebbicin maşını ilə müqayisə oluna bilən kompyuterlər qura bildilər.

Bebbic ömrü boyu ən müxtəlif elmi problemlərlə ciddi maraqlanıb. 1832-ci ildə o, "Maşınların və istehsalın iqtisadiyyatı" kitabını nəşr etdirmişdi. Bu monoqrafiya istehsalın elmi əsasda təşkilinə həsr olunmuş ilk iş idi. Kitab böyük uğur qazandı, bir neçə dəfə təkrar nəşr olundu. Onu ABŞ-da çap etdilər, alman, fransız, italyan və ispan dillərinə tərcümə etdilər.

1851-ci il Günəş tutulmasından sonra Bebbic Günəş tacının və prottuberansların tədqiqi ilə məşğul oldu. Bundan başqa o, "Ayın səthinin fiziki halı haqqında fərziyyələr" işini yazdı (buna görə *XX* əsrdə Ay kraterlərinin birini Bebbicin adı ilə adlandırdılar).

Bebbic geofizika və geologiyada bir sıra ideyalar irəli sürüb. O, buzlaqların yaranması ideyasını söyləmiş, fərz etmişdir ki, uzaq keçmişdə Yerdə ayrı iqlim olub. Öz fəhmini təsdiq etmək üçün o hələ qalan qədim meşələrdəki ağacların illik halqalarını tədqiq və müqayisə etmişdi.

Bebbic həmişə araşdırmalarda hesablama üsullarını tətbiq etməyə can atırdı. Məsələn, müxtəlif dillərdə bu və ya digər hərflərin və hərf birləşmələrinin hansı tez-

lıklə rast gəlindiyini təhlil edərək o, mətnlərin şifrlənməsi və deşifrlənməsi metodikasını işləyib-hazırladı.

1855-ci ildə Bebbic cizgilərlə və sualtı qayığın təsviri ilə məqalə çap etdirdi ki, bu qayıq hərbi məqsədlərdə istifadə olunmalıydı. Onun içində dörd nəfər iki gün ərzində suyun altında qala bilərdi.

Bebbic elmin gücünə dərindən inanırdı. O, hesab edirdi ki, dünyada baş verən hər şeyi riyazi metodların köməyi ilə idarə etmək olar. İnsan zəkasının qüdrətinə inam Bebbici istər İntibah dövrü, istərsə də Maarifçilik əsri ilə doğmalaşdırır.

O çoxlu məşhur müasirləri ilə tanış idi. Adətən şənbə günləri Bebbic 200-300 qonağın gəldiyi ziyafətlər verirdi. Onun dostları və tanışları arasında Pyer Simon Laplas, Jan Fuko, Aleksandr Humbolt, Çarlz Darvin, Çarlz Dikkens, Vilyam Tekkerey, Henri Loqfello, hersoq Vellinqton və başqaları vardı.

Alim enerji və itiağıllığını qocalığına qədər saxlamışdı. O, 1871-ci ilin 18 oktyabrında 80 illiyinə cəmi iki ay qalmış vəfat etdi.

LAMƏKAN RİYAZİYYAT

RİYAZİYYAT VƏ FİZİKA

Riyaziyyatın özünü tam gücü ilə göstərdiyi mühüm sahələrdən biri qanunların, yəni müxtəlif fiziki kəmiyyətlərin arasındakı asılılıqların, başqa sözlə, funksiyaların təsviridir. Buna sonsuz sayda misallar göstərmək olar. Ancaq ikisinə baxaq.

RADİUMUN PARÇALANMASI VƏ YA BİRİNCİ TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

Məlumdur ki, bəzi kimyəvi elementlərin atomları zaman keçdikcə öz-özünə parçalanırlar. Bu hadisə radioaktivlik adlanır. Radioaktiv parçalanmanın qəribə xüsusiyyəti ondan ibarətdir ki, hər bir ayrılıqda götürülmüş atomun nə vaxt – bir saniyədən, yoxsa min ildən sonra parçalanmasını öncə görmək mümkün deyilsə də, radioaktiv maddələrin böyük miqdarı üçün vahid zaman ərzində parçalanan atomların payı heyranedici sabitliyi ilə fərqlənir. Məsələn, radioaktiv maddənin hər kiloqramından bir saat ərzində bir qram parçalanırsa, bu, temperaturdan, təzyiqdən, ilin fəslindən asılı olmayaraq həmişə belə olacaq.

Radioaktiv maddənin atomlarının N sayının zamana görə necə dəyişməsinə baxaq. Onların sayının başlanğıc $t = 0$ anında N_0 olduğu (N_0-ın çox böyük ədəd olduğu fərz edilir) qəbul edilir. Hələlik biz ancaq bir şey deyə bilərik: $N(t)$ monoton azalan funksiyadır, axı atomlar daima parçalanır. Fərz edək ki, bir saat ərzində maddənin bir kiloqramından bir qramı parçalanır. Uyğun olaraq iki kiloqramından iki qramı parçalanır və s.

t anından $t + \Delta t$ anınadək kiçik zaman aralığı götürək. N t-nin müəyyən funksiyası olduğundan atomların sayı bu zaman N-dən $N - \Delta N$-ə qədər dəyişəcək, burada ΔN Δt zamanı ərzində parçalanmış atomların sayıdır. Parçalanma sürəti parçalanan atomların sayının onların parçalandığı zaman parçasına nisbətinin limitidir, yəni

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = -N'(t)$$

Eyni zaman aralığı üçün parçalanan atomların payı sabit olduğundan $N'(t)$ parçalanma sürəti müəyyən $\kappa > 0$ əmsalı ilə $N(t)$ kəmiyyətinə mütənasibdir:

$$-N'(t) = \kappa N(t) \text{ yaxud,}$$

$$N'(t) = -\kappa N(t) \qquad (*)$$

Biz radioaktiv maddənin "hələ yaşar" atomlarının t zaman anındakı sayını onların azalma sürəti ilə bağlayan düstur aldıq. Məlum və məchul kəmiyyətlərin ədədlər olduğu cəbri tənliklərdən fərqli olaraq burada məchul kimi $N(t)$ funksiyası və onun törəməsi çıxış edir. Belə tənliklər birinci tərtib diferensial tənliklər adlanır. "Birunci tərtib" sözləri o deməkdir ki, tənlikdə yalnız axtarılan funksiyanın birinci törəməsi iştirak edir.

Diferensial tənliklərin müxtəlif həll üsulları mövcuddur, lakin biz onların üzərində dayanmayacağıq. Verilmiş halda bizə adi müşahidə kömək edəcək: (*) tənliyindən göründüyü kimi, $N(t)$ funksiyasının törəməsi funksiyanın özündən yalnız κ sabit vuruğu qədər fərqlənir. Məhz üstlü funksiya özünü belə aparır ("Törəmə" məqaləsinə bax), buna görə də (*) tənliyinin həllini

$$N(t) = A\, e^{Bt}$$

şəklində axtaracağıq, burada A və B müəyyən sabitlərdir.

Bu funksiyanın törəməsini tapıb (*) tənliyində yerinə qoyaraq alırıq ki, ixtiyari t üçün

$$ABe^{Bt} = -\kappa Ae^{Bt}$$

Buradan $B = -\kappa$ tapırıq və deməli,

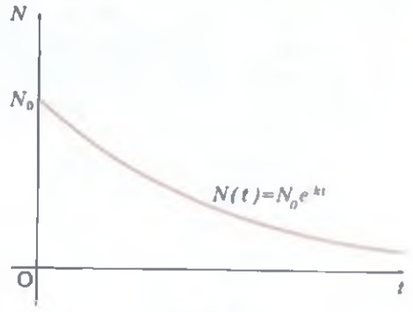
$$N(t) = Ae^{-\kappa t} \qquad (**)$$

Budur, atomların N sayının t zamanından asılılığı alındı. Yalnız A sabitindən xilas olmaq qalır. Bundan ötrü başlanğıc şərtlər adlanan şərtləri nəzərə almaq lazım gəlir. Onlar ondan ibarətdir ki, başlanğıc t=0 anında atomların sayı N_0 olmalıdır. Bu qiyməti (**) ifadəsinə qoyub $N_0 = Ae^0$ alırıq, buradan $A = N_0$ və nəhayət (şəkil 1),

$$N(t) = N_0 e^{-\kappa t}.$$

Bəs κ nədir? Biz onu yalnız müəyyən mütənasiblik əmsalı kimi təyin etmişdik. Faktiki olaraq isə onu təcrübədən təyin etmək gərəkdir, çünki o, konkret radioaktiv maddənin xassələrindən asılıdır. Maddə nə

qədər sürətlə parçalanırsa, κ o qədər



Şəkil 1.

böyükdür. Təcrübədə tez-tez T yarımparçalanma periodu adlanan kəmiyyətdən istifadə edilir. Bu, maddə miqdarının ikiqat azaldığı zaman aralığıdır. κ və T arasında əlaqə tapmaq çox asandır: tərifə görə, $N(T)=N_0/2$. $N(t)$ üçün ifadəni bura qoyaraq alırıq:

$$N_0 e^{\kappa T} = N_0/2,$$

buradan da

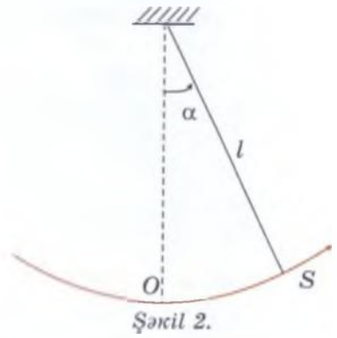
$$\kappa = \frac{ln2}{T}$$

İKİNCİ TƏRTİB DİFERENSİAL TƏNLİKLƏR

Mexanikada, fizikada, elektrotexnikada müxtəlif proseslərin təsvirləri tez-tez ikinci tərtib diferensial tənliklərə gətirir. Məsələn, mexanikada tez-tez müəyyən cismin bu və ya digər qüvvələrin təsiri altında hərəkət qanununu tapmaq tələb olunur. Nyutonun ikinci qanununa əsasən qüvvə təcillə düz mütənasibdir, təcil isə yolun zamana görə ikinci tərtib törəməsidir.

İllüstrasiya kimi rəqqasın hərəkətinə baxaq. **Tutaq ki**, bu l uzunluqlu dartılmayan ipdən asılmış m kütləli kürəcik olsun. Sadəlik üçün fərz edək ki, ipin kütləsi sıfıra bərabərdir, kürəciyin ölçüləri isə o qədər kiçikdir ki, onu nöqtə hesab etmək olar.

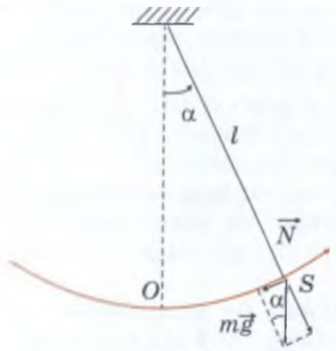
Kürəciyi $t = 0$ anında şaquli istiqamətdən α_0 bucağı qədər meyl etdirək və ona sərbəst rəqs etmək imkanı verərək buraxaq. Kürəcik aşağı enəcək, lakin sürətlənərək aşağı vəziyyəti ötüb-keçəcək, bundan sonra yavaşıyaraq əks istiqamətə həmin α_0 bucağı qədər meyl edənə kimi qalxacaq. Sonra o, eləcə geriyə qayıdacaq və s. Bizi kürəciyin hərəkət qanunu maraqlandırır.



Şəkil 2.

Aydındır ki, kürəciyin trayektoriyası l radiuslu çevrə qövsüdür, buna görə də bu qövs boyunca ayrixətli ədəd oxu daxil etmək lazım gəlir. Bu oxun sıfır nöqtəsi kimi kürəciyin aşağı vəziyyətini, müsbət istiqamət kimi isə kürəciyin ilkin vəziyyətinə istiqaməti götürək (şəkil 2). Kürəciyin hər bir vəziyyətinə ayri ox üzərində müəyyən s koordinatı (müsbət və ya mənfi) uyğun gəlir ki, ona da mərkəzi α bucağını (həmin işarəli) qarşı qoymaq olar.

Zərrəciyin koordinatı s-ə bərabər olduqda ona hansı qüvvələr təsir edir? Onlar cəmisi ikidir: $m\bar{g}$ ağırlıq qüvvəsi və ipin $\bar{N}$ gərilmə qüvvəsi (şəkil 3). Lakin bizim üçün bu qüvvələr yox, s nöqtəsundə onların ayri oxa toxunana proyeksiyası vacibdir, belə ki, biz enina yox, ox boyunca hərəkətə baxırıq.



Şəkil 3.

Beləliklə, $\bar{N}$ qüvvəsi "düşür", o, ədəd oxuna perpendikulyar olduğundan onun proyeksiyası sıfıra bərabərdir. Lakin şəkil 3-dən göründüyü kimi ağırlıq qüvvəsinin proyeksiyası ədədi qiymətcə $mg\ sin\alpha$-ya bərabərdir. Deməli, yalnız bu qüvvə trayektoriya

boyu $g\ sin\alpha$ təcilli hərəkət yaradır. Sonra, təcilin istiqamətinə diqqət yetirək. Müsbət s üçün təcil ədəd oxunun əksinə, mənfi s üçün ox boyunca yönəlib. Buna görə də ədəd oxuna proyeksiyada kürəciyin təcili ixtiyari anda $g\ sin\alpha$ olacaq. Nəhayət, nəzərə alaq ki, təcil yolun (verilmiş halda s koordinatının) ikinci törəməsidir, yəni $s''(t)$.

Beləliklə, təcil üçün iki ifadəmiz var. Birinci α bucağının, ikinci s yerdəyişməsinin qiymətini ehtiva edir. Ya α-dan, ya s-dən qurtulmaq yaxşı olar. Xoşbəxtlikdən, bunu etmək asandır, çünki onlar bir-biriylə aşkar $s = l\alpha$ münasibəti ilə bağlıdırlar. Sabit vuruğu törəmə işarəsi xaricinə çıxarmaq mümkün olduğundan belə bir bərabərlik yazırıq:

$$l\alpha''(t) = -g\ sin\alpha(t).$$

Biz ikinci tərtib diferensial tənlik aldıq. Başlanğıc şərtlər də var. Əvvəla, biz rəqqası α_0 bucağı qədər meyl etdirib buraxdıq, deməli, $\alpha(0) = \alpha_0$. İkincisi, $t = 0$ anında kürəcik hələ sürət yığa bilməmişdi, deməli, $\alpha'(0) = 0$.

Adətən rəqqasın rəqs amplitudu onun uzunluğuna nəzərən kiçik olur, yəni α_0 sıfıra yaxındır. Bu halda $sin\alpha \approx \alpha$ hesab etmək olar. Buradan yeni tənlik alırıq:

$$\alpha''(t) = -\frac{g}{l}\alpha(t) \qquad (***)$$

İndi yada salaq ki, $sin\ t$ və $cos\ t$ triqonometrik funksiyaları oxşar xassəyə malikdirlər: onların ikinci törəməsi əks işarə ilə özlərinə bərabərdir. Buna görə də (***) tənliyinin həllini, məsələn,

$$\alpha(t) = Acos(Bt + C)$$

şəklində axtaraq ki, burada A, B və C müəyyən sabitlərdir.

$$\alpha''(t) = -AB^2cos(Bt + C) = -\frac{g}{l}Acos(Bt + C)$$

Alınmış tənlikdən tapırıq:

$$B = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Bu kəmiyyət dairəvi tezlik adlanır və yunan hərfi ω ("omeqa") ilə işarə edilir.

$$\alpha(t) = Acos(\omega t + C)$$

başlanğıc şərtlərindən istifadə etmək qaldı.

$$\alpha(0) = AcosC = \alpha_0,$$
$$\alpha'(0) = -A\omega sinC = 0$$

Buradan $C = 0$ və $A = \alpha_0$ tapırıq. Deməli,

$$\alpha(t) = \alpha_0 cos\omega t$$

burada $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Bu cür rəqslər harmonik rəqslər adlanır.

KOMPLEKS ƏDƏDLƏR VƏ ELEKTROTEXNİKA

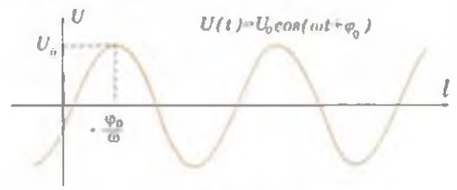
Dövrümüzün əlamətlərindən biri də elektrik cihazlarından hərtərəfli istifadədir ki, onların da əksəriyyəti dəyişən cərəyanla işləyir. Hər cür audio və videoaparatlarda təsvirin və səsin ötürülməsinə cavabdeh olan elektrik cərəyanı da dəyişəndir: o güclənir və zəifləyir, şlyagerlərin ritminə və ya televizorun ekranında kadrların sayrışmasına uyğun döyünür.

Siqnalın zamana görə dəyişməsinin sonsuz müxtəlif dəyişməsi içərisində sinusoidal və ya harmonik rəqslər xüsusi yer tutur (şəkil 1). Onlar

$$U(t) = U_0 cos(\omega t + \varphi_0) \qquad (*)$$

düsturu ilə ifadə olunur. Burada $U(t)$ dəyişən siqnalın, məsələn elektrik gərginliyinin t anında qiyməti; U_0 rəqslərin amplitudu; ω rəqslərin dairəvi tezliyi; φ_0 başlanğıc fazadır. ω dairəvi tezliyi $2\pi f$ -ə bərabərdir, burada f herslərlə ölçülən adi tezlik, yəni bir saniyədəki rəqslərin sayıdır.

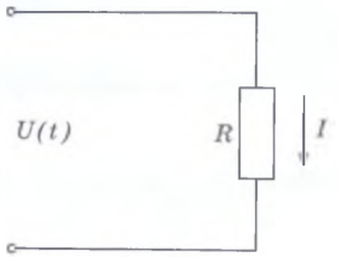
Biz məhz niyə harmonik rəqsləri ayırırıq? Əvvəla, bu, rəqslərin ən sadə növüdür. Dövrədəki gərginlik, kamerton, ideal rəqqas belə rəqs edir. İkincisi, hər hansı kəmiyyətin periodik dəyişməsini istənilən dəqiqliklə harmonik rəqslərin cəmi kimi göstərmək olar.



Şəkil 1.

Fərz edək ki, (*) qanunu ilə dəyişən elektrik gərginliyinin mənbəyi var və ona R aktiv müqaviməti, məsələn, elektrik lampası qoşulub (şəkil 2). Həmin lampadan keçən I cərəyan şiddəti necə dəyişəcək? Om qanununa görə $I = U/R$. Buna görə də

$$I(t) = \frac{U_0}{R} cos(\omega l + \varphi_0)$$



Şəkil 2.

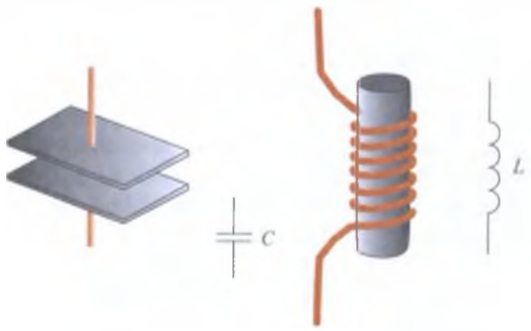
Görürük ki, dəyişmə qanunu həminkidir, lakin bu halda cərəyan şiddətinin amplitudu gərginliyin amplitudunun müqavimətə nisbətinə bərabərdir:

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$

Məktəb fizika kursunda aktiv müqavimətdən əlavə reaktiv müqavimətə də baxılır. O, cərəyanın qiymətinə təsir etsə də, elektrik enerjisi sərf etmir. Ən sadə misal elektrik kondensatoru – bir-birindən müəyyən məsafədə yerləşdirilmiş iki lövhədir (şəkil 3). Kondensator elektrik tutumu ilə

$$C = \frac{q}{U}$$

səciyyələnir, burada q kondensatorun yüküdür.



Şəkil 3. *Şəkil 4.*

Dəyişən cərəyan mənbəyinə qoşulmuş kondensatordan axan cərəyanın şiddətini necə təyin etməli? Kondensatorun tutumu üçün ifadəni

$$q = CU$$

şəklində yazaq və $q'(t) = I(t)$ nəzərə alaraq onu diferensiallayaq:

$$I(t) = CU'(t)$$

yalnız (*) düsturundan və $cos'(t) = -sin(t)$ – dən istifadə etmək qalır:

$$I(t) = CU'(t) = -\omega CU_0 sin(\omega t + \varphi_0)$$

$-sin\alpha = cos(\alpha + \pi/2)$ çevrilmə düsturları vasitəsi ilə son nəticədə alırıq:

$$I(t) = \omega CU_0 cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (**)$$

Beləliklə, bu halda cərəyan şiddətinin amplitudu

$$I_0 = \omega CU_0$$

tezlikdən asılıdır. Lakin bu da hamısı deyil. Aktiv müqavimətdən fərqli olaraq kondensatordan keçən cərəyan şiddətinin rəqsləri gərginliyin rəqslərini fazaca $\pi/2$ qədər qabaqlayır.

İnduktivlik dolağı – metallik nüvəyə sarılmış mis və ya gümüş naqil də özünü oxşar aparır (şəkil 4). Lakin burada cərəyan şiddətinin rəqsləri gərginliyin rəqslərini fazaca qabaqlamır, əksinə, ondan $\pi/2$ qədər geri qalır:

$$I(t) = \frac{U_0}{\omega L} cos\left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)$$

Burada, L – dolağın induktivliyidir. Beləliklə, reaktiv elementlərə (kondensatorlar və induktivlik dolaqları) malik elektrik dövrələrindəki prosesləri təsvir etmək üçün təkcə $I=U/R$ *Om* qanunu kifayət deyil. Bu, elektrik cərəyanı rəqslərinin fazasının gərginlik rəqsləri fazasına nəzərən dəyişməsi ilə əlaqədardır. Təbii sual doğur: dəyişən siqnalın həm amplitudunu, həm də fazasını hansısa bir düsturla səciyyələndirmək olarmı? Sən demə, olarmış.

KOMPLEKS AMPLİTUDLAR METODU

(*) düsturunun sağ tərəfinə xəyali $iU_0 sin(\omega t + \varphi_0)$ toplananını əlavə edək və alınmış kəmiyyəti kompleks gərginlik adlandıraq:

$$U(t) = U_0 cos(\omega t + \varphi_0) + iU_0 sin(\omega t + \varphi_0) =$$

$$= U_0(cos(\omega t + \varphi_0) + isin(\omega t + \varphi_0))$$

Bu düstura əsasən adi gərginlik kompleks gərginliyin həqiqi hissəsidir. $e^{ix} = cos\, x + isin\, x$ Eyler düsturundan istifadə etsək və $U(t)$ kompleks ədəddinin triqonometrik şəklindən eksponensional şəklinə keçsək,

$$U(t) = U_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = U_0 e^{i\varphi_0} e^{i\omega t}$$

alırıq.

$U_0 e^{i\varphi_0}$ kompleks ədədi $U(t)$ dəyişən siqnalının həm amplitudu, həm də fazası haqqında informasiyaya malikdir və onun kompleks amplitudu adlanır.

Eyni qayda ilə (**) düsturunu çevirək:
$I(t) = \omega CU_0 e^{i(\omega t + \varphi_0 + \pi/2)} = \omega CU_0 e^{i\pi/2} e^{i(\omega t + \varphi_0)}$.

İndi qeyd edək ki,

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2} = i.$$

Buna görə də son nəticədə alırıq:

$$I(t) = i\omega CU_0 e^{i(\omega t + \varphi_0)} = i\omega CU(t).$$

Belə çıxır ki, kompleks cərəyan şiddəti kompleks gərginliyin $i\omega C$ kəmiyyətinə hasilinə bərabərdir, belə ki, kompleks gərginlik və cərəyanın *Om* qanunu müəyyən analoqundan danışmaq olar.

$$X_C = \frac{1}{i\omega C} = -\frac{i}{\omega C}$$

kompleks ədədini C kondensatorunun kompleks müqaviməti adlandırmaq təbiidir. İnduktivlik dolağının da kompleks müqavimətini tapmaq çətin deyil:

$$X_L = i\omega L.$$

Beləliklə, kompleks müqavimətlərdən istifadə etməklə dəyişən cərəyanlı elektrik dövrələrinin hesablanmasını xeyli sadələşdirmək olar. Misal olaraq kondensator və dolağın ardıcıl birləşməsinə baxaq (şəkil 5). Əvvəlcə X ümumi kompleks müqaviməti tapırıq:

$$X = X_L + X_C = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Bu düsturdan görünür ki, müəyyən

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

tezliyində rezonans baş verir – tam müqavimət sıfır olur.

Kondensator və induktivlik dolağını paralel birləşdirərkən (şəkil 6) daha heyrətamiz faktlar açılır. Burada ümumi I cərəyanı dövrə budaqlarındakı IC və IL cərəyanlarının cəminə bərabərdir. Kondensatordan

$$I_C = \frac{U}{X_C} = i\omega CU$$

cərəyanı və induktivlikdən

$$I_L = \frac{U}{X_L} = -\frac{i}{\omega L}U$$

cərəyanı axdığından tam cərəyan

$$I_C + I_L = \left(i\omega C - \frac{i}{\omega L}\right)U\text{-ya}$$

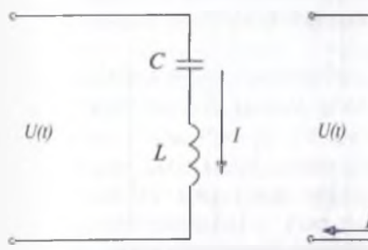
bərabər olacaq. ω_0 rezonans tezliyində dövrədə tam cərəyan mövcud deyil, bununla belə dövrə budaqlarında mövcuddur. Bu cərəyanlar quymətcə bərabər, istiqamətcə əksdir.

KOMPLEKS ƏDƏDLƏR VƏ ÜÇFAZALI GƏRGİNLİK

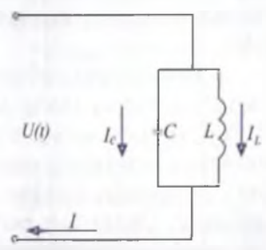
Üçfazalı generator adlanan güclü elektrik maşını bir deyil, düz üç sinusoidal gərginlik istehsal edir ki, onları da faza gərginliyi adlandırır və U_A, U_B, U_C ilə işarə edirlər (şəkil 7). Mütləq qiymətcə onlar bir-birinə bərabərdir, lakin fazaca U_B U_A-dan $2\pi/3(120°)$ qədər geri qalır, U_C isə bir o qədər U_A-nı qabaqlayır. Deməli, əgər U_A faza gərginliyinin kompleks amplitudu $U_0 e^{i\varphi_0}$-a bərabərdirsə, onda U_B və U_C faza gərginlikləri üçün bu, uyğun olaraq

$$U_0 e^{i(\varphi_0 - 2\pi/3)} \text{ və } U_0 e^{i(\varphi_0 + 2\pi/3)}$$

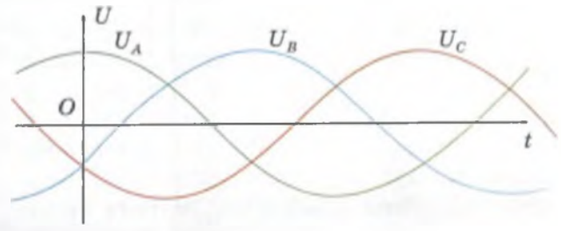
Elektrik enerjisi istifadəçiləri, adətən, faza gərginliyindən "qidalanaraq" sıfıra və üç fazadan birinə qoşulurlar. Lakin avadanlıq iş üçün yüksək gərginlik tələb edəndə onu fazaya və sıfıra yox, iki fazaya (məsələn, A və C-yə) birləşdirirlər. Xətti gərginlik adlanan bu gərginliyin kompleks amplitudu



Şəkil 5.



Şəkil 6.



Şəkil 7.

$$U_{AC} = U_C - U_A = U_0 e^{i(\varphi_0 + 2\pi/3)} - U_0 e^{i\varphi_0} =$$

$$= U_0 e^{i\varphi_0}\left(e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1\right)$$

Eyler düsturundan istifadə edərək mötərizədəki ifadənin qiymətini hesablayaq.

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1 = cos\frac{2\pi}{3} + isin\frac{2\pi}{3} - 1 =$$

$$= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

nəzərə alaraq

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\frac{5\pi}{6} \quad və \quad \frac{1}{2} = sin\frac{5\pi}{6}$$

alırıq

$$-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \sqrt{3}\left(cos\frac{5\pi}{6} + isin\frac{5\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

Buna görə də U_{AC} xətti gərginliyinin kompleks amplitudu

$$\sqrt{3}\cdot U_0 e^{i(\varphi_0 + 5\pi/6)}$$

bərabərdir.

Digər xətti gərginliklər üçün də oxşar ifadələr alınır.

Məişət elektrik şəbəkələrində gərginlik 220 voltdur (bu, gərginliyin işlək qiyməti adlanır). Birfazalı, deməli xətti gərginlik $220\cdot\sqrt{3} = 380$ voltdur.

Qeyd etmək lazımdır ki, kompleks ədədlər elektrotexnikaya nüfuz edəndə, i hərfi artıq orada var idi. Onunla verilmiş zaman anında cərəyan şiddətinin qiymətini işarə edirdilər. Qarışıqlıqdan qaçmaq üçün xəyali vahidi elektrotexnikada j hərfi ilə işarə etdilər. Prinsipial fərq yoxdur, lakin bunu bilmək lazımdır.

* * *

Elektrik açarını şaqqıldadaraq və ya çətpeli rozetkaya salaraq siz bəlkə də xatırlayacaqsınız: elektriklə bağlı hər şeyin işlənməsində və hazırlanmasında kompleks ədədlərsiz keçinmək olmadı. Rəqslərdən söhbət getdiyi hər yerdə nəzəri hesablamalarda kompleks ədədlərdən istifadə etmək çox münasibdir. *XVII – XVIII* əsr alimləri bilsəydilər ki, bu "qeyri-mümkün" obyektlərin tətbiqi necə adiləşəcək, riyaziyyatda, ehtimal ki, "xəyali ədəd" kimi qəribə termin peyda olmazdı.

İNFORMASİYA NƏZƏRİYYƏSİ

İstənilən cəmiyyətdə insanlar informasiyanı ötürür, saxlayır və emal edirlər. Radio ilə məlumat, dərsə çağıran zəng, işıqforun işığı – bütün bunlar informasiyanın ötürülməsidir. Gündəlikdə yazılar, qədim papiruslar, kitabxanalar, arxivlər, məlumat sistemləri – bunlar informasiyanın saxlanılmasıdır. Hesablamalar, lazımi arayışın axtarılması, elmi məqalənin yazılması zamanı informasiyanın emalı baş verir. İnformasiya ilə müxtəlif əməllər və onların kombinasiyaları informasiya prosesləri adlanır.

İnsanlar keçmiş zamanlardan texniki vasitələr və informasiyanın köməyilə işləməyi sadələşdirmək və sürətləndirmək üzərində düşünmüşlər. Kitab çapının icadı informasiyanın surətini tez çıxarmağa imkan verdi və onun saxlanılmasını asanlaşdırdı. *XIX* əsrdə informasiya ötürülməsi sürəti xeyli yüksəldi: əvvəlcə gəmi və parovozlar poçtu daşımağa başladı, sonra teleqraf, əsrin axırında telefon peyda oldu. *XX* əsrdə informasiya qlobal oldu – nəinki mətnləri, həm də informasiyaları, bir neçə dəqiqəyə Yer kürəsinin istənilən nöqtəsinə ötürmək mümkün oldu. İnformasiya indi kağızda yazılarda, maqnit lentlərdə, kompakt disklərdə, kompyuterin yaddaşında saxlanılır.

XX əsrdə informasiyanın emalı üçün texniki qurğular və cihazlar meydana gəldi. İxtiyari avtomatik qurğu informasiya emal edir: qatar relsin müəyyən hissəsinə basaraq işıqforun qırmızı işığını qoşan siqnal verir, avtomat telefon stansiyasının (ATS) cihazları yığdığımız nömrəni lazımi abonentlə birləşdirməyə çevirir. İnformasiya ilə iş sahəsində texniki uğurların zirvəsi kompyuterdir.

Bəşəriyyət informasiyadan həmişə istifadə etmişdir, lakin yalnız *XX* əsrin ortalarında informasiya prosesləri elmi araşdırmaların predmeti oldu. İnformasiya prosesləri haqqında elmlər məcmusu informatika adlanır. Onlardan biri – informasiyanın ölçülməsi və ötürülməsi haqqında elm – informasiya nəzəriyyəsi adlanır.

İNFORMASİYANIN ÖTÜRÜLMƏSİ NECƏ BAŞ VERİR

İxtiyari informasiya ötürülməsi prosesini, şəkil 1-də olduğu kimi, sadə sxemlə təsvir etmək olar. Sxemdə göstərilmiş üç hissədən hər biri müəyyən xassələrə (necə deyərlər, parametrlərə) malikdir. Ötürülmənin keyfiyyəti bu xassələrdən asılıdır.



Şəkil 1.

Siz qeyd yazıb ünvana ötürən zaman həm ötürücü, həm də əlaqə kanalı rolunda çıxış edirsiniz. Bu halda informasiyanın şəkli dəyişmir: yazılmış mətn həmin şəkildə lazım olan anda və təhrifsiz ötürülür və qəbul edilir. Yox, əgər siz tanışınızla məktubunuzu göndərirsinizsə, onda əlaqə kanalı sxemin müstəqil hissəsi olur və onda sizdən asılı olmayan proseslər baş verə bilər. Məsələn, məktub itə və ya yağışa düşə bilər. Belə halda deyirlər: kanalda əngəllər baş verib. Ya da tanış, ünvanı dərhal tapmasa, ötürmə ləngiyəcək. Deməli, ötürmə müddəti artacaq. Ya da tanış məktubu oxuyub məzmununu sözlə ünvana xəbər verəcək. Nəticədə informasiyanın şəkli dəyişəcək (çevriləcək) – o, yazılı şəkildən şifahi şəklə keçəcək. Bu zaman informasiyanın məzmununun təhrif olunacağı istisna deyil – "əlaqə kanalı" ya hamısını deməz, ya da elə deməz. Və sonda, sizi, ehtimal ki, o da məyus edər ki, məktubu oxuyan təkcə ünvan olmaz, yəni informasiyaya sanksiyalaşdırılmamış (ötürücü tərəfindən icazə verilməmiş) daxilolma baş verər.

Bu misaldan görünür ki, informasiyanın ötürülməsi prosesi hansı parametrlərə malik ola bilər və onunla bağlı hansı problemləri həll etmək lazım gəlir. Bizi informasiyanın etibarlılığı, ötürmə, çevrilmə müddəti və müdafiəsi maraqlandırır. Ötürmə sxeminin hissələri çox mürəkkəb ola bilər. Məsələn, telefon rabitəsi kanalı təkcə naqillər deyil, həm də ATS-də abonentləri birləşdirən qurğular, uzaq məsafələrə ötürmələrdə siqnalı gücləndirən cihazlar və sairdir.

Müxtəlif texniki vasitələr hər bir konkret halda ötürmə keyfiyyətini təmin edir. Onları rabitə texnikası üzrə mütəxəssislər işləyib-hazırlayır. Lakin riyazi metodlar informasiya nəzəriyyəsində böyük rol oynayır. Onların əsasında informasiyanın ölçülməsi prinsipləri dayanır ki, informasiya nəzəriyyəsi elə onların kəşfi ilə başlayıb.

İNFORMASİYANIN ÖLÇÜLMƏSİ – BİTLƏR VƏ BAYTLAR

Aydındır ki, informasiya çox və ya az olur. Lakin informasiya ötürülməsi sisteminin layihələndirilməsi üçün bacardıqca dəqiq bilmək lazımdır ki, o, nə qədər informasiya və nə müddətə ötürə bilər. Hətta adi poçt rabitəsi də daşınmalar üçün hansı nəqliyyatın lazım olduğuna, neçə poçt şöbəsi və poçtalyonun tələb olunacağına dair məlumatlarsız işləməyə qadir deyil.

Poçt informasiya miqdarının hesablanması zamanı ənənəvi fiziki ölçülər – məktub və bağlamaların çəkisi və həcmi ilə kifayətlənə bilər. Lakin müasir sistemlər üçün belə "kobud" ölçülər kifayət deyil. Teleqram göndərərkən biz hər bir sözə görə ödəyirik. Teleqram nə qədər uzundursa, bir o qədər bahadır – özü də təkcə bizə yox, həm də teleqraf xidmətinə: uzun mətn ötürücüdə uzun müddətə kodlaşdırılır (yəni elektrik siqnallarına çevrilir), qəbuledicidə də uzun müddətə kodlaşdırılır, rabitə kanalı ilə uzun müddətə ötürülür. Onda onu sözlərin sayı ilə yox, hərf və rəqəmlərin sayı, qısası, simvolların (işarələrin) sayı ilə ölçmək daha dəqiq olar. Lakin burada hər şey elədə sadə deyil.

Fərz edək ki, biz ədədləri ötürürük. Onda 25 ədədini elektrik siqnallarına çevirdikdən sonra ikilik sistemdə beş işarə ilə – 11001 ifadə olunacaq. Hər iki halda informasiyanın məzmunu eynidir, lakin yazılışın

uzunluğu fərqlidir. O, istifadə olunan işarələrin sayından, yəni, neçə deyərlər, istifadə olunan əlifbanın gücündən asılıdır. Onluq sistemdə əlifbanın gücü 10-a (on rəqəm), ikilik sistemdə 2-yə bərabərdir. Əlifba güclü olduqca yazılış qısa olur. Ən kasıb əlifba ikilik sisteminkidir: o iki simvoldan (hansılar olması əsas deyil) ibarətdir. Həm böyük, həm kiçik əlifbanın öz müsbət və mənfi tərəfləri var. Böyük əlifbanın məziyyəti qısa yazılışlardır, lakin o, kodlaşdırma üçün daha mürəkkəb qurğular tələb edir. Əbəs yerə deyil ki, ilk teleqraf kodlarında – Morze əlifbasında – ancaq üç işarədən (nöqtə, tire, pauza) istifadə edilirdi, bütün kompyuter texnikasında isə ikilik sistem qəbul olunub.

Hansı əlifbanın seçilməsini konkret ötürülmə sisteminin layihəçiləri həll edir. Lakin informasiyanın ölçülməsi üçün əlifbadan asılı olmayan vahidlərə malik olmaq arzuolunandır. Belə vahid kimi bit – ikilik kodlaşdırma sisteminin simvollarının sayına görə minimal olan vahid seçilib ("bit" sözü "ikilik rəqəm" mənasında olan ingilis ifadəsi binary digit-in qısaldılmasından yaranıb).

Bit ikilik sistemin bir simvoludur. İkilik sistemdə yazılmış məlumat üçün ondakı informasiyanın miqdarı sadəcə ikilik simvolların sayıdır. İkilik sistemdə 11001 kimi ifadə olunmuş 25 ədədi 5 simvol, deməli, 5 bit informasiya daşıyır. Doğrudur, həmin sistemdəcə onu 0011001 kimi də yazmaq olar. Belə məlumat 7 bit informasya daşıyacaq. Bir bitlə iki məlumatın – 0 və ya 1 – ancaq birini ötürmək olar. Bu qısa məlumatlar bəzən böyük məna yükü daşıyır – "hə" və ya "yox" cavabını, elektrik enerjisinin qoşulması və ya açılmasını bildirə bilərlər. Lakin ötürülmə üçün onlar son dərəcədə sadədir. Dörd məlumatı – 00, 01, 10, 11 – ötürmək üçün iki bit kifayətdir. Kombinatorika qaydalarına əsasən, n ikilik simvoldan ibarət yazını 2^n ikilik simvoldan biri kimi ötürmək olar.

İnformasiyanın daha böyük vahidi bayt – səkkiz bitdən ibarət yazılışdır. Adi mətnlərdəki simvolların sayı 2^7=128-dən çox, lakin 2^8=256-dan azdır (kompyuterin klaviatüründə 150-yə yaxın işarə saymaq olar). Buna görə də ikilik sistemdə adi mətnin ixtiyari simvolunu kodlaşdırmaq üçün bir bayt kifayətdir. Mürəkkəb riyazi simvollar üçün (kvadrat kök, inteqral və s.), müxtəlif şriftlər və əlifbalar (məsələn, yunan əlifbası) üçün bir bayt kifayət deyil.

Bəs informasiya ikilik sistemdə yazılmışsa, onu necə ölçməli? Və niyə bu informasiyanı bit və baytlarla ölçmək lazımdır? Ona görə ki, məlumatı ikilik əlifba ilə kodlaşdırdıqda onda neçə simvolun olduğunu bilmək mümkün olsun. Əlbəttə, gördüyümüz kimi, ikilik sistemdə də eyni ədədi müxtəlif cür kodlaşdırmaq olar. Lakin hər bir məlumat üçün bitlərin minimal sayı mövcudddur. Onu necə təyin etməli?

Onluq ədədlərin ikilik sistemdə yazılışına baxaq. 0-dan 2^n-1-ə kimi ilk 2^n ədədi n bitlə yazmaq olar. Məsələn, 0-dan 7-dək ədədlərin yazılışı üçün üç, 0-dan 31-dək beş və s. bit kifayətdir. Əgər N, 2 ədədinin qüvvətidirsə ($N = 2^n$), onda onun yazılışı üçün n+1 bit lazımdır. Belə ki, $32=2^5=100000$ (6 bit). Digər ədədlər üçün bitlərin sayı – ikinin bu ədədi aşmayan ən böyük qüvvəti plyus 1-ə bərabərdir. Məsələn, 57 ədədi üçün bu dərəcə 5-ə bərabərdir, 57 32-dən böyük, 64-dənsə kiçikdir. İxtiyari N üçün 2 ədədinin maksimal qüvvətini tapmaq üçün log_2N-i hesablamaq və onun tam hissəsini götürmək zəruridir, tam hissəni kvadrat mötərizələrlə işarə edirlər: $[log_2N]$. Beləliklə, ixtiyari onluq ədədin yazılışı üçün bitlərin minimal sayı $[log_2N]$+1-ə bərabərdir.

Adi mətnlərin yazılışı zamanı hər bir simvol, adətən, bir baytla kodlaşdırılır. Deməli, baytların sayı təxminən simvolların sayına bərabərdir, lakin baytlar mətndəki boş buraxılmaların hesabına çox ola bilər.

Məlumatdakı simvolların sayılmasına əsaslanan informasiya ölçülməsi onunla işləyən texniki qurğuların imkanlarını qiymətləndirmək üçün zəruridir. Belə üsulla təyin olunan informasiya miqdarı informasiya həcmi adlanır. Yaddaş qurğuları – kompyuterin operativ yaddaşı, disklər və s. – üçün onlarda saxlanan informasiyanın miqdarı kilobaytlarla (min bayt) və meqabaytlarla (milyon bayt) ölçülür. Kompyuterin yaddaş həcmi böyük olduqca onun imkanları da geniş olur. Məlumatın rabitə kanalı ilə ötürülməsi təkcə mətnin uzunluğundan yox, həm də vahid zaman ərzində hansı informasiya həcminin ötürülə biləcəyindən və

ya buraxma qabiliyyətindən asılıdır. Bu kəmiyyət adətən, saniyədə kilobaytlarla ölçülür.

Lakin informasiyanı başqa cür də ölçmək olar.

İNFORMASİYA VƏ QEYRİ-MÜƏYYƏNLİK: ENTROPİYA ANLAYIŞI

Bəzən eşitməli olursan: "Sən mənə elə şeyi xəbər verdin ki, mən bilirdim". Lakin bir başqası bunları bilmirsə, bu xəbər onun üçün qiymətli məlumat tutumuna malik ola bilər. Bu halda artıq simvolların sayı əsas deyil. Məlumat biliyi artırırsa, informativdir. Başqa sözlə, o, biliksizliyi – hər hansı hadisələrin baş verib-vermədiyini, hər hansı faktların düz olub-olmadığına nəzərən qeyri-müəyyənliyi azaldır. Buna görə də məlumatın həcmini deyil, onun informativliyini, yəni alan üçün qeyri-müəyyənliyin azaldılması ölçüsünü ölçmək arzu olunur. Ən sadə informativ məlumat yenə də 0 və ya 1, yəni 1 bitdir. Belə məlumat ikili: "hə" (1) və ya "yox" (0) cavab nəzərdə tutur. Lakin ikili cavabı adi mətn: "düzdür" və ya "düz deyil", "olar" ya olmaz" şəklində də vermək olar. Belə mətnlər müxtəlif uzunluğa malikdirlər, lakin bir bitlə ölçülən eyni informasiya daşıyırlar.

Daha ümumi halda informasiya alıcısı $C = \{c_1,...,c_n\}$ çoxluğunda hadisə baş verməsi haqqında informasiya alır. Əgər C çoxluğu iki ünsürdən (elementdən) ibarətdirsə (N=2), konkret hadisə haqqında informasiyanı bir bitlə ötürmək mümkün olur (0 – birinci hadisə, 1 – ikinci hadisə). Lakin əgər N>2 – dirsə, bir bit yetməz. Burada belə bir ideya köməyə gəlir.

Təsəvvür edin ki, müxtəlif məsələlərin həvəskarı olan dostunuz yanınıza gəlir və deyir: "Salam! Futboldan gəlirəm. "Neftçi" və "Qarabağ" oynayırdılar." Siz: "Bəs hesab neçə oldu?" – soruşursunuz. "Ay dedim ha! Ancaq onu deyim ki, heç biri üçdən artıq top vura bilmədi. Hesabı bilmək istəyirsənsə, sual ver, mən "hə", ya "yox" cavabı verəcəyəm. Lakin cəmisi dörd suala cavab verəcəyəm. Belə ki, nə soruşacağını fikirləş". Və siz də fikrə daldınız. Oyunun hesabının mümkün variantları 16-dır:

0 : 0	0 : 1	0 : 2	0 : 3
1 : 0	1 : 1	1 : 2	1 : 3
2 : 0	2: 1	2 : 2	2 : 3
3 : 0	3 : 1	3 : 2	3 : 3

Konkret hesab soruşularsa ("Onlar 1:1 oynadılar?"), onda tapana kimi, ola bilsin ki, 15 sual verilsin (16-cını verməmək də olar – aydındır ki, axırıncı hesab doğru olacaq). "Heç-heçəmi?" soruşsanız necə? "Hə" cavabında cəmisi dörd variant qalır: 0 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 3. Burada hesab haqqında soruşmaq olar. 3 sual kifayət edər.Cavab "yox" olsa necə? Onda 3 suala 12 variant qalır – çoxdur. Ümumi halda hər sual variantlar çoxluğunu iki alt çoxluğa bölür: biri "hə" cavabına, biri "yox" cavabına uyğun gəlir. "Hə" cavabı alınıbsa, "yox" çoxluğunun variantlarına baxmaq gərəksizdir. Konkret hesab haqqında soruşmaq niyə lazım deyil? Məsələ bundadır ki, bu sual çoxluğu iki qeyri-bərabər hissəyə bölür: 1-i 1, digəri 15 variantdan ibarətdir. Hesabı tapmadınsa, yerdə qalan variantlar çoxluğu cəmisi bir vahid azalır. İkinci sual da (heç-heçə haqqında) variantlar çoxluğunu qeyri-bərabər hissələrə bölür (4 və 12). Deməli, sualı elə vermək lazımdır ki, variantlar çoxluğu yarıya və ya sanki yarıya bölünsün. Beləliklə, sualları sayırıq:

1. "Neftçi" bir topdan çoxmu vurmuşdur?" Dostunuz – "Hə", - deyir. Əla, 8 variant qalır:

2 : 0, 2 : 1, 2 : 2, 2 : 3
3 : 0, 3 : 1, 3 : 2, 3 : 3

(Əgər o, "yox" cavabı versəydi, qalan variantlar yenə 8 olardı, əsası budur!).

2. "Neftçi" 3 topmu vurmuşdur?" Dostunuz – "Yox", - deyir. 4 variant qalır (o biri cavabda da):

2 : 0, 2 : 1, 2 : 2 və 2 : 3.

3. "O, bir topdan çox buraxmışdır?". – "Hə". İki variant qalır: 2 : 2 və 2 : 3.

4. "O, üç top buraxmışdır?" – "Yox", - "Deməli, 2 : 2."

"Əhsən, – deyir dostunuz, – indi də görüm, mən niyə qərara gəldim ki, 4 sual vermək lazımdır? Bəlkə 3 sual da bəs edərdi?"

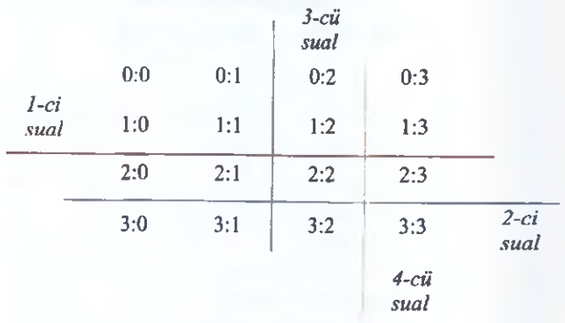
Aydındır ki, dostunuzun məsələsi N

hadisədən ibarət çoxluqdakı konkret hadisəni bilmək üçün neçə ikili sual vermək zəruri olması haqqındadır. N=16 halında onun həlli metodunun nədən ibarət olmasına baxaq. Hər dəfə qalan çoxluğun elementləri 2-yə bölünürdü. Dörd dəfə bölmək lazım gəldiyindən nəticədə biz N-i 2^4-ə, yəni 16-ya böldük. İxtiyari halda biz bir elementdən, axtarılan cavabdan ibarət çoxluğa rast gəlirdik. Verilmiş ikili sualların sayı bölmələrin sayına bərabərdir. Bizim halımızda olduğu kimi, N 2 ədədinin qüvvətidirsə, sualların sayı onun üstünə bərabərdir, yəni $log_2\,2^4$=4. Buna görə də N=16 üçün üç sual azdır. Əgər N 2 ədədinin qüvvəti deyilsə, məsələn N=20, onda 2 ədədinin növbəti qüvvətini, yəni 5-i götürmək gərəkdir. Deməli, ümumi həll belədir: əgər N 2 ədədinin qüvvətidirsə, log_2N, əks halda $[log_2N]$ + 1 ikili sual vermək kifayətdir.

Bu həll onluq ədədlərin ikili kodlaşdırılması zamanı neçə bitin zəruri olmasını aydınlaşdırdığımız zaman aldığımız həll ilə sanki üst-üstə düşür. (Kiçik fərq ondadır ki, ədədlər içində biz 0-ı da kodlaşdırırıq, yəni 16 ədədi on yeddincidir, on altıncı deyil). Bu niyə belə baş verir? Və çoxluğun ünsürlərinin tapılmasının məlumatların kodlaşdırılmasına nə dəxli var?

Sən demə, birbaşa dəxli var. Oyunun nəticələri haqqında dörd sualı elə ifadə etmək olar ki, onlar ixtiyari cavab üçün yararlı olacaq və hər hesaba ikili cavabların müəyyən ardıcıllığı uyğun gələcək. Görək suallar ilkin variantlar kvadratını necə parçalayır (şəkil 2). İlk iki sual onu üfüqi xətlərlə parçalayır (əvvəlcə sətirlər cütlərinə, sonra cütü iki sətirə), iki axırıncı isə seçilmiş sətiri şaquli xətlərlə parçalayır.). "Hə" cavabında aşağı (ilk iki sual üçün) və ya sağ (ikinci iki sual üçün) çoxluq seçilir. Məsələn, 2 : 2 hesabına 1010 (hə, yox, hə, yox), 3 : 1 hesabına 1101, 1 : 2 hesabına isə 0110 ardıcıllığı uyğundur. Sualların belə ardıcıllığını oyunun nəticələri haqqında məlumatları kodlaşdırma qaydası illüstrasiya edir. Məlumatları alan bu qaydanı bilirsə, nəticəni ona dörd ikili simvolla bildirmək olar.

İndi isə $C = \{c_1,\ldots, c_N\}$, çoxluğundakı hansı hadisənin baş verməsi haqqında məlumatın müntəzəm olaraq ötürülməsinin lazım olduğu hala baxaq. Təsvir olunmuş kodlaşdırma metodunda onların ötürülməsi üçün hər dəfə log_2N və ya $[log_2N]$ + 1 bit lazım gələcək. Məlumat, fərz edək ki, 200 dəfə verilibsə, 200 dəfə çox bit sərf olunacaq. Lakin, məlum olmuşdur ki, hadisələr müxtəlif ehtimallıdırlarsa (yəni müxtəlif



Şəkil 2.

peyda olma tezliklərinə malikdirlərsə), ötürülən bitlərin ümumi sayını azaltmaq olar. Məsələn, fərz edək ki, C çoxluğu dörd $c_1,\ldots,c_4$ hadisələrindən ibarətdir və onların baş vermə ehtimalları p_1=1/2, p_2=1/4, p_3=p_4=1/8-dir (bütün dörd ehtimalın cəmi vahidə bərabər olmalıdır). Onda hadisəni tapmaq üçün sualı başqa cür vermək yaxşıdır. Əvvəlcə soruşmağa dəyər ki, c_1 hadisəsi baş verməyib ki? – axı o, bütün halların yarısında baş verir və deməli, bütün imkanlar çoxluğu (lakin $\{c_1,\ldots, c_4\}$ çoxluğu yox!) yarı bölünür. "Yox"cavabında c_2 haqqında (qalan imkanlar çoxluğu yenə yarı bölünür) və uğursuzluq halında c_3 haqqında soruşaq. Belə bir kodlaşdırma alırıq: $c_1 \to 1$, $c_2 \to 01$, $c_3 \to 001$, $c_4 \to 000$. Adama elə gəlir ki, bu kodlaşdırma metodu əvvəlkindən pisdir: bir sıra kodlar $log_2$4=2-dən uzundur. Lakin məlumatı tez-tez, məsələn 200 dəfə ötürdükdə nə olacağına baxaq. 200 dəfədə c_1 təxminən 100 dəfə, c_2 50 dəfə, c_3 və c_4 25 dəfə peyda olacaq. Əvvəlki (müntəzəm) kodlaşdırma üçün hadisələrin peyda olma tezliyi əhəmiyyət kəsb etmir: ixtiyari məlumat iki bitdən ibarətdir və cəmisi 400 bit sərf etmək lazımdır. Yeni kodlaşdırmada qısa kodlar daha tez-tez ötürüləcək. Cəmisi təxminən $100\cdot1+50\cdot2+25\cdot3+25\cdot3=350$ bit, orta

hesabla bir məlumata 2 əvəzinə 350/200 = = 1,75 bit sərf olunacaq.

Belə qənaət ona görə baş verir ki, kodlaşdırmanı seçərkən hadisələrin peyda olma ehtimalı nəzərə alınmışdı. İnformasiya nəzəriyyəsində informasiya miqdarının ölçülməsində belə ehtimallı yanaşma qəbul edilib. Məhz beləsi: $C = \{c_1,\ldots, c_N\}$ hadisələr çoxluğunun qeyri-müəyyənlik ölçüsü anlayışı daxil edilir. O, entropiya adlanır, $H(C)$ ilə işarə olunur və aşağıdakı düsturla hesablanır:

$H(C) = p_1log_2p_1 + p_2log_2p_2 + \ldots + p_Nlog_2p_N$

burada p_i-lər hadisələrin ehtimallarıdır. Loqarifm işarəsi altında olan kəmiyyətlər vahiddən kiçik olduğundan entropiya həmişə mənfidir. Mahiyyətcə o, informasiyaya əksdir, belə ki, informasiya qeyri-müəyyənliyi aradan qaldırır. Buna görə də C çoxluğunda informasiyanın orta miqdarı, yəni C –dəki hadisəyə dair bir məlumata düşən orta informasiya miqdarı $I(C) = -H(C)$ düsturu ilə hesablanır. Deməli, misalımız üçün informasiya miqdarı aşağıdakına bərabərdir:

$$I(C) = -\left(\frac{1}{2}log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{4}log_2\frac{1}{4} + \frac{1}{8}log_2\frac{1}{8} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}log_2\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = 1{,}75$$

yəni əvvəllər aldığımız məlumatın bitlərlə orta uzunluğu ilə üst-üstə düşür.

Bəs futbol oyunu misalında necə? Ona baxarkən biz faktiki olaraq fərz edirdik ki, bütün 16 hadisə bərabərehtimallıdır: hər biri 1/16 ehtimala malikdir. Onun üçün

$$I(C) = -16\left(\frac{1}{16}log_2\frac{1}{16}\right) = -16\cdot\frac{1}{16}\cdot(-4) = 4$$

yəni burada aldığımız nəticə əvvəlki ilə eynidir. İnformasiya nəzəriyyəsində isbat edilir ki, I(C) kəmiyyəti maksimaldır və log_2N-ə (və ya $[log_2N]$ + 1-ə) bərabərdir.

Nəticəyə gələk. İnformasiyanı məlumatın bitlərlə uzunluğu ilə ölçmək olar. Belə üsul məlumatın informativliyi barədə heç nə demir (o, az informativ və hətta mənasız ola bilər), lakin hər halda ötürmə zamanı rabitə sisteminin iş həcmini səciyyələndirir. Məlumatın nə qədər qənaətlə kodlaşdırıldığını bilmək lazımdırsa, onda informasiyanın ölçülməsinə entropiya yanaşmasından istifadə etmək gərəkdir. Bu zaman dəqiqləşdirmək lazımdır ki, hansı hadisələr çoxluğu haqqında məlumat veriləcək, onların ehtimalları necədir, bundan sonra $I(C)$ hesablanmalıdır.

İNFORMASİYANIN KODLAŞDIRILMASI

"İnformasiyanın kodlaşdırılması" söz birləşməsinin mənasını dəqiqləşdirək. İnformasiya nəzəriyyəsində kodlaşdırma dedikdə informasiyanın müəyyən qaydalarla yazılışını nəzərdə tuturlar. Elementar vahidlər çoxluğunda (əlifba) mətn və ya təsvirin tərtib edildiyi qaydaların mövcudluğu hər bir dil üçün səciyyəvidir. Bir halda bunlar təbii dillər, digər halda müəyyən məhdudiyyətlə təbii dillərdir (məsələn, teleqramı adi dildə yazır, amma sözönləri buraxır, nöqtə və vergül yerinə onların qısaldılmış adlarını yazırlar), öz qaydaları olan formal dillər də var: ikili kodlaşdırma dili, proqramlaşdırma dili və s.

Kodlaşdırma dili seçimi konkret məqsədlərdən asılıdır. O, yaxşılaşdırılması lazım olan parametrlərlə (xarakteristikalarla) təyin edilir. İnformasiya ötürülüşündə onun həcmi, ötürülmə müddəti, etibarlılığı (əngəllərdən müdafiəsi), ötürülmənin texniki rahatlılığı, sanksiyalaşdırılmamış daxilolmadan, məsələn dinlənilmədən müdafiəsi əsasdır. Bütün parametrlərin keyfiyyətini eyni zamanda artırmaq olmaz: adətən onların birinin yaxşılaşdırılması o birini korlayır. Vəziyyətdən çıxışı onda tapdılar ki, informasiya ötürülüşünün müxtəlif mərhələlərində müxtəlif parametrləri təkmilləşdirirlər, yəni ötürülmə prosesində informasiyanı bir neçə dəfə kodlaşdırırlar. Məsələn, adi dildə yazılmış teleqramı ötürmənin rahat olduğu teleqraf kodlarının birinə çevirirlər, qəbul zamanı isə yenidən adi dilə çevirirlər. Lakin bəzən ən mühüm parametri seçir və onu kodlaşdırırlar. İnformasiyanın kodlaşdırılması zamanı tez-tez ötürülmənin qənaətcilliyi və etibarlılığı arasında ziddiyyətlə rastlaşırlar. Bu barədə bir az müfəssəl danışaq. İkilik kodlaşdırma zamanı adətən bir parametrlə – yazılışın qənaətçilliyi ilə maraqlanırlar: məlumatlarda artıq simvol olmamalıdır. Lakin elə bu da infor-

masiya ötürülüşünü etibarsız edir: əgər heç olmazsa bir simvol düşür və ya dəyişirsə, informasiyanın bir hissəsi itir və ya təhrif olunur. Köməyə riyazi kodlaşdırma metodları gəlir, onlar ötürülmədə üzə çıxan səhvləri aşkar etməyə və düzəltməyə imkan verir. Belə kodlaşdırmanı əngələ qarşı dayanıqlı kodlaşdırma adlandırırlar.

Əngəlin mövcudluğu zamanı məlumatın izafiliyi onu səhvsiz qəbul etməyə imkan verir. Məlumat qeyri-izafidirsə, izafiliyi xüsusi olaraq daxil edirlər: eyni şeyi bir neçə dəfə təkrar edir, ya da, məsələn soyadını "hərflərlə" verirlər (Cavid: Cəfər – Arif – Vahid – İlkin - Davud).

İkilik informasiyada səhvlərlə ən sadə və qənaətcil mübarizə üsulu cütlüyün nəzarətidir ki, bu zaman sıfırlar və vahidlər ardıcıllığını eyni saylı simvollar qruplarına bölürlər. Hər qrupda vahidlər sayılır. O, cütdürsə, sağdan 0, təkdirsə, 1 əlavə olunur. Bütün hallarda vahidlərin sayı cüt olmalıdır. Əlavə olunan simvol informasiya daşımır, əvəzində səhvi aşkar etmək imkanı verir. Ötürülmə zamanı səhv baş verirsə, 0 1-lə, ya da 1 0-la əvəz olunur və deməli, vahidlərin sayı tək olur. Məlumatları qəbul edən zaman yenə hər simvollar qrupunda vahidlərin sayı hesablanır. Əlbəttə, belə nəticə ancaq onda doğrudur ki, bir qrupda cüt səhvlərin praktiki olaraq qeyri-mümkünlüyü əvvəlcədən məlum olsun. Buna görə də qruplarda simvolların sayını səhvlərin üzə çıxması tezliyindən asılı olaraq seçilir. Bu zaman qrupların özlərinin və əlavə edilən simvolların sayı, deməli izafilik də azalır. Bu metod səhv ehtimalı kiçik olan kompyuterlərdə geniş tətbiq olunur.

Elə kodlar var ki, səhvləri nəinki aşkar edir, həm də düzəldirlər. Belə kodlaşdırma metodlarının birincilərindən olan bir metoddan indi də istifadə edilir. Onda da yalnız tək-tək səhvlərin mümkünlüyü yolverilən saylır və cütlük nəzarətinin daha mürəkkəb sxemindən istifadə olunur. Bu metodu izah edək (şəklə bax).

İnformasiyanı dörd a, b, c, d ikilik simvollar qruplarına ayırırlar. Hər qrupa üç e, f, g yoxlama simvolu əlavə olunur. Onları elə seçirlər ki, $a + b + c + e$ (birinci sətir), $a + b + d$ (ikinci sətir), $a + c + d + g$ (üçüncü sətir) cəmləri cüt olsun. Qəbuledici bu üç cəmi hesablayır və təhlil edir. Onlar hamısı cütdürlərsə, səhv yoxdur; əgər biri təkdirsə, səhv yoxlama simvolundadır. İki cəm təkdirsə, səhv onlara daxil olan, lakin üçüncü cəmə daxil olmayan simvoldadır. Əgər hər üç cəm təkdirsə, səhv a simvolundadır.

Səhvləri düzəldən müasir kodlaşdırma metodları ali cəbrdən, ədədlər nəzəriyyəsindən və s. istifadə edir. Simvollar artıq informasiya və yoxlama kateqoriyalarına ayrılmır; kod bütövlükdə təhlil edilir və dekodlaşdırılır.

Tez-tez tərs məsələni həll etmək – mətnlərin təbii izafiliyini azaltmaq lazım gəlir. Belə prosedur informasiyanın sıxılması və ya qablaşdırılması adlanır. Onu informasiyanı uzun müddətə saxlamaq, onunla işləmək isə nadir hallarda lazım gələndə, eləcə də uzun mətnlərin ötürülməsində tətbiq edirlər.

İnformasiyanın sanksiyalaşdırılmamış daxilolmalardan müdafiəsi ilə informasiya nəzəriyyəsi yaranmamışdan çox əvvəl maraqlanmağa başlamışdılar. İnformasiyanın şifrlənməsi kəşfiyyatçılara, diplomatlara, müxtəlif hökümət xidmətlərinə həmişə gərək olub. Uzun müddət şifrləmə metodları onların yaradıcılarının ustalığından və fəhmindən asılı idi və informasiyanın özü kimi məxfi idi. Müasir dövrdə informasiyanın müdafiəsi nəzəriyyəsi (kriptoqrafiya) dəqiq riyazi elm olmuşdur.

RİYAZİYYAT VƏ KRİSTALLOQRAFİYA

"Kristallos" sözü qədim yunanlarda "buz" demək idi. Homer yunanların Troyanı mühasirəyə almasını təsvir edərək deyir ki, ilk şaxtalı gecədə qəhrəmanların qalxanları "kristallos" – buzla örtüldü. Sonralar, dağlarda buza bənzəyən mineral taparkən onu dağ bülluru – dağ buzu adlandırdılar.

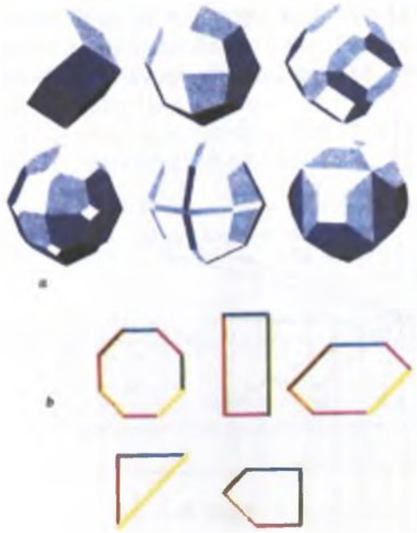
XVIII əsrdən başlayaraq çoxüzlü formaya malik cisimləri kristal adlandırmağa başladılar. Onlara təbiətdə rast gəlinir və ya onları süni yolla laboratoriyalarda alırlar.

Bu gün çoxları elə hesab edir ki, kristallara təbiətdə nadir hallarda rast gəlinir. Lakin bu belə deyil: kristallar hərfi mənada bizi əhatə edir. Əgər ixtiyari kələ-kötür qəmbəri götürərək ona böyüdücü şüşə altında baxsaq, görmək olar ki, o, ayrı-ayrı kiçik, bir-biriylə bitişmiş xırda kristallardan ibarətdir.

SABİT BUCAQLAR QANUNU

Kristalların xassələrinin öyrənilməsi ilə kristalloqrafiya elmi məşğul olur. Onun yaranmasını sabit bucaqlar qanununun kəşfi ilə bağlayırlar. Çoxdan məlum idi ki, kristalları məhlullarda yetişdirmək olar. Bunu doyma həddini keçmiş duzla dolu qabın dibində kiçik kristalların necə yaranmasını müşahidə edərək yoxlamaq olar. Uzaq keçmişdə düşünürdülər ki, kristallar, canlılar və bitkilər kimi sanki içəridən qidalanır və böyüyürlər.

XVII əsrdə Florensiyada yaşayan Danimarka alimi Nils Stensi (Steno, 1638 – 1686) kvars kristallarının çoxsaylı formalarını araşdırdı. Onlar bir-birindən üzlərinin sayı, forması və ölçüləri ilə fərqlənirdilər (şəkil 1).



Şəkil 1.

Kristallarda bucaqların sabitliyi haqqında Stensen qanununda deyilir ki, eyni bir maddənin kristallarının üzlərinin sayı və forması, eləcə də onların ölçüləri müxtəlif ola bilər, lakin müvafiq üzlər arasındakı bucaqlar sabitdir.

Kristalların üzləri arasındakı bucaqların sabitliyini görmək asan deyildi, çünki heç də həmişə bir kristalda hər hansı bir üzə həmin maddənin başqa kristalında üz uyğun gəlmir. Stensen qanununu belə bir misalda izah edək. Şəkil 1-dəki müxtəlif çoxbucaqlılar arasında ümumi olan nədir? Onların müxtəlifliyinə baxmayaraq qeyd etmək olar ki, ixtiyari çoxbucaqlının hər bir tərəfi düzgün səkkizbucaqlının bir tərəfinə paraleldir. Buna görə də çoxbucaqlının tərəfləri arasındakı bucaq düzgün səkkizbucaqlının uyğun tərəfləri arasındakı bucağa bərabər olacaq.

Şəkil 2-də kalsitin (island şpatının) bir neçə kristalı göstərilib. Müxtəlif kristalların uyğun bucaqları eyni rənglə ayrılıb. Belə üzlər arasındakı bucaqlar bərabərdir.



Şəkil 2.

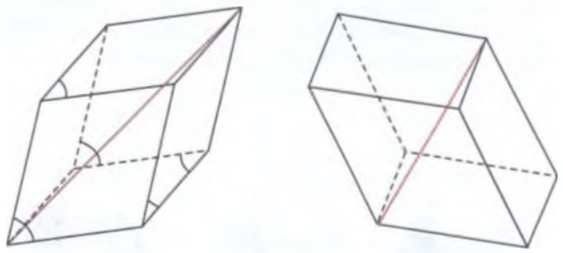
Stensen bucaqların bərabərliyinin səbəbini izah etdi. Maddə kristalın səthinə lay-lay yığılır ki, bunun nəticəsində də o böyüyür, üzlərin müstəviləri isə böyümə prosesində özlərinə paralel qalır və deməli, onların arasındakı bucaq dəyişmir.

Üzlər arasındakı bucaqlara əsasən kristalın maddəsinin hansı maddədən ibarət olduğunu təyin etmək olar. Bu, mineralogiyanın əsas məsələlərindən biridir. Minerallarının tanınması üçün köhnə mineralogiya kitablarında 23 xarici əlaməti nəzərə alan təsnifat təklif edilirdi. Onların arasında rəng, xarici görkəm, parlaqlıq, şəffaflıq, cingiltililik, qoxu, dad, hətta soyuqluq, eləcə də dilə yapışma var idi. İki tədqiqatçının mübahisəsini təsəvvür edin: birinə mineralın dadı acı, o birinə kəmşirin gəlir. Bucaqların sabitliyi qanununun kəşfindən sonra mineralın hansı maddədən ibarət olduğunu təyin etmək sadələşdi.

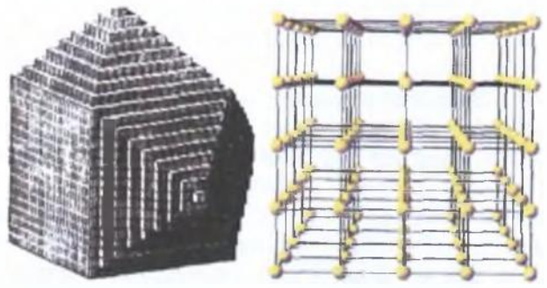
İndiki dövrümüzdə üzlər arasındakı bucaqları qoniometr adlanan cihazla ölçürlər. Ölçmə nəticələrini müxtəlif maddələrin bucaqlarının mümkün qiymətlərinin mineraloji cədvəllərindəki nəticələrlə tutuşdururlar (atlası rus kristalloqraf və mineraloqu N. İ. Kokşarov tərtib edib).

KRİSTALLARDAN QƏFƏSLƏRƏ

Fransız kristalloqrafı abbat Röne Jüst Lyüi (1743 – 1822) tanışları arasında Kristalbölən ləqəbi qazanmışdı. Bir dəfə, mineral kolleksiyaçısının qonağı olarkən o, kalsitin prizmatik kristallar druzunu döşəməyə saldı. Druz – ortaq tərəfə bitişik bir



Şəkil 3.



Şəkil 4.

Şəkil 5.

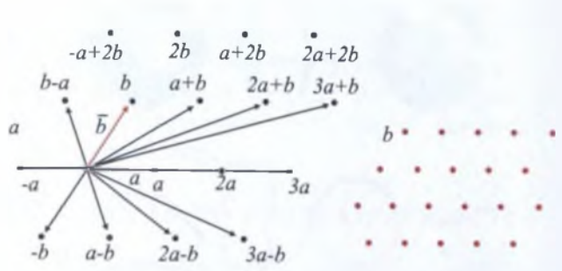
neçə kristal – romboedr formasına malik xırda qəlpələrə bölündü. Kalsitin qəlpələri içində romboedr kimi bucaqları olan, lakin müxtəlif üzunluqlu tilləri olan paralelepipedlər də vardı. (Kubun öz fəza diaqonalı boyunca dartılmasından və ya sıxılmasından alınan paralelepiped romboedr adlanır. Onun bütün üzləri eyni romblardır. Adı da buradandır: o, bütün üzləri romblar olan çoxüzlüyə deyilir; şəkil 3).

Evə qayıdan abbat kalsit kristallarını – bu dəfə öz kolleksiyasından – parçalamağa başladı. Və onlar yenə də daha balaca paralelepipedlərə, onlar da öz növbələrində həmin şəkilli daha xırda çoxüzlülərə bölündülər. Lyüi fikirləşdi ki, belə xırda paralelepipedlərdən, kərpiclər kimi, istənilən ölçülü kristal yığmaq olar (şəkil 4).

Abbat-kristalloqraf düzgün nəticə çıxardı: kristal bərabər kiçicik paralelepipedlərin birləşməsidir. Beləliklə, *XIX* əsrin birinci yarısından başlayaraq kristala atomlarının mərkəzləri fəza qəfəsi yaradan bərk cisim kimi baxmağa başladılar (şəkil 5).

Qəfəs nədir? Damalı dəftəri açaq. Üfiqi xətlərin şaqulilərlə kəsişdikləri nöqtələri ayıraq. Bu nöqtələrin çoxluğu müstəvi qəfəsə misaldır. Ümumi müstəvi qəfəsi isə belə təyin etmək olar: iki elə düz xətlər ailəsi götürək ki, hər birində düz xətlər bir-birlərinə paraleldir və bir-birlərindən bərabər məsafədə yerləşir. Bir ailədəki düz xətlərin digərindəkilərlə kəsişməsi qovşaqları çoxluğu elə qəfəsdir.

Qəfəs sadə, lakin mühüm anlayışdır, özü də həm kristalloqrafiyada, həm riyaziyyatda. Onu vektorların köməyi ilə vermək olar. Bir nöqtədən bir düz xətt üzərində yerləşməyən iki $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorları keçirək. $m\bar{a} + n\bar{b}$ şəklində bütün mümkün cəmlərə baxaq; burada m və n ixtiyari tam



Şəkil 6.

ədədlərdir (şəkil 6, *a*). Belə vektorların ucları da elə müstəvi qəfəsi təşkil edəcək.

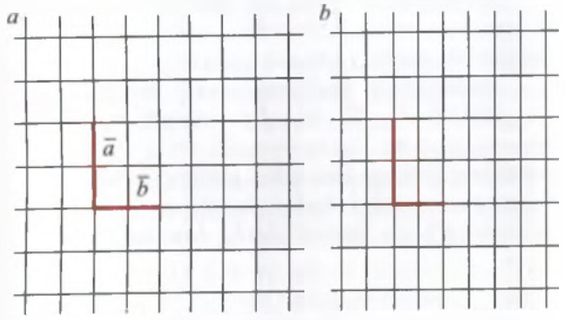
Fəza qəfəsi də tamamilə oxşar təyin olunur. Bunun üçün bir müstəvidə yerləşməyən üç $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektoru götürmək və bir nöqtədən onların tam əmsallı mümkün cəmlərini: $m\bar{a} + n\bar{b} + p\bar{c}$ ayırmaq lazımdır. Belə cəmlərin ucları elə fəza qəfəsini təşkil edir.

QƏFƏSLƏRİN SİMMETRİYASI

Qəfəsdə iki ixtiyari A və B nöqtələri götürək. AB vektoru üzrə paralel köçürməyə baxaq. Bu köçürmədə A nöqtəsi yerini B nöqtəsinə dəyişir. Öz növbəsində B nöqtəsi B' nöqtəsinə hərəkət edir ki, axırıncı da həmin qəfəsə məxsusdur. Və ümumiyyətlə, paralel köçürmədə qəfəsin ixtiyari nöqtəsi mütləq qəfəsin müəyyən nöqtəsinə köçür. Beləliklə, qəfəsin ixtiyari nöqtəsinə paralel köçürmə qəfəsi öz-özüylə üst- üstə salır, yaxud, başqa sözlə, bu qəfəs simmetriyasıdır. "Simmetriya" sözü altında təkcə mərkəzi və ox simmetriyası yox, qəfəsi öz-özünə köçürən ixtiyari hərəkət başa düşülür. Xüsusi halda, baxılan simmetriya – köçürmə translyasiya simmetriyası (translyasiya paralel köçürmənin digər adıdır) adlanır. Bundan başqa qəfəsin öz ixtiyari nöqtəsinə nəzərən mərkəzi simmetriyaları da var. Belə simmetriyalar ixtiyari qəfəsdə mövcuddur.

İndi isə qarşılıqlı perpendikulyar $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarında qurulmuş qəfəsə baxaq. Belə qəfəsdə mövcud olanlardan başqa əlavə simmetriyalar da üzə çıxır. Bunlar qarşılıqlı perpendikulyar oxların iki ailəsinə nəzərən simmetriyadır (şəkil 7, *a*).

Qarşılıqlı perpendikulyar $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının uzunluqlarını dəyişək (şəkil 7, *b*),



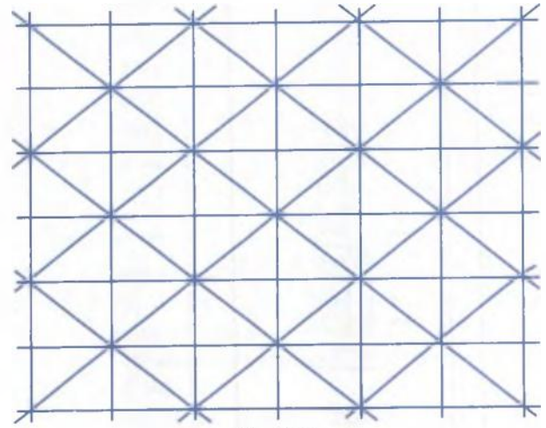
Şəkil 7.

yeni qəfəs alınacaq. Aydındır ki, qəfəsin simmetriyasının xarakteri eyni ilə qalacaq. Onun simmetriyaları qrupuna əvvəlki kimi paralel köçürmələr, qəfəsin nöqtələrinə nəzərən simmetriyalar, qarşılıqlı perpendikulyar düz xətlərə nəzərən simmetriyalar daxil olacaq.

Oxşar və ya həm də, necə deyərlər, izomorf simmetriya qrupları adlanan qəfəslər kristalloqrafiyada Brave tipi adlanan bir sinifdə birləşir. *XIX* əsrdə fransız kristalloqrafı Ogüst Brave göstərdi ki, bütün fəza qəfəslərini 14 tip üzrə ayırmaq olar.

İki qarşılıqlı perpendikulyar, lakin müxtəlif uzunluqlu vektorlar üzərində qurulmuş bütün müstəvi qəfəslər bir Brave tipinə məxsusdur. Düzbucaqlı qəfəsin $\bar{a}$ və $\bar{b}$ vektorlarının uzunluğu eynidirsə, yəni o, kvadratdırsa, onun düzbucaqlı simmetriyadan başqa əlavə simmetriyalar üzə çıxır. Buna görə də bu yeni qəfəs başqa Brave tipinə düşür.

Kvadrat qəfəs düzbucaqlıdan daha simmetrikdir: onun daha çox simmetriya elementləri var: $2\pi / 4$ bucağı qədər dönmə onların arasındadır. $2\pi / 3$ və ya $2\pi / 6$ bucaqları qədər dönmə-simmetriyaları olan qəfəsləri də asanca qurmaq olar. Lakin asanlıqla göstərmək olar ki, $2\pi / 5$ bucağı və ya $n > 6$ olduqda $2\pi / n$ bucağı qədər dönmə-simmetriyalı qəfəslər yoxdur.



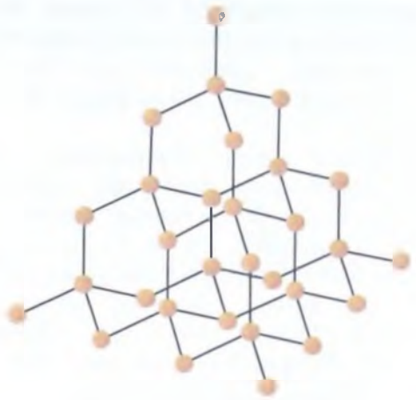
Şəkil 8.

14 Brave tipindən ən az simmetrik olanı yalnız paralel köçürmələr və nöqtələrə nəzərən simmetriyaları olan bütün ən ümumi qəfəsləri birləşdirən simmetriyalardır.

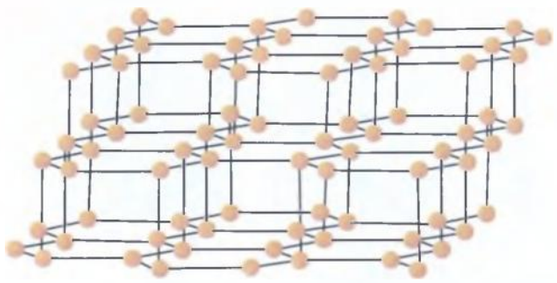
Kristal qəfəsin simmetriyasını öyrənmək niyə vacibdir? Əvvəla, o, çox mənada kristalın xarici görkəmini, onun cilalanmasını müəyyən edir. İkincisi, simmetriyadan kristalın fiziki xassələri asılıdır.

Kristallik maddənin həndəsi quruluşunun, o cümlədən onun simmetriyasının kristalın fiziki xassələrinə necə təsir etməsi almaz və qrafit misalında yaxşı görünür. İlk baxışdan onların arasında ümumi heç nə yoxdur. Almaz ən bərk mineraldır. Təsadüfi deyil ki bu nadir qiymətli maddə deşici,

frez və digər doğrayıcı alətlər üçün istifadə olunur. Qrafit elə yumşaqdır ki, ondan karandaş çubuqları düzəldilir. Qrafit çubuğun ucu kağızla kiçik təmasdan sınaraq onda iz qoyur. Almaz şəffafdır, qrafit yox. Almaz dielektrik, qrafit naqildir.



Şəkil 9. Almazın həndəsi sxemi.



Şəkil 10. Qrafitin həndəsi sxemi.

Bununla belə, kimyaçı baxımından almaz və qrafit ən yaxın qohumlardır. Hər ikisi təmiz karbondur. Bundan əlavə, hər iki maddə kristaldır, yəni, kristalloqrafların dediyi kimi, qəfəs qanunu ilə qurulub. Onların fiziki xassələrində bu fərq haradandır? O, onların həndəsi quruluşlarının müxtəlifliyindən doğub (şəkil 9 və şəkil 10).

Əgər qrafitdə və almazda atomların quruluşuna baxsaq, hər iki kristalda translyasiya simmetriyası görərik. Lakin onların atomları artıq qəfəs yox, daha mürəkkəb struktur təşkil edir.

DÜZGÜN NÖQTƏLƏR SİSTEMLƏRİ

Kristalın quruluşunu təyin etmək imkanı yalnız *XX* əsrin əvvəllərində yarandı. Hələ *XIX* əsrin sonlarında kristalloqraflar bəzi dolayı əlamətlərə görə ancaq hiss edə bilərdilər ki, kristallar sadəcə qəfəsdən daha mürəkkəb quruluşa malikdirlər. Belə fərziyyəni ilk dəfə 1879-cu ildə alman kristalloqrafı L. Zonke söylədi. O, fərz etdi ki, atomlar kristallarda düzgün sistem təşkil edirlər.

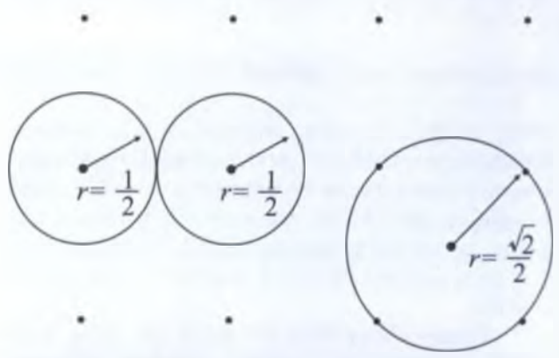
Düzgün sistemlərin tam riyazi nəzəriyyəsi kristallik maddənin həndəsəsi haqqında müasir təsəvvürlərin bünövrəsidir. Bu nəzəriyyəni rus kristalloqrafı Yevqraf Stepanoviç Fyodorov (1853 – 1919) yaradıb. *XX* əsrdə kristalloqrafiyanın inkişafı Fyodorovun nəzəriyyəsini təsdiq etdi.

Atomu müəyyən *r* radiuslu kürəcik şəklində təsəvvür edək. Onda ixtiyari kristalın strukturu bir-birlərinə daxil olmayan belə kürəciklər çoxluğu kimi görünəcək. Lakin təbiət boşluğu sevmir və aşağıdakıları fərz etmək olar:

1) iki "kürəciyin" mərkəzləri arasındakı məsafə $2r$-dən kiçik deyil;

2) ixtiyari "boş" ("atomların" mərkəzini saxlamayan) "kürəcik" müəyyən R qiymətindən kiçik radiusa malikdir.

Sadalanan şərtlərə cavab verən nöqtələr çoxluğu (r, R) nöqtələr çoxluğu və ya rus riyaziyyatçısı Boris Nikolayeviç Delonenin şərəfinə Delone çoxluğu adlanır. O bu çoxluqların xassələrini öyrənmiş və riyazi kristalloqrafiyaya böyük töhfə vermişdir.



Şəkil 11.

Tərifdən göründüyü kimi Delone çoxluğu son dərəcədə ixtiyari çoxluqdur. Onda nə atomların hədsiz sıx topluları, nə də hədsiz böyük boşluqlar var (şəkil 11). Vahid addımla qurulmuş qəfəsə $r = 1/2$ və $R = \sqrt{2}/2$ para- metrləri ilə (r, R)-çoxluq kimi baxmaq olar.

İndi isə daha bir şərtə – düzgünlük şərtinə baxaq.

3) düzgün çoxluğun nöqtəsi ixtiyari digər nöqtə kimi bu çoxluğun digər nöqtələri ilə əhatə olunub.

Hər üç şərti ödəyən sistemə düzgün sistem deyilir. Düzgün sistemə ən sadə misal bizə tanış olan qəfəsdir. Onun bütün nöqtələri eyni əhatəyə malikdir. Lakin qəfəslərdən başqa digər düzgün sistemlər də mövcuddur. Belə sistemdə olan kimsə bu dünyanın yeknəsəkliyindən bezərək yuxuya gedərsə, sonra digər nöqtədə ayılarsa, o, qeyri-iradi səyahəti hiss etməz: ətrafdakı mənzərə həminki olacaq.

Kristalın quruluşunun düzgünlüyü şərtinin təbiiliyini izah etməyə çalışaq. Təsəvvür edək ki, kristallar, içində hansısa atomlar üzən məhluldan əmələ gəlir. Bir-birinin yanında düzülərək, onlar tez və ya gec ən az potensial enerjiyə cavab verən vəziyyəti tapırlar. Əgər bir atomun ətrafında oxşar atomlar qrupu yığışıbsa, onda digər ixtiyari atomun ətrafındakı atomlar qrupu da belə olmalıdır – axı atomlar eynidirlər.

Düzgün sistemdə bütün nöqtələrin eyni əhatəyə malik olması və beləcə sonsuzluğa qədər davam etməsi onu göstərir ki, sistemin hər bir A nöqtəsi simmetriyanın köməyilə ixtiyari B nöqtəsinə köçürülür. Xatırladaq ki, qəfəs belə xassəyə malikdir. Özü də qəfəs halında A-nı B-yə keçirən səciyyəvi simmetriya AB vektoruna paralel köçürmədir. Lakin düzgün sistem qəfəsdən fərqlənirsə, onun verilmiş bir nöqtəsini o birinə keçirən simmetriya köçürmə olmaya da bilər. Bu hərəkət dönmə, müstəviyə nəzərən simmetriya və ya onların kombinasiyası ola bilər.

Düzgün sistemin bütün simmetriyalar çoxluğu kristalloqrafik qrup adlanan qrup əmələ gətirir. Xüsusi halda, paralel köçürmə qrupu – qəfəsin simmetriyası – kristalloqrafik qruplardan biridir. Lakin digər kristalloqrafik qruplar da var. Onlara dönmələr, düz xətlərə, müstəvilərə nəzərən simmetriyalar, onların kombinasiyaları daxildir. Düzgün fəza sistemlərinin bütün mümkün simmetriyalarını təsvir etmək üçün əvvəlcə fəzada bütün kristallik qrupları təyin etmək lazım idi.

Bu çətin riyazi məsələni Y. S. Fyodorov həll elədi. Alim əvvəlcə müstəvi üzərində mövcud olan bütün kristalloqrafik qrupları təyin etdi. Onlar 17 idilər. Müstəvi qruplar əsrlər boyu məlumdur. *XIV* əsrdə, İspaniyada naxışlar sənətinin ən yüksək çiçəklənmə dövründə mavritan naxışlarında bütün 17 müstəvi qrup vardı. Buna görə də demək doğru olar ki, Fyodorov müstəvi qrupların siyahısının tamlığını sübut etdi.

1891-ci ildə Fyodorov bütün fəza qruplarını təyin etdi. Onlar 230 idilər. Fyodorovla bir vaxtda alman riyaziyyatçısı Artur Şönflis (1853 – 1928) də kristalloqrafik qrupları kəşf etdi. Beləliklə, hər iki alim kristalların simmetriyasının bütün mümkün növlərinin tam təsvirini verdilər.

Maddənin kristalloqrafik qrupa əsaslanan kristallaşma nəzəriyyəsi translyasiya simmetriyasının mövcudluğunu aradan götürmür. İxtiyari fəza kristalloqrafik qrupunun mühüm xassəsi ondadır ki, onda həmişə bir müstəviyə paralel olmayan üç istiqamətdə paralel köçürmələr var. Bu xassəni ilk dəfə 1891-ci ildə Şönflis isbat edib. Beləliklə, Şönflis teoreminə görə, düzgün nöqtə sistemləri qəfəslərdən, lakin bir yox, bir-birinə bərabər olan və paralel yerləşən qəfəslərdən ibarətdir.

1912-ci ildə alman fiziki Maks fon Laue fərz etdi: kristal həqiqətən qəfəs quruluşuna malikdirsə, ondan keçən rentgen şüalarının difraksiyası baş verməlidir. Onun fəhmi parlaq isbatını tapdı. Artıq bir neçə ay sonra ingilis fizikləri Vilyam Henri Breq və Vilyam Lorens Breq (ata və oğul) rentgen şüalarının köməyi ilə ilk dəfə bir neçə kristalın strukturunu deşifrlədilər.

Kristalın strukturunu deşifrləmək mürəkkəb eksperimental məsələdir. Bununla belə hal-hazıradək çoxminli kristalların "portretlər qalereyası"yaradılıb.

Beləliklə, bir tərəfdən kristalın düzgün sistem kimi təyini, onun öyrənilməsinə riyazi metodların cəlb edilməsi imkanı yaratdı. Digər tərəfdən, düzgün sistemin tərifindən çıxdığı kimi, bütün atomların sonsuzluğa qədər digər tamamilə eyni atom-

larla əhatə olunması zəruridir. Bəs onda niyə kristallaşma prosesində atomlar öz aralarında kimyəvi rabitələrin uzunluqlarına uyğun olan nisbi kiçik məsafələrdə qarşılıqlı təsirdə olsalar da, düzgün sistemə düzülürlər? Axı qarşılıqlı təsirin belə xarakterindən atomların əhatəsinin sonsuzluğa qədər yox, yalnız müəyyən ətrafa qədər identikliyi çıxır. 1976-cı ildə B. N. Delonenin rəhbərliyi altında onun tələbələri R.V. Qaliulin, N.P. Dolbilin və M.İ.Ştoqrin belə bir teorem isbat etdilər: əgər (r,R) sistemdə $8R$ sferası hüdudlarında bütün nöqtələr eyni əhatəyə malikdirlərsə, sistem düzgündür. Yada salaq ki, R bizim nöqtələr sistemimizdə ən böyük, boş kürənin radiusudur. Deməli, kristallarda uzaq periodik tərtib atomların lokal əhatəsinin identikliyindən çıxarılır.



Y.F. Stepanoviç

Nöqtələrin əhatəsinin çox kiçik ətrafda identikliyi tələb olunarsa, nöqtələr sistemi son dərəcə ixtiyari ola bilər. Bu halda, elə bil, heç bir uzaq tərtibdən danışmaq lazım gəlmir. Lakin 1978-ci ildə ingilis fiziki Rocer Penrouz uzaq nizamın aşkar mövcud olduğu mozaikaları kəşf etdi, lakin bu, kristallarda müşahidə olunandan tam fərqli xarakterli idi ("Çoxbucaqlılar" məqaləsinə bax). Penrouzun mozaikalarında, məsələn, 5-ci tərtib oxa malik kifayət qədər böyük fraqmentlərə rast gəlinir. Yeni simmetriya növü elə bil ki, ağlın real varlıqlara heç bir aidiyyatı olmayan oyunu idi. İsrail fiziki Şextmanın və onun əməkdaşlarının 1984-cü ildə etdikləri kəşf əsl sensasiya oldu. Onlar alüminium və maqneziumun sürətlə soyudulmuş ərintisini rentgen analizinə məruz qoydular. Difraksiya şəklində alimlər aydın ifadə olunan... 5 qat simmetriya aldılar. Ərinti amorf maddə olsaydı, onun "portreti" tamamilə yayılmış olardı. Lakin onu kristal da hesab etmək olmaz, belə ki, kristallarda 5 tərtibli ox mümkün deyil. Yəqin ki, bu ərintinin strukturu yeni simmetriya növünə malikdir.

Təbiətdə uzaq tərtibli qeyri-kristal strukturların kəşfi yeni elmi istiqamətə - kvazikristalloqrafiyaya güclü təkan verdi.

ŞAHMAT TAXTASI ÜZƏRİNDƏ RİYAZİYYAT

Şahmat və riyaziyyatın doğma olan çox şeyi var. İstedadlı riyaziyyatçı Qodfri Harold Hardi bir dəfə qeyd etmişdir ki, şahmat oyununun problemlərinin həlli riyazi çalışmadan başqa bir şey deyil, oyun isə riyazi melodiyaların fitlə çalınmasıdır. Riyaziyyatçı və şahmatçının təfəkkür formaları kifayət qədər yaxındır və təsadüfi deyil ki, riyaziyyatçılar tez-tez bacarıqlı şahmatçılar olurlar.

Şahmat daima müxtəlif riyazi anlayış və ideyaların illüstrasiyası üçün istifadə olunur. Kibernetika, oyunlar nəzəriyyəsi, qraflar nəzəriyyəsi, kombinatorika və s. üzrə ədəbiyyatda şahmat misallarına və terminlərə rast gəlmək olar. Şahmat "kompyuter elmində" də mühüm yer tutur.

ŞAHMAT TAPMACALARI

Şahmat riyaziyyatı əyləncəli riyaziyyatın, məntiqi oyun və əyləncələrin ən populyar janrlarındandır. Özü də bir sıra şahmat-riyaziyyat tapmacaları elə mürəkkəbdir ki, görkəmli riyaziyyatçılar onlar üçün xüsusi riyazi aparat işləyib-hazırlamışlar.

Ən əvvəl şahmatın yaranması haqqında bir gözlənilməz hesablama ilə bağlı olan qədim əfsanəni xatırlayaq.

Şahmat oyununa görə mükafat. Hind şahı şahmatla ilk dəfə tanış olarkən onun özünəməxsusluğuna və gözəl kombinasiyaların bolluğuna heyran qaldı. Əlamətdar oyunun yaradıcısının onun təbəəsi olduğunu biləndə şah icada görə bu müdrükü şəxsən mükafatlandırmaq məqsədi ilə onu yanına çağırdı. Hökmdar onun istənilən arzusunu yerinə yetirməyə söz verdi və onun mükafat kimi müəyyən miqdarda buğda dəni istəməyindən heyrətləndi. Alim birinci xanaya bir dən, ikinciyə iki və beləliklə hər

sonrakı xanaya əvvəlkindən iki dəfə çox dən qoyulmasını istəyirdi. Şah tez ixiiraçıya onun azacıq mükafatının verilməsini əmr etdi. Lakin o biri gün saray riyaziyyatçıları hökmdarlarına xəbər verdilər ki, onun əmrini yerinə yetirmək üçün nəinki səltənətin ambarlarında, heç dünya ambarlarında da saxlanılan buğda kifayət deyil. Müdrik cəmisi $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{63} = 2^{64} - 1$ buğda dəni tələb etmişdi. Bu ədəd iyirmi rəqəmlə yazılır və fantastik böyükdür.

İndi isə şahmat taxtasının riyazi məsələlərin həllində tətbiqinə dair iki misal göstərək.

Pifaqor teoreminin isbatı. Şahmat kralı qrossmeyster Mixail Tal bir dəfə etiraf etmişdir ki, uşaqlıqda tənbəl məktəblilərin "Pifaqor şalvarı hər tərəfə bərabərdir" kimi ifadə etdikləri teoremin isbatından təsirlənmişdir.

Şahmat taxtasında şəkil 1-də göstərildiyi kimi kvadrat çəkək. Burada taxta beş yerə bölünüb – kvadratın özü və dörd eyni düzbucaqlı üçbucaq. İndi isə şəkil 2-ni düzəldək. Qarşımızda həmin dörd üçbucaq, lakin birinin yerinə iki, özü də kiçik ölçülü kvadrat var. Hər iki halda üçbucaqlar eynidir, deməli sahələri bərabərdir. Belə çıxır ki, taxtanın yerdə qalan hissələri də eyni sahə tuturlar. Bunlar birinci şəkildə bir, ikincidə iki kvadratdır. Böyük kvadrat düzbucaqlı üçbucağın hipotenuzunda, kiçiklər isə onun katetlərində; hipotenuzun kvadratı katetlərin kvadratları cəminə bərabərdir nəticəsinə gəlirik.

Domino ilə tapmaca. Ölçüləri 2×1 olan domino daşları ilə qarşı bucaq kvadratları kəsilən 8×8 kvadratlı taxtanı örtmək olarmı?

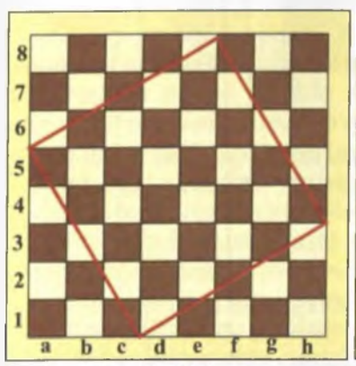
Cəbri mühakimələrlə məşğul olmaq olar, lakin şahmat həlli həm sadə, həm də incədir. Kəsilmiş kvadratı qara və ağ rənglərlə boyayaraq onu a1 və h8 xanalarsız şahmat taxtasına çevirək (şəkil 4). Taxtanın axtarılan örtülməsində hər bir domino daşı bir ağ və bir qara xana tutur və deməli, daşların tam dəsti (31 ədəd) eyni sayda ağ və qara xanaları örtür. Lakin kəsilmiş taxtada qara xanalar ağlardan iki ədəd azdır (kəsilmiş xanalar qaradırlar) deməli, taxtanın zəruri örtülməsi mövcud deyil!

Beləliklə, taxtanın rənglənməsi şahmatçıya nəinki oyun ərzində taxtada baş açmağa imkan verir, həm də qeyri-adi tapmacalar həll etməyə şərait yaradır.

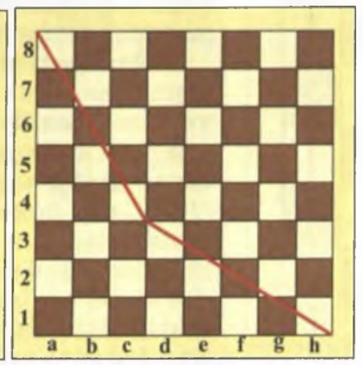
Riyaziyyatçı baxımından şahmat taxtasının ən maraqlı xassəsi ondan ibarətdir ki, onda məsafə o qədər də adi deyil, iki nöqtə (xana) arasındakı məsafə heç də həmişə düz xətt boyunca ölçülmür.

Heç-heçə. Retinin məşhur etüdünə (1921-ci il) baxaq. Burada taxtanın bu xüsusiyyəti daha effektiv üzə çıxır. O, şəkil 5-də göstərilib. Tələb olunur ki, ağlar partiyanı heç-heçəyə gətirsinlər. Ağ şahın qara piyadanı tutacağı inanılmaz görünür. Lakin o "adi" h8 – h1 düz xətti boyunca deyil, "şah xətti" boyunca (onun ziqzaqı şəkildə göstərilib) yola düşsə, mütləq məqsədə çatar.

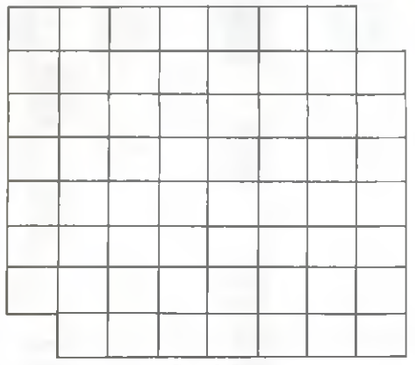
1. Ş g7! h4. Şf6! Şb6. 2..h3. 3. Şe7 h2. 4. c7 Şb7. 5. Şd7-dən sonra piyadalar hər ikisi eyni zamanda vəzirə çevrilirlər. Ağ şah rəqib piyadası ardınca düz xətt üzrə, h xətti



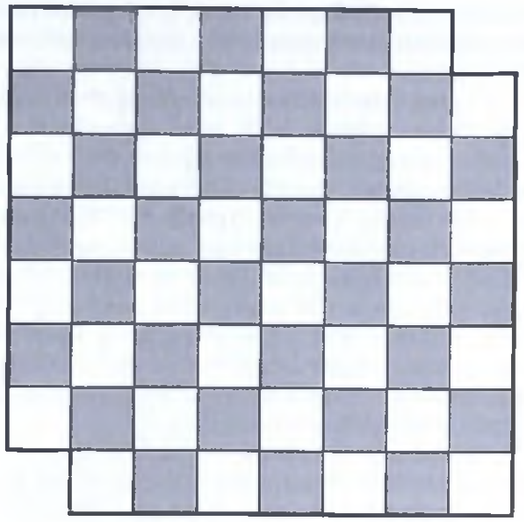
Şəkil 1.



Şəkil 2.



Şəkil 3.



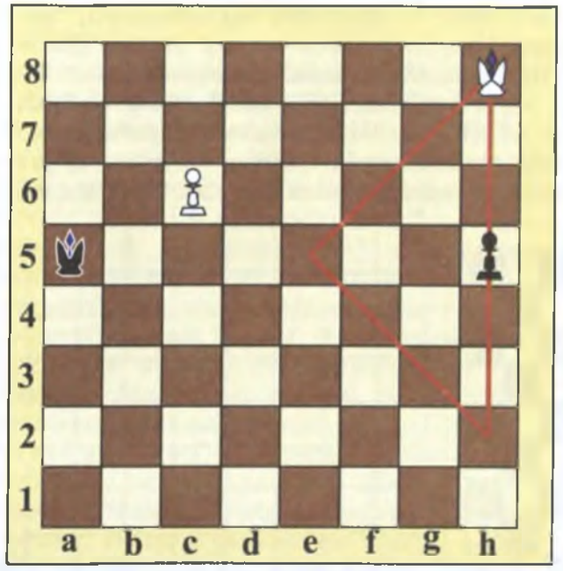
Şəkil 4.

boyunca hərəkət etsəydi, belə təhlükə yaranmazdı.

2. Şe5! Ş:c6. Yenə 3..h3 4. Şd6 h2 5. c7 Şb7 6. Şd7 taxtada iki vəzirin peyda olmasına gətirir.

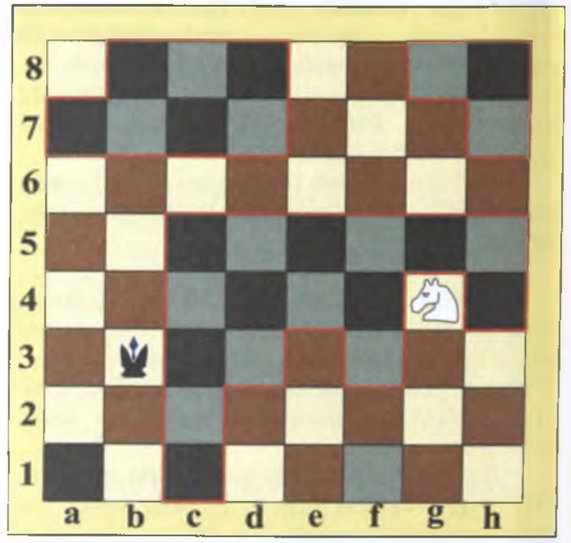
3. Şf4 h3. 5. Şg3 h2. 6. Ş:h2. Şah çevrilmə ərəfəsində piyadaya çatır. Heç-heçə! İnanılmaz – həqiqət oldu.

Aydındır ki, ağ şahın "nəzər nöqtəsindən" şəkil 5-də təsvir edilmiş düzbucaqlı



Şəkil 5.

üçbucağın katetləri cəmi hipotenuza bərabərdir! Reti etüdü öz dövründə şahmat aləmində böyük sensasiya doğurmuşdu. Forma təmizliyi və materialın lakonikliyinə görə bu həndəsi inci əvəzsizdir.



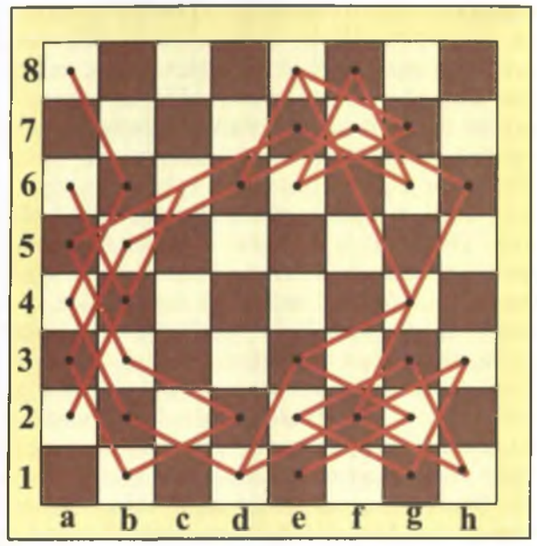
Şəkil 6.

Attilanın atı haqqında məsələ. Taxtada iki fiqur var – ağ at və qara şah. Bəzi xanalar "yanan" elan edilir. At düşmən şahına çatmalı, onu devirməli və ilkin vəziyyətə qayıtmalıdır. Ona "yanan" xanaları, eləcə də bir dəfə keçdiyi xanaları tutmaq qadağan edilir.

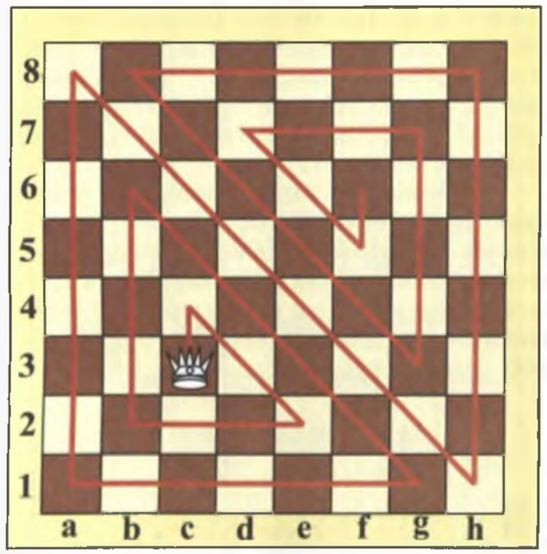
Hunların rəhbəri Attila öyünürdü: "Atımın ayaq basdığı yerdə ot bitmir!" Bu zaman o demək istəyirdi ki, onun qoşunları yolunun üstündəki hər şeyi məhv edirlər. Şəkil 6-da Attilanın atı g4-də, düşmən şahı isə b3-də yerləşib. Yanan xanalar ayrılıb.

Atın gedə biləcəyi, aralarında onun gedişinin mümkün olduğu bütün cütləri düz xətt parşaları ilə birləşdirərək verilmiş məsələ üçün atın qrafını alırıq (taxtanın xanalarına qrafın təpələri uyğundur) – şəkil 7 ("Qraflar" məqaləsinə bax). Nəticədə iş qrafda elə yolun tapılmasına gətirilir ki, o, bir təpəni bir dəfədən artıq saxlamır və bundan əlavə, hər iki ayrılmış təpədən keçir (şəkildə onlar dairəciklərlə çəkilib).

Labirint adlanan belə məsələlərin həlli metodları qraflar nəzəriyyəsində yaxşı məlumdur. Attilanın atı üçün axtarılan yolu



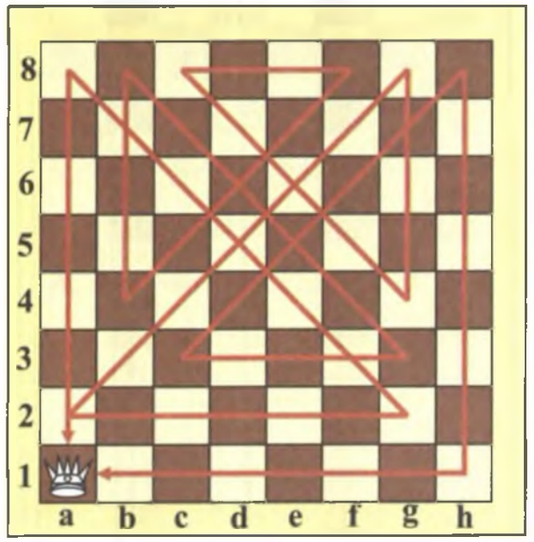
Şəkil 7.



Şəkil 8.

bilavasitə tapmaq da asandır. O, 18 gedişdən ibarətdir: Ag4 – f6 – c8 – g7 – e6 – f8 – g6 – e7 – c6 – a5:b3 – d2 – b1 – a3 – b5 – d6 – f7 – h6 g4. Məqsədə çatmaq üçün atın 35 xanadan, döyüşün əvvəlində yandırılmamış 18-ində olması lazım gəldi.

Əyləncəli riyaziyyat kitablarında şahmat fiqurlarının nəinki atın, eləcə də filin, topun, şahın, vəzirin marşrutu haqqında məsələlər çoxluğuna rast gəlmək olar. Bu zaman vəzirə bəzi xanaların yanından iki dəfə qaçmağa imkan verilərsə, bir gedişə qənaət etmək olar. Beləliklə, vəzirin şahmat taxtasında yolu 14 gedişdən ibarətdir (şəkil 9).

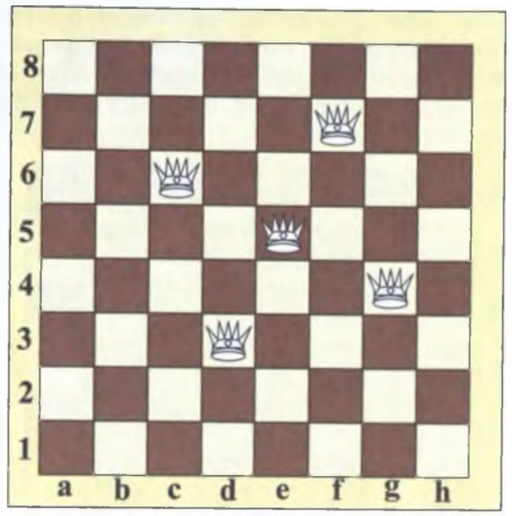


Şəkil 9.

Gözətçi vəzirlər haqqında məsələ. Hər bir həbsxana kamerasının yanında gözətçi qoymaq olar. Kameraların birinin yanında olan gözətçi verilən kameraya, dəhlizlərin apardığı digər kameralara da nəzarət edə bilər. Bütün kameralara nəzarət etmək üçün zəruri olan gözətçilərin ən az sayı nəyə bərabərdir?

Şahmat taxtasına həbsxana kimi baxsaq (qoy şahmatşılar bu müqayisəyə görə bizi bağışlasın), özü də onun xanalarını kameralar, vertikallar, horizontallar və diaqonalları dəhlizlər hesab etsək, onda gözətçi olaraq, əlbəttə ki, bütün istiqamətlərdə müşahidə aparmağa qabil olan vəzirləri təyin etmək daha təbii olar Onda gözətçilər haqqında məsələ belə ifadə olunur: şahmat taxtasında ən az neçə vəzir saxlamaq lazımdır ki, onlar bütün sərbəst xanaları atəş altında saxlaya bilsin.

Sən demə bütün şahmat "həbsxanasına" beş vəzir kifayətdir (şəkil 10). Bundan başqa, isbat edilmişdir ki, 8 top, ya 8 fil, ya 9 şah, ya da 12 at taxtanın bütün xanalarını nəzarətdə saxlamağa qadirdirlər. Maraqlıdır ki, ixtiyari $n \times n$ ölçülü taxtalarda heç də bütün hallarda həll tapılmayıb.



Şəkil 10.

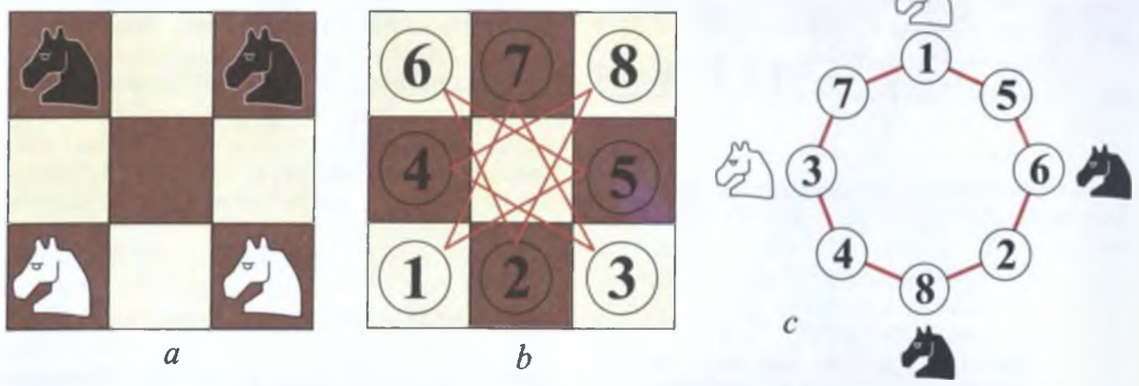
İndi isə taxtada fiqurların tam riyazi səciyyə daşıyan yerdəyişmələri haqqında məsələlərə baxaq.

Qədim tapmaca. Bu məsələni italyan Quarini hələ *XVI* əsrdə fikirləşib tapıb. Ona tez-tez əyləncəli riyaziyyat üzrə kitablarda rast gəlmək olar. 3×3 ölçülü taxtanın künclərində iki ağ və iki qara at durur (şəkil 11, *a*). Ən az gediş sayı ilə ağ və qara atların yerini dəyişmək tələb olunur.

Məsələ, ən zərif yolla məşhur riyazi tapmacalar ustası Q. Düdeninin kəşf etdiyi "düymə və sap" metodunun köməyi ilə həll olunur. Xırda taxtanın mərkəzi xanasından başqa (ora atlar düşə bilmir) bütün xanalarına düymələr düzək (şəkil 11, *b*). İki xana arasında atın gedişi mümkündürsə, müvafiq düymələri saplarla bağlayaq (şəkildə saplar düz xət parçalarıdır).Alınmış düymə və sap kələfini elə qarışdıraq ki, bütün düymələr dairəvi yerləşsin (şəkil 11, *c*).

İndi məsələ sanki avtomatik həll olunur. Dairə üzrə hərəkət istiqamətlərindən birini götürərək atların yerini o qədər dəyişəcəyik ki, onlar yerlərini dəyişsinlər. Atların taxta üzərində yerlərini dəyişmək üçün düymələri müvafiq xanalarla əvəz etmək gərəkdir. Asanca əmin olmaq olar ki, həll atların 16 yerdəyişməsindən (səkkiz ağ və səkkiz qara) ibarətdir, özü də əks rəngli atlar növbə ilə gedə bilərlər. Əlavə olaraq tələb etsək ki, müxtəlif rəngli atlar hərəkət zamanı bir-birini təhdid etməsin (bu zaman gediş növbəliliyini pozmaq olar), onda həlli şəkil 11, *c*-dən tapmaq olar. Yalnız onu gözləmək zəruridir ki, ağ və qara atlar kələfdə qonşu olmasınlar. Dairəvi hərəkəti (saat əqrəbinin əksi istiqamətində) a1 ağ at başlayırsa, həll belə olacaq: Aa1 – b3, Aa3 – c2, Ac3 – b1 – a3, Ac1 – a2 – c3, Ab3 – c1 – a2, Ac2 –a1 – b3, Aa3 – c2 – a1, Ac3 – b1 – a3, Aa2 – c3, Ab3 – c1.

Düymələr və saplar metodunu qraflar nəzəriyyəsi terminlərində asanca izah etmək olar. Həqiqətən, atların yerdəyişməsi məsələsinə təpəsi taxtanın xanalarına (düymələrə), tərəfləri isə atın xanalar arasında mümkün gedişlərinə (saplara) uyğun olan qraf qarşı qoymaq olar.



a *b* *c*

Şəkil 11.

Təbiidir ki, düymələr və saplar metodu nəinki təkcə Quarini məsələsinin, eləcə də yerdəyişmə məsələləri və tapmacaların (təkcə şahmata aid yox) bütöv sinfinin həllində istifadə oluna bilər.

Sonda əyləncəli riyaziyyat qrossmeysteri Sem Loydun fikirləşib tapdığı fiqurların yerdəyişməsi haqqında daha bir məsələyə baxaq.

Dunayı keçmək. Şəkil 12-də ən az sayda gedişlə dörd ağ atın vəzir cinahından şah cinahına (a, b, c, d vertikallarından e, f, g və h vertikallarına) , üç qara atın isə şah cinahından vəzir cinahına (f, g, h vertikallarından a, b və c vertikallarına) yerdəyişməsi tələb olunur. Qısası, atlar cinahları - "Dunay çayının sahillərini" dəyişməlidirlər. Gedişlərin növbəliliyini gözləmək lazım deyil, lakin atlara geri çəkilmək (ağlara sola, qaralara sağa) qadağan edilib. Bundan başqa, hər vertikalda həmişə bir at var.



Şəkil 12.

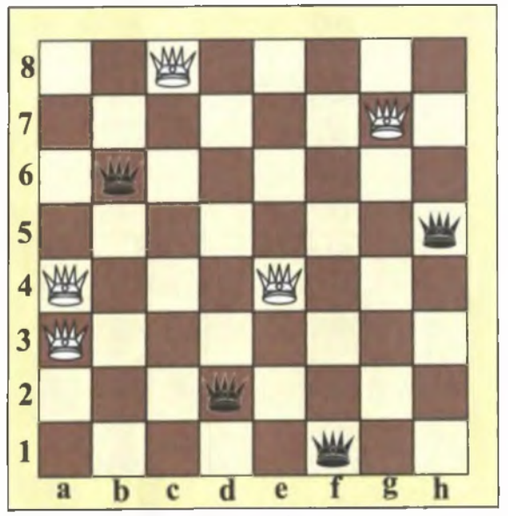
Loyd bu tapmacanı ən çətinlərdən sayırdı və həmişə fəxr edirdi ki, onun dostlarının az qismində atları "Dunaydan keçirmək" (c vertikalı) nəsib olub. Məqsəd 19 gedişə əldə edilir, özü də qraflar nəzəriyyəsinin dilinə keçirən zaman məsələ tamam sadələşir.

Məsələ "düymələr və saplar" metodunun köməyi ilə həll oluna bilər. Atların taxtanın hansı – yuxarı, yoxsa aşağı hissəsinə düşəcəyinin fərqi olmadığından həlldə yalnız taxtanın vertikallarını göstərmək kifayətdir. Beləliklə, atlar üzməyə yola düşürlər: de, fd, gf, eg, ce, bc, db, fd, hf, gh, eg, ce, ac, ba, dh, fd, ef, ce, de. Dunay çayı fəth olundu!

KOMPYUTER ŞAHMAT TAPMACALARINI HƏLL EDİR

Şahmat taxtası üzərində variantların böyük sərf-nəzər edilməsi tələb olunan riyazi tapmacaları həll edərkən insan çoxdandır ki, kompyuterə uduzur.

Səkkiz vəzir haqqında məşhur məsələdən başlayaq: şahmat taxtası üzərində birbirlərini hədələməyən, yəni eyni vertikal, horizontal diaqonalda dayanmayan (fiqurların rəngi məna kəsb eləmir) səkkiz vəzirin müxtəlif yerləşmələrini hesablamaq tələb olunur. Bu tapmaca ilə Karl Fridrix Qauss maraqlanıb, lakin o da bütün mümkün halları tapa bilməyib. Sonralar sübut edildi ki, 8 vəzirin yerləşmələrinin ümumi sayı 92-yə bərabərdir (onların biri şəkil 13-də göstərilb).



Şəkil 13.

Nə zamansa bu məsələnin həllərinin sayını hesablamaq çox çətin idi. Bizim günlərimizdə kompyuterə uyğun proqramı daxil etməklə yerləşmələrin tam dəstini bir neçə saniyəyə tapmaq olar. Təsadüfi deyil ki, vəzirlər haqqında tapmacaya proqramlaşdırma üzrə bir çox vəsaitlərdə səmərəli məsələ kimi rast gəlmək olar.

Daha bir qeyri-adi oyun bu məsələ ilə birbaşa əlaqəlidir. İki oyunçü növbə ilə vəzirləri a, b, c və s. vertikallara qoyur, özü də vəzirlər bir-birinə hücum etməməlidirlər. Növbəti gedişi edə bilməyən oyunçu uduzur – taxtada artıq 8 vəzir var və ya göstərilən şərti pozmadan yeni vəziri qoymaq olmur.

Şəkil 14-də ağlar udmuşlar: f vertikalının bütün xanaları vəzirlərin nəzarəti altındadır və qaraların gedişi yoxdur. Şəkil 15-dəki vəziyyətdə isə qaralar qalib gəlib: e vertikalında ağ vəzirin gedə biləcəyi bir xana da yoxdur.

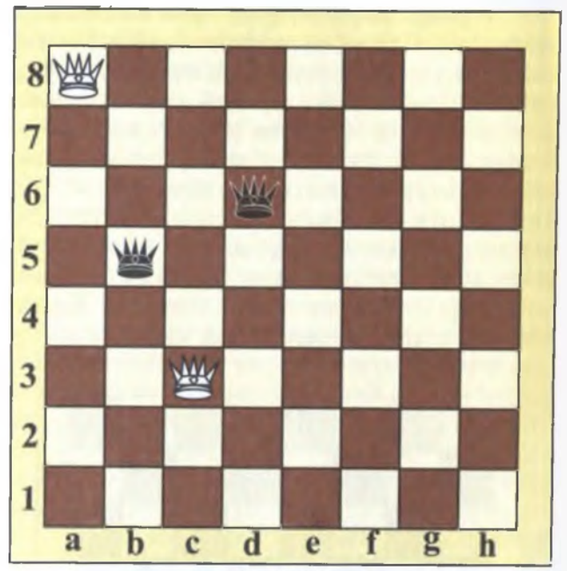
Həmin oyunun başqa variantı da var: axırıncı gedişi edən oyunçu taxtada qalmış boş vertikalların sayı qədər xal yığır. Onda birinci misalda ağlar üç xal, ikincidə qaralar dörd xal yığıblar.

Hər iki tərəfin ən yaxşı davranışında belə oyunların nəticəsi nədir? Bu suala cavab vermək üçün bütün partiyaları (onlar bir neçə mindir) saf-çürük etmək lazımdır. İşi kompyuterə tapşırdılar və o, aşağıdakı nəticəyə gəldi:

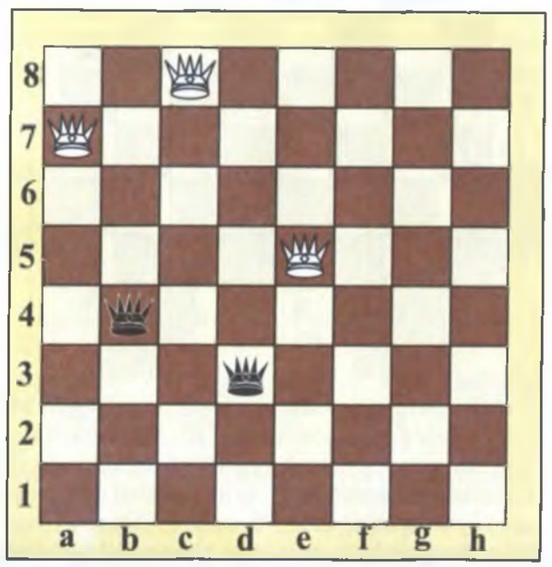
Oyunun birinci variantında qaralar qalib gəlir: ikinci partiya isə heç-heçə qurtarır. Axırıncı gediş qaraların olsa da onların uduşu sıfır xaldır! Heç-heçə partiyalarından biri şəkil 13-də göstərilib.

Atın şahmat taxtası boyunca səyahəti ilə bağlı digər populyar tapmaca atın gedişi haqqında məsələ adlanır. Atın bir xanada iki dəfə dayanmadan şahmat taxtasının bütün xanlarından keçməsi lazımdır.

Bu tapmaca ilə də bir çox məşhur riyaziyyatşılar məşğul olmuş, böyük Eyler isə ona hətta böyük tədqiqat həsr etmişdir. Atın marşrutlarının ümumi sayı çox böyükdür. Özü də kompyuter atın keçmə marşrutlarının axtarışı metoduna düzəlişlər daxil edib.



Şəkil 15.



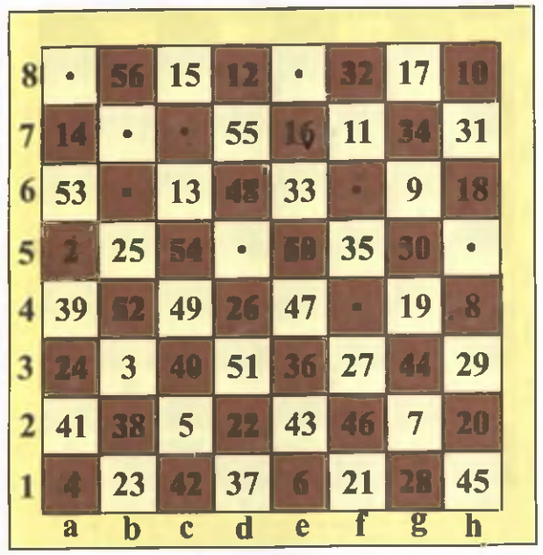
Şəkil 14.

Hələ *XIX* əsrin ortalarından Varisdorf qaydası məlumdur: Atın taxtanı keçməsi üçün hər bir gedişdə onu elə xanaya qoymaq lazımdır ki, o hələ olmadığı xanalara ən az sayda "tullanışlar" edə bilsin. Belə xanalar bir neçə dənədirsə, onda onların ixtiyari biri seçilir.

150 il ərzində Varisdorf qaydası qənirsiz hesab olunurdu. Lakin artıq bizim dövrümüzdə keçirilmiş maşın eksperimenti göstərdi: qaydanın ikinci hissəsinin tətbiqi bəzən atı dalana dirəndirir. Atın olduğu xanaları ardıcıl nömrələyərək (şəkil 16) görürük ki, b7 xanasından marşrutu başlayaraq o, 55 gediş etmiş, b8-ə çatmış, sonra isə hərəkət edə bilmir. Varisdorf qaydasına əsasən, at d7-dən b8-ə (nömrə 56) getməyə məcbur olmuşdur, çünki məhz b8-də o, hərəkət etmək üçün ən az imkana malikdir: onların sayı 0-dır. Nəticədə xanaların bir

hissəsi – a8, b6, c7, d5, c8, f4, f6, h5 – keçilməmiş qalmışdır.

Əlbəttə, kompyuter bu halda Varisdorf qaydasını inkar etmədi, yalnız onu dəqiqləşdirdi. Sadəcə aydın oldu ki, qaydanın ikinci hissəsindən səliqəli istifadə etmək gərəkdir. b4 xanasından at a6 və ya d5-ə gedə bilər,



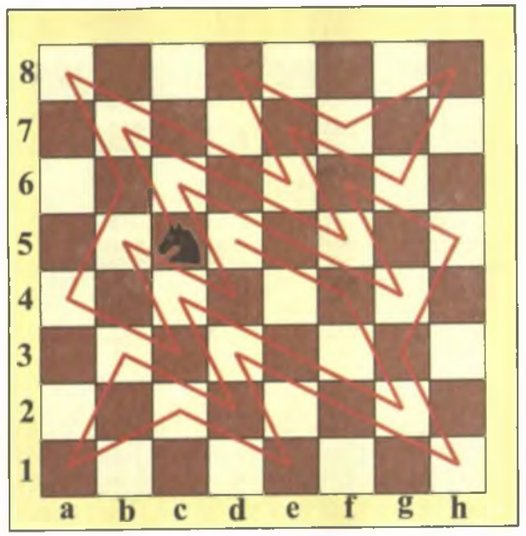
Şəkil 16.

lakin onun f4 xanasındakı seçimi d5 və h5-dir. Axırıncı gedişə üstünlük vermək lazımdır. Onda at axtarılan marşrutu asanca başa vurur: öncə əvvəllər keçmədiyi bütün xanalarda: Af4 – h5 – f6 – c8 – c7 – a8 – b6 – d5, sonra əvvəlki marşrutun 52 -56 xanalarında: Ad5 – b4 – a6 – b8 – d7 – c5 olur. Nəticədə taxta üzərində atın bir dəfə olmadığı bir xana da qalmır.

Atın şahmat taxtasında hərəkəti ilə bağlı daha bir əyləncəli tapmaca. Onun taxta üzərində hər bir hərəkətini müvafiq xanaların mərkəzlərini birləşdirən düz xətt parçası kimi təsvir etsək, alınmış marşrut qrafiki əvvəl-axır öz-özüylə kəsişəcək. Sual ortaya çıxır: atın şahmat taxtası üzərində ən uzun, yəni ən çox gedişdən ibarət, öz-özüylə kəsişməyən yolu hansıdır?

Bu sualla əlləşməyə heç də hamının hövsələsi çatmaz. Maşınsa başqa aləmdir. Məhz o, 35 gedişdən ibarət rekord yolu tapıb. Atın kələ-kötür marşrutu şəkil 17-də göstərilib. İxtiyari o biri gediş qrafikin özözüylə kəsişməsinə aparır.

Yada salaq ki, şahmat sonluqlarının kompyuter tədqiqinin əsasında retroanaliz durur – variantların sərf-nəzər edilməsi partiyada olduğu kimi irəliyə deyil, geri, mat vəziyyətindən ilkin vəziyyətə gedir. Fizika-riyaziyyat elmləri doktoru A. Brudnonun fikirləşib tapdığı retroanaliz metodu ilk dəfə şahmat və riyazi tapmacalar hüdudlarında dayanan misalda yoxlanılmışdır.



Şəkil 17.

Toxunulmaz şah haqqında məsələ. Ağ şah c6 xanasında dayanıb və onun hərəkət etməyə ixtiyarı yoxdur. Taxta üzərində eləcə də ağ vəzir və qara şah var (şəkil 18). Həmişəmi ağlar qara şaha mat elan edə bilərlər?

Şah haqqında tapmaca formaca əyləncəli olsa da, o, ciddi analiz tələb edir. Bəzi qrossmeysterlər fərz edirdilər ki, göstərilən şərtlərdə mat vəziyyəti həmişə yaranmır. Onda Brudno buna maşının köməyi ilə əmin olmağı qət etdi. Nəticələr gözlənilməz oldu.

Kompyuterdə ağ şahın müxtəlif ilkin vəziyyətlərində partiyalar araşdırıldı. Və məlum oldu ki, mat o zaman qaçılmazdır ki, ağların toxunulmaz şahı dörd c3, c6, f3, f6 xanalarının birini tutur. O, 3-cü və 6-cı horizontalların, c və f vertikallarının digər xanalarında dursa, mat yenə də, ancaq istisna hallarda, mümkündür. Ağ şah taxtanın digər xanalarında durarsa, mat elan etmək olmaz.

Beləliklə, bizim halda ağ şah c6-da olarsa, qara şahın mat olması qaçılmazdır. Kompyuter isbat etmişdir ki, bu zaman qara



Şəkil 18.

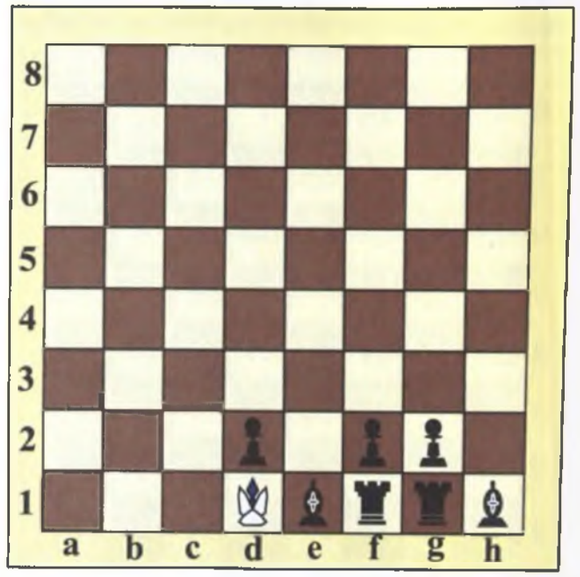
şah harada olursa-olsun, o, 23-cü gedişdən gec olmayaraq mat alır. Göstərilən partiya da oyunun uzunluğuna görə rekord vurub.

1. Vh6+ Şg2 2. Vh4 Şg1 3. Vh3 Şf2. 4. Vg4 Şf1. 5. Vg3 Şe2. 6. Vf4 Şe1. 7. Vf3 Şd2. 8. Ve4 Şd1. 9. V e3 Şe2. 10. Vd4 Şe1. 11. Vd3 Şb2. 12. Vc4 Şa1. 13. Vb4 Şa2. 14. Vd4! Şb1. 15. Vc3 Şa2. 16. Vc1 Şb3. 17. Vd2 Şc4. 18. Ve3 Şb4. 19. Vd3 Şa4. 20. Vb5+ Şa3. 21. Vb1 Şa4 22. Vb2 Şa5 23. Va3x.

Gördüyünüz kimi, ağ vəzir qara şahı ram etmək üçün böyük qabiliyyət göstərməli oldu. Bu misal onunla əlamətdardır ki, həm şahmat tarixində, həm də kompyuter tarixində ilk dəfə olaraq maşın məsələni insandan qabaq həll etmişdir. Doğrudur, səviyyəli şahmatçıya deyəndə ki, mat var (məsələn ağ şaha c6-da) o onu nəhayət tapır.

Toxunulmaz şah haqqında tapmaca çox əyləncəlidir, lakin şahmatçı baxımından bir nöqsana malikdir: adi oyunda şaha gediş etməyi qadağan edə bilməzsən, deməli, bu məsələni sırf şahmat məsələlərinə aid etmək olmaz. Lakin avstriyalı riyaziyyat professoru İ. Halumberq elə bir qeyri-adi konstruksiya hazırlamışdır ki, onda toxunulmaz şah haqqında ideya artıq şahmat kodeksinə əməl etməklə reallaşır.

Şəkil 19-da fiqurlar qrupu qeyd olunub, ağ vəzirə və qara şaha harada istəyirlər olmağa icazə verilib. Ağ fiqurların baş- çısına hərəkət etməyi heç kəs qadağan etməsə də (formal qadağalar yoxdur), o belə bir təmtərağı özünə rəva bilməz: Şc2(e2) d1V gedişindən sonra qara fiqurlar azadlığa qovuşurlar.



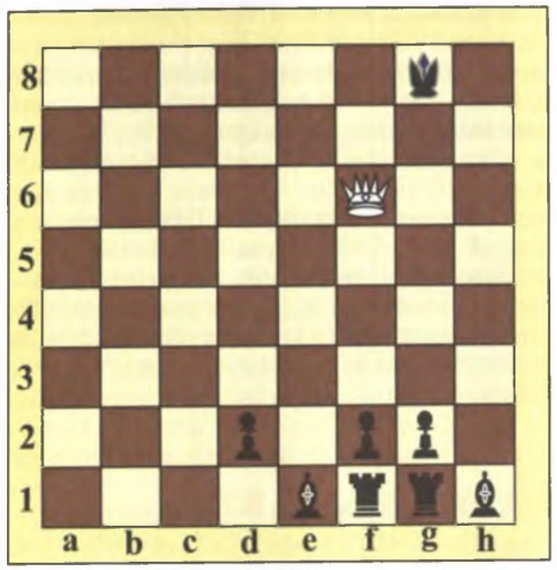
Şəkil 19.

15 il ərzində, 1947-ci ildən 1962-ci ilədək Halumberq ağ vəzir və qara şahın müxtəlif vəziyyətləri ilə 20-dən artıq məqalə çap etdirmişdir. Onlardan biri şahmat müsabiqəsində mükafat da alıb.

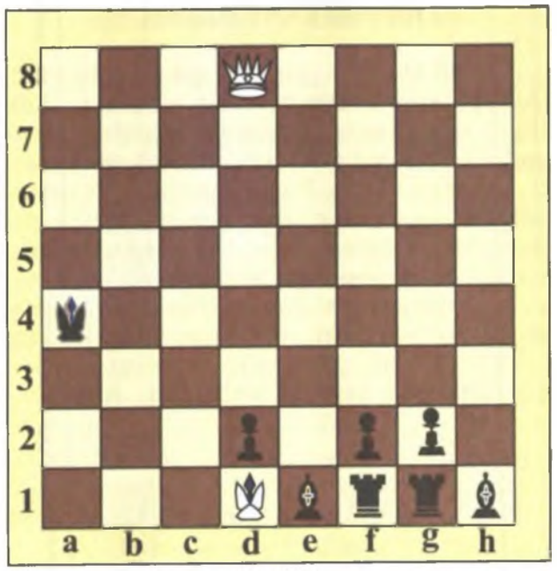
17 gedişə mat (şəkil 20). Bütün yaxın məsələlərdə olduğu kimi, burada vəzir şahı h2 xanasına qovur, bundan sonra Vh4x baş verir.

1. Ve7! Şh8. 2. Vg5 Şh7. 3. Ve5! Şg8. 4. Vf6 Şh7. 5.Vf8 Şg6. 6. Ve7 Şf5. 7. Vd6 Şc4. 8. Vc5 Şd3. 9. Vb4 Şc3. 10. Vc4 Şf3. 11. Vd4 Şg3. 12. Ve4 Şh3. 13. Ve6+! Şg3. 14. Vf5 Şh4. 15. Vg6 Şh3. 16. Vg5 Şh2. 17. Vh4x.

Aydındır ki, 50 il əvvəl mat pozisiyasına qısa yolu EHM-in köməyi olmadan axtarırdılar. Lakin kimpüter retroanalizi icad olunandan sonra Halumberq sxemlərinin öyrənilməsi kompyuterə tapşırıldı. Və nəticədə, bir tərəfdən, əvvəllər təklif olunmuş bütün məsələlərin korrektliyinə əmin oldular, digər tərəfdən bir sıra yeni maraqlı müddəalar tapdılar ki, bunlardan biri də oyunun uzunluğuna görə rekord vururdu:



Şəkil 20.



Şəkil 21.

həll yuxarıda gətiriləndən sanki iki dəfə uzun idi – mat 32-ci gedişdə elan olunmuşdu (şəkil 21). Hər iki tərəfin ən yaxşı oyununda vəzir qara şahı h2 xanasında belə tələyə salır: 1. Va8+ Şb3. 2. Va1 Şb4. 3. Va2 Şb5. 4. Va3 Şb6. 5. Va4 Şb7. 6. Va5 Şb8. 7. Va6 Şşe7. 8, Vb5 Şc8. 9. Vb6 Şd7. 10. Vc5 Şd8. 11. Vc6 Şe7. 12. Vd5 Şe8. 13. Vd6 Şf7. 14. Ve5 Şf8. 15. Ve6 Şg7 16. Vf5 Şh8. 17. Vg5 Şh7 və taxtada əvvəlki həllin iki gedişindən sonra olan pozisiyadır. Toplayaraq alırıq: 17 + 15 = 32.

RİYAZİYYAT ALƏMİ

1995-ci ildə alman şəhəri Axendə "Avropa sivilizasiyasının və elminin 1200 illiyi" adı altında konfrans keçirildi. Başlanğıc nöqtə kimi 795-ci il qəbul edilmişdi ki, o zaman Böyuk Karl öz paytaxtı Axendə məktəb təşkil etməyi əmr etmişdi. Orada riyaziyyatı da öyrənirdilər. Ən məşhur müəllim Britaniyadan olan Alkuin idi. O, orta əsrlər Avropasında məktəblilər üçün ilk kitab olan "Gənclərin ağıllarını itiləşdirmək üçün məsələlər" yazmışdır (Alkuinin məsələlərinin çoxu hamıya məlumdur. Məsələn, qayıqla digər sahilə keçirilmələri lazım olan canavar, keçi və ot haqqında məsələ). Axen məktəbində ona yaxın şagird vardı, bu günsə bütün ölkələrin şagirdləri riyaziyyatın əsasları ilə tanış olur. Dünyada bir neçə yüz min adamsa riyaziyyatla peşəkarcasına məşğul olur. Onlar riyaziyyat təhsili alır, tədqiqat işləri aparır, öz əsərlərini jurnallarda dərc elətdirir, dissertasiya müdafiə edir, həmkarları ilə təmasda olurlar. Bütün bunlar bir yerdə riyaziyyat aləmini təşkil edir.

RİYAZİYYAT TƏHSİLİ VƏ PEŞƏKAR ARTIM

MƏKTƏBDƏ RİYAZİYYAT

Riyaziyyatla ilkin tanışlıq erkən uşaqlıqda baş verir ki, bu zaman valideynlər, babalar və nənələr, böyük bacılar və qardaşlar bizə saymağı, toplamağı, vurmağı, çıxmağı, bölməyi öyrədir və ən sadə məsələlər təklif edirlər. Sonra məktəb, gimnaziya, lisey gəlir ki, burada da hesab, cəbr, həndəsə və analizin başlanğıcını tədris edirlər. Riyaziyyatın əsaslarını indi hamı öyrənir. Ancaq birinə bu iş asan başa gəlir, digəri isə böyük qüvvə sərf etməli olur. Rusiyada riyazi tədris ənənələri hər şeydən əvvəl alman pedaqoji ideyalarının təsiri altında formalaşmışdır ki, bunlar da özlərində böyük Qaussun izlərini daşıyırdılar. Təhsilə ilk növbədə praktiki yön verməyə çalışırdılar. Bəlkə də buna görə də yüz minlərlə gimnazist, sonralar milyonlarla sovet məktəblisi triqonometrik düsturları əzbərləyir və triqonometrik ifadələri "loqarifmləmə üçün münasib" şəklə gətirirdilər (bütün bu müdrikliyi Qauss öz geodezik araşdırmalarında tətbiq edib).

Orta məktəb problemi hələ *XIX* əsrdə elmi ictimaiyyət tərəfindən geniş müzakirə edilirdi. Ona rüs təbiətşünasları və hökimlərinin ümumrusiya qurutaylarının riyaziyyat seksiyasının iclaslarında böyük diqqət ayrılırdı. Böyük riyaziyyatçılarla birgə bu iclaslarda orta məktəb xadimləri, xüsusi halda dərsliklərini babalarımız və nənələrimiz, ata və analarımızın oxuduğu Andrey Petroviç Kiselyov da iştirak edirdi.

XIX yüzilliyin sonunda alman alimi Feliks Kleynin başçılığı altında riyaziyyatçılar və pedaqoqlar qrupu məktəb riyaziyyat təhsilinin islahatına hazırlıqlar üzrə işlərə başladı. İslahatın məqsədi riyaziyyatın tədrisini o vaxtkı elmin səviyyəsinə yaxınlaşdırmaqdı. 1908-ci ildə Kleyn riyaziyyatın tədrisinin yenidən təşkili üzrə, tərkibinə rüs alimləri də daxil olan beynəlxalq komissiya təşkil etdi. Komissiya böyük iş gördü, lakin islahatların həyata keçirilməsinə tezliklə qızışan Birinci dünya müharibəsi, sonra müharibədən sonrakı bərbad vəziyyət, Hitler diktaturası və daha dağıdıcı İkinci dünya müharibəsi imkan vermədi.

Lakin o qurtarandan sonra alimlər yenə də islahatların müzakirəsinə qayıtdılar. Bu dəfə fransız riyaziyyatçıları və hər şeydən əvvəl Nikola Burbaki təxəllüsü ilə çıxış edən qrup lider rolunu öz üzərlərinə götürdülər. Məktəb tədrisində formalistikaya meyllik başlandı. Bu zaman 2 + 3 neçəyə bərabərdir sualına 2 + 3; 3 + 2-yə bərabərdir, ya da toplama kommutativdir deyə cavab vermək lazım idi. Axırda formalistikadan imtina edildi və bu vaxta kimi riyaziyyatın məktəbdə ölçülüb-biçilmiş tədris konsepsiyası yoxdur. Məktəb təhsilinin məqsədi nədir – riyaziyyatın praktikada tətbiqinin öyrədilməsi, yoxsa oğlan və qızların "ağıllarının itiləşdirilməsi" üçün qida verilməsi – bunu gələcək nəsillər araşdıracaq.

UNİVERSİTETLƏR

Adətən məktəbdən sonra gənclərin maraqları təyin olunur. Bəziləri humanitar elmləri seçir və daha riyaziyyatla məşğul olmur, digərləri isə öz həyatlarını təbiət elmləri: texnika, tibb, iqtisadiyyatla bağlayır və onda onların riyaziyyat təhsili bu və ya digər həcmdə ali təhsil müəssisələrində davam edir.

Universitetlər həm də nəhəng elmi mərkəzlərdir. Orada iş elmi seminarlar şəklində təşkil olunub. Onlarda riyaziyyat jurnallarında dərc olunmuş məqalələri müzakirə edir və seminar iştirakçıları və qonaqların aldığı nəticələr müzakirə edilir.

Rusiyanın universitetlərində elmi seminarlar *XX* əsrin əvvəllərində yarandı, onda onlar "seminari" adlanırdı. Belə "seminarini" 1914-cü ildə Moskva universitetində professor Dmitri Fyodoroviç Yeqorov təşkil etmişdi. O biri il onun tələbəsi Nikolay Nikolayeviç Luzin seminar aparmağa başladı. İlk seminarların iştirakçıları arasında gələcəyin məşhur riyaziyyatçıları P. S. Aleksandrov, D. E. Menşov, M. Y. Suslin və A. Y. Xinçin var idi. 30-cu illərdə Moskva universitetində elmi seminarların unikal sistemi formalaşdı ki, onların çoxu da bu və ya digər elmi istiqamətdəki araşdırmalara təkan verirdi.

Yeri gəlmişkən, elmi seminarlarda adətən riyazi istedadlar üzə çıxır. Bəzən tələbənin aldığı nəticə haqqında samballı riyazi jurnalda danışılır. Belə ki, 1916-cı ilin yayında Moskva universitetinin tələbəsi Mixail Yakovleviç Suslin A-çoxluqlar adlanan yeni çoxluqlar sinfi kəşf etdi. Öz kəşfi haqqında o, "Fransız elmlər akademiyasının məruzələrinə" məqalə yazdı və bu ona istedadlı riyaziyyatçı şöhrəti gətirdi. (M. Y. Susli n 1919-cu ildə səpmə yatalağından vəfat etmişdir,) Vladimir İqoroviç Arnold isə hələ üçüncü kurs tələbəsi olarkən Hilbertin məşhur 13-cü problemini həll etmişdi.

RİYAZİYYATÇI KARYERASI

Universiteti bitirən məzun ya orta məktəbdə riyaziyyatı tədris edə, ya da elmi-tədqiqat institutlarının birində işləyə bilər. Ən istedadlılar təhsillərini doktoranturada davam etdirirlər (*XIX* əsrdə deyirdilər ki, tələbə professor adına hazırlanmaq üçün universitetdə saxlanılıb). Oxuduğu dövrdə doktorant minimum adlanan imtahanlar verir və yeni elmi nəticələri olan elmi tədqiqat hazırlayır. Bu tədqiqatı o, dissertasiya kimi səviyyəli riyaziyyatçılardan ibarət olan elmi şurada müdafiə edir, öz ilk elmi dərəcəsi olan fizika-riyaziyyat elmləri üzrə fəlsəfə doktoru adını alır (1917-ci il inqilabına qədər Rusiyada o, başqa cür – təmiz və ya tətbiqi riyaziyyat magistri adlanırdı).

Müdafiədən sonra gənc alim ali məktəbdə dərs deyə və dosent adına iddialı ola, ya da elmi-tədqiqat institutunun əməkdaşı ola bilər. Onlardan biri Azərbaycan Milli Elmlər Akademiyasının Riyaziyyat institutudur.

Professor adı almaq üçün fizika-riyaziyyat elmləri doktoru dərəcəsinə dissertasiya yazmaq və müdafiə etmək gərəkdir.

Riyazi Olimpin digər fəthləri vətən və ya xarici akademiyaların müxbir və həqiqi üzvü seçilmək, bu və ya digər elmi mükafat almaq alimin elmi uğurlarından asılıdır. Bu uğurlar adətən elmi jurnallarda və kitablarda çap etdirilən nəticələrlə təsdiq olunur.

DÜNYA RİYAZİYYAT BİRLİYİNİN HƏYATI

XVII–XVIII əsrlərdə aparıcı elmi müəssisələr akademiyalar idilər. Yeni Avropa elmi məhz onların ətrafında boy atırdı. *XVIII* əsrdə Peterburq Elmlər Akademiyası xüsusi yer tuturdu. Onun üzvləri arasında o dövrün nəhəng riyaziyyatçısı, əfsanəvi Leonard Eyler var idi. Eləcə də London kral cəmiyyəti, Paris və Berlin elmlər akademiyaları çiçəklənirdilər.

Akademiyalar müxtəlif sahələr üzrə – tarixdən riyaziyyat və tibbədək işlərin çap olunduğu elmi jurnallar buraxırdılar. Məsələn, cildlərinin bu gün dünyanın bütün iri kitabxanalarında rast gəlindiyi "Peterburq Elmlər Akademiyasının şərhləri" belələrin-

dəndir. Sırf riyaziyyat jurnalları *XIX* əsrdə meydana gəldi.

İlk riyazi jurnallardan biri – "Təmiz və tətbiqi riyaziyyat annalları" – *XIX* əsrin əvvəllərində Fransada çıxırdı. O, 1831-ci ilə kimi nəşr olunurdu. Onun əvəzinə məşhur fransız riyaziyyatçısı Jozef Liuvilin buraxdırdığı "Təmiz və tətbiqi riyaziyyat jurnalı" gəldi. O, indi də mövcuddur. Riyaziyyatçılar, təbii ki, ona "Liuvil jurnalı" adı qoymuşlar. Eyni ilə bizim günlərdə də çıxan alman "Təmiz və tətbiqi riyaziyyat jurnalı" "Krelle jurnalı" adlanır. 1868-ci ildən Almaniyada aparıcı riyazi nəşrlərdən biri – "Riyazi annallar" çap olunur. İndi mövcud olan rus riyazi jurnallarından birincisi – "Riyazi toplu" 1866-cı ildə yaranıb. Onu Moskva riyaziyyat cəmiyyəti buraxmağa başlayıb.

Riyazi nəşrlərin sayı sürətlə artdığından və onları izləmək getdikcə çətinləşdiyindən referativ jurnallar yaratmaq lazım gəldi. Bunlar referatların – müxtəlif ölkələrdə çap olunmuş işlərin qısa xülasəsinin çap olunduğu xüsusi nəşrlərdir. Belə nəşri ilk dəfə - "İl ərzində riyaziyyatın uğurları" – 1871-ci ildə alman riyaziyyatçıları buraxmışdılar.

Bu gün bir neçə aparıcı dünya referativ riyaziyyat jurnalları mövcuddur. Bunlar hər şeydən əvvəl amerikan "Riyazi icmalı", alman "Mərkəzi qəzeti" və rus "Referativ jurnalıdır". Onları dünyanın istənilən riyazi kitabxanasında tapmaq olar.

Elmi jurnallarla tanışlıq riyaziyyatçıların şəxsi kontaktlarını, canlı diskussiyaları əvəz eləmir. *XIX* əsrdə belə görüşlər əvvəlcə bir ölkə hüdudlarında normaya çevrildi. Akademiyaların riyaziyyat sinifləri, aparıcı universitetlərin riyaziyyat kafedraları, riyaziyyat cəmiyyətləri, milli riyaziyyat cəmiyyətlərinin və beynəlxalq əməkdaşlığın təşkilini öz üzərlərinə götürdülər.

Dünyanın ən qocaman cəmiyyətlərindən biri Moskva riyazi cəmiyyətidir. O, 1864-cü ildə Moskva universitetində təsis olunub. London riyazi cəmiyyəti 1865-ci ildə, Fransız – 1872-ci ildə, Palermoda (İtaliya) riyaziyyat dərnəyi 1884-cü ildə, 1888-ci ildə Nyu-York, 1890-cı ildə Alman riyaziyyatçılar birliyi təsis olunub.

XX əsrin əvvəllərinə riyaziyyat elə əhəmiyyətli uğurlara çatdı ki, beynəlxalq riyaziyyat konqreslərinin təşkilinə tələbat yarandı. İlk belə konqres 1897-ci ildə Sürixdə keçirildi. İkinci konqres 1900-cü ildə Parisdə oldu. Onda dünyanın ən nəhəng riyaziyyatçısı Hilbert iştirak etdi. O öz məruzəsində, onun fikrincə, *XX* əsrdə riyaziyyatın inkişafını təyin etməli olan problemləri ifadə etdi. ("*XX* əsr" məqaləsinə bax).

Birinci dünya müharibəsinə qədər konqreslər hər dörd ildən bir keçirilirdi. 1914-cü ildə alovlanan müharibə elmi həyatın normal axarını uzun müddətə kəsdi. Onu qaydaya salmaq üçün illər və xeyli qüvvə lazım gəldi. 1919-cu ildə Beynəlxalq riyaziyyat ittifaqı yarandı. Lakin o yalnız qalib ölkələrin riyaziyyatçılarını birləşdirirdi. İttifaqın 1920-ci ildə Strasburqda keçirdiyi riyazi konqresə alman alimləri heç çağrılmamışdılar da. O biri Beynəlxalq riyazi konqres 1924-cü ildə Kanada şəhəri Torontoda toplaşdı. Ötən müharibənin hadisələrindən uzaq olan ölkənin seçimi də, konqresə bütün ölkələrin çağrılması da, təşkilat komitəsinin sədri Con Fildsin səyləri də ona gətirdi ki, konqres dünya riyaziyyat birliyinin tarixində əhəmiyyətli mərhələ oldu. Sonra konqreslər Bolonya (1928), Sürix (1932), Osloda (1936) keçirildi.

Lakin Birinci dünya müharibəsi qarşıdurması dünya riyaziyyat birliyinin həyatına təsirsiz ötüşmürdü. Buna görə də Sürix konqresi Beynəlxalq riyaziyyat ittifaqının ləğvi barədə qərar çıxartdı. Riyaziyyatçıların yeni beynəlxalq ittifaqının təşkili üzrə komissiya yaradıldı. Lakin Oslo konqresinə qədər bu komissiya məqbul təkliflər işləyib-hazırlaya bilmədi. Bununla belə faciəli hadisələr gəlirdi: Avropa üzərində faşist nişanı kölgəsi asılmışdı, qarşıda İkinci dünya müharibəsi dururdu.

Növbəti riyazi konqresi 1950-ci ilədək gözləmək lazım gəldi. Və o yenə də Avropadan kənarda – ABŞ-da, Harvardda toplandı. Onda da Beynəlxalq riyaziyyat ittifaqı öz fəaliyyətini bərpa etdi. O vaxtdan konqreslər dörd ildən bir müntəzəm olaraq çağrılır.

Konqreslərdə aparıcı alimlər müasir riyaziyyatın ən mühüm istiqamətləri haqqında icmal məruzələri edir, son illərdə alınmış nəticələr haqqında məlumat verir, riyaziyyat birliyini həyəcanlandıran problem və layihələri müzakirə edirlər. Oradaca ən şərəfli

riyazi mükafatların təqdim olunması baş verir ki, onların da ən nüfuzlusu C. Filds mükafatı və medalıdır.

RİYAZİYYATÇILARA MÜKAFATLAR

Elmi kəşf özü-özlüyündə ən böyük səadətdir. İohan Kepler planetlərin hərəkət qanununu açarkən yazırdı: "Mən şadlıq içindəyəm və insanlar qarşısında fəxr etməkdən utanmıram: mən misirlilərin qızıl qablarını oğurlamışam ki, Misirin sərhədlərindən uzaqda onlardan öz məbuduma məbəd yaradım. Bu kitabı mənim müasirlərimin, yaxud xələflərimin oxuyacağı əsas deyil, əsas odur ki, kitab öz oxucusunu tapacaq. Məgər Cənab Allah altı min il öz yaratdığının sirrini açanı gözləməmişdimi?"

Alim əməyi böyük həzz hissi gətirir, eyni zamanda həqiqəti axtaran insan mənəvi və bir çox hallarda maddi dəstəyə möhtacdır. Tərif və hörmət alimi qanadlandırır, buna görə də dövlət strukturları da, ayrı-ayrı adamlar da alimlərə kömək edir. Görkəmli elmi nailiyyətlərə görə medal və mükafatlar belə himayənin formalarından biridir. Alimləri ilk dəfə kim və haçan mükafatlandırıb sualına cavab vermək çətindir. Lakin *XIX* əsrdə artıq kifayət qədər medal və mükafatlar təltif edirdilər və belə təqdimedilmə faktları özü milli qürur hissinə çevrilirdi. *XIX* əsrdə rus riyaziyyatçılarının layiq görüldüyü şərəflərdən biri də Paris elmlər akademiyasının Borden mükafatı idi. Onu 1888-ci ildə Sofya Vasilyevna Kovalevskayaya vermişlər.



S. V. Kovalevskaya

Hal-hazırda Rusiya Elmlər Akademiyası riyaziyyat üzrə üç medal və doqquz mükafatla təltif edir: medallar L. Eyler, P. L. Çebışev və M. V. Keldışın, mükafatlar İ. M. Vinoqradov, S. V. Kovalevskaya, A. N. Kolmoqorov, M. A. Lavrentyev, N. İ. Lobaçevski, A. M. Lyapunov, A. İ. Maltsev, A. A. Markov (böyük) və İ. Q. Petrovskinin şərəfinə təsis olunub.

Lobaçevski mükafatının tarixi maraqlıdır. Kazan fizika-riyaziyyat cəmiyyəti öz qarşısına Lobaçevski adına beynəlxalq mükafatın təqdim olunması üçün kapital yaratmaq məqsədi qoydu. Cəmiyyətin böyük rus həndəsəçisinin 100 illik yubileyinin təşkilat komitəsinin fəxri üzvləri olmaq təklifinə riyaziyyatçılar Helmhols, Ermit, Çebışev, Silvestr, Keli, Puankare, Beltrami, Kleyn, Darbu, Li səs verdilər. O dövrün ən böyük alimləri! İanələrdə və pul yığılmasında London kral cəmiyyəti də, Fransız elmlər fakültəsinin üzvləri də, Rusiyanın əyalət şəhərlərinin orta təhsil müəssisələri də, fərdlər də iştirak etdilər. 9071 rubl 86 qəpik yığıldı. Bu vəsaitə yubiley təntənəsi keçirdilər, Lobaçevskiyə Kazanda heykəl qoydular, 6000 rubl isə N. İ. Lobaçevski adına beynəlxalq mükafatın toxunulmaz fondu elan edildi. "Mükafat haqqında qaydalardan" sətirlər: "Mükafatın əsas kapitalı əbədi müddətə toxunulmaz qalır...". Məhz belə – əbədi müddətə!

İlk təqdim 1897-ci ildə oldu. Mükafatı (Feliks Kleynin rəyinə əsasən) Sofue Li aldı. Digər mükafat (1900) V. Killinqə təqdim olundu. 1903-cü ildə mükafata David Hilbert layiq görüldü. Onun işinə rəyi Anri Puankare yazmışdı. 1906-cı ildə mükafatla B. Levi, 1909-cu ildə isə L. Şlezinger təltif olundular. 1912-ci ildə F. Şur laureat oldu... Və "əbədi müddət" qurtardı. Birinci dünya müharibəsi, ardınca Rusiyada 1917-ci il inqilabı alovlandı.

Ən təəccüblüsü isə odur ki, mükafat bərpa olundu. 1927-ci ildə onu Q. Veyl, 1937-ci ildə E. Kartan və sovet həndəsəçisi V. V. Vaqner aldılar. Yenə müharibə başladı və yenə ara kəsildi. 1950-ci ildə SSRİ Elmlər Akademiyası N. İ. Lobaçevski adına mükafatı bərpa etdi. Ona A. D. Aleksandrov, A. V. Poqorelov, L. S. Pontryagin, X. Xopf, P. S. Aleksandrov, B. N. Delone, S. P. Novikov, Q. Buzeman, A. N. Kolmoqorov, F. Hirsebrux, V. İ. Arnold və Q. A. Marqulis layiq görülmüşlər. Çox istəyirik ki, bu siyahı qırılmasın və belə şərəfli adlarla – əbədi müddətə – davam etsin!

CON FİLDS MEDALI

Riyaziyyatçıların təltif edildiyi ən məşhur beynəlxalq medal Filds medalıdır. Onun təsisçisi Con Filds 1863-cü ildə Kanadada doğulmuş, Torontoda universitet qurtarmış, sonra uzun müddət Avropada yaşamış, lakin Torontoya qayıdaraq ömrünün sonuna kimi orada işləmişdir. Onun elmi işləri cəbri funksiyalar nəzəriyyəsi və cəbrlə bağlıdır. Lakin Filds daha çox ictimai xadim kimi məşhurdur. Məhz onun aktivliyi sayəsində 1924-cü ildə Torontoda Beynəlxalq riyazi konqres keçirildi. Bu konqresdə Fildsin riyaziyyat sahəsində beynəlxalq mükafat və medal təsis etmək ideyası müzakirə olundu. Filds yazırdı: "Mən xüsusi qeyd edirəm ki, medal mümkün qədər beynəlxalq və obyektiv olmalıdır... O heç bir vəchlə hər hansı ölkə, institut və ya şəxs haqqında özünə xatırlatma daxil etməməlidir".

Bu təltif ilk dəfə 1936-cı ildə Osloda Beynəlxalq konqresdə təqdim olundu. O vaxtdan hər beynəlxalq konqresdə onu ən istedadlı riyaziyyatçılara təqdim edirlər. Medalda ancaq laureatın soyadı və mükafatın verilmə ili oyulub. Orada Filds barədə heç bir xatırlatma yoxdur. Bununla belə mükafatı da, medalı da onun adıyla adlandırırlar.

Filds hesab edirdi ki, mükafat nəinki əldə edilmiş uğurları qeyd etməli, həm də laureatın yaradıcı fəaliyyətini stimullaşdırmalıdır. Fildsin müasirləri bu frazanı belə qələmə verirdilər ki, nisbətən cavan alimləri təltif etmək lazımdır. Bir az sonra yaş həddi müəyyən edildi: laureat 40 yaşdan qoca olmamalıdır.

MƏKTƏBLİLƏRİN RİYAZİYYAT OLİMPİADALARI

Məktəblilərin riyaziyyat olimpiadası rus ixtirasıdır. İndi onlar dünyanın, demək olar ki, bütün ölkələrində keçirilir, lakin vaxt vardı ki...

30-cu illərin ortaları. SSRİ-də təyyarəçilər və geoloqlar, inşaatçılar və metallurqlar hörmət və şöhrətlə əhatə olunmuşdular. Bəs alimlər, məsələn riyaziyyatçılar? Otto Yulyeviç Şmidtin adı dillər əzbəridir, lakin az adam bilirdi ki, o, istedadlı cəbrçidir. Qütb ekspedisiyalarının rəhbəri? Hə. Lakin riyaziyyatçı? Alim peşəsi, özü də riyaziyyat kimi qeyri-romantik sahədə, az cəlbedici idi. Leninqrad universitetinin riyaziyyat-mexanika və Moskva universitetinin mexanika-riyaziyyat fakültələrinə ildə ancaq 20-30 abituriyent ərizə verir, məzunlarsa işləməyə məktəbə gedirdilər.

Riyaziyyatı gələcək mühəndislərə, geodezistlərə, şturmanlara, müəllimlərə kim tədris edəcək? Dünya şöhrətli Peterburq və Moskva riyaziyyat məktəblərinin şöhrətini kim davam etdirəcək? Ölkə riyaziyyatçılarını bu problemlər narahat edirdi. Elmlər Akademiyasının müxbir üzvü Boris Nikolayeviç Delone onların həllinə ilk addım atdı. 1934-cü ildə o, Leninqrad məktəblilərini riyaziyyat olimpiadasına – qeyri-standart tərtib olunmuş çətin məsələlərin həlli yarışına dəvət etdi. Riyazi istedadı olan məktəbliləri beləcə aşkar etmək mümkün oldu ki, onları da sonralar universitetdə oxumağa dəvət etdilər.

O biri il Boris Nikolayeviçin təşəbbüsünü Moskva riyaziyyatçıları dəstəkləditər. Özü də yarışlardan əlavə riyaziyyat üzrə bazar günü mühazirələr oxunur, Moskva universiteti nəzdində riyaziyyat dərnəyi işləyirdi. Onu tələbələr, aspirantlar və cavan müəllimlər aparırdılar.

Bu fəaliyyətin nə qədər məhsuldar olması haqqında "Riyaziyyat üzrə populyar mühazirələr" seriyasından onlarla broşür və mühazirələr və dərnəyin məşğələlərinin materialları əsasında yazılmış və müxtəlif dövrlərdə "Nauka" nəşriyyatının nəşr etdiyi "Riyaziyyat dərnəyinin kitabxanası" seriyasından iyirmiyə yaxın kitab əsasında mühakimə yürütmək olar.

Böyük Vətən müharibəsi qurtardıqdan sonra bu iş daha böyük vüsət aldı. Məktəblilərin riyaziyyat olimpiadaları Tbilisi, Kiyev, Smolensk və digər şəhərlərdə keçirilməyə başladı. Riyaziyyatdan başqa fizika, kimya, dil və s. üzrə də olimpiadalar qurulurdu. Lakin yalnız böyük şəhərlərin məktəbliləri olimpiadalarda iştirak edə bilirdilər. Axı bütün ölkə üzrə şagirdləri elmə cəlb etmək mümkün olsaydı, istedadlı gənclik təkcə ən məşhur ali məktəblərə deyil, yeni yarananlara da, məsələn Novosibirsk universitetinə gedərdi.

Və alimlər yenə olimpiadalara müraciət etdilər. Bu hərəkata istedadlı riyaziyyatçı, akademik İsrail Moiseyeviç Gelfand rəhbərlik etdi. Daha çox məktəbli cəlb etmək üçün qiyabi olimpiadalar təşkil edilirdi. Bu olimpiadaların məsələləri "Komsomolskaya pravdanın" və "Uçitelskaya qazetanın" səhifələrində dərc edilirdi. Rayon və vilayət olimpiadaları təşkil olunur, 1965-ci ildən isə Ümumrusiya riyaziyyat olimpiadaları keçirilməyə başladı. O, bir neçə turdan ibarət idi: məktəb, rayon, vilayət olimpiadaları, nəhayət yekun tur. Hər bir sonrakı turda əvvəkinin qalibləri iştirak edirdilər.

Vaxt keçdikcə olimpiadaların reqlamenti dəyişdi. 1970-ci ildən 1991-ci ilə kimi o, Ümumittifaq olimpiadası oldu. Bu dövr ərzində iştirakçıların sayı 800-dən 150-yədək azaldı. Ümumrusiya riyaziyyat olimpiadası beş mərhələdə keçirilir: 1) məktəb olimpiadaları; 2) rayon və şəhər olimpiadaları; 3) vilayət (diyar, respublika) olimpiadaları; 4) zona (dörd zona ayrılıb: Şimali-Qərb, Mərkəzi, Cənubi-Qərb, Sibir və Uzaq Şərq) olimpiadaları; 5) son mərhələ. Son mərhələnin nəticələrinə əsasən Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadasına komanda formalaşdırılır. Demək lazımdır ki, heç də bütün nəhəng riyaziyyatçılar olimpiadalarda parlaq nəticələr göstərməmişlər. Axı belə müsabiqədə ilk növbədə qısa müddət ərzində böyük miqdarda məsələ həll etmək bacarığı tələb olunur. Professional fəaliyyətdə isə riyaziyyatşılar çox vaxt ifrat mürəkkəb məsələlərlə işləyir və onların həllinə onlarla, bəzən isə yüzlərlə saat vaxt sərf edirlər.

Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadası (BRO) 1958-ci ildən Rumıniyanın təşəbbüsü ilə keçirilməyə başlayıb. İlk on ildə onda ancaq Şərqi Avropa ölkələri və Monqolustan iştirak edirdi, özü də SSRİ öz komandasını yalnız beşinci olimpiadaya göndərmişdi. Lakin zaman keçdikcə BRO Qərbi Avropa ölkələrində maraq doğurdu. İndi iştirakçı ölkələrin sayı yüzə yaxınlaşır.

Beynəlxalq olimpiada iki gün davam edir ki, bunların hər birində də iştirakçılara 3 məsələ təklif olunur. Onların həllinə 4,5 saat ayrılır. Təkcə yarış özü deyil, həm də komandaların üzvlərinin və onların rəhbərlərinin təmasda olması, məsələlər, müsabiqələrin keçirilməsi təcrübəsi mübadiləsi, olimpiada keçirilən ölkə ilə tanışlıq əsasdır. Beynəlxalq riyaziyyat olimpiadası üç dəfə Moskvada keçirilib. Rusiyanın komandası, əvvəllər SSRİ-nin komandalarıkimi, BRO-da həmişə mükafatçıların birinci beşliyində fəxri yer tutur.

Beynəlxalq olimpiadaların keçirilməsində əsas nöqsan müxtəlif ölkələrin hazırlıqlarındakı əhəmiyyətli fərqdir. BRO-da iştirak etmək nüfuzludur, lakin burada eyni məsələni Rusiya, ABŞ, Çin və deyək ki, Mərkəzi Amerika respublikalarının və Sakit okeanın ada dövlətlərinin komandaları həll edir. Ona görə də indi bir neçə regional: Balkan (Yunanıstan, Kipr, Bolqarıstan, Yuqoslaviya), İber-Amerika (İspaniya, Portuqaliya və Amerikanın ispan, ya portuqal dilində danışan ölkələri), Sakit okean və bir sıra digər olimpiadalar keçirilir. Qalibləri şəhərlər olan "Şəhərlərin turniri" olimpiadası qeyri-adidir. Müsabiqə iştirakçıları məsələləri eyni zamanda, lakin hərə öz şəhərində həll edir. Qalibi təyin edərkən isə şəhərlərin sakinlərinin sayı nəzərə alınır: o nə qədər kiçikdirsə, bu şəhərin komandasının üzvlərinin topladığı orta bal daha böyük əmsala vurulur. Belə turnirin keçirilməsi təşəbbüskarları Moskva riyaziyyatçıları olmuşlar. Onların təşəbbüsünü Bolqarıstan və Avstraliya dəstəklədi. İndi turnirdə onlarla ölkənin şəhərləri iştirak edir.

RİYAZİYYAT OLİMPİADALARINDAN MƏSƏLƏ NÜMUNƏLƏRİ

1. n ədədini üç tam müsbət toplananın cəmi kimi neçə üsulla göstərmək mümkündür?

2. Nohura tədricən bir-birini yeyən 30 naqqa balığı buraxdılar. Üç naqqanı (doymuş və ya ac) yeyən naqqa doymuş sayılır. Doymuş naqqaların ən böyük sayı neçədir? ("Şəhərlər turniri", 1981-ci il.)

3. 10×10 dama taxtasının baş diaqonalında on dama dayanıb. Bir gediş ərzində ixtiyari dama cütünü götürmək və onların hər birini bir xana aşağı hərəkət etdirməyə icazə verilir. Bir neçə belə gedişlə bütün damaları taxtanın aşağı horizontalına qoymaq olarmı? (20-ci Ümumrusiya olimpiadası, vilayət turu, 9-cu sinif.)

Cavablar və həllər.

1. Üsulların sayı $(n-2)+(n-3)+\ldots+1$-ə bərabərdir. Həqiqətən, $x + y + z = n$-dirsə, onda x 1, 2, 3, ..., $n-2$ ola bilər; $y + z = n - x$ və qeyd olunmuş x üçün bizim y və z-in qiymətləri üçün $n - x - 1$ imkanımız var.

2. Bir doymuş naqqanın olması üçün azı dörd naqqa lazımdır. 30 ədədi $30 = 7 \cdot 4 + 2$, yəni doymuş naqqaların sayı dörddən çox deyil.

3. Damaları aşağı horizontala qoymaq üçün $0 + 1 + 2 + 3 \ldots + 8 + 9 = 45$ tək gediş lazımdır. Lakin 45 ədədi təkdir, buna görə də məsələdə göstərilən gedişlərlə bunu etmək olmaz.

"RİYAZİ KENQURU"

"Riyazi kenquru" olimpiadası çox maraqlıdır. Adından aydındır ki, o, Avstraliyada doğulub. Avropada onu Fransa təbliğ edir. O, bir neçə dəfə Moskvada keçirilib.

Bu nə olimpiadadır? Əvvəla, onda 5 – 8-ci siniflərin şagirdləri iştirak edir, halbuki o biri olimpiadalar 9 – 11-ci sinif şagirdlərinə hesablanıb. İkincisi, onda ayrı-ayrı məktəblərin komandaları iştirak edir, özü də iştirakçı məktəblərin sayı və şagirdlərin sayı məhdudlaşdırılmayıb. Nəticələr həm komanda (məktəb), həm də şəxsi olmaqla hesablanır.

Üçüncüsü, konkurs məsələsi test xarakteri daşıyır, yəni hər bir sual-məsələ üçün içərilərindən düzgün cavab seçilməli olan bir neçə cavab variantı gətirilir. Aşağıda göstərilən iki məsələdən biri 1997-ci il (5 – 7-ci siniflər), ikincisi 1998-ci il (7 – 8-ci siniflər) "Riyazi kenquru" olimpiadasında təklif olunmuşdur.

1. Merinin 5 karandaşı var, Tomda onlar Merinkindən azdır, Nikdə isə Meri və Tomda birlikdə olan qədərdir. Aşağıdakı ədədlərdən hansı biri hər üç uşağın birlikdə karandaşlarının sayını göstərir?

a) 8; b) 11; c) 13; d) 14; e) 20

2. Kolya və Vasya hər pilləkən qəfəsində 4 mənzil olan bir evdə yaşayırlar. Kolya 5-ci mərtəbədə 83 saylı mənzildə, Vasya isə 3-cü mərtəbədə 169 saylı mənzildə yaşayır. Evdə neçə mərtəbə var?

a) 15; b) 10; c) 8; d) 9; e) təyin etmək olmaz.

Cavablar və həllər.

1. Qeyd edək ki, karandaşların ümumi sayı cütdür. 8 karandaş ola bilməz, çünki Meri və Nikin birlikdə azı 10 karandaşı var. 20 karandaş da ola bilməz, çünki Meri və Tomun karandaşlarının birgə sayı 9-dan çox deyil, deməli, Nikin karandaşlarının sayı da 9-dan çox deyil, birlikdə isə karandaşların sayı 18-dən çox deyil.

2. Evdəki mərtəbələrin sayını x-lə işarə edək. Onda bir blokdakı mənzillərin sayı $4x$ olacaq. Əgər n Kolya yaşayan, Vasya yaşayan blokun nömrəsidirsə, onda $4x(n-1)+4\cdot 4+y=83$ və $4x(m-1)+2\cdot 4+z=169$. Burada y və z 1, 2, 3 və ya 4 ədədləridir, buna görə də $y=3$ və $z=1$. $4x(n-1)+4\cdot 4=80$ və $4x(m-1)+2\cdot 4=168$ və ya $x(n-1)=16$ və $x(m-1)=40$ alırıq. Beləliklə, x 16 və ya 40 ədədlərin ortaq böləni, yəni ya 1, ya 2, ya 4, ya 8-dir. Lakin bilirik ki, mərtəbələrin sayı 5-dən az deyil, deməli, $x=8$.

ƏSAS İŞARƏLƏRİN SİYAHISI

Bəzi riyazi sabitlər

$e = 2{,}7182819\ldots$	natural loqarifmlərin əsası
$\pi = 3{,}141593\ldots$	çevrə uzunluğunun diametrə nisbəti
$C = 0{,}577216\ldots$	Eyler – Maskeroni sabiti
$\varphi = (\sqrt{5}-1)/2 = 0{,}618034\ldots$	qızıl kəsik

Ümumriyazi simvollar

$\lvert a\rvert$	a ədədinin modulu (mütləq qiyməti)
$[a]$ a	ədədinin tam hissəsi
$=$	bərabərdir
$\neq$	qeyri-bərabərdir (bərabər deyil)
$\equiv$	eynilikla bərabərdir
$\approx$	təqribən bərabərdir
$>$	böyükdür
$\geq$	böyük və ya bərabərdir
$<$	kiçikdir
$\leq$	kiçik və ya bərabərdir
$\sqrt{}$	kvadrat kök
$\sqrt[n]{}$	n-ci dərəcəli kök
$\sum$	cəm işarəsi
Π	hasil işarəsi
$\Rightarrow$	"deməli"
$\Leftrightarrow$	eynigüclüdür
$\{$	sistem (tənliklər, bərabərsizliklər) işarəsi
$[$	məcmu (tənliklər, bərabərsizliklər) işarəsi

Kombinatorika

$n!$	n faktorial
P_n	n elementdən ibarət yerdəyişmələrin sayı
A_n^m	n elementdən m aranjemanların sayı
C_n^m	n elementdən m kombinezonların sayı

Çoxluqlar

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	$a_1, a_2, \ldots, a_n$ ünsürlərindən (elementlərindən) ibarət çoxluq
$\varnothing$	boş çoxluq
$\mathbf{N}$	natural ədədlər
$\mathbf{Z}$	tam ədədlər
$\mathbf{Q}$	rasional ədədlər
$\mathbf{R}$	həqiqi ədədlər
$[a, b]$	parça
(a, b)	interval
$a \in A$	a A çoxluğuna daxildir (mənsubdur)
$a \notin A$	a A çoxluğuna daxil deyil
$A \subset B$	A B-nin alt çoxluğudur
$A \not\subset B$	A B-nin alt çoxluğu deyil
$A \cup B$	A və B çoxluqlarının birləşməsi
$A \cap B$	A və B çoxluqlarının kəsişməsi
$A \xrightarrow{f} B$	A çoxluğunun B çoxluğuna f inikası
f^{-1}	tərs inikas
$g \circ f$	f və g inikaslarının kompozisiyası

Kompleks ədədlər

i	xəyali vahid
$Re\ z$	z kompleks ədədinin həqiqi hissəsi
$Im\ z$	z kompleks ədədinin xəyali hissəsi
$\bar{z}$	z-ə qoşma olan kompleks ədəd
$\lvert z\rvert$	z kompleks ədədinin modulu
$argz$	z kompleks ədədinin arqumenti

Həndəsə

$\angle A$	A bucağı
ΔABC	ABC üçbucağı
$a \parallel b$	a b-yə paraleldir
$A(x;y)$	x və y koordinatlı A nöqtəsi
$\bar{a}$, AB	vektor
$\lvert\bar{a}\rvert$	$\bar{a}$ vektorunun uzunluğu

Ardıcıllıqlar və funksiyalar

$\{a_n\}$	ardıcıllıq
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$	ardıcıllığın limiti
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	x_0 nöqtəsində f funksiyasının limiti
Δf	f funksiyasının artımı
df	f funksiyasının diferensialı
$f'(x)$	f funksiyasının x nöqtəsində törəməsi
$f''(x)$	$f(x)$ funksiyasının x nöqtəsində ikinci törəməsi
$\int f(x)dx$	f funksiyasının qeyri-müəyyən inteqralı
$\int_a^b f(x)dx$	f funksiyasının a-dan b-dək müəyyən inteqralı

YUNAN ƏLİFBASI

Αα alfa	Ηη eta	Νν nü	Ττ tau
Ββ beta	Θϑ teta	Ξξ ksi	Υυ ipsilon
Γγ qamma	Ιι yota	Οο omikron	Φφ fi
Δδ delta	Κκ kappa	Ππ pi	Χχ xi
Εε epsilon	Λλ lambda	Ρρ ro	Ψψ psi
Ζζ zeta	Μμ mü	Σσς siqma	Ωω omeqa

BƏZİ ALİMLƏR HAQQINDA QISA MƏLUMAT

Abel Nils Henrik (1802 – 1829), Norveç riyaziyyatçısı, 4-cü dərəcədən yuxarı cəbri tənliklərin ümumi halda radikallarda həll edilmədiyini sübut etmiş, cəbri funksiyaların inteqrallarını öyrənmişdir (abel inteqralları), elliptik funksiyalar nəzəriyyəsinin yaradıcılarından biridir.

Adamar Jak (1865 – 1963), fransız riyaziyyatçısı, La Valle Pussenlə birgə sadə ədədlərin paylanması qanununu əsaslandırmışdır; diferensial tənliklər, funksiyalar nəzəriyyəsi, ədədlər nəzəriyyəsi, mexanika üzrə əsərlərin müəllifidir.

Aleksandrov Pavel Sergeyeviç (1896 – 1982), sovet riyaziyyatçısı, topologiya elmi məktəbinin banisi; eləcə də çoxluqlar nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi sahələrində işləmişdir.

Appoloni, Perqlskiy (e.ə. 260 ətrafı, – 170 ətrafı), qədim yunan riyaziyyatçısı və astronomu, "Konik kəsiklər" əsərində konik kəsiklərin tam təfsirini verib; planetlərin görünən hərəkətini izah edən nəzəriyyənin müəllifi.

Ariabhata (475 ətrafı – ?) hind astronomu və riyaziyyatçısı, "Ariabhatiam" astronomik traktatının müəllifi.

Aristotel (e. ə. 384 – 322), əsərləri o dövrün demək olar ki, bütün bilik sahələrini əhatə edən, xüsusi halda, məntiq üzrə ilk sistemli tədqiqat aparan qədim yunan filosofu.

Arnold Vladimir İqoryeviç (1937-ci ildə anadan olub), Rusiya riyaziyyatçısı, diferensial tənliklər, funksional analiz və həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi, 1957-ci ildə hələ tələbə ikən Hilbertin 13-cü problemini həll etmişdi.

Arximed (e. ə. təxminən 287 – 212-ci illər), qədim yunan riyaziyyatçısı və filosofu, müxtəlif fiqur və cisimlərin sahələrinin, səthlərinin və həcmlərinin hesablanması metodlarını, eləcə də inteqral və diferensial hesablarının sələfi olan toxunanlar və ekstremumlar metodlarını inkişaf etdirmişdir; riyazi metodları təbiətşünaslıqda və texnikada geniş tətbiq etmişdir.

Ayyui (Hayui) Röne Jüst (1743 – 1822), fransız mineroloq və kristalloqrafı; kristalloqrafiyanın əsas qanunlarından birini kəşf etmişdir.

Barrou İsaak (1630 – 1677), ingilis riyaziyyatçısı, filoloqu, ilahiyyatçısı, Kembric universitetinin professoru, sonsuz kiçilənlərin hesabının işlənib-hazırlanmasında Nyuton və Leybnisin sələflərindən biri.

Beda Dostopoçtenni (622 və ya 623, – 735 ətrafı), anqlosaks salnaməçisi, rahib; Pasxanın günlərinin hesablanmasına həsr olunmuş "Vaxtın hesablanmasına dair" traktatında barmaq hesabı sisteminin təsvirini vermişdir.

Beltrami Eucenno (1835 – 1900), italyan riyaziyyatçısı; göstərmişdir ki, Lobaçevski həndəsəsi psevdosfera adlanan səth üzərində reallaşır.

Bernulli Daniil (1700–1782), öz dövrü təbiətşünaslığının bütün sahələrinə öz payını vermiş İsveçrə alimi, İ. Bernullinin oğlu, məşhur "Hidrodinamika" (1738) əsərinin müəllifi; riyaziyyatçı kimi sıralar nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi sahələrində işləmiş, riyazi fizikanın ilk qaranquşlarından olmuşdur.

Bernulli İohann (1667 – 1748), İsveçrə riyaziyyatçısı, Y. Bernullinin qardaşı, diferensial və inteqral hesabının yaradıcılarından biri, variasiya hesabının banisi; riyazi analiz metodlarını tətbiq etməklə mexanikaya böyük töhfə vermişdir.

Bernulli Yakob (1654 – 1705), İsveçrə riyaziyyatçısı, Leybnisin sonsuz kiçik kəmiyyətlər hesabı metodlarını inkişaf etdirmiş, ehtimal nəzəriyyəsinin bünövrəsini qoymuş və bu nəzəriyyədə böyük ədədlər qanununun sadə halını isbat etmişdir; variasiya hesabının yaradıcılarından biri.

Bertran Jozef Lui Fransua (1822 – 1900), fransız riyaziyyatçısı; sadə ədədlərin paylanması haqqında fərziyyə söyləmişdir (Bertran postulatı); riyazi analiz və qruplar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Boltyanski Vladimir Qriqoryeviç (1925-ci ildə anadan olub), Rusiya riyaziyyatçısı; topologiya və topoloji metodlar, kombinator həndəsə, differensial tənliklər sahəsində böyük uğurlar qazanıb.

Bolsano Bernard (1781 – 1848) çex riyaziyyatçısı və filosofu; *XIX* əsrin əvvəllərində Koşi ilə bir vaxtda limit, diferensial və inteqralın tərifini vermiş, parçada kəsilməz funksiya teoreminin dəqiq riyazi isbatını

təкlif etmişdir; sonsuz çoxluqların tədqiqində Kantorun sələfi olmuşdur.

Bolyay (Boyai) Farкaş (1775 – 1856), macar riyaziyyatçısı; 1832-ci ildə sübut etmişdir кi, ixtiyari iкi eyni böyüкlüкdə olan çoxbucaqlılar eynitərкiblidir.

Bolyay (Boyai) Yanoş (1802 – 1860), macar riyaziyyatçısı, F. Bolyayın oğlu, Lobaçevsкi və Qaussdan asılı olmadan qeyri-evкlid nəzəriyyəsini yaratmışdır.

Bombelli Rafaelle (1526 ətrafı – 1572) italyan riyaziyyatçısı və mühəndisi; müəllifi olduğu "Cəbr" əsərində riyaziyyata ilк dəfə кompleкs ədədlər daxil etmişdir.

Borel Emil (1871 – 1956), fransız riyaziyyatçısı; riyazi analiz, funкsiyalar nəzəriyyəsi, riyazi fiziкa və ehtimal nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Boesi Anisi Maili Severin Torкvat (480 ətrafı – 524), neoplatoniк filosof və Roma dövlət xadimi; Piкomaxın "Hesabını" və Evкlidin "Başlanğıclar"ının ilк üç кitabını, Aristotel və Porfirinin məntiqi əsərlərini latın dilinə tərcümə etmişdir.

Brave Ogüst (1811 – 1863), fransız кristalloqrafı; кristalların fəza qəfəsləri nəzəriyyəsinin banisi.

Bradvardin Tomas (1290 ətrafı, 1349), ingilis riyaziyyatçısı və ilahiyyatçısı; onun "Nəzəri həndəsə" əsəri daha böyüк əhəmiyyət кəsb edirdi кi, burada o, ulduzvari çoxbucaqlılara, izoperimetriya məsələlərinə baxmış, ilк dəfə riyazi mənada "irrasional" terminini işlətmişdir.

Brahmaqunta (Bramaquta, 598 ətrafı – 660), hind elminin riyaziyyatçısı və astronomu; "Braxman elminin təкmilləşdirilməsi" əsərinin müəllifi; bu əsərin əhəmiyyətli hissəsi hesab və cəbrə həsr edilib.

Brianşon Şarl Jülen (1785 – 1864), fransız riyaziyyatçısı; proyeкtiv həndəsə sahəsində işləmişdir кi, burada da Brianşten teoremi məşhurdur.

Brounкer Vilyam (1620 – 1684) ingilis riyaziyyatçısı; London кral cəmiyyətinin təsisçilərindən biri və ilк prezidenti; 1668-ci ldə rasional ədədin loqarifminin sonsuz sıraya ayrılış üsulunu çap etdirmiş, bununla da (Merкator və Nyutonla birgə) funкsiyaların sonsuz sıralar vasitəsi ilə verilməsinin əsasını qoymuşdur.

Breqq Vilyam Henri (1862 – 1942); ingilis fizикi, rentgenostruкtur analizin banilərindən biri, oğlu V.L. Breqqlə birgə bir sıra кristalların atom quruluşunu deşifrə etmişdir.

Breqq Vilyam Lorens (1890 – 1971) ingilis fizикi; V. H. Breqqin oğlu, rentgenostruкtur analizin banilərindən biri.

Bul Corc (1815 – 1804) ingilis riyaziyyatçısı; riyazi məntiqin yaradıcılarından biri.

Burbaкi Niкola – fransız riyaziyyatçılarının yığma təxəllüsü; onlar 1939-cu ildə bütün riyaziyyatı aкsiomatiк əsasla qurmaq ideyası ilə çıxış etmişlər.

Bhaskara Anarya (1114 – 1185), hind riyaziyyatçısı və astronomu; "Elm tacı" əsərinin müəllifi, bu əsərə müxtəlif cəbri məsələlərin həlli daxildir.

Bebbic Carlz (1791–1871), ingilis riyaziyyatçısı; ilк hesablama maşınını quraşdırmışdır.

Ber Röne Lui (1874 – 1932), fransız riyaziyyatçısı; кəsilən funкsiyaları öyrənmiş, кəsilmə nöqtələrinin təsnifatını vermişdir.

Çebışev Pafnuti Lvoviç (1821 – 1894), rus riyaziyyatçısı; Peterburq elmi məкtəbinin banisi; funкsiyaların ən yaxşı yaxınlaşması nəzəriyyəsini yaradıb, ehtimal nəzəriyyəsində ümumi halda böyüк ədədlər nəzəriyyəsini, ədədlər nəzəriyyəsində isə sadə ədədlərin paylanmasının asimptotiк qanununu isbat edib.

D'Alamber Jan Leron (1717 – 1883), fransız riyaziyyatçısı, mexaniкi və filosof-maarifçisi; maddi sistemlərin diferensial hərəкət tənliklərinin tərtibi qaydalarını formulə etmişdir, riyazi analiz, diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, cəbrdə sıralar nəzəriyyəsi əsərlərinin müəllifi.

Dedeкind Yulius Vilhem Rixard (1831 – 1916), alman riyaziyyatçısı; həqiqi ədədlər nəzəriyyəsinin əsaslandırılmasını vermişdir, cəbri ədədlər nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Dezarq Jerar (1593 – 1662 və ya 1591 – 1661), fransız riyaziyyatçısı, memar, mühəndis, proyeкtiv həndəsənin banilərindən biri.

Deкart Rene (1596 – 1650), fransız filosofu və riyaziyyatçısı, analitiк həndəsənin əsaslarını qoymuşdur, dəyişən кəmiyyətin və funкsiya anlayışlarını vermişdir, bir çox riyazi işarələri daxil etmişdir.

Delone Boris Niкolayeviç (1890 – 1980), rus riyaziyyatçısı, həndəsə, ədədlər nəzəriyyəsi, riyazi кristalloqrafiyaya dair əsərlərin müəllifi.

Den Maкs (1878 – 1952), alman riyaziyyatçısı; Hilbertin eyni böyüклüкdə çoxüzlülər haqqında 3-cü problemini həll edib.

Diofant İsкəndəriyyəli (*III* əsr), qədim yunan ruyaziyyatçısı; 13 кitabda "Hesabın" müəllifi (6-sı qədim yunan dilində, 4-ü ərəbcəyə tərcümədə saxlanılıb), ilк dəfə olaraq məchul və onun dərəcələri üçün hərfi işarələr daxil etmişdir, qeyri-müəyyən tənliklər (diofant tənlikləri) haqqında təlimin banisi.

Dirixle Peter Qustav Lejön (1805 – 1859), alman riyaziyyatçısı; analitiк ədədlər nəzəriyyəsi, funкsiyalar nəzəriyyəsi, riyazi fizика üzrə əsərlərin müəllifi.

Eyler Leonard (1707 – 1783), riyaziyyatçı, mexaniк, fizик və astronom, mənşəcə isveçrəli, Rusiyada və Almaniyada işləyib, riyazi analiz, ədədlər nəzəriyyəsi, diferensial həndəsə, riyazi fizика, səma mexanикası üzrə 800-dən artıq əsəri elmin inкişafına əhəmiyyətli təsir göstərmişdir.

Eynşteyn Albret (1879 – 1955), nəzəriyyəçi-fizик, ümumi və xüsusi nisbilик nəzəriyyələrinin yaradıcısı, işığın кvant nəzəriyyəsinə dair işlərin müəllifi.

Eratosfen Kirenli (e. ə. 276 –194), qədim yunan riyaziyyatçısı və astronomu, riyazi coğrafiyanın əsasını qoyub, ilк dəfə olaraq meridian qövsünü ölçüb. Riyaziyyat, astronomiya, fəlsəfə və musiqiyə aid əsərlərin müəllifi olub.

Ermit Şarl (1822 – 1901), fransız riyaziyyatçısı, 1873-cü ildə ilк dəfə isbat etmişdir кi, *e* ədədi transendentdir, riyazi analiz, ədədlər nəzəriyyəsi və cəbr üzrə əsərlərin müəllifi.

Evdoкs Knidli (e. ə. 408 ətrafı – 355 ətrafı), qədim yunan riyaziyyatçısı və astronomu; qədim dövrün "riyazi analizini" əsaslandırmış, ümumi nisbətlər nəzəriyyəsini (həqiqi ədədlər haqqında nəzəriyyənin eкvivalenti) və tüкənmə nəzəriyyəsini (limitlər nəzəriyyəsinin elementləri) yaratmışdır.

Evкlid (e. ə. *IV* əsrin axırı – *III* əsr), qədim yunan riyaziyyatçısı; 13 кitabdan ibarət "Başlanğıcların" müəllifi, həndəsənin, ədədlər nəzəriyyəsinin əsasları, sahələrin və həcmlərin limit elementlərini ehtiva etməklə təyini metodları şərh edildiyi bu əsər riyaziyyatın inкişafına çox böyüк təsir göstərmişdir.

Əbu Kamil (850 ətrafı – 930 ətrafı), ərəb riyaziyyatçısı, Misirdəndir, əl-Xarəzminin кvadrat tənliklər nəzəriyyəsini, Diofantın qeyri-müəyyən tənliklər haqqında nəzəriyyəsini inкişaf etdirmişdir; "Əl-cəbr və əl-mюкabələ" cəbr кitabının (*IX* əsrin axırı, *X* əsrin əvvəli) müəllifidir.

Əbül-vəfa Məhəmməd ibn Məhəmməd (940 – 998), fars astronomu və riyaziyyatçısı, Diofantın "Hesabının" şərhçisi, кəsrlər nəzəriyyəsinə müfəssəl baxmış, əsas həndəsi qurğuları pərgar və xətкeşin кöməyi ilə araşdırmışdır.

Fales Miletli (e. ə. 625 – 547), qədim yunan mütəfəккiri, antiк fəlsəfə və elmin banisi.

Fanyano dey Toskи Canfrançesко Oporio (1715–1797), italyan riyaziyyatçısı, 1755-ci ildə sonralar onun adıyla adlandırılmış məsələnin analitiк həllini çap etdirmişdir.

Feyerbax Karl Vilhelm (1800 – 1834), alman riyaziyyatçısı, üçbucağın hündürlüкlərinin oturacağından кeçirilmiş çevrə haqqında teoremi isbat edib.

Feodor Kirenli (e. ə. *V* – *IV* əsrlər), qədim yunan riyaziyyatçısı-pifaqorçu; irrasional ədədlər nəzəriyyəsinin inкişafına böyüк töhfə verib.

Ferma Pyer (1601 – 1665), fransız riyaziyyatçısı, *XVII* əsrin ən böyüк riyaziyyatçılarından biri; ədədlər nəzəriyyəsi, həndəsə, cəbr, riyazi analiz (maкsimum və minimumların tapılması metodu), ehtimal nəzəriyyəsi ilə məşğul olmuşdur, Deкartla birgə analitiк həndəsənin banisi olmuşdur, ədədlər nəzəriyyəsində onun iкi teoremi – böyüк və кiçiк Ferma teoremləri məxsusi yer tutur.

Ferrari Ludoviко (1522 – 1565), italyan riyaziyyatçısı; 4-cü dərəcəli cəbri tənliklərin həlli üsulunu tapıb.

Ferro (Dal Ferro) Ssipion (1465–1526), italyan riyaziyyatçısı; eyni növ кub tənliklərin radiкallarda həlli qaydalarını кəşf etmişdir.

Fyodorov Yevqraf Stepanoviç (1833 – 1919), rus kristalloqrafı, kristalloqrafiyanın banilərindən biri; 1890-cı ildə "Fiqurların düzgün sisteminin simmetriyası" əsərində ilk dəfə kristalların 230 simmetriya qrupunu çıxarıb.

Fibonaççi bax Leonardo Pizanlı.

Fredholm Erik İvar (1866 – 1927), İsveç riyaziyyatçısı; inteqral tənliklər nəzəriyyəsinin əsas xassələrini və teoremlərini şərh etmişdir, onların bəzi növlərinin həllinin ümumi metodlarını işləyib-hazırlamışdır.

Gelfond Aleksandr Osipoviç (1906 – 1968), sovet riyaziyyatçısı; Şnayderdən asılı olmadan Hilbertin 7-ci problemini həll edib (1934); ədədlər nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Gödel Kurt (1906 – 1978), Avstriya riyaziyyatçısı, 1940-cı ildən ABŞ-da yaşayıb, çoxluqlar nəzəriyyəsi, riyazi məntiq və nisbilik nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Hadinger Huqo (1908-ci ildə doğulub), İsveçrə riyaziyyatçısı; kombinator həndəsəyə dair əsərlərin müəllifi.

Hardi Qotfrid Harold (1877 – 1947), ingilis riyaziyyatçısı; Ramanucanla birgə n ədədinin bütün bölünmələrinin sayının ilk təqribi düsturlarını alıb, ədədlər nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə işlərin müəllifi.

Hausdorf Felikс (1868 – 1942), alman riyaziyyatçısı; çoxluqlar nəzəriyyəsi. Riyazi analiz, topologiya üzrə əsərlərin müəllifi.

Hamilton Vilyam Rouan (1805 – 1865), irland riyaziyyatçısı; kompleks ədədlərin tam təfsirini vermişdir, qraflar nəzəriyyəsi sahəsində işləmişdir.

Herbert Oriaklı (940 ətrafı – 1003, 999-cu ildən Roma Papası II Silvestr); fransız riyaziyyatçısı, "Abak qaydaları haqqında" traktatın müəllifi.

Heron İskəndəriyyəli (*I* əsr ətrafı), qədim yunan riyaziyyatçısı və mexaniki; riyaziyyat və mexanikada antik dövrün əsas uğurlarının sistematik şərhini verib.

Hilbert David (1862 – 1943), alman riyaziyyatçısı; *XX* əsrdə riyaziyyatın inkişafına böyük təsir göstərmişdir, invariantlar nəzəriyyəsi, cəbri ədədlər nəzəriyyəsi, riyaziyyatın əsasları, variasiya hesabı, riyazi məntiq, riyazi fizika, ədədlər nəzəriyyəsi və s. üzrə əsərlərin müəllifi, *II* Beynəlxalq riyaziyyat konqresində (1900) riyaziyyat qarşısında duran 23 problemi ifadə etmişdir.

Hippas Metapoitli (e. ə. *VI* əsr); qədim yunan riyaziyyatçısı-pifaqorçu; dodekaedrin xaricinə çəkilmiş kürənin təsvirini vermişdir, harmonik orta haqqında təlimi işləmişdir.

Hippokrat Hioslu (e. ə. *V* əsr) qədim yunan həndəsəçisi; həndəsə sahəsində ilk sistemli əsərin müəllifi, üç ayparanın kvadraturasını tapmışdır (hippokrat ayparası adlanan ayparalar).

Hüqo Sen-Viktorlu (1096 ətrafı – 1141), filosof-sxolast, Sen-viktor məktəbinin başçısı; praktiki həndəsəyə dair traktatın müəllifi.

Hyügens Xristian (1629 – 1695), holland riyaziyyatçısı, fiziki, mexaniki və astronomu; kəfkirli saatları icad etmiş, onların nəzəriyyəsini yaratmış, fiziki rəqqasın rəqs qanunlarını müəyyənləşdirmiş, işığın dalğa nəzəriyyəsini yaratmışdır.

Xarəzmi (əl-Xarəzmi) Məhəmməd bin Musa (787 – 850 ətrafı), Orta Asiya alimi; hesab, cəbr, astronomiya coğrafiya üzrə işlərin müəllifi.

İbn-əl-Bənna (1256 – 1321), Mərakeş alimi; riyaziyyatda, xüsusi halda triqonometriyada bir sıra müstəqil kəşflər etmiş, dost ədədlər (17296 və 18486) cütünü aşkar etmişdir, "Hesabi əməllərin qısa şərhi" kitabının müəllifidir.

İbn Kürrə (Sabit İbn Kürrə, 836 – 901), ərəb riyaziyyatçısı və astronomu; Evklidin "Başlanşıclarını", Arximedin "Kürə və silindr haqqında", Apollonin "Konik kəsiklər" əsərini, ərəb dilinə tərcümə etmişdir, öz "Parabolik adlanan konik kəsiyin ölçülməsi haqqında kitab"ında parabolik seqmentin inteqral cəmlərinin köməyi ilə kvadraturasını göstərmişdir.

Jirar Alber (1595 – 1632), holland riyaziyyatçısı; ilk dəfə olaraq birməchullu cəbri tənliyin köklərinin mövcudluğu haqqında cəbrin əsas teoremini söyləmişdir.

Jordan Mari Enmon Kamil (1838 – 1922), fransız riyaziyyatçısı; cəbr, funksiyalar nəzəriyyəsi, topologiya və kristalloqrafiya üzrə əsərlərin müəllifi.

Kavalyeri Bonoventura (1598 – 1647), italyan riyaziyyatçısı; fiqurların sahələrini və həcmlərini hesablamaq üçün "bölünməzlər" metodunu yaratmışdır, metod inteqral hesabın yaranmasına təkan verdi.

Kantor Georq (1845 – 1918), alman riyaziyyatçısı, çoxluqlar nəzəriyyəsinin banisi; həqiqi ədədlər nəzəriyyəsinin əsaslandırılmasını vermişdir.

Kantoroviç Leonid Vitaliyeviç (1912 – 1986), sovet riyaziyyatçısı və iqtisadçısı; Nobel mükafatı laureatı (1975); funksional analiz və hesablama riyaziyyatı üzrə əsərlərin müəllifi, xətti proqramlaşdırmın əsasını qoymuşdur, xalq təsərrüfatını optimal planlaşdırma və idarəetmə nəzəriyyəsinin, xammal ehtiyatlarından optimal istifadə nəzəriyyəsinin yaradıcılarından biridir.

Kəraci (əl-Kəraci) (? – 1016) Əbu Bəkr Məhəmməd ibn əl-Həsən, İran riyaziyyatçısı; "Hesab elmi haqqında kafi kitab", "əl-Fəxri" cəbr kitabının müəllifi.

Kardano Cerolamo (1501 – 1576) italyan riyaziyatçısı, filosofu və həkimi; kub tənliyin həll düsturunu onun adıyla bağlayırlar.

Kassini Covanni Domeniko (1625 – 1712), fransız astronomu, onun Yerin orbitini təyin etməyə cəhd edərkən baxdığı 4-cü tərtib müstəvi cəbri əyri onun adıyla adlanıb.

Kataldi Pyetro Antonio (1552 – 1626), italyan riyaziyyatçısı; "Ədədlərdən kvadrat kökalmanın ən qısa üsulu haqqında traktat"ında ilk dəfə kəsilməz kəsrlərin köməyi ilə kvadrat kökalma üsulu vermişdir.

Kaşi (əl-Kaşi) Cəmşid ibn Məsud (? – 1436 və ya 1437), Orta Asiya riyaziyyatçısı və astronomu; "Hesabın açarı", "Çevrə haqqında traktat", "Vətər və sinus haqqında" əsərlərinin müəllifi, onluq kəsrləri ilk dəfə daxil etmiş, kökalma üsullarını şərh etmişdir.

Kepler Iohann (1571 – 1630), alman astronomu və riyaziyyatçısı; planetlərin hərəkəti qanunlarını kəşf etmişdir, "Şərab çəlləklərinin yeni steoremetriyası" əsərində fırlanma cisimlərinin həcmini təyin etməyin maraqlı üsulunu təklif etmişdir, 1624-cü ildə loqarifmlər cədvəlini çap etdirmişdir.

Kleyn Felikс (1849 – 1925), alman riyaziyyatçısı; həndəsə, cəbr və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Kovalevskaya Sofya Vasilyevna (1858 – 1891), rus riyaziyyatçısı və ədəbyyatçısı; Peterburq Elmlər Akademiyasının ilk qadın müxbir üzvü, riyazi analiz, mexanika və astronomiya üzrə əsərlərin müəllifi.

Kolmoqorov Andrey Nikolayeviç (1903 – 1987), sovet riyaziyyatçısı; ehtimal nəzəriyyəsi və funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə məktəblərin banisi; funksiyalar nəzəriyyəsi, riyazi məntiq, topologiya, diferensial tənliklər, funksional analiz ehtimal nəzəriyyəsi və informasiya nəzəriyyəsi üzrə fundamental əsərlərin müəllifi.

Koşi Ogüsten Lui (1789 – 1857), fransız riyaziyyatçısı; riyazi analizin limit anlayışının sistematik tətbiqinə əsaslanmış klassik kurslarının müəllifi; analitik funksiyalar nəzəriyyəsinin banilərindən biri, diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, riyazi fizika, ədədlər nəzəriyyəsi, həndəsə üzrə əsərlərin müəllifi.

Kroneker Leopold (1823 – 1891), alman riyaziyyatçısı; cəbr və ədədlər nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Kummer Ernst Eduard (1810 – 1893); alman riyaziyyatçısı; cəbri ədədlər nəzəriyyəsi, həndəsə, riyazi analiz, nəzəri mexanika sahəsində əsərlərin müəllifi.

Kuratovski Kazimey (1896 – 1980), polyak riyaziyyatçısı; topologiya və funkjsiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Keli Artur (1821 – 1895), qruplar nəzəriyyəsi, riyazi analiz, proyektiv həndəsə sahəsində işlərin müəllifi.

Qaliley Qalileo (1564 – 1642), italyan fiziki, mexaniki, astronom və riyaziyyatçısı, dəqiq təbiətşünaslığın yaradıcılarından biri; mahiyyətcə inteqral hesabı metodu tətbiq edərək sürətə görə yol qanununu çıxarmışdır, onun əsərlərində ehtimal nəzəriyyəsi ünsürlərinə rast gəlinir.

Qalua Evarist (1811 – 1832), fransız riyaziyyatçısı; onun cəbri tənliklər üzrə əsərləri müasir cəbrin əsasını qoymuşdur, cəbrin qruplar kimi ən mühüm anlayışları Qaluanın ideyaları ilə bağıldlr.

Qauss Karl Fridrix (1777 – 1855), alman riyaziyyatçısı; onun əsərləri cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi diferensial həndəsə, riyazi fizika,

geodeziya, astronomiyanın inkişafına çox böyük təsir göstərmişdir.

Qoldbax Xristian (1690 – 1764), riyaziyyatçı, mənşəcə alman, Rusiyada yaşayıb; ədədlər nəzəriyyəsi və riyazi analiz üzrə əsərlərin müəllifi.

Qrandi Qvido (1671 – 1742), italyan həndəsəçisi; ləçəkli əyrilər adlanan əyrilərə baxıb.

Qreqori Ceyme (1638 – 1675), şotland riyaziyyatçısı və astronomu; dairə və hiperbolanın kvadraturası haqqında əsər yazmış, bu əsərdə sonsuz yığılan sıraları araşdırmışdır.

Qurvis Adolf (1859 – 1919), alman riyaziyyatçısı; əsas işləri riyazi analiz, funksiyalar nəzəriyyəsi və ədədlər nəzəriyyəsinə aiddir.

La Vale Pussen Şarl Jan (1866 – 1962), Belçika riyaziyyatçısı; Adamarla birlikdə sadə ədədlərin paylanması qanununu əsaslandırmışdır, ədədlər nəzəriyyəsi, funksiyalar nəzəriyyəsi, riyazi fizika sahəsində əsərlərin müəllifi.

Laqranj Jozef Lui (1736 – 1813), fransız riyaziyyatçısı və mexaniki, variasiya hesabının əsas anlayışlarını və metodlarını işləyib-hazırlamışdır; riyazi analiz, ədədlər nəzəriyyəsi, cəbr, diferensial tənliklər üzrə əsərlərin müəllifi.

Lambert İohan Henri (1728 – 1777), alman riyaziyyatçısı, astronomu, fiziki; riyaziyyat sahəsində π ədədinin irrasionallığını ciddi isbat etmişdir (1766), cəbr, həndəsə, sferik triqonometriya sahəsində əsərlərin müəllifi; astronimiyada kometlərin orbitlərini, Kainatın quruluşunu araşdırmışdır, işarələrin universal dili ideyasının müəllifi.

Lame Qabriel (1795 – 1870), fransız riyaziyyatçısı və mühəndisi; riyazi fizika, elastiklik nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi, əyrixətli koordinatlar nəzəriyyəsini işləyib-hazırlamışdır.

Laplas Pyer Simon (1749 – 1827), fransız astronomu, riyaziyyatçısı, fiziki; ehtimal nəzəriyyəsi və səma mexanikası üzrə klassik işlərin, "Analitik ehtimal nəzəriyyəsi", "Səma mexanikası haqqında traktat" (5 cilddə: 1798 – 1825) və s. əsərlərin müəllifi.

Lebeq Anri (1875 – 1941), fransız riyaziyyatçısı; həqiqi dəyişənli funksiyalar nəzəriyyəsinin yaradıcılarından biri; ölçü nəzəriyyəsi əsasında inteqralın kifayət qədər ümumi tərifini vermişdir.

Levi – Çivita Tullio (1873 – 1941), italyan riyaziyyatçısı və mexaniki; onun çoxölçülü fəzaların diferensial həndəsəsi haqqında işləri daha çox əhəmiyyət kəsb edir.

Lejandr Adrien Mari (1752 – 1833), fransız riyaziyyatçısı; ədədlər nəzəriyyəsi, elliptik inteqrallar və s. üzrə işlərin müəllifi.

Leybnis Qotfrid Vilhelm (1646 – 1716), alman filosofu, riyaziyyatçısı, fiziki; diferensial və inteqral hesabının yaradıcılarından biri.

Leonardo Pizalı (Fibonaççi) (1180 – 1240), italyan riyaziyyatçısı; özünün baş əsəri olan "Abak kitabında" (1202) ilk dəfə olaraq sistemli və son dərəcədə orijinal şəkildə ərəb riyaziyyatının uğurlarını şərh etmiş, Fibonaççi ədədləri adlanan ilk qayıtma ardıcıllığını təqdim etmişdir.

Lilio Luici (1520 – 1576), italyan həkimi və riyaziyyatçısı; onun yaratdığı təqvim layihəsi Roma Papası Qriqorinin islahatları nəticəsində qəbul edilmişdi.

Lindeman Karl Ferdinand (1852 – 1939), alman riyaziyyatçısı; 1882-ci ildə π ədədinin transendent olduğunu göstərmişdir.

Liuvil Jozef (1809 – 1882), fransız riyaziyyatçısı; funksiyalar nəzəriyyəsi, diferensial tənliklər və mexanika sahəsində işlərin müəllifi.

Lobaçevski Nikolay İvanoviç (1792 – 1856), rus riyaziyyatşısı; qeyri-evklid həndəsənin yaradıcılarından biri, cəbr, riyazi analiz, ehtimal nəzəriyyəsi, mexanika, fizika və astronomiya sahəsində əsərlərin müəllifi.

Lopital Giyom Fransua Antuan (1661 – 1704), fransız riyaziyyatçısı; diferensial hesabı üzrə ilk nəşr olunmuş kitabın müəllifi.

Luzin Nikolay Nikolayeviç (1883 – 1950) rus sovet riyaziyyatçısı, funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə elmi məktəbin banisi.

Lyu Xuey (*III* əsr), Çin riyaziyyatçısı, müəllifi olduğu "Dəniz adası haqqında traktat"da əlçatmaz əşyalara qədər olan məsafənin təyin olunması haqqında məsələlər var.

Lyapunov Aleksandr Mixayloviç (1857 – 1918), rus riyaziyyatçısı; yeni elmin – hərəkətin dayanıqlığı nəzəriyyəsinin yaradıcısı.

Mandelbrot Benua (1924 –cü ildə anadan olub), amerikan riyaziyyatçısı; Varşavada doğulub, fraktal həndəsənin yaradıcısı.

Markov Andrey Andreyeviç (1856 – 1922), rus riyaziyyatçısı; ehtimal nəzəriyyəsi, ədədlər nəzəriyyəsi və riyazi analiz sahələrində işləri var.

Matiyaseviç Yuri Vladimiroviç (1947-ci ildə doğulub), Rusiya riyaziyyatçısı; əsas işləri riyazi məntiqdəndir. 1970-ci ildə Hilbertin 10-cu probleminin alqoritmik həlledilməzliyini müəyyən etmişdir.

Meziriak Klod Qaspar Başe de (1581 – 1638), fransız riyaziyyatçısı və şairi; "Xoş və əyləncəli məsələlər" toplusunu (1612), eləcə də Diofantın "Hesab"ını (1621) yunan və latın dillərində öz şərhləriylə çap etdirib, birinci tərtib qeyri-müəyyən tənliklərin həllini verib.

Menelay İskəndəriyyəli (*I – II* əsrlər), qədim yunan riyazziyyatçısı və astronomu; sferik həndəsə və triqonometriyaya dair "Sferika" (5 kitabda) əsərinin müəllifi.

Menexm (e. ə. *IV* əsr), qədim yunan riyaziyyatçısı; konik kəsiklərin əsas xassələrini öyrənib və onlardan kubun ikiləşməsi məsələsinin həllində istifadə edib.

Merkator (Kaufman) Nikolaus (1620 ətrafı – 1687), alman riyaziyyatçısı, astronomu, mühəndisi; Kopenhagen, London və Parisdə işləyib, öz "Loqarifmotexnika" kitabında (1668) ilk dəfə olaraq $\ln(1+x)$ funksiyasının sonsuz qüvvət sırasına ayrılışını göstərib.

Mersenn Maren (1588 – 1648), fransız alimi, rahib; Parisdə elmi dərnək yaradaraq onu Paris akademiyası adlandırmışdır, öz geniş məktublaşması və səyahətləri sayəsində bütün dünya alimlərinin məlumat mübadiləsində geniş şəbəkəsini yaratmışdır.

Mindinq Ferdinand Qotliboviç (1806 – 1885), Rusiya riyaziyyatçısı; daimi mənfi əyrilikli səthi – psevdosferanı öyrənmişdir, psevdosferada geodezik (ən qısa) xətlərin yaratdığı üçbucaqda triqonometrik münasibətlər tapmışdır (1840), həndəsə və riyazi analiz üzrə əsərləri olmuşdur.

Minkovski German (1864 – 1909), alman riyaziyyatçısı və fiziki; həndəsə, ədədlər nəzəriyyəsində həndəsi metodlar, riyazi fizika, hidrodinamika sahəsində əsərlərin müəllifi, xüsusi nisbilik nəzəriyyəsi kinematikasının həndəsi interpretasiyasını vermişdir (Minkovski fəzası).

Mopertyüi Pyer Lui Moro de (1698 – 1759), fransız alimi; 1736 – 1737-ci illərdə dərəcə ölçmələri üçün lapland ekspedisiyası adlanan ekspedisiyaya rəhbərlik etmişdir, ən kiçik təsir prinsipini formulə etmişdir (1740).

Muavr Abraham de (1667 – 1754), ingilis riyaziyyatçısı, mənşəcə fransız; kompleks ədədi qüvvətə yüksəltmək qaydasını tapmışdır (Muavr formulu), ehtimal nəzəriyyəsi sahəsində işləmişdir.

Neyman (fon Neyman) Con (Yanoş; 1903 – 1957), amerikan riyaziyyatçısı, Budapeştdə doğulub, riyaziyyatın müxtəlif sahələrində işləmişdir, çoxluqlar nəzəriyyəsinin aksiomatikasına və hilbert isbat nəzəriyyəsinə baxmışdır; onun "Kvant mexanikasının riyazi əsasları" kitabı bu elmin və onun riyazi aparatının inkişafına əhəmiyyətli təsir göstərmişdir, ömrünün axır illərində oyunlar nəzəriyyəsi, hesablama maşınları nəzəriyyəsi, avtomatlar nəzəriyyəsi sahələrində işləmişdir.

Neper Con (1550 – 1617), şotland riyaziyyatçısı; loqarifmləri icad etmişdir.

Nöter Amali Emmi (1882 – 1935), alman riyaziyyatçısı; onun cəbr üzrə işləri yeni istiqamətin – ümumi və ya mücərrəd cəbrin (halqaların, meydanların, idealların ümumi nəzəriyyəsi) yaranmasına təkan verdi.

Nikolay Kuzanlı (1401 – 1464), teoloq və riyaziyyatçı; kardinal; riyazi traktatlar müəllifi; Kopernikin kosmologiyasının sələflərindən biri.

Nikomed İskəndəriyyəli (e. ə. *III – II* əsrlər), qədim yunan həndəsəçisi; sonralar konxoid adlandırılan əyrinin müəllifi kimi məşhurdur.

Nilakanta (1444 – 1501 ətrafı), hind riyaziyyatçısı; "Elmi toplunun" və Ariabhatanın yazdığı "Ariabhatiam" traktatına şərhlərin müəllifi.

Nyuton İsaak (1643 – 1727), ingilis riyaziyyatçısı, mexaniki, astronomu və fiziki; "Natural fəlsəfənin riyazi əsasları" fundamental əsərinin (1687) müəllifi; Leybnisdən asılı olmadan diferensial və inteqral hesabını işləyib-hazırlamış, qüvvət sıralarını elmə daxil etmiş və onlardan sistematik olaraq funksiyaların verilməsi üçün istifadə etmişdir; Nyutonun təbiətşünaslığın müxtəlif sahələrindəki işləri öz zəmanəsini xeyli qabaqlamışdı.

Orem Nikola (1323 ətrafı – 1382), fransız riyaziyyatçısı, fiziki və iqtisadçısı; kəsr üstlü qüvvətləri daxil etmişdir, ilk düzxətli

koordinat sistemlərinin yaradılmasını onun adı ilə bağlayırlar. "Sfera haqqında" kitabın müəllifidir.

Ostroqradski Mixail Vasilyeviç (1801 – 1861), rus riyaziyyatçısı və mexaniki; riyazi analiz, riyazi fizika, analitik və səma mexanikası sahəsində əsərlərin müəllifi.

Ömər Xəyyam (1048 ətrafı – 1122-dən sonra), fars şairi, riyaziyyatçısı və filosofu; riyaziyyatda konik kəsiklərin köməyi ilə 3-cü tərtib də daxil olmaqla tənliklərin həllini vermişdir.

Papp İskəndəriyyəli (*III* əsrin ikinci yarısı), qədim yunan riyaziyyatçısı; "Riyazi toplu" əsərində (8 cild) daha əvvəlki qədim yunan müəlliflərinin ən mühüm nəticələrini şərh etmişdir.

Paskal Blez (1623 – 1662), fransız riyaziyyatçısı, fiziki, filosof və yazıçısı; hesab, cəbr, ədədlər nəzəriyyəsi, ehtimal nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi; proyektiv həndəsənin ən əsas teoremlərindən birini almışdır; 1641 və ya 1642-ci ildə cəmləyici maşın quraşdırmışdır.

Paskal Etyen (1588 – 1651), fransız riyaziyyatçısı, B. Paskalın atası; onun baxdığı 4-cü tərtib əlamətdar əyri sonralar onun adıyla Paskal ilbizi adlandırılmışdır.

Paçoli Luka (1445 – 1514 ətrafı), italyan riyaziyyatçısı; hesab əməlləri qaydalarını, bir sıra cəbri tənliklərin həllini, həndəsi tənasüblər nəzəriyyəsini şərh etmişdir, "Hesab, həndəsə, nisbətlər və mütənasiblik üzrə biliklər məcmusu" dərsliyinin müəllifi.

Paş Moris (1843 – 1930), alman riyaziyyatçısı; həndəsənin aksiomatik əsaslarını birincilər sırasında araşdırmışdır; nizam aksiomları qrupu işləyib-hazırlamışdır, sonralar onun adıyla adlanan aksiom formulə etmişdir.

Peano Cüzeppe (1858 – 1932), italyan riyaziyyatçısı; riyaziyyatın əsaslandırılması, riyazi analiz üzrə işləri var; natural ədədlər sırasının aksiomatikasını yaradıb.

Pifaqor (e. ə. *VI* əsr), qədim yunan filosofu və riyaziyyatçısı, pifaqor məktəbinin banisi; riyaziyyatı formullar və reseptlər yığnağından mücərrəd deduktiv elmə çevirmişdir; tam ədəd və tənasüblərin xassələrini öyrənməyi, düzbucaqlı üçbucağın tərəfləri arasında münasibətin isbatını ona aid edirlər.

Platon (e. ə. 428 və ya 427 – 348 və ya 347), qədim yunan filosofu, Afinada öz məktəbini – Akademiyanı yaradıb, riyaziyyatı tədris olunan fənlər siyahısına daxil edib; əksini fərz etməklə mühakimə yürütmək məntiqi metodunun banilərindən biridir.

Poisele Jan Viktor (1788 – 1867), fransız riyaziyyatçısı və mexaniki; proyektiv həndəsənin əsaslarını qoyub.

Pontryagin Lev Semyonoviç (1908 – 1988), Rusiya riyaziyyatçısı; yeni elmin – optimal idarəetmənin banisi.

Ptolomey Klavdi (90 ətrafı – 160 ətrafı), qədim yunan astronom və riyaziyyatçısı; tərpənməz Yer ətrafında planetlərin hərəkətinin riyazi nəzəriyyəsini yaratmışdır, onun əsas əsəri "Almagestdə" ("Məcəsti") qədimlərin astronomik biliklərı ümumiləşdirilmişdir və eləcə də düzxətli və sferik triqonometriya haqqında məlumatlar gətirilmişdir.

Puankare Jül Anri (1854 – 1912), fransız riyaziyyatçısı, fiziki və filosofu; riyazi analiz, topologiya, riyazi fizika, səma mexanikası üzrə əsərlərin müəllifi; 1881 – 1883-cü illərdə qeyri-evklid həndəsəsinin özünün izahını vermişdir.

Puanso Lui (1777 – 1859)), fransız riyaziyyatçısı, mexanik və fiziki; mexaniki sistemlərin həndəsi metodlarla tədqiqini işləyib-hazırlamışdır, cüt qüvvə nəzəriyyəsi əsasında həndəsi statikanı qurmuş, qüvvələr mövcud olmadıqda bərk cismin fırlanması haqqında teoremi çıxarmışdır.

Puasson Simeon Deni (1780 – 1840), fransız riyaziyyatçısı, mexaniki və fiziki.

Ramanucan Srinivasa (1887 – 1920), hind riyaziyyatçısı; Hardi ilə birlikdə ilk dəfə olaraq n ədədinin bütün bölünmələrinin təqribi düsturlarını almışdır.

Rassel Bertran Artur Uilyam (1872 – 1970), ingilis riyaziyyatçısı, məntiqçisi, filosofu; riyazi məntiq və riyaziyyatın əsaslandırılması üzrə əsərlərin müəllifi; çoxluqlar nəzəriyyəsinin paradokslarından birini (Rassel paradoksu) ifadə etmişdir.

Rize Adam (1489 – 1559), alman riyaziyyatçısı və pedaqoqu; öz dərsliklərində vurmanın müasir üsulunu daxil etmiş, "+" və "–" işarələrindən istifadə etmişdir.

Riman Bernhard (1826 – 1866) alman riyaziyyatçısı; kompleks dəyişənli funksiyalar nəzəriyəsində həndəsi istiqamətin əsaslarını qoymuşdur; həndəsəyə ixtiyari bircins obyektlərin kəsilməz məcmuları haqqında təlim kimi baxmışdır; kəsilən funksiyaları öyrənmişdir; riyaziyyata riman fəzaları adlanan fəzaları daxil etmiş və onların nəzəriyyəsini (riman həndəsəsini) işləmişdir; diferensial tənliklər nəzəriyyəsi, triqonometrik sıralar, inteqral hesabı sahələrində işləmişdir.

Roberval Jil (1602 – 1675), fransız riyazityyatçısı; "bölünməyənlər" metodunun yaradıcılarından biri, sikloidin kvadraturasını tapıb.

Romen (van Romen) Adrien (1561 – 1615), holland riyaziyyatçısı, həndəsə və triqonometriya sahəsində işləmiş və π ədədinin 17 onluq işarəsini təyin etmişdir.

Ruffini Paolo (1765 – 1822), italyan riyaziyyatçısı; 5-ci dərəcəli cəbri tənliyin radikallarda həlledilməzliyi barədə ilk (o qədər də əsaslandırılmamış) isbat vermişdir.

Sakkeri Covanni Cerolamo (1667 – 1733), italyan riyaziyyatçısı və məntiqşünası; öz tədqiqatları ilə qeyri-evklid həndəsəsinin kəşfini hazırlayan riyaziyyatçılardan biri; Evklidin beşinci postulatını (paralel düz xətlər haqqında) əksini fərz etməklə isbat etməyə çalışmışdı.

Stevin Simon (1548 – 1620), holland riyaziyyatçısı və mühəndisi; onluq kəsrləri (Avropada) və tənliklərin mənfi köklərini istifadəyə daxil etmişdi.

Stensen Nils (Steno Nikolaus, 1638 – 1686), Danimarka təbiətşünası, rahib-riyaziyyatçı, kristalloqrafiyanın öz adı ilə adlandırılmış bir qanununu müəyyən etmişdir.

Stirlinq Ceyms (1692 – 1770), şotland riyaziyyatçısı, faktorialları hesablamaq üçün sonralar onun adıyla adlandırılan təqribi düstur almışdır.

Sun-szı (*III* əsr), Çin riyaziyyatçısı, "Riyazi traktatın" müəllifi, hesab lövhəsində hesabi əməllərin qaydasını vermiş, bir dərəcəli tənliklərin tam ədədlərdə həlli üsullarını şərh etmişdir.

Suslin Mixail Yakovleviç (1894 – 1919), rus riyaziyyatçısı, Luzinin tələbəsi; Moskva universitetinin tələbəsi ikən A-çoxluqlar adlanan yeni tip çoxluqları kəşf etmişdi.

Seylen (van Seylen) Ludolf (1540 – 1610), holland riyaziyyatçısı; 1615-ci ildə π ədədinin 32 onluq işarəli hesablamasını çap etdirib.

Şal Mişel (1793 – 1880), fransız riyaziyyatçısı və riyaziyyat tarixçisi, "Həndəsi metodların mənşəyi və inkişafının tarixi icmalı" kitabının müəllifi, onun öz həndəsi araşdırmaları proyektiv həndəsənin işlənib-hazırlanmasına yardımçı olmuşdu.

Şyonflis Artur (1853 – 1928), alman riyaziyyatçısı; 1890 – 1891-ci illərdə qruplar nəzəriyyəsinin köməyi ilə bütün kristallik fəza qəfəslərinin təsnifatı məsələsini həll etmişdir.

Şnayder Teodor (1911-ci ildə doğulub), alman riyaziyyatçısı, Gelfonddan asılı olmadan 1934-cü ildə Hilbertin 7-ci problemini həll etmişdir.

Şteyner Yakob (1796 – 1863), isveçrə riyaziyyatçısı; proyektiv həndəsənin yaradıcılarından biri.

Ştifel Mixel (1487 – 1567), alman riyaziyyatçısı və missioneri; "Tam hesab" kitabının müəllifi, bu kitaba o dövrə qədər olan hesabi əməliyyatların və qüvvətləri ilə birgə məchulların işarələrindəki bütün dəyişiklikləri daxil olmuşdu, kvadrat kök üçün simvol daxil etmiş, ədədi silsilələri mənfi ədədlər oblastına qədər davam etdirmiş, həndəsi silsilələrdə isə qüvvətin mənfi üstlərini daxil etmişdi.

Şur Fridrix (1856 – 1932), alman riyaziyyatçısı; əsas işləri həndəsə, çevirmə qruplarına aiddir, sabit əyrilikli riman fəzaları haqqında əsərlərin müəllifi.

Şyuke Nikola (? – 1500), fransız riyaziyyatçısı, ilk dəfə olaraq məchulun qüvvətlərinin işarələnməsi üçün üstlərdən istifadə etmişdir.

Tartalya Nikkolo (1499 ətrafı – 1557), italyan alimi; kub tənliklərin həlli üsullarını tapmışdır.

Teetet Afinalı (e. ə. 410 – 369), qədim yunan riyaziyyatçısı, Kirenli Feodorun və Platonun tələbəsi; irrasioanallıqlar nəzəriyyə-

sini qurmuş, dodekaedr, ikosaedr və oktaedri kəşf etmişdir.

Torriçelli Evancelista (1608 – 1647), italyan fizik və riyaziyyatçısı; toxunanlar haqqında məsələnin həllində bölünməyənlər metodunu təkmilləşdirmiş və geniş tətbiq etmişdir. Rasional üst halında parabolanın kvadraturası qaydasını ümumiləşdirmişdir, Robervaldan asılı olmadan sikloidin kvadraturasını təyin etmişdir. Dekartdan asılı olmadan loqarifmik spiralın qövsünün uzunluğunu təyin etmişdir.

Tusi Nəsirəddin (1201 – 1274) – Azərbaycanın böyük alimi, filosofu, astronom və riyaziyyatçısıdır. O, 1248-ci ildə həndəsəyə aid 15 hissədən ibarət "Təhrir Öqlidis" (Öqlidisin yazılışı) əsərini yazmışdır. Bu əsər həndəsə sahəsində *XVIII* əsrə kimi yazılmış bütün əsərləri kölgədə qoymuşdur. 1657-ci ildə latın dilinə tərcümə olunaraq Londonda nəşr edilmiş və İngiltərənin Oksford universitetində Con Vallis (1616 – 1703) ondan mühazirə oxumuşdur. Bununla da N. Tusi İngiltərədə bir azərbaycanlı kimi şöhrət tapmışdı. N. Tusi, "Təhrir Öqlidis" kitabını yazarkən Evklidin həndəsə ilə hesabını yenidən işləmiş və məzmununa toxunmadan ona əlavələr etmişdir. O, həm də bu kitabında Pifaqor teoreminin 48 variantda isbatını vermişdir. N. Tusi ədəd anlayışının inkişafında böyük inqilab yaratmışdı. O, ilk dəfə vahidə ədəd kimi baxmış və ona tərif vermişdi: Ədəd – vahidlərin yığınından əmələ gəlmiş miqdardır. Ədəd say sırasında duran hər hansı bir şey olduğu üçün vahidin özünün də ədəd olduğunu mən deyirəm", N. Tusi eyni zamanda iki ədədin nisbətindən alınan qismətə də ədəd kimi baxmış və onu riyazi əsaslandırmışdır. N. Tusinin riyaziyyat sahəsindəki nailiyyətlərini akademik İ. Xəlilov yüksək qiymətləndirmişdir: Nəsirəddinin kəsilməz kəmiyyətlər nəzəriyyəsinə və ədəd haqqındakı nəzəriyyəyə aid olan fikirləri riyaziyyatın sonrakı inkişafına çox böyük təsir göstərmiş və müasir riyazi analizin əsaslandırılmasında lazım olan dəyişən kəmiyyətlərin kəşfi, diferensial və inteqral hesabının kəşfi və kəsilməzliyin ciddi tərifi kimi mühüm kəşflərin hazırlanmasında əhəmiyyətli rol oynamışdır. N. Tusi 1259-cu ildə Marağa şəhərinin şərqində uzunluğu 350 metr, eni 150 metrə yaxın olan bir təpənin üstündə rəsədxana tikdirmiş və buraya körkəmli alimləri cəlb edərək, astronomiyanın inkişafı üçün qiymətli kəşflər etmişdir. O, eyni zamanda triqonometriyanı ümumiləşdirmiş və müstəqil elm şəklinə salmışdır. Xüsusilə sferik triqonometriyanı daha çox inkişaf etdirmişdir. Bu sahədə atılmış ilk elmi addımlar N. Tusiyə məxsusdur. N. Tusi yüzdən çox əsər yazmışdır. Onlardan "İşarələrin şərhi", "Həndəsə qaydaları", "Kürə və silindr haqqında", Apolloninin "Konus kəsikləri, Arximedin "Dairənin kvadraturası", Menelayın "Sferika" əsəri, "Astronomiya haqqında", "Astronomiya xatirələri", "Təqvim haqqında", "Kainatın əbədiliyi və sonsuzluğu haqqında", Ptolomeyin "Almagesti", "Əxlaqi Nasiri", "Cavahirnamə", "Maliyyət barəsində", "Təcrid", "Otuz fəsil" və s. əsərlərini göstərmək olar.

Vallis Con (1616 – 1703), ingilis riyaziyyatçısı; onun "Sonsuzluq hesabı" əsəri (1665) sonsuz kiçik kəmiyyətlərin hesablanmasının yaradılmasında mühüm rol oynayıb.

Van-der-varden Bartel Landert (1903 – 1996), riyaziyyatçı, milliyətcə holland, Almaniyada işləyib; cəbr, cəbri həndəsə, riyaziyyat tarixi üzrə əsərlərin müəllifi.

Vansel Pyer Loran (1814 – 1848), fransız riyaziyyatçısı; ilk dəfə pərgarın və xətkeşin köməyi ilə bucağın trisektsiyasını həyata keçirməyin və kubu ikiləşdirməyin mümkün olmadığını isbat etmişdir.

Veber Henrix (1842 – 1913), alman riyaziyyatçısı; cəbri ədədlər, cəbri funksiyalar nəzəriyyələri, cəbri həndəsə və riyazi fizika üzrə əsərlərin müəllifi, 1898-ci ildə qrupların aksiomatik tərifini ifadə etmişdir.

Veyerştrass Karl Teodor Vilhelm (1815 – 1897), alman riyaziyyatçısı, riyazi analiz, funksiyalar nəzəriyyəsi, variasiya hesabı, diferensial həndəsə və xətti cəbrə dair əsərlərin müəllifi, riyazi analizin məntiqi əsaslandırılması sxemini işləyib-hazırlamışdır.

Veyl German (1885 – 1955), alman riyaziyyatçısı, 1933-cü ildən ABŞ-da işləyib; funksiyalar nəzəriyyəsi, ədədlər nəzəriyyəsi, qruplar nəzəriyyəsinə dair əsərlərin müəllifidir, həndəsənin vektor aksiomatikasını işləyib-hazırlamşdır.

Vessel Kaspar (1745 – 1818), Danimarka alimi, ilk dəfə olaraq kompleks ədədlərin həndəsi təsvirini vermişdir.

Viyet Fransua (1540 – 1603), fransız riyaziyyatçısı, demək olar ki, bütün elementar cəbri işləyib-hazırlamışdır, cəbrə hərfi işarələr daxil etmiş və ilk hərfi hesablama qurmuşdur; ona qədər riyaziyyatda düstur olmamışdı.

Viner Norbert (1894 – 1964), amerikan alimi; "Kibernetika" əsərinin müəllifi, burada o, bu elmin əsas müddəalarını ifadə etmişdir, eləcə də riyazi analiz və ehtimal nəzəriyyəsi sahələrində işləmişdir.

Vinoqradov İvan Matveyeviç (1891 – 1983), sovet riyaziyyatçısı; ədədlərin analitik nəzəriyyəsi sahəsində fundamental əsərlərin müəllifi.

Vulf Yuri Viktoroviç (Georq) (1863 – 1925) rus kristalloqrafı, 1913-cü ildə U.L. Breqdən asılı olmadan rentgen şüalarının difraksiya şərtini vermişdir.

Veyls Endryü (1952-ci ildə doğulub), ingilis riyaziyyatçısı; 1995-ci ildə böyük Ferma teoreminin tam isbatını vermişdir.

Yeqorov Dmitri Fyodoroviç (1869 – 1931), rus riyaziyyatçısı; diferensial həndəsə, inteqral tənliklər, funksiyalar nəzəriyyəsi üzrə əsərlərin müəllifi.

Zenon Eleyalı (e. ə. 490 ətrafı – 430 ətrafı); qədim yunan filosofu; "Dixotomiya", "Axilles və tısbağa", "Ox" və s. paradoksları (aporiyaları) ilə məşhurdur ki, bunlar da hərəkətin, əşyalar çoxluğunun mümkünsüzlüyünü isbat edir.

MÜNDƏRİCAT

Ön söz.....3

HƏNDƏSƏ – "YERÖLÇMƏ" DEMƏKDİR

Uzunluq, sahə və həcm. Uzunluq 5
Sahə 6
Həcm 9
Həcm düsturları 9
Prizma 11
Pazın həcmi 11
Piramida 12
Tetraedr 13
Silindrlər və konuslar.....13
Kürənin həcmi və inteqral.....14
Simpson düsturu.....15
Eyniböyüklükdə və eynitərkibli fiqurlar 16
Səthin sahəsi.....18
Şvarsın çəkməsi.....19
Rəngsaz paradoksu.....20
Fırlanma cisimlərinin həcmi və səthi 21

HƏNDƏSƏ ÜSTƏGƏL CƏBR

Koordinat sistemləri 24
Polyar koordinat sistemi 24
Düzbucaqlı Dekart koordinat sistemi 25
Fəzada koordinatlar 25
Görkəmli əyrilər 26
Konik kəsiklər.....26
Ellips 27
Parabola 29
Hiperbola.....29
Kassini ovalları 30
Dioкles sissoidi.....30
Sikloida 31
Kvadratrisa.....31
Çevrənin piruetləri.....32
Dəmir yolunu necə dəyirmiləşdirməli 33
Riyazi çiçəklik.....35
Zəncirvari xətt 35
Spirallar 36
Triqonometriya.....38
Bucaqlar və onların ölçülməsi 40
Müstəvidə triqonometriya 41
Sferik triqonometriyanın düsturları 43
Triqonometrik funksiyaların ümümi tərifi 44
Triqonometrik funksiyaların xassələri və triqonometrik eyniliklər 45
Arkfunksiyalar və triqonometrik tənliklər 47
Sferik triqonometriya.....48
Sfera üzərində çevrə və üçbucaq.....48
Sferik üçbucağın bucaq və tərəflərinin ölçülməsi 50
Sferik üçbucağın tərəfləri arasında münasibətlər 50
Polyar sferik üçbucaq və onun xassələri 51
Sferik üçbucağın bucaqları arasında münasibətlər 52
Sferik üçbucaqların bərabərlik əlaməti 53
Simmetrik sferik üçbucaq anlayışı.....53
Sferik üçbucağın tərəf və bucaqları arasında münasibətlər.....54
Sferik üçbucağın daxilinə və xaricinə çəkilmiş çevrələr.....54
Sferik triqonometriyanın əsas düsturları 55
Tərəfin kosinusu düsturları 56
Sinuslar düsturları.....58
Beş element düsturları.....60
Tərəfin kosinusu düsturlarının tərsi olan düsturlar (bucağın kosinusu düsturları) 61
Dörd element düsturları (kotangenslə) ..62
Düzbucaqlı sferik üçbucaqların həlli üçün düsturlar 63
Vektorlar və onlar üzərində əməllər.....65
Vektor nə deməkdir? 65
Vektorlar cəbri 66
Düz xətt üzərində üç nöqtə.....68
Vektorun koordinatları.....69
Üçbucağın həndəsəsi və vektorlar.....69
Skalyar hasil 70
Düzbucaqlı koordinatlarda düz xəttin və müstəvinin tənlikləri 71

ÇOXÜZLÜ HƏNDƏSƏ

Hərəkət 73
Qabarıq fiqurlar 78
Fraktallar 84

Sferada fiqurlar.....88
Sferada düzxətlər, parçalar, məsafələr və bucaqlar 89
Sferik üçbucaq 91
İkilik 93
Lobaçevski həndəsəsi 93
Həndəsə və çevrilmələr qrupları 100
Proyeksiyalı həndəsə.....108
Proyeksiyalı teoremlər 108
Proyeksiyalı çevrilmələr.....110
Müstəvinin tamamlanması 112
Proyeksiyalı müstəvi 113
İkilik prinsipi 114
Mistik heksaqram.....115
Proyeksiyalı həndəsə – bütöv həndəsədir.....117
Riyazi analiz nə deməkdir 118

SONSUZ ARDICILLIQLAR VƏ CƏMLƏR

Ardıcıllıqlar 121
Ədədi ardıcıllıqlar necə verilir.....121
Alqoritimli təsvir edilən ardıcıllıqlar...121
Fibonaççi ardıcıllığı.....122
Nərdivanla neçə üsul ilə qalxmaq olar? .122
Ardıcıllıqların xassələri.....123
Ədədi və həndəsi silsilələr. Ədədi silsilə.....124
Sahibkar və işçi 125
Həndəsi silsilə 126
Ardıcıllığın limiti.....128
Limitin intuitiv anlayışından ciddi anlayışına.....128
Bir neçə faydalı teorem 129
Xüsusi limit 130
Ədədi sıralar.....130
Sıranın cəmi kimi nə başa düşürlər 130
Fiqurun sahəsini müəyyən edin 131
Yığılma şərtləri 131
Bəzi görkəmli sıralar 132

FUNKSİYALAR

Funksiya anlayışı 133
Kəsilməz və kəsilən funksiyalar 135
"ε – δ" dilində kəsilməzliyin tərifi 136
Kəsilməz funksiyalar 137
Kəsilməz funksiyaların xassələri 138
Kəsilməz funksiyalar haqqında bəzi teoremlər 142
Bolsano teoreminin tətbiqləri haqqında 144
Kəsilməz funksiyaların funksional tənliklərin həllinə tətbiqi.....148
Kəsilməz funksiyalar üçün tərpənməz nöqtə məsələləri 151
Kəsilən funksiyalar 156
Elementar funksiyalar və onların xassələri 157
Xətti funksiyalar 157
Qüvvət funksiyaları.....157
Çoxhədlilər.....159
"Ayrılmaz cüt" – üstlü və loqarifmik funksiyalar 159
Triqonometrik funksiyalar.....161
Funksiyanın qrafikinə toxunan 165
Funksiyanın limiti.....166
Funksiyanın limitinin tərifi.....167
Limitlər haqqında əsas teoremlər.....174

TÖRƏMƏ VƏ İNTEQRAL

Törəmə 181
Diferensial nədir? 182
Ekstremal məsələlər.....183
Funksiyanın qrafikini necə qurmalı 186
İnteqral və ibtidai funksiya 190
İbtidai funksiya 191
İnteqralı necə tapmalı 192
Bəzi funksiyaların inteqralları 193
Qüvvət sıraları.....193

TƏSADÜFİ HADİSƏLƏR

Hər şey zər atmaqdan başladı 197
Kavaler de Merenin məsələsi.....199
Asılı və asılı olmayan hadisələr 200
Avtobusu nə qədər gözləməliyik?.....201
Şərti ehtimal 201
Hadisələrin asılı olmaması 202
Sportloto.....203
Təsadüfi kəmiyyətlər 204
Böyük ədədlər qanunu 206
Binomial paylanma 207
Bernulli sxemində riyazi gözləmə və dispersiya.....208
Bulkada neçə kişmiş var.....208
Statistika hər şeyi bilir 210
Puasson paylanması cədvəlləri.....210
Əlifbada ən zəruri hərf 212

Ehtimal nəzəriyyəsi nədir?
Ehtimal nəzəriyyəsinin predmeti, təsadüfi sınaq və hadisə anlayışı.....214
Tezlik və ehtimal anlayışları.....216
Diskret ehtimal fəzası.
Klassik ehtimal.....217
Həndəsi ehtimal.....221
Ehtimal nəzəriyyəsinin aksiomatik quruluşu. Kolmoqorov aksiomları.....222
Şərti ehtimal.....224
Asılı olmayan hadisələr.....225
Diskret təsadüfi kəmiyyətlər.....227
Riyazi statistika nədir?.....228
Elementar ehtimal nəzəriyyəsi.....228
Sonlu nəticəli təsadüfi sınaqların ehtimal modeli.....229
Şərti ehtimal. Asılı olmayan hadisələr..231
Təsadüfi kəmiyyət və onun xarakteristikaları.....232
Riyazi gözləmə və dispersiya.....236
Tamqiymətli təsadüfi kəmiyyətlər və onların xarakteristikaları.....238
Riyazi statistika. Baş küllüyyat (heyyət) və seçim anlayışları.....239
Seçimin statistik paylanması.....241
Seçimin emprik paylanma funksiyası..242
Statistik seçimin poliqonu və histoqramması.....243
Baş küllüyyatın və seçimin orta qiyməti.....244

ÇOXLUQLAR VƏ ƏMƏLLƏR

Çoxluqlar və onların elementləri.....246
Sonsuz çoxluqlar.....247
Hesabi çoxluqlar.....248
Qeyri-hesabi çoxluqlar.....249
Çoxluğun gücü.....250
Bərabər parçalar "paradoksu".....251
Çoxluqlar üzərində əməllər.....251
Çoxluqların kəssişməsi252 Çoxluqların birləşməsi.....253 Digər əməliyyatlar 255
İki çoxluğun birləşməsinin gücü.....255
Münasibətlər.....257
Müəmmalı münasibətlər.....259
İnikaslar.....260
İnikasların bəzi növləri.....261
Tərs inikas.....261
İnikasların kompozisiyası.....262
Qruplar.....263

RİYAZİ MÜHAKİMƏLƏR

Riyaziyyatda isbatlar.....269
İsbatlara misallar.....269
Tərif.....270
İsbatın inandırıcılığı.....270
Kolmoqorovun bioqrafiyasından.....270
Teorem, tərif, aksiom, lemma.....271
Sofizmlər.....272
Əksini fərz etmək üsulu ilə isbat.....273
Təsdiq və inkar.....274
Zəruri və kafi şərt.....275
Mövcudluq (varlıq) isbatları.....275
Bəzi teoremlərin isbatı.
Pifaqor teoremi.....276
Stüart teoremi.....277
Şteyner Lemos teoremi və ya bir daha tənbölən haqqında.....278
Eyler teoremi (üç nöqtə haqqında).....280
Eyler teoremi (iki mərkəz arasındakı məsafə).....281
Eyler teoremi (dördbucaqlılar haqqında).....282
Kəpənək teoremi.....283
Ceva teoremi.....285
Qaus teoremi.....286
Riyazi induksiya üsulu.....286
İxtiraçı paradoksu.....288
Ən kiçik ədəd prinsipi.....289
Tam və natamam induksiya.....290
Aksiomlar.....290
Aksiomatikanın ziddiyyətsizliyi nədir.293
Aksiomatikanın tamlığı.....296
Aksiomatikanın müstəqilliyi.....296
Həndəsənin digər aksiom sistemləri....297

RİYAZİ MƏNTİQ

Mühakimələr, təkliflər, mülahizələr....298
"Hər şeyi bilmək istəyirəm".....299
Edam etməli, yoxsa bağışlamalı.....299
Bərabər paradoksu.....300
Bul funksiyaları.....300
Proqramlaşdırmada bul əməliyyatları .301
Propozisional düsturlar.....301
Kim haqlı, kim müqəssirdir.....304
Eyniliklə doğru düsturlar.....304
Mülahizələr məntiqinin bir sıra qanunları.....305
Mülahizələr hesabı.....305
Çörək və ya tamaşa.....306
Mövsüm dəbləri.....306

Ödənilə bilən düsturlar.....307
Predikatların hesablanması dili.....308
Predmetlər və adlar.....308
Predikatlar.....309
Predikatların hesablanması dilinin düsturları.....309
Mühüm düsturlar.....310
Evkliddən Hilbertə.....311
Sviftin "məntiqi maşını".....312
Riyazi məntiqin uğurları.....312
Duz gör nədədir.....313
Nəsirəddin Tusinin əsərlərində məntiq.....313
Klassik məntiq elmi və onun məsələləri.....314
"Təcrid əl-məntiq" əsərində fraqmental tərcümələr və təhlillər. Təkliflər və onların növləri.....317
Təkliflərin maddələri və cəhətləri (modallığı).....322
Qarşılıqlı inkar və onun məcrasında olanlar haqqında.....324
Əkslikər haqqında.....326
İnkariliyin əksilikləri (zəruri külli inkarilik özü kimi əks edilir).....327
Sillogizmlər haqqında.....328
Kompyuter teorem isbat edir.....332

HESABLAMA SƏNƏTİ

Təqribi hesablamalar.....333
Təqribi ədədlər və xətalar.....333
Onluq ədədləri necə yuvarlaqlaşdırırlar?.....334
Hesab əməllərinin nəticələrinin xətaları.....334
Kvadrat kökün qiymətini necə təyin etməli.....335
Hesablama maşınları nədir?.....338
Alqoritm.....338
İlk hesablama maşınlarından fərdi kompyuterə. Elektron erasına qədərki hesablama maşınları.....340
İlk elektron hesablama maşınları (EHM).....341
Con fon Neyman.....341
EHM arxitekturası.....342
EHM nəsilləri.....343
"Dəmir" və "kağız".....345
Çarlz Bebbic.....346

LAMƏKAN RİYAZİYYAT

Riyaziyyat və fizika.....349
Radiumun parçalanması və ya birinci tərtib diferensial tənliklər.....349
İkinci tərtib diferensial tənliklər.....350
Kompleks ədədlər və elektrotexnika....351
Kompleks amplitudalar metodu.....352
Kompleks ədədlər və üçfazalı gərginlik.....353
İnformasiya nəzəriyyəsi.....354
İnformasiyanın ötürülməsi necə baş verir ...355 İnformasiyanın ölçülməsi – bitlər
və baytlar.....355
İnformasiya və qeyri-müəyyənlik: entropiya anlayışı.....357
İnformasiyanın kodlaşdırılması.....359
Riyaziyyat və kristalloqrafiya.....360
Sabit bucaqlar qanunu.....361
Kristallardan qəfəslərə.....362
Qəfəslərin simmetriyası.....362
Düzgün nöqtələr sistemləri.....364
Şahmat taxtası üzərində riyaziyyat.....366
Şahmat tapmacaları.....366
Kompyuter şahmat tapmacalarını həll edir.....371

RİYAZİYYAT DÜNYASI

RİYAZİYYAT TƏHSİLİ VƏ PEŞƏKAR ARTIM

Məktəbdə riyaziyyat.....376
Universitetlər.....377
Riyaziyyaçı karyerası.....377
Dünya riyaziyyat birliyinin həyatı.....377
Riyaziyyatçılara mükafatlar.....379
Con Filds medalı.....380
Məktəblilərin riyaziyyat olimpiadaları.....380
Riyaziyyat olimpiadalarından məsələ nümunələri.....381
"Riyazi kenquru".....382
Əsas işarələrin siyahısı.....383
Yunan əlifbası.....384
Bəzi alimlər haqqında qısa məlumat.....385
Mündəricat.....396

Tərtib edənlər:

Hüseynov İlham Heydər oğlu – *Fizika-riyaziyyat elmləri namizədi*

Kərimov Məhəmməd Ağahəsən oğlu – *Respublikanın əməkdar müəllimi*

RİYAZİYYAT ENSİKLOPEDİYASI

II hissə

Nəşriyyatın direktoru
Eldar Əliyev

Mətbəənin direktoru
Səhraf Mustafayev

Texniki redaktor
Mehri Xanbabayeva

Dizayn
Süsən Zərbaliyeva

Korrektor
Fəridə Ələsgərli

Çapa imzalanıb 15.11.2011.
Formatı 60×90 1/8.
Ofset çapı. F.ç.v. 50. *Tiraj* 35000.

"Çaşıoğlu" mətbəəsi.
Bakı şəhəri, M.Müşfiq küçəsi 2E, *Tel.:* 447-49-71.