SABİT KƏRİMOV, YAQUB SƏRDAROV

KOMPYUTER ELMİNİN NƏZƏRİ ƏSASLARI

Dərslik

Azərbaycan Respublikası Təhsil
nazirinin 4 sentyabr 2008-ci il
tarixli 1031 saylı əmri ilə
təsdiq edilmişdir

BAKI – 2009

Rəy verənlər: AMEA-nın İnformasiya Texnologiyaları İnstitutunun direktoru, AMEA-nın müxbir üzvü R.Əliquliyev

BDU-nun "İnformasiya texnologiyaları və proqramlaşdırma" kafedrasının müdiri, professor Ə.Əliyev

Sabit Kərimov, Yaqub Sərdarov. Kompyuter elminin nəzəri əsasları. Dərslik /S.Kərimovun redaktəsi ilə/. – Bakı, 2009, 290 səh.

Təqdim olunan dərslik Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin təsdiq etdiyi proqrama uyğun hazırlanmışdır.

Dərslikdə kompyuter elminin nəzəri əsaslarını təşkil edən çoxluqlar nəzəriyyəsi, vektorlar və matrislər, qraflar, riyazi məntiq, alqoritmlər nəzəriyyəsi, sonlu avtomatlar nəzəriyyəsi, informasiya nəzəriyyəsinin elementləri, nisbətlər nəzəriyyəsi, kompyuter elminin kibernetik aspektləri, kompyuterin hesabi əsasları, sistemli analiz və modelləşdirmə bölmələri şərh edilmişdir.

Kitab "Kompyuter elmləri", "Kompyuter mühəndisliyi", "İnformasiya texnologiyaları və sistemləri mühəndisliyi" ixtisasları və onlara yaxın digər ixtisaslar üzrə təhsil alan tələbələr, magistrantlar və doktorantlar üçün dərslik kimi nəzərdə tutulub. Kitabdan, həmçinin, bu sahələrdə çalışan müəllimlər və mütəxəssislər də faydalana bilərlər.

ISBN 978-9952-440-37-8

MÜNDƏRİCAT

GİRİŞ

Keçmiş SSRİ məkanına daxil olan ölkələrdə, o cümlədən Azərbaycanda, "İnformatika" kimi tanınan elm xaricdə, həmçinin ABŞ-da, "Kompyuter elmi" adlanır. Son illərdə dünya miqyasında gedən qloballaşma və elmi istiqamət-lərin inteqrasiyası prosesləri çərçivəsində Respublikamızda "Kompyuter elmi" adı artıq qəbul edilmişdir.

Kompyuter elmi - riyaziləşdirilmiş elmdir. Onun nəzəri hissəsinin nüvəsini sonlu riyaziyyat təşkil edir. Riyazi məntiq isə çoxlu sayda istər fiziki (texniki mənada), istərsə də proqram məhsullarına dair qurğuların və instrumental, proqram vasitələrinin əsasıdır.

Praktiki olaraq hər bir elmin fundamenti var. Onsuz həmin elmin tətbiqi aspektləri istinadlardan məhrumdur.

Kompyuter elminin nəzəri əsasları riyaziyyatın əvvəllər bir-biri ilə az əlaqəli görünən bölmələrindən ibarətdir.

Kitabda riyazi məntiqlə yanaşı, çoxluqlar nəzəriyyəsi, vektorlar və matrislər, qraflar, alqoritmlər nəzəriyyəsi, sonlu avtomatlar nəzəriyyəsi, informasiya nəzəriyyəsinin elementləri, nisbətlər nəzəriyyəsi, kompyuter elminin kibernetik aspektləri, kompyuterin hesabi əsasları, sistemli analiz və modelləşdirmə bölmələri də şərh edilmişdir.

Tətbiqi məsələlərin həlli üçün geniş imkanlı proqramlar mövcuddur, lakin verilmiş məsələni savadlı təqdim etmək (məsələni qoymaq) və kompyuterə əmr edə biləcək şəklə gətirməkdən ötru yuxarıda qeyd etdiyimiz nəzəri elmi istiqamətləri bilmək lazımdır. Ancaq bu və bu kimi bölmələri mənimsəməklə, özünü kompyuter elmi sahəsində mütəxəssis hesab etmək mümkündür.

Təqdim olunan dərslik Azərbaycan Respublikası Təhsil Nazirliyinin təsdiq etdiyi proqrama uyğun hazırlanmışdır.

Kitab 11 fəsildən ibarətdir.

Dərsliyin I fəslində çoxluqlar nəzəriyyəsinin əsas elementləri açıqlanır, çoxluqlar üzərində əməllər, inikas, siniflərə bölmə, çoxluqların gücü kimi məsələlərə baxılır.

II fəsil vektorlar və matrislər haqqında yığcam nəzəri və praktiki materiallardan ibarətdir.

Kitabın III fəsli nisbətlər nəzəriyyəsinə həsr olunub - əsas anlayışlar, verilənlər bazalarında nisbətlər açıqlanıb.

IV fəsildə riyazi məntiqin əsasları şərh edilir - mülahizələr və predikatlar hesabı, proqramlaşdırmada məntiq kimi suallar cavablandırılıb.

Dərsliyin V fəsli alqoritmlər nəzəriyyəsinə həsr edilib.

VI fəsildə sonlu avtomatlar nəzəriyyəsinə dair müfəssəl məlumat verilir.

VII fəsil informasiya nəzəriyyəsinin elementlərinə həsr olunub.

Dərsliyin VIII fəsli qraflar haqqında əsas məlumatlardan ibarətdir.

IX fəsildə kompyuter elminin kibernetik aspektləri açıqlanır.

X fəsil kompyuterin hesabi əsaslarına həsr olunmuşdur - say sistemləri, verilənlərin təsvir formaları, ədədlərin xüsusi kodlaşdırılmasına baxılır.

XI fəsil sistemli analiz və modelləşdirməyə dair geniş məlumatdan ibarətdir. Bu da "Sistem və proseslərin modelləşdirilməsi", "Sistem və istehsalatın modelləşdirilməsi" "Sistemli analiz və əməliyyatların tədqiqi" kimi fənlərin tədrisi üçün dəyərli vəsait ola bilər.

Dərsliyin materialının asan mənimsənilməsi üçün çoxlu illüstrasiya materialları və misallar verilmişdir.

Müəlliflər kitaba rəy vermiş AMEA-nın müxbir üzvü R.Əliquliyevə, professor Ə.Əliyevə və kitabın kompyuter tərtibatında böyük əməyi olán S.Rəhimovaya səmimi minnətdarlıqlarını bildirirlər.

FƏSİL 1. ÇOXLUQLAR NƏZƏRİYYƏSİ

1.1. Çoxluq anlayışı

Çoxluq ilkin riyazi anlayışlardan biridir. Odur ki, ona məntiqi tərif verilmir. Alman riyaziyyatçısı Kantora görə: çoxluq dedikdə vahid tam halında birləşmiş çox şey başa düşülür. Çoxluq sözünün sinonimi olaraq işlədilən "elementlər yığımı", "küllü", "toplu" kimi söz və söz birləşmələrini onunla əvəz etmək çətindir. Bu anlayışın özünəməxsus xüsusi məna çalarları vardır.

Çoxluğu təşkil edən ünsürlərə onun *elementləri* deyəcəyik.

Elementlərin sayının sonlu və ya sonsuz olmalarına görə çoxluqlar uyğun olaraq *sonlu* və ya *sonsuz* adlandırılır.

Çoxluq, elementlərinin təqdim edilməsiylə təsvir olunur - verilir. Bu iş iki üsulla aparılır: fiqurlu {,} mötərizələr içərisində çoxluğun bütün elementlərinin vergül işarəsi ilə ayrılmaqla sadalanması yolu ilə və ya çoxluğun elementlərinin hamısına xas olan xarakterik əlamətlərin formallaşdırılmasıyla.

Çoxluqlara aid misallar:

1. Qaraqoyunlu oğuz-türk obasının kəndləri çoxluğu: Y={*Gölkənd*, Cıvıxlı, Çaykənd, Əmirxeyir, Bəryabad, Yanıqpəyə, Qaraqaya, Salah, Polad, Murteyil, Alaçıqqaya, Vurğun};

2. Oyun kartının mastlarının simvolları yığımı çoxluğu: {♠,♣,♥,♦};

3. Simvollar cütü: {☺,☻};

4. R - tam ədədlər çoxluğu və s.

Çoxluqları böyük, onun elementlərini isə kiçik hərflər ilə işarə edəcəyik.

"a elementi *A* çoxluğuna aiddir (və ya daxildir)" fikri simvolik olaraq "$a \in A$" və ya "$A \ni a$" kimi yazılır. "$a \notin A$"

yazılışı isə "a elementi A çoxluğuna daxil deyil" fikrini ifadə edir.

Əgər A çoxluğunun bütün elementləri B çoxluğuna aiddirsə ($A=B$ halı da istisna deyil), onda A çoxluğu B çoxluğunun altçoxluğu adlanır və $A\subset B$ (və ya $B\supset A$) kimi işarə olunur.

$A=B$ yazılışı aşağıdakı münasibətlərin ödənilməsi ilə eynigüclüdür: $A\subset B$ və $B\supset A$. İki çoxluğun bərabərliyi ($A=B$) eyniliklə bərabərlik kimi başa düşülür; həmin $A=B$ yazılışı onu bildirir ki, A çoxluğunun hər bir elementi B –yə daxildir və tərsinə - B çoxluğunun hər bir elementi A –ya daxildir.

Heç bir elementi olmayan çoxluq "Ø" kimi işarə olunur və o, boş çoxluq adlanır.

Boş çoxluq istənilən çoxluğun altçoxluğudur.

Çoxluğun özündən və boş çoxluqdan başqa digər altçoxluqları onun məxsusi altçoxluqları adlanır.

Əgər $A\subset B$ və $A\neq B$ (eyni zamanda, aşkardır ki, $A\neq \emptyset$) isə, onda A-ya B-nin məxsusi altçoxluğu deyirlər.

Məxsusi altçoxluq("A çoxluğu B-nin məxsusi altçoxluğudur" fikri) simvolik olaraq, aşağıdakı kimi yazılır:

$A\subseteq B$ və yaxud $B\supseteq A$.

Bəzən bu simvollar($\subset$ və $\subseteq$) adi altçoxluq və məxsusi altçoxluqların işarələnməsi baxımından tərsinə də işlədilir.

Verilmiş A çoxluğunun bütün altçoxluqları ailəsini P(A) ilə işarə edək. P(A) –ya A çoxluğunun dərəcəsi deyilir:

$P(A)=\{B:B\subseteq A\}$.

Nəzərə alsaq ki, $\emptyset\subseteq A$ və $A\subseteq A$, onda $\emptyset\in P(A)$ və $A\in P(A)$.

Bütün bunlarla yanaşı, çoxluqlar üzərində bir sıra əməllər mövcuddur.

1.2. Çoxluqlar üzərində əməllər

Çoxluqlar üzərində aşağıdakı əməlləri şərh edək.

Birləşmə əməli. Tutaq ki, A və B – ixtiyari 2 çoxluqdur; A və B çoxluqlarından heç olmasa birinə daxil olan elementlərdən ibarət olan $C=A\cup B$ çoxluğu onların birləşməsi adlanır.

Birləşmə əməlini riyazi simvolikalardan istifadə edərək, belə yaza bilərik:

$$A\cup B=\{\, x \mid x\in A\vee x\in B\,\},$$

burada $\vee$ simnolu "və ya" bağlayıcısının işarəsidir.

Analoji olaraq: istənilən sayda çoxluğun cəmi və ya birləşməsi təyin edilir: İstənilən (sonlu və ya sonsuz) sayda çoxluğun cəmi və ya birləşməsi - $\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ - elə çoxluğa deyilir ki, ona daxil olan hər bir element verilən çoxluqlardan heç olmasa, birinə daxil olsun. Bunu simvolik olaraq, aşağıdakı kimi yazmaq münasibdir:

$$\bigcup_{i\in I} A_i=\{\, x \mid \text{elə } i_0\in I \text{ var ki, } x\in A_{i_0}\,\}.$$

Kəsişmə əməli. A və B çoxluqlarının hər birinə daxil olan elementlərdən ibarət olan $C=A\cap B$ çoxluğu onların kəsişməsi adlanır.

Kəsişmə əməlini riyazi simvolikadan istifadə edərək, belə yaza bilərik:

$$A\cap B=\{\, x \mid x\in A\wedge x\in B\,\},$$

burada $\wedge$ simnolu "və " bağlayıcısının işarəsidir.

Analoji olaraq: istənilən sayda A_α çoxluqlarının kəsişməsi (hasili) – $\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ - bu çoxluqların hər birinə aid olan elementlərin küllüsündən ibarət olan çoxluğa deyilir. Bunu simvolik olaraq, aşağıdakı kimi yazmaq olar:

$$\bigcap_{i\in I} A_i=\{\, x \mid \text{bütün } i_0\in I \text{ üçün } x\in A_{i_0}\,\}.$$

Çoxluqların birləşməsi və kəsişməsi kommutativlik (yerdəyişmə qanunu), assosiativlik (birləşmə qanunu), qarşılıqlı distributivlik (paylama qanunu) xassələrinə malikdir:

kommutativlik: $A \cup B = B \cup A$,

$A \cap B = B \cap C$;

assosiativlik: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

distributivlik: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Bunlardan əlavə, aşağıdakı münasibətlər də doğrudur:

$$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A;$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset;$$
$$A \cup A = A;$$
$$A \cap A = A.$$

Çoxluqlar nəzəriyyəsində bu və ya digər düsturların iki isbat metodu var: birincisi – Eyler və ya Venn diaqramları vasitəsilə, ikincisi -məntiqi mühakimə üsulu ilə.

Birinci üsulla isbat zamanı bərabərlik işarəsindən sağda və solda yerləşən ifadələrin təyin etdiyi çoxluqlar üçün ayrı-ayrılıqda Eyler və ya Venn diaqramları qurulur. Həmin diaqramların təyin etdikləri oblastlar eyni olduqda bərabərliyin doğruluğu isbat edilmiş hesab olunur.

İkinci qayda - məntiqi mühakimə üsulu - ilə isbat bərabərlik işarəsindən sağda və ya solda yerləşən ifadələrin təyin etdikləri çoxluqlara aid edilən ixtiriyari elementin digər tərəfə də aid olduğu nəticəsinə gəlmək yolu ilə aparılır. Daha dəqiq desək, istənilən elementin bir tərəfə (ya sağ, ya da sol) aidliyindən bərabərliyin digər tərəfinə də daxil olması (həm sağ, həm də sol istinadlar üçün) isbat edilə bildikdə həmin bərabərliyin doğruluğu nəticəsinə gəlinir. Proses, aydındır ki, sağ və sol tərəflərin hər biri üçün ayrı-ayrılıqda istinadlar kimi qəbul edilmələri hallarına müvafiq olaraq, iki dəfə yerinə yetirilir.

Çıxma əməli. A çoxluğunun B çoxluğuna aid olmayan elementləri küllüsünə A və B çoxluqlarının fərqi deyilir; simvolik olaraq $C = A \setminus B$ kimi işarə və təyin edilir. Bu zaman, ümumiyyətlə desək, $A \supset B$ fərz olunmur. Çıxma əməlini(A və B çoxluqlarının fərqini) riyazi simvolikadan istifadə edərək, belə yaza bilərik:

$$A \setminus B = \{\, x \mid x \in A \wedge x \notin B \,\}.$$

Bəzən (məsələn, ölçmə nəzəriyyəsində) çoxluqların simmetrik fərqindən istifadə etmək daha əlverişli olur.

Çoxluqların simmetrik fərqi əməli. Çoxluqların simmetrik fərqi əməli aşağıdakı kimi işarə və təyin olunur:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Yəni, iki çoxluğun simmetrik fərqi onların bir-birlərindən fərqlərinin birləşməsinə bərabərdir.

Çoxluqların simmetrik fərqini aşağıdakı kimi də hesablamaq olar:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Axırıncı düsturu sözlə ifadə edək: iki çoxluğun simmetrik fərqi onların birləşmələri ilə kəsişmələrinin fərqinə bərabərdir.

Tamamlayıcı çoxluq. Tutaq ki, S universal çoxluqdur. Qeyd edək ki, hər bir çoxluq müəyyən S universal çoxluğunun altçoxluğudur. Yəni, universal çoxluq baxılan məsələdə iştirak edən çoxluqların hamısının malik olduqları elementlərin hamısını özündə cəmləşdirir.

$A \subset S$ olduqda $S \setminus A$ fərqinə A çoxluğunun S – ə *tamamlayıcısı* deyilir. Tamamlayıcı çoxluq aşağıdakı kimi işarə və təyin olunur:

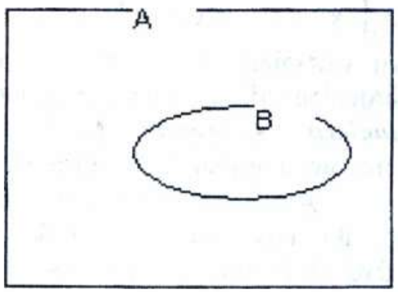
$$A' = S \setminus A \quad \text{və yaxud} \quad C_s A = S \setminus A.$$

Çoxluqlar üzərində əməlləri, eləcə də onlar arasındakı münasibətləri, Eyler-Venn diaqramlarının köməyi ilə əyani olaraq təsvir etmək əlverişlidir.

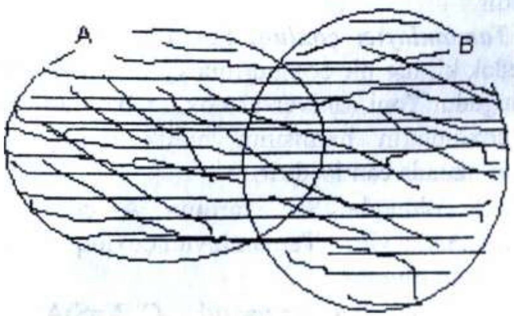
Şəkil 1.1. -də $B \subset A$ (altçoxluq) münasibəti, şəkil 1.2. ÷ 1.6. -nın ştrixlənmiş sahələrində isə uyğun olaraq, $A \cup B$

(birləşmə), $A \cap B$ (kəsişmə), $A \setminus B$ (fərq - cıxma), $A \Delta B$ (simmetrik fərq) və $C_s A$ (tamamlayıcı çoxluq) təsvir olunur. Şəkil 1.7-dəki ştrixlənmiş sahə isə $A \cap (B \cup C)$ münasibəti ilə təyin edilən çoxluğa uyğundur.

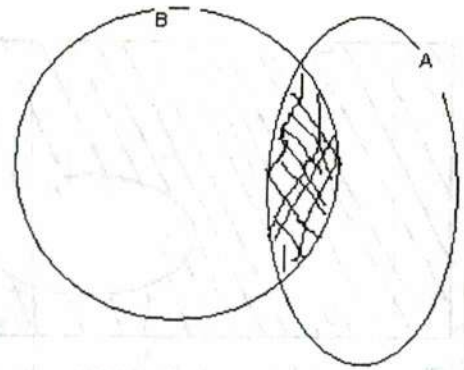
İndi həmin diaramları quraq.



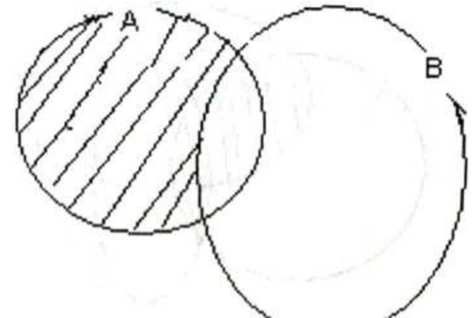
Şəkil 1.1. $B \subset A$ (altçoxluq) münasibətinin diaqramı



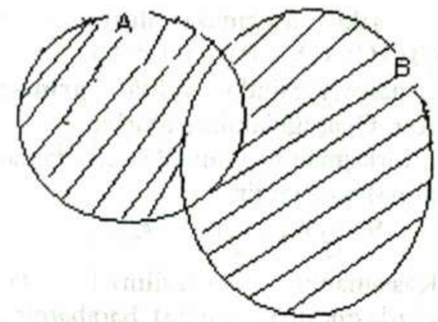
Şəkil 1.2. $A \cup B$ (birləşmə əməli) münasibətinin diaqramı



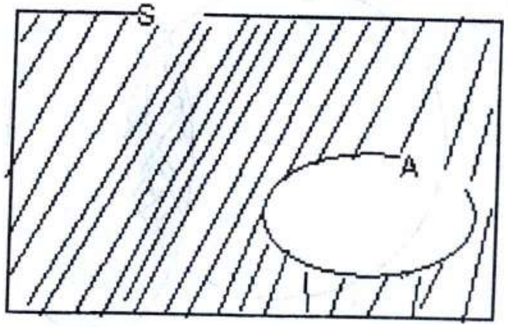
Şəkil 1.3. $A \cap B$ (kəsişmə əməli) münasibətinin diaqramı



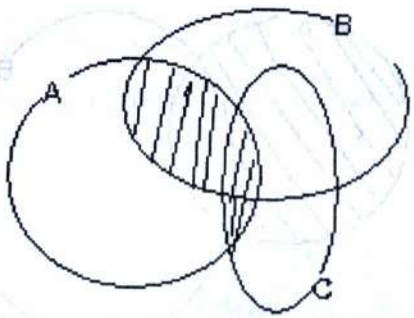
Şəkil 1.4. $A \setminus B$ (cıxma əməli) münasibətinin diaqramı



Şəkil 1.5. $A \Delta B$ (simmetrik fərq) münasibətinin diaqramı



Şəkil 1.6. S\A (tamamlayıcı çoxluq) münasibətinin diaqramı



Şəkil 1.7. $A \cap (B \cup C)$ münasibətinin diaqramı

Sonuncu şəkil aşağıdakı düsturun doğruluğunu təsdiqləylr: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Çoxluqlar nəzəriyyəsində **ikilik prinsipi** mühüm əhəmiyyət kəsb edir. O, aşağıdakılara əsaslanır:

1. Cəmin (birləşmənin) tamamlayıcısı tamamlayıcıların kəsişməsinə (hasilinə) bərabərdir:

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_\alpha = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_\alpha)$$

2. Kəsişmənin (hasilin) tamamlayıcısı tamamlayıcıların birləşməsinə (cəminə) bərabərdir:

$$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_\alpha = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_\alpha)$$

İkilik prinsipinin məğzi ondan ibarətdir ki, qeyd olunmuş S çoxluğunun altçoxluqları sisteminə aid istənilən bərabərlikdən bütün baxılan çoxluqları onların tamamlayıcıları, çoxluqların birləşmələrini kəsişmələri, çoxluqların kəsişmələrini isə birləşmələriylə əvəz etmək yolu ilə tam avtomatik surətdə başqa (ikilik) bərabərlik alına bilər.

İki sonlu çoxluq öz elementlərinin sayına görə müqayisə oluna bilər. Başqa cür ifadə etsək: iki sonlu çoxluq arasındakı inikas biyeksiyadırsa (yəni, hər iki çoxluğun elementlərinin qarşılıqlı birqiymətli uyğuluq münasibəti mövcuddursa), onda onları müqayisə etmək olar.

İndi isə çoxluqlar üzərində əməllərə dair bir sıra tapşırığın həllini nəzərdən keçirək[3].

Tapşırıq 1.1. Tutaq ki, $U = \{1,2,4,5\}$; $X = \{1,5\}$; $Y = \{1,2,4\}$; $Z = \{2,5\}$. Aşağıdakıları təyin etməli:

a) $X \cap Y'$;
b) $(X \cap Z) \cup Y'$;
c) $X \cup (Y \cap Z)$;
d) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;
e) $(X \cup Y)'$;
f) $X' \cap Y'$;
g) $(X \cap Y)'$;
h) $(X \cup Y) \cup Z$;
i) $X \cup (Y \cup Z)$;
j) $X \setminus Z$;
k) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$.

Həlli:

a) $Y' = \cup \setminus Y$; $Y' = \{5\}$;
$X \cap Y' = \{5\}$;
b) $Y' = U \setminus Y$; $Y' = \{5\}$; $X \cap Z = \{5\}$;
$(X \cap Z) \cup Y' = \{5\}$;
c) $Y \cap Z = \{2\}$;

$X \cup (Y \cap Z) = \{1,2,5\};$

d) $X \cup Y = \{1,2,4,5\}; X \cup Z = \{1,2,5\};$

$(X \cup Y) \cap (X \cup Z) = \{1,2,5\};$

e) $X \cup Y = \{1,2,4,5\};$

$(X \cup Y)' = \varnothing;$

f) $X' = \{2,4\};\ Y' = \{5\};$

$X' \cap Y' = \varnothing;$

g) $X \cap Y = \{1\};$

$(X \cap Y)' = \{2,4,5\};$

h) $X \cup Y = \{1,2,4,5\};$

$(X \cup Y) \cup Z = \{1,2,4,5\};$

i) $Y \cup Z = \{1,2,4,5\};$

$X \cup (Y \cup Z) = \{1,2,4,5\};$

j) $X \setminus Z = \{1\};$

k) $X \setminus Z = \{1\}; Y \setminus Z = \{1,4\};$

$(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z) = \{1,4\}.$

Tapşırıq 1.2. Tutaq ki, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$; $A = \{a, b, c\}$; $B = \{f, e, c, a\}$; $C = \{d, e, f\}$. Aşağıdakı çoxluqları təyin etməli:

a) $A \setminus C$;
b) $B \setminus C$;
c) $C \setminus B$;
d) $A \setminus B$;
e) $A' \cup B$;
f) $B \cap A'$;
g) $A \cap C$;
h) $C \cap A$;
i) $C \Delta A$.

Həlli:

a) $A \setminus C = \{a, b, c\};$
b) $B \setminus C = \{c, a\};$
c) $C \setminus B = \{d\};$
d) $A \setminus B = \{b\};$

e) $A' = \{d, e, f\};$

$A' \cup B = \{a, c, d, e, f\};$

f) $A' = \{d, e, f\};$

$B \cap A' = \{e, f\};$

g) $A \cap C = \varnothing;$

h) $C \cap A = \varnothing;$

i) $A \setminus C = \{a, b, c\}; C \setminus A = \{d, e, f\};$

$C \Delta A = (A \setminus C) \cup (C \setminus A) = \{a, b, c, d, e, f\}.$

Tapşırıq 1.3. $A \cap B = \varnothing$ şərtini ödəyən iki ixtiyari A və B çoxluqları verilmişdir. $A \setminus B$ və $B \setminus A$ çoxluqları nəyi təyin edirlər?

Həlli:

$A \cap B = \varnothing$ şərtinə görə $A \setminus B$ və $B \setminus A$ çoxluqları uyğun olaraq, A və B çoxluqlarını təyin edirlər:

$A \setminus B = A$; $B \setminus A = B.$

Tapşırıq 1.4. $C \cap D' = \varnothing$ şərtini ödəyən iki ixtiyari C və D çoxluqları verilmişdir. $C \cap D$ və $C \cup D$ çoxluqları nəyi təyin edirlər?

Həlli:

$D \cap D' = \varnothing$; $D \cap D' = C \cap D'$; $D = C$ olduğundan, alırıq: $C \cap D = D = C$ və $C \cup D = D = C$.

Tapşırıq 1.5. İxtiyari X çoxluğu verilmişdir. Aşağıdakıları təyin etməlı:

a) $X \cap X'$;
b) $X \cup X'$;
c) $X \setminus X'$.

Həlli:

a) $X' = U \setminus X;$

$X \cap X' = \varnothing;$

b) $X' = U \setminus X;$

$U = X \cup X';$

c) $X \setminus X' = X$.

Tapşırıq 1.6. Aşağıdakı təkliflərdən hansılar doğrudur:

a) $0 \in \varnothing$;

b) $\varnothing = \{0\}$;

c) $|\{\varnothing\}| = 1$;

d) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$;

e) $|\{\{\varnothing\}\}| = 2$?

Həlli:

c) $|\{\varnothing\}| = 1$ və d) $\{\{\varnothing\}\} \in \{\{\{\varnothing\}\}\}$ doğrudur.

Tapşırıq 1.7. Aşağıdakı çoxluqları Eyler-Venn diaqramları vasitəsi ilə təsvir etməli:

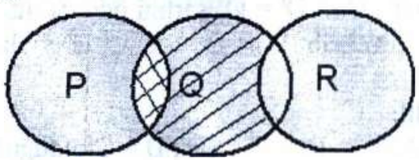
a) $(P \cup R \cup Q) \setminus (P \cup (Q \setminus R))$;

b) $((E \setminus F) \cup (F \setminus E)B)' \cup G$;

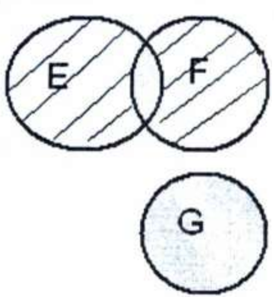
c) $(J \cap (K \cup L))' \cup (H \setminus L)$.

Həlli:

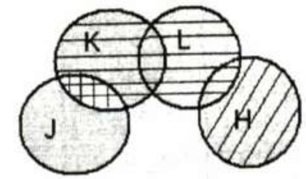
a)



b)



c)



Tapşırıq 1.8. Çoxluqlar üzərində əməllərin təriflərindən istifadə etməklə aşağıdakı eynilikləri isbat etməli:

1.8.1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

1.8.2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

1.8.3. $(A \cap B) \cup (C \cap D) =$
$=(A \cup C) \cap (B \cup C) \cap (A \cup D) \cap (B \cup D)$.

1.8.1. – in həlli:

a) $n \in A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n \in B \cup C \\ n \in A \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} n \in B \\ n \in C \end{array}\right. \\ n \in A \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} n \in B \\ n \in A \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} n \in C \\ n \in A \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n \in (A \cap B) \\ n \in (A \cap C) \end{array}\right. \Rightarrow n \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

б) $n \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n \in (A \cap B) \\ n \in (A \cap C) \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} n \in B \\ n \in A \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} n \in C \\ n \in A \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} n \in B \\ n \in C \end{array}\right. \\ n \in A \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n \in B \cup C \\ n \in A \end{array}\right. \Rightarrow n \in A \cap (B \cup C)$

1.8.2. –nin həlli:

а)

$$n\in A\cup(B\cap C) \Leftrightarrow \begin{cases} n\in B\cap C \\ n\in A\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} n\in B\\ n\in C\end{array}\right. \\ n\in A\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n\in B\\ n\in A\end{cases}\\ \begin{cases}n\in C\\ n\in A\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n\in A\cup B\\ n\in A\cup C\end{array}\right. \Rightarrow n\in (A\cup B)\cap(A\cup C)$$

б)

$$n\in (A\cup B)\cap(A\cup C) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n\in A\cup B\\ n\in A\cup C\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n\in B\\ n\in A\end{cases}\\ \begin{cases}n\in C\\ n\in A\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} n\in B\\ n\in C\end{array}\right. \\ n\in A\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n\in B\cap C \\ n\in A\end{cases} \Rightarrow n\in A\cup(B\cap C)$$

1.8.3. – ün həlli:

а)

$$n\in (A\cap B)\cup(C\cap D) \Leftrightarrow \begin{cases} n\in A\cap B\\ n\in C\cap D\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n\in A\\ n\in C\end{cases}\\ \begin{cases}n\in A\\ n\in D\end{cases}\\ \begin{cases}n\in B\\ n\in C\end{cases}\\ \begin{cases}n\in B\\ n\in D\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow n\in (A\cup C)\cap(B\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D)$$

б)

$$n\in (A\cup C)\cap(B\cup C)\cap(A\cup D)\cap(B\cup D) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}n\in A\\ n\in C\end{cases}\\ \begin{cases}n\in A\\ n\in D\end{cases}\\ \begin{cases}n\in B\\ n\in C\end{cases}\\ \begin{cases}n\in B\\ n\in D\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} n\in A\cap B\\ n\in C\cap D\end{cases} \Leftrightarrow$$

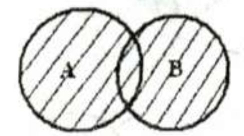
$$\Rightarrow n\in (A\cap B)\cup(C\cap D)$$

Tapşırıq 1.9. Eyler-Venn diaqramlarından istifadə etməklə aşağıdakı eynilikləri isbat etməli:

1.9.1. $(A\cup B)' = A'\cap B'$;
1.9.2. $A\backslash(B\cap C) = (A\backslash B)\cup(A\backslash C)$;
1.9.3. $A\cap(B\backslash C) = (A\cap B)\backslash(A\cap C)$;
1.9.4. $A\backslash(B\cup C) = (A\backslash B)\backslash C$;
1.9.5. $A\Delta(B\Delta C) = (A\Delta B)\Delta C$;
1.9.6. $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$.

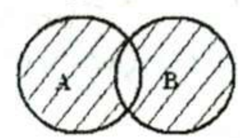
1.9.1. -in həlli:

$A\cup B$



$(A\cup B)' = \emptyset$

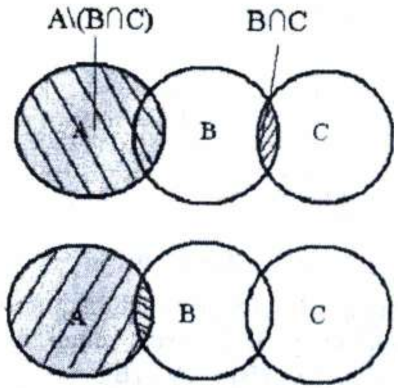
A' B'



$A'\cap B' = \emptyset$

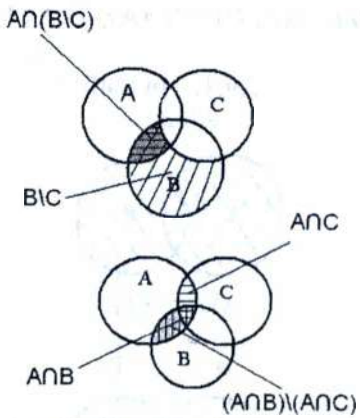
$(A\cup B)' = A'\cap B'$

1.9.2. -nin həlli:



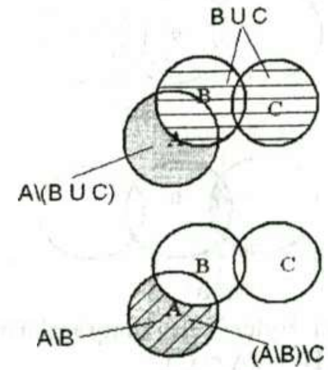
$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

1.9.3. -ün həlli:



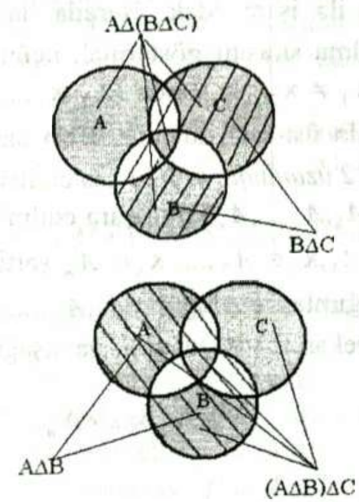
$A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$

1.9.4 -ün həlli:



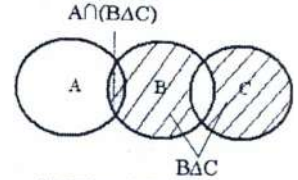
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$

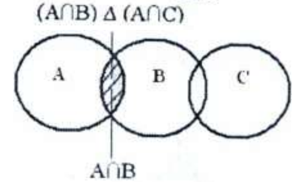
1.9.5 -in həlli:



Göründüyü kimi: $A\Delta(B\Delta S) = (A\Delta B)\Delta S$.

1.9.6 -nın həlli:





Təsvir olunan Eyler-Venn diaqramlarından alırıq:
$A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\ \Delta\ (A\cap C)$.

1.3. Çoxluqların Dekart hasili

n elementdən ibarət $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ardıcıllığını $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ilə işarə edək. Burada dairəvi mötərizələr elementlərin yazılma sırasını göstərmək üçün istifadə olunur. Məsələn, əgər $x_1 \neq x_2$ isə, onda $(x_2, x_1, \ldots, x_n)$ ardıcıllığı $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ilə üst-üstə düşmür. Belə sıranı *n uzunluqlu yığım* adlandıraq; *2 uzunluqlu yığımı* isə cütlük adlandıraq.

Tutaq ki, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ kimi işarə edilmiş n dənə çoxluq verilmişdir. $x_1\in A_1, x_2\in A_2, \ldots, x_n\in A_n$ şərtini ödəyən bütün $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yığımları çoxluğuna $A_1, A_2, \ldots, A_n$ çoxluqlarının birbaşa və ya Dekart hasili deyilir və aşağıdakı kimi işarə olunur:

$$A_1\times A_2\times\ldots\times A_n.$$

Digər işarələmədən istifadə etməklə $A_1, A_2, \ldots, A_n$ çoxluqlarının Dekart hasilini qısa şəkildə aşağıdakı kimi də yazmaq olar: $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

Misal 1.10. Tutaq ki, $X=\{0,1\}$, $Y=\{x,y\}$.

Onda, alarıq: $X\times Y=\{(0,x),(0,y),(1,x),(1,y)\}$,
$Y\times X=\{(x,0),(x,1),(y,0),(y,1)\}$.

Deməli, $X\times Y \neq Y\times X$.

Çox zaman eyni çoxluqların düz hasilindən istifadə edirlər. Bu halda $A\times A\times\ldots\times A$ (vuruqların sayı n -ə bərabərdir) əvəzinə A^n işarələməsi götürülür.

1.4. İnikas. Siniflərə bölmə

Əgər M çoxluğundan olan hər bir a elementinə N çoxluğundan müəyyən f qaydası ilə bir və ancaq bir b elementi uyğun olaraq qarşı qoyulursa, onda bu uyğunluq "funksiya" adlanır. Burada M - verilən funksiyanın təyin olunma oblastı, N isə - qiymətləri çoxluğu (dəyişmə oblastı) adlanır.

Başqa sözlə desək, bir çoxluq digərinə inikas olunur. Odur ki, "funksiya" anlayışı "inikas" anlayışıyla əvəz oluna biləndir.

f qaydası ilə M-dən N- ə inikas ("funksiya") f: $M\to N$ kimi işarə olunur.

f inikası zamanı $a\in M$ -ə qarşı (uyğun) qoyulan $b=f(a)$ elementi ($b\in N$) a-nın obrazı (surəti), a isə b-nin proobrazı (örnəyi) adlanır və $a=f^{-1}(b)$ ilə işarə edilir.

Əgər $f(M)=N$ olarsa, onda f M-in N-ə inikası adlanır; belə inikas həmçinin syuryeksiya adlanır.

$f(M)\subset N$ olduqda isə, f -ə M-in N-də inikası deyilir.

Əgər ixtiyari $x_1 \neq x_2 \in M$ üçün onların obrazları $u_1 = f(x_1)$ və $u_2 = f(x_2)$ də müxtəlif olarlarsa ($u_1 \neq u_2$), onda f inikası inyeksiya adlanır.

f: $M \to N$ inikası eyni zamanda syuryeksiya və inyeksiyadırsa onda o, biyeksiya və ya M və N arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq(yəni, biyektiv inikas) adlanır.

İnikasın əsas xassələrini şərh edək. Bu xassələri teoremlərlə(isbatsız) verək.

Teorem 1. İki çoxluğun cəminin (birləşməsinin) proobrazı onların proobrazlarının cəminə bərabərdir:

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Teorem 2. İki çoxluğun kəsişməsinin proobrazı onların proobrazlarının kəsişməsinə bərabərdir:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Teorem 3. İki çoxluğun birləşməsinin obrazı onların obrazlarının birləşməsinə bərabərdir:

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Lakin, iki çoxluğun kəsişməsinin obrazı isə onların obrazlarının kəsişməsinə bərabər olmaya da bilər. Məsələn, tutaq ki, baxılan inikas müstəvinin x oxuna proyeksiyalanmasıdır. Onda aşağıdakı parçalar kəsişmirlər, lakin, eyni zamanda, onların obrazları üst-üstə düşür:

$$0 \leq x \leq 1,\ y=0,$$
$$0 \leq x \leq 1,\ y=1.$$

İsbat etmək olar ki, tamamlayıcının proobrazı proobrazın tamamlayıcısına bərabərdir.

Çoxluqları elementlərinin müəyyən əlamətlərinə görə *siniflərə bölmək* olar. Tutaq ki, *M* - hər hansı çoxluqdur və onun bir sıra elementləri *(a,b)* cütü "nişanlanmışdır". Əgər *(a,b)* cütü "nişanlanmışdırsa", onda *a* elementi φ münasibətilə *b* elementi ilə əlaqədadır, - deyəcəyik: $a \varphi b$. Bu φ münasibəti aşağıdakı xassələri ödədikdə *ekvivalentlik münasibəti* adlanır:

1. Refleksivlik: $a \varphi a$ (ixtiyari $a \in M$ üçün).

2. Simmetriklik: əgər $a \varphi b$ isə, onda $b \varphi a$ (ixtiyari $a,b \in M$ üçün).

3. Tranzitivlik: əgər $a \varphi b$ və $b \varphi c$ isə, onda $a \varphi c$ (ixtiyari $a,b,c \in M$ üçün).

Bu şərtlər M çoxluğunun φ münasibəti (əlaməti) vasitəsilə siniflərə bölünməsi üçün zəruri və kafidir.

Ekvivalentlik anlayışı daha geniş anlayış olan

$$a \varphi b \in M \times M = M^2$$

binar münasibətinin xüsusi halıdır və o da yuxarıdakı üç xassəni ödəyir.

1.5. Hesabi çoxluqlar

Sonsuz çoxluqlardan ən sadəsi natural ədədlər (*N*) çoxluğudur.

Bütün natural ədədlər çoxluğu ilə biyektiv yolla elementləri qarşı qoyulan çoxluğa hesabi çoxluq deyəcəyik. Yəni, *N* natural ədədlər sırası ilə ekvivalent(eynigüclü, eyni sayda elementə malik) olan çoxluq hesabi adlanır.

Tutaq ki, A və B iki ixtiyari çoxluqdur. Əgər A çoxluğunun hər bir elementinə qarşı B çoxluğunun ancaq bir elementini və tərsinə - B çoxluğunun hər bir elementinə A çoxluğunun ancaq bir elementini qarşı qoyan inikas(funksiya) mövcud olarsa, onda həmin inikas qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq adlanır. Yəni, həmin inikasa biyeksiya deyirlər.

Başqa sözlə ifadə etsək, hesabi çoxluq dedikdə elementləri sonsuz çoxluğun elementləriylə nömrələnə bilən çoxluq başa düşülür.

Hesabi çoxluğun xassələri (isbatsız verilir):

1. Hesabi çoxluğun hər hansı altçoxluğu ya sonlu, ya da hesabi çoxluqdur.
2. İstənilən sonsuz çoxluq hesabi altçoxluğa malikdir.
3. İstənilən sonlu sayda hesabi çoxluqların birləşməsi də hesabi çoxluqdur.

4. Hesabi sayda hesabi çoxluqların birləşməsi də hesabi çoxluqdur.

Üçüncü xassə onu göstərir ki, hesabi çoxluqlar sonsuz çoxluqların sırasında "ən kiçikləridir".

Hesabi çoxluğa aid misallara baxaq.

1. Bütün tam ədədlər çoxluğu. Bütün tam ədədlər və bütün natural ədədlər arasındakı uyğunluğu aşağıdakı kimi yaratmaq olar($n \in N$):

$$\begin{matrix} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots \end{matrix}$$

Yəni, $n \geq 0$ ədədinə $(2n+1)$ tək ədədini, $n<0$ ədədinə isə $2|n|$ cüt ədədini aşağıdakı kimi qarşı qoymaq($\leftrightarrow$) olar:

$n \leftrightarrow 2n+1$, $n \geq 0$ olduqda,

$n \leftrightarrow 2|n|$, $n<0$ olduqda.

2. Bütün müsbət cüt ədədlər çoxluğu. Bu uyğunluğu aşağıdakı kimi yaratmaq olar: $n \leftrightarrow 2n$.

3. Bütün rasional ədədlər çoxluğu.

Məlum olduğu kimi, rasional ədədlər çoxluğu $\frac{p}{q}(p \in Z, q \in N)$ şəklində təsvir edilir. Burada, Z – tam ədədlər çoxluğu, N – natural ədədlər çoxluğudur.

R_- ilə mənfi rasional ədədlər çoxluğunu, R_+ ilə müsbət rasional ədədlər çoxluğunu işarə edək.

Əvvəlcə p və q-nün hər ikisinin rasional ədədlər çoxluğundan olduğu hala baxaq. Bu halda, aşkardır ki, inikas biyektivdir; yəni, $\frac{p}{q}$ şəkilli kəsrlər çoxluğu hesabidir. Həmin çoxluqdan ixtisar olunan kəsrləri kənarlaşdırdıqdan sonra alınan R_+ çoxluğu da hesabi çoxluq olacaqdır. Çünki, hesabi çoxluğun sonlu və ya sonsuz çoxluqla fərqi də hesabidir. Digər tərəfdən, $R_- \sim R_+$ olduğundan, R_- çoxluğunun da hesabiliyi aşkarlanır. Bundan əlavə, rasional ədədlər çoxluğunun

$R = R_- \cup \{0\} \cup R_+$ kimi təyin ediləbilənliyindən, R - hesabi çoxluq olacaqdır.

4. *2 ədədinin qüvvətləri çoxluğu: $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$* . Bu uyğunluğu(qarşıqoymanı) aşağıdakı kimi yaratmaq olar: $2^n \leftrightarrow n$.

Hesabi olmayan sonsuz çoxluq qeyri-hesabi çoxluq adlanır.

1.6. Çoxluqların gücü

Tərif. İki M və N çoxluğu onların elementləri arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq olduqda ekvivalent adlanırlar ($M \sim N$ kimi işarə olunur). Odur ki, hesabi çoxluğa natural ədədlər çoxluğuna ekvivalent çoxluq kimi də tərif vermək olar.

Teorem. [0; 1] parçasına daxil olan həqiqi ədədlər çoxluğu qeyri- hesabidir.

Çoxluqların ekvivalentliyinə dair isbatsız olaraq aşağıdakı teoremi verək.

Kantor – Bernşteyn teoremi.

Tutaq ki, A və B iki ixtiyari çoxluqdur. Əgər A çoxluğunun B çoxluğunun B_1 altçoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli f uyğunluğu və B çoxluğunun A çoxluğunun A_1 altçoxluğuna qarşılıqlı birqiymətli g uyğunluğu mövcuddursa, onda A və B çoxluqları ekvivalentdir.

[0; 1] parçasındakı həqiqi ədədlər çoxluğuna ekvivalent çoxluğun gücü kontinuumdur, - deyirlər.

A çoxluğunun güçünü m(A) ilə işarə edək.

İxtiyari A və B çoxluqları üçün: ya m (A) = m (B), ya m(A) > m (B), yaxud da m(A) < m(B).

A çoxluğunun elementləri sayını n(A) kimi işarə edək.

Əgər $A \cap B = \emptyset$ isə, onda $A \cup B$ çoxlugunun elementlərinin sayı aşagıdakı kimi təyin olunur:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B).$$

Bu qayda istənilən cüt-cüt kəsişməyən sonlu sayda olan sonlu çoxluqların birləşmələrinin elementləri sayının tapılmasına da şamil edilir.

Ekvivalent çoxluqların elementlərinin sayları bərabərdir.

Tutaq ki, A və B ixtiyari iki sonlu çoxluqdur. Onda onların birləşməsinin elementləri sayı aşağıdakı düsturla hesablanılır:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

1.7. Nizamlanan çoxluqlar

Tutaq ki, M ixtiyari çoxluqdur və φ həmin çoxluqda hər hansı binar münasibətdir:

$R_\varphi \subset MxM$, yəni $a \varphi b$, $(a,b) \in R_\varphi$, (1.1)

(1.1) münasibəti aşağıdakı şərtləri ödədikdə M çoxluğu hissə-hissə nizamlanan adlanır:

- refleksivlik: $a \varphi a$;
- tranzitivlik: əgər $a \varphi b$ və $b \varphi c$ isə, onda $a \varphi c$;
- antisimmetriklik: əgər $a \varphi b$ və $b \varphi a$ isə, onda $a=b$.

Hissə-hissə nizamlanma "$\leq$" simvolu ilə işarə edilir. Beləliklə, $a \leq b$ yazılışı onu göstərir ki, (a,b) cütü uyğun R_φ çoxluğuna aiddir. Bu zaman a elementi haqda deyirlər ki, o, b-ni aşmır və yaxud o, b-yə tabedir.

Özündə hər hansı hissə-hissə nizamlanma təyin edilmiş çoxluq hissə-hissə nizamlanmış adlanır.

Elementləri və yaxud onların düzülüşü ilə fərqlənən nizamlanan çoxluqlar müxtəlif hesab edilir. A –dan alınan nizamlanan çoxluğa $\vec{A}$ kimi işarələməni qəbul edək.

İsbat edilmişdir ki, (Sermelo) hər bir çoxluq tamamilə nizamlana biləndir.

Çoxluqlar sistemi dedikdə, elementləri çoxluqlardan ibarət olan çoxluq başa düşülür.

Yoxlama tapşırıqları

1.1. Aşağıdakıları Eyler-Venn diaqramları vasitəsilə təyin etməli:

a) $(A \cup B) \setminus (B \cap A)$;
b) $(X \cap Z) \cup Y'$;
c) $X \cup (Y \cap Z)$;
d) $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$;
e) $(X \cup Y)'$;
f) $X' \cap Y'$;
g) $(X \cap Y)'$;
h) $A \cup (B \cup C)$;
i) $(A \cap B) \cap C$;
j) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;
k) $(X \setminus Z) \cup (Y \setminus Z)$;
l) $A' \cup V$;
m) $B \cap A'$;
n) $X \cap X'$;
o) $X \cup X'$;
p) $X \setminus X'$.
q) $X \setminus Y \setminus Z$;
r) $A \Delta B \Delta C$;
s) $A \Delta (B \Delta C)$;
t) $(A \Delta B) \cup (A \cap B)$;
u) $(A \Delta B) \cup (A \cup B)$;

1.2. Aşağıdakı eyniliklərin doğru olub-olmadığını yoxlamalı:

a) $A \cup B = B \cup A$;
b) $A \cap B = B \cap C$;
c) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
d) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
e) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
f) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

g) $(A\cap B)' = A' \cup B'$;
h) $A \setminus (B\cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
i) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
j) $A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$;
k) $(A\setminus B)\setminus C = (A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$;
l) $A\cup B = A\cup (B\setminus A)$;
m) $A'' = A$;
n) $A\cup A' = U$;
o) $A\cap A' = \varnothing$;
p) $(A'\cup B) \cap A = A\cap B$;
q) $(A\cup B) \setminus C = (A\setminus C) \cup (B\setminus C)$;
r) $A\setminus(B\setminus C) = (A\setminus B) \cup (A\cap C)$.

1.3. Eyniliklәri isbat etmәli:
a) $A\Delta B = B\Delta A$;
b) $A\Delta(A\Delta B) = B$;
c) $A\cup B = A\Delta B\Delta(A\cap B)$;
d) $A\setminus B = A\Delta(A\cap B)$;
e) $A\Delta \varnothing = A$;

1.4. Rasional әmsallı bütün çoxhәdlilәr çoxluğunun hesabi olduğunu isbat etmәli.

1.5. Düz xәtt üzәrindәki bütün rasional intervallar (yәni, kәnar nöqtәlәri rasional olan) çoxluğunun hesabiliyini isbat etmәli.

1.6. Müstәvi üzәrindәki bütün rasional koordinantlı nöqtәlәr çoxluğunun hesabi olduğunu isbat etmәli.

1.7. Tamamlayıcının obrazının obrazın tamamlayıcısına bәrabәr olub-olmadığını isbat etmәli.

1.8. $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{a,b,e,f\}$ olduqda $X\times Y$, X^2 vә $Y\times Y$ –i tәyin etmәli.

1.9. İsbat edin ki, istәnilәn iki boş olmayan sonlu X vә Y çoxluğu üçün $X\times Y=Y\times X$ münasibәti ancaq vә ancaq $X=Y$ olduqda doğrudur.

FӘSİL 2. VEKTORLAR VӘ MATRİSLӘR

2.1. Sәtir vә sütun vektorları

Bir sütunda yazılmış әdәdlәr ardıcıllığına *sütun-vektor* deyilir. Sütun-vektorlara misal kimi aşağıdakıları göstәrmәk olar:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\-1\\2\\4\end{pmatrix}.$$

Sütunların ayrı-ayrı elementlәri *vektorun komponentlәri* adlanır. Vektorun komponentlәrinin sayı onun әsas fәrqlәndirici xarakteristikalarından biridir. Yuxarıda qeyd edilmiş vektorlardan birinci vә ikicinin hәrәsi iki komponentә, növbәti ikisinin hәr biri üç komponentә vә axırıncısı isә dörd komponentә malikdir. Ümumi halda n-komponentli sütun vektor (onu, hәmçinin, n-ölçülü vektor adlandıracağıq) belә yazılır:

$$u = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}.$$

Analoji olaraq, bir sәtir şәklindә yazılmış әdәdlәr ardıcıllığına *sәtir-vektor* deyilir. Sәtir-vektorlara misal kimi aşağıdakıları göstәrmәk olar:

(1, 0), (-2, 1), (2, -3, 4, 0), (-1, 2, -3, 4, -5).

Belә sәtrin tәrkibinә daxil olan hәr bir әdәd, sәtir-vektorun komponenti adlanır. Sәtir-vektorun komponentlәrinin sayı onun әsas xarakteristikalarından biri hesab olunur. Yuxarıda göstәrilәn misaldakı vektorların ilk ikisi ikikomponentli vә ya "ikiölçülü", üçüncü - dördkomponentli (dördölçülü) və dördüncü isə beşkomponentli (beşölçülü) sətir-vektor adlanır.

İki sətir-vektor və yaxud sütun-vektor ancaq və ancaq onların uyğun komponentlərinin bərabər olduqları halda bərabər hesab edilir. Beləliklə, əgər

$u=(1,2), v=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, w=(1,2), x=(2,1)$ isə, onda aşkar

görürük ki, u=w, ancaq u≠v və u≠x.

Əgər u və v üçölçülü sütun-vektor isə, onda onların $u+v$ cəmi uyğun komponentlər üzrə toplama vasitəsilə aşağıdakı tərzdə yerinə yetirilir:

$$u+v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1+v_1\\u_2+v_2\\u_3+v_3\end{pmatrix}.$$

Analoji olaraq, iki üçölçülü u və v sətir-vektorlarının cəmini belə təyin edək:

$$u+v=(u_1,u_2,u_3)+(v_1,v_2,v_3)=(u_1+v_1,u_2+v_2,u_3+v_3).$$

Deməli, iki ədəd üçölçülü sütun və ya sətir vektorun cəmi yeni üçölçülü vektoru verir. Məsələn,

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix} \text{ və } (4,-7,12)+(3,14,-14)=(7,7,-2).$$

Analoji tərzdə, uyğun komponentlərin toplanması vasitəsilə iki n-ölçülü sətir və ya sütun vektorun cəmi yenidən n-ölçülü vektor yaradılır.

Qeyd edək ki, vektorların cəmi ancaq komponentlərin sayı bərabər olan ya sətir-vektor, ya da sütun-vektorlar üçün təyin edilir.

Ədədlərin toplanması zamanı onların (toplananların) yerlərinin əhəmiyyət kəsb etmədiyini nəzərə alsaq, onda bunu u

və v sətir və yaxud sütun-vektorları üçün də söyləmək olar: $u+v=v+u$.

Yəni, vektorların toplanması kommutativlik qanununa tabedir. Ədədi misal olaraq, aşağıdakı bərabərliyi yazaq:

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}.$$

Ədədlərdə olduğu kimi, üç və ya daha artıq vektorları da cüt-cüt qruplaşdırmaqla toplamaq olar. Məsələn,

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$(1,0,0)+(0,2,0)+(0,0,3)=(1,2,0)+(0,0,3)=(1,0,0)+(0,2,3)=(1,2,3).$$

Ümumiyyətlə, eyni sayda komponentə malik istənilən sayda vektorun (sətir və ya sütun) cəmi birinci komponenti həmin vektorların birinci komponentlərinin cəminə, ikinci komponenti-ikinci komponentlərinin cəminə və s. bərabər olan vektordur.

u vektorunun a ədədinə hasili u vektorunun hər bir komponentinin a-ya vurulması vasitəsilə yerinə yetirilir. Üçölçülü vektor üçün alarıq:

$$au=a\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}au_1\\au_2\\au_3\end{pmatrix},$$

və ya

$$av=a(v_1,v_2,v_3)=(av_1,av_2,av_3).$$

u vektoru (sətir və ya sütun) n-ölçülü olduqda da, au hasili analoji qayda ilə, yəni u-nin bütün komponentlərinin a-ya vurulması yoluyla aparılır.

Əgər u-istənilən vektordursa, onda $-u=(-1)u$ vektoru u vektoruna *əks vektor* adlanır. Məsələn,

$$-u=(-1)(u_1,u_2,...,u_n)=(-u_1,-u_2,...,-u_n).$$

Əks vektorun tərifindən istifadə etməklə, vektorların fərqini onları "cəbri" toplamaqla tapmaq olar. Yəni,

$$u-v=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_1-v_1\\u_2-v_2\\\vdots\\u_n-v_n\end{pmatrix}.$$

Komponentlərinin hamısı sıfra bərabər olan vektor xüsusi rola malikdir və o, *sıfır vektor* adlanır. Yəni,

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \quad \text{və ya} \quad 0=(0,0,...,0).$$

İstənilən u vektoru üçün həmişə $u+0=u$ münasibəti doğrudur.

Vektor şəklində yazılışın ən əsas üstünlüklərindən biri bütün ədədlər sistemini ifadə edən vektorun bir hərflə işarə edilərək, həmin sistemə bir kəmiyyət kimi baxılmasındadır. Vektorlu yazılış bütövlükdə mürəkkəb formaya malik münasibətləri sadə şəkildə yazmağa imkan verir.

2.2. Vektorların hasili

Tərif. Tutaq ki, u sətir-vektor, v sütun-vektordur və onların hər ikisi eyni sayda n komponentə malikdir; onda uv hasili aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$uv=u_1v_1+u_2v_2+...+u_nv_n.$$

Qeyd edək ki, bu zaman biz həmişə əvvəlcə sətir-vektoru, sonra isə sütun-vüktoru yazacağıq. Vektorların bu qayda ilə vurulmasına dair iki misal yazaq:

$$(2,1,-1)\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}=2\cdot3+1\cdot(-1)+(-1)\cdot4=1,$$

$$(1,0)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=1\cdot0+0\cdot1=0.$$

Ona diqqət yetirək ki, vektorların belə qaydaya əsasən vurulmasının nəticəsi həmişə hər hansı ədəd olacaq.

2.3. Matrislər və onların vektorlarla kombinasiyaları

Aşağıdakı şəkildə düzbucaqlı cədvələ matris deyilir:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},$$

burada a_{ij} – hər hansı həqiqi ədədlər;

a - matrisin elementlərinin, i, j isə onun, uyğun olaraq, sətir və sütun indekslərinin adları;

m,n - natural ədədlər;

m - matrisin sətirlərinin, n isə sütunlarının sayıdır.

A- $(m\times n)$-matrisi, m,n ədədləri isə onun tərtibi adlanır. Əgər $m=n$ isə, onda A kvadrat matris adlanır.

Matrislərə aid bir neçə misal göstərək:

$$(1,2,3),\quad \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1 & -1\\-2 & 2\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&7&8&9&10\\3&-1&14&2&-6\\0&3&-5&7&0\end{pmatrix}.$$

Birinci iki misalda (1×3)-matrisləri üçölçülü sətir- və sütun-vektorları, üçüncüsü - (2×2)-kvadrat matrisi (yəni, 2 tərtibli kvadrat matris), dördüncüsü - dördtərtibli kvadrat matris və axırıncı isə (3×5) - matrisidir.

Aşkardır ki, $m\times n$ hasilinin qiyməti ilə matrisin elementlərinin sayını müəyyənləşdirmək çətin deyil.

Eyni ölçülü iki matris (yəni, eyni sayda sətir və ya sütuna malik olan 2 matris) ancaq və ancaq o zaman bərabər hesab edilir ki, onların uyğun elementləri bərabər olsun.

Tərif. Tutaq ki, A- $(m\times n)$- matrisi, x - m-ölçülü sətir-vektoru, u isə n-ölçülü sütun-vektorudur; onda xA və Au hasilləri aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$xA=(x_1,x_2,...,x_m)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}x_1a_{11}+x_2a_{21}+...+x_ma_{m1}, x_1a_{12}+x_2a_{22}+...+\\ +x_ma_{m_2},...,x_1a_{1n}+x_2a_{2n}+...+a_ma_{mn}\end{pmatrix};$$

$$Au=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\\ u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}u_1+a_{12}u_2+...+a_{1n}u_n\\ a_{21}u_2+a_{22}u_2+...+a_{2n}u_n\\ \cdots\cdots\cdots\\ a_{m1}u_1+a_{m2}u_2+...+a_{mn}u_n\end{pmatrix}.$$

Bu düsturlardan asan istifadə üçün qeyd etməliyik ki, xA və yaxud Au hasilindəki hər bir elementin alınmasına x və yaxud u vektorunun A matrisinin hər hansı sütun və yaxud sətrinə vurulması ilə nail olmağa fikir verilməlidir. Eyni zamanda aşağıdakını qeyd edək: sətir-vektoru matrisə vurma ancaq və ancaq o zaman mümkündür ki, vektorun komponentləri sayı həmin matrisin sətirlərinin sayına bərabər olsun. Nəticə isə digər sütun-vektor olacaqdır; analoji olaraq, matrisin sütun-vektora vurulması zamanı matrisin sütunlarının sayı vektorun komponentlərinin sayına bərabər olmalıdır və belə vurmanin nəticəsi başqa bir sütun-vektor olacaqdır.

Deməli, hər iki halda öncə vurmanın mümkünlüyü şərti kimi vektorun komponentlərinin sayı ilə matrisin sətir (xA üçün) və yaxud sütun (Au üçün) elementlərinin sayının bərabərliyi yoxlanılmalıdır. Həmçinin, bir daha qeyd edək ki, vurma nəticəsində xA n-ölçülü sətir-vektoru, Au m-ölçülü sütun-vektoru alınmalıdır.

Bir neçə ədədi misala baxaq:

a)

$$(1,0,-1)\begin{pmatrix}3&1\\2&3\\2&8\end{pmatrix}=(1\cdot3+0\cdot2+(-1)\cdot2,\quad 1\cdot1+0\cdot3-1\cdot8)=(1,-7);$$

b) $$\begin{pmatrix}3&1&2\\2&3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1+4\\2-3+16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\15\end{pmatrix};$$

c) $$\begin{pmatrix}3&2&-1\\1&0&2\\0&3&1\\5&-4&7\\-3&2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+0+2\\1+0-4\\0+0-2\\5+0-14\\-3+0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\\-2\\-9\\-1\end{pmatrix}.$$

2.4. Matrislərin toplanması və vurulması

Eyni ölçülü iki matris uyğun komponentlərinin toplanması yolu ilə toplanıla bilər. Məsələn, A və B -(2x3)-matrislərdirsə, onda:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}b_{13} \\ b_{21}b_{22}b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}b_{23} \end{pmatrix}$$

Qeyd edək ki, vektorların (sətir və ya sütun) toplanması matrislərin toplanmasının xüsusi halıdır. Matrislərin toplanmasına dair bir neçə ədədi misala baxaq:

$$a)(1,0,-2)+(0,5,0)=(1,5,-2);$$

$$b)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$c)\begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \\ 4 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -8 & 0 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & -7 \\ 4 & 3 & 7 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Əgər A-matris, k-istənilən ədəddirsə, onda k ədədinin A matrisinə hasili aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$kA=k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12}\cdots ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22}\cdots ka_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots \\ ka_{m1} & ka_{m2}\cdots ka_{mn} \end{pmatrix}.$$

Qeyd edək ki, bu, sadəcə olaraq, vektorlarda olduğu kimi, komponentlər üzrə vurmadır. Ədədi matrislərin vurulmasına dair misallar yazaq:

$$a)-2\cdot\begin{pmatrix} 7 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 4 & -16 \\ 0 & -14 & 2 \end{pmatrix};$$

$$b)6\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \\ 18 & -24 \end{pmatrix}.$$

Vektorun ədədə vurulması matrisin ədədə vurulmasının xüsusi halıdır.

Bir sıra şətrlərlə iki matrisi bir-birinə vurmaqla, nəticədə hər hansı yeni matris alına bilər.

Tutaq ki, A-(2×3)-matrisi və B-(3×2)-matrisidir. Onda AB hasili aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \end{pmatrix}.$$

Qeyd edək ki, bu hasil (2×2)-matrisidir. Eyni zamanda qeyd edək ki, eyni matrisin hər bir elementi A matrisinin sətirlərindən biri ilə B matrisinin sütunlarından birinin hasilinə bərabərdir; məsələn, AB matrisinin ikinci sətir və birinci sütununda yerləşən element aşağıdakı kimi təyin edilən hasillə müəyyənləşdirilir:

$$(a_{21}a_{22}a_{23})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{pmatrix}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}.$$

Ümumi halda matrislərin hasili aşağıdakı kimi təyin edilir.

Tərif. Tutaq ki, A-$(m\times k)$-matrisi və B-$(k\times n)$-matrisidir; onda $C=AB$ hasili komponentləri aşağıdakı kimi təyin olunan C_{ij} - $(m\times n)$-matrisidir:

$$c_{ij} = (a_{i1}a_{i2}...a_{ik})\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ b_{kj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \;.$$

Bu tərifdə aşağıdakılara fikir verməк vacibdir: birincisi, A və B matrislərinin vurulması ancaq və ancaq A matrisinin sütunları sayının B matrisinin sətirləri sayına bərabər olduğu halda mümkündür; ikincisi, C=AB hasil matrisi A matrisi qədər sətrə və B matrisinin sütunları sayı qədər sütuna malik olur; nəhayət, C matrisinin i-ci sətir və j-ci sütununda yerləşən element A matrisinin i-ci sətrinin B matrisinin j-ci sütununa vurulmasından alınır. Qeyd edək ki, vektorun matrisə vurulması matrislərin vurulmasının xüsusi halıdır.

Hasilə aid ədədi misala baxaq:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot1+1\cdot1+4\cdot1 & 3\cdot3+1\cdot1+4\cdot0 & 3\cdot0+1\cdot0+4\cdot1 & 3\cdot0+1\cdot0+4\cdot1 \\ 2\cdot1+0\cdot1+5\cdot1 & 2\cdot3+0\cdot1+5\cdot0 & 2\cdot0+0\cdot0+5\cdot1 & 2\cdot0+0\cdot0+5\cdot1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

n-ci tərtib kvadrat matrisin "sol baş dioqanal" elementləri (yəni, eyni indeksli elementləri) 1-ə, qalan bütün elementləri isə sıfra bərabərdirsə, onda onu *vahid matris* adlandıracağıq və $\dot{I}$ ilə işarə edəcəyik:

$$\dot{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdots0 \\ 0 & 1\cdots0 \\ 0 & 0\cdots1 \end{pmatrix}.$$

$\dot{I}$ vahid matrisi aşağıdakı xassələrə malikdir:

a) istənilən A-$(n \times m)$-matrisi üçün $\dot{I}A=A$;

b) istənilən A-(m x n)-matrisi üçün $A\dot{I}=A$.

Xüsusi hallarda:

- istənilən n-tərtibli kvadrat matris üçün $A\dot{I}=\dot{I}A=A$;
- istənilən n-ölçülü x sütun-vektoru üçün $\dot{I}x=x$;
- istənilən n-ölçülü u sətir-vektoru üçün $u\dot{I}=u$.

Bütün elementləri sıfra bərabər olan matrisə (kvadrat olması vacib deyil) sıfır matris ("O" ilə işarə olunur) deyilir. Sıfır matris üçün $AO=OA=O$. Bu zaman unutmaq lazım deyil ki, A və O matrislərinin ölçüləri necədir. Məsələn, əgər A-(2x3)-matrisi, O-(3,4)-matrisidirsə, onda AO-(2x4)-ölçülü sıfır matris olacaqdır.

İndi, təbii olaraq, matrislərin (2-dən artıq) yerdəyişməsi məsələsinin həllinə baxaq. Tutaq ki, A-$(m\text{x}h)$, B-$(h\text{x}k)$, C-$(k\text{x}n)$-ölçülü matrislərdir. Onda, ABC=A(BC)=(AB)C.

Sonuncu qayda matrislərin assosiativliyi qanunudur.

Qeyd edək ki, A≠B üçün AB≠BA.

2.5. Tərs matris

Öncə qeyri-məxsusi və məxsusi matris anlayışlarını açıqlayaq.

Kvadrat matrisin determinantı sıfırdan fərqli olduqda ona *qeyri-məxsusi*, əks halda ona *məxsusi matris* deyilir.

Məlum olduğu kimi, determinant (latınca *determinantis* – təyin edən) – n sətri və n sütunu olan kvadrat matrisin elementlərindən düzəldilmiş riyazi ifadədir. "Determinant" termini alman riyaziyyatçısı K.Qaussa məxsusdur.

Qeyri-məxsusi matrislərin hasili də qeyri-məxsusidir.

Bir neçə matrisin hasilində vuruqlardan heç olmasa biri məxsusi olsa, hasil məxsusi matris olar.

İndi *tərs matris* anlayışına keçək.

Tərif. $AA^{-1}=A^{-1}A=\dot{I}$ bərabərliyini ödəyən A^{-1} matrisinə A matrisinin tərsi deyilir (burada $\dot{I}$-vahid matrisdir və A, A^{-1} eyni tərtibli kvadrat matrislərdir).

Məsələn,

$$A=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix},\ A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix} \text{ isə,}$$

onda

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\dot{I} \quad \text{və}$$

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 0 & 5\\ 0 & 1 & -6\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & -5\\ -18 & 1 & 24\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\dot{I}.$$

Asanlıqla görmək olar ki, kvadrat matris ancaq bir ədəd tərs matrisə malik ola bilər.

Belə sual ortaya çıxır: hər bir matrisin tərsi varmı?

Bu suala aşağıdakı teorem cavab verir.

Teorem (Tərs matrisin varlığı). Ancaq qeyri-məxsusi matrislərin tərsi vardır.

Məsələn, $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0,$

$$\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1-1=0.$$

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ matrisinə tərs matris $A'=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$-dir.

Doğrudan da, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

Yoxlama tapşırıqları

2.1. $u=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ 2\end{pmatrix},\quad v=\begin{pmatrix}-2\\ 3\\ 0\end{pmatrix},\quad w=\begin{pmatrix}-1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$

vektorları verilmişdir. Həmin vektorlar üzərində aşağıdakı əməlləri yerinə yetirməli: a)2u; b)-v; c)2u-v; d)u+w; e)u+v- w; f)2u-3v- w; g)3u-v+2 w.

2.2. Tapşırıq 2.1-dəki əməlləri aşağıdakı vektorlar üçün yerinə yetirməli: u=(7,0,-3), v=(2,1,-5), w=(1,-1,0).

2.3. Aşağıdakı münasibətlərə görə u və v vektorlarının komponentləri arasındakı asılılıqları yazmalı:

a) 2u-v=0;

b) -3u+5v+u-7v=0;

c) 20v-3u+5v+8u=0.

2.4. Aşağıdakı cəmləri hesablamalı; hesablama mümkün olmadıqda, onun səbəbini izah etməli:

a) $\begin{pmatrix}-1\\ 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\ -2\\ 5\\ 7\end{pmatrix}=?$

b) $(2,-1,-1)+0(4,7,-2)=?$

c) $(5,6)+7-21+\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=?$

d) $1\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=?$

e) $(9,7,8)-10,-7,+8=?$

2.5. Aşağıdakı münasibətlərdən u_1, u_2 və u_3-ü tapmalı:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

2.6. Aşağıdakı münasibətə görə v vektorunun v_1, v_2, v_3 komponentlərini tapmalı:

$$2\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}.$$

2.7. Aşağıdakı münasibətə əsasən u vektorunun u_1, u_2 və u_3 komponentləri haqda nə demək olar?

a) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$?

b) $b\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$?

2.8. Aşağıdakı əməlləri yerinə yetirməli:

a) $\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\end{pmatrix}=?$

b) $(3,-4)\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=?$

e) $\begin{pmatrix}1&3&0\\7&-1&3\\-8&14&-5\\9&2&7\\10&-6&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}=?$

d) $(2,2)\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}=?$

e) $\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}=?$

f) $(0,2,-3)\cdot\begin{pmatrix}1&7&-8&9&10\\3&-1&14&2&-6\\0&3&-5&7&0\end{pmatrix}=?$

ğ) $(x_1,x_2)\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=?$

h) $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=?$

i) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}=?$

j) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=?$

2.9. Əməlləri yerinə yetirməli:

a) $2\begin{pmatrix}6&1\\0&-3\\-1&2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}4&2\\0&1\\-5&-1\end{pmatrix}=?$

b) $\begin{pmatrix}6&1&-1\\1&-3&2\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}4&0&-5\\2&1&-1\end{pmatrix}=?$

c) $\begin{pmatrix}6&1\\0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&0&-4\\2&1&-1\end{pmatrix}=?$

f) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = ?$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = ?$

f) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = ?$

ğ) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 7 & 5 \\ -4 & 8 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 9 & -5 & 6 & 0 \\ -7 & 0 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} = ?$

2.10. Aşağıdakı matrislərin determinantlarını hesablamalı:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$; ğ) $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

FƏSİL 3. NİSBƏTLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

3.1. Əsas anlayışlar

Çox vaxt hesablamalarda çoxluqlardan müəyyən «nisbəti» təmin edən elementlərinin seçilməsi lazım gəlir. Kifayət qədər ümumi olan bu anlayış geniş tətbiq olunur. Nisbətin seçilməsində onun arqumentləri sadə üsulla əlaqələndirilə bilərlər.

Nisbət anlayışına aydınlıq gətirmək üçün belə bir misala baxaq. Fərz edək ki, ali məktəbdə I ixtisaslar çoxluğu üzrə T tələbələr çoxluğu təhsil alır və hər bir ixtisasda F çoxluğu ilə təyin olunan fənlər tədris edilir. Əgər I çoxluğuna aid olan konkret i ($i \in I$) ixtisasına baxılırsa, həmin ixtisas üzrə T çoxluğunun t ($t \in T$) tələbələri təhsil alırlar, yəni T-nin hər bir altçoxluğu üçün I-nin i altçoxluğu mövcuddur. Beləliklə, I çoxluğu ilə T çoxluğu arasında $T \times I$ münasibəti mövcuddur. Analoji olaraq, I çoxluğu ilə F çoxluğu arasında da $F \times I$ münasibəti mövcuddur.

İndii isə nisbət anlayışının formal təyininə baxaq.

A_1 ,..., A_n çoxluğunda *n-yerli n-ölçülü R nisbəti* $A_1 \times \ldots \times A_n$ Dekart hasilinin altçoxluğuna deyilir. Başqa sözlə, $x_1, \ldots, x_n$ elementləri ($x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2, \ldots$) R nisbəti ilə o vaxt bağlı olur ki, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$ olsun. Burada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-n elementdən ibarət nizamlı yığımdır.

Nisbətlərə ən çox n=2 halına rast gəlinir. Bu halda onlara *binar (ikili) nisbətlər* deyilir. Aydındır ki, A və B çoxluqları arasındakı binar nisbət sadəcə olaraq AxB altçoxluğudur. Əgər həmin çoxluqlar ekvivalentdirlərsə (deyək ki, A-ya bərabərdirlər), onda A^2 altçoxluğu A-da nisbəti təyin edir.

Misal 3.1. *Fərz edək ki, P={a,b,c,d,e,f,g,h}-şahmat lövhəsinin sütunlar çoxluğu, Q={1,2,3,4,5,6,7,8}-isə sətirlər çoxluğudur. Onda S=P × Q Dekart hasili (x,y) çoxluğu ilə təyin olunan (burada x∈ P, y ∈ Q) bütün xanaların çoxluğudur.*

İstənilən A çoxluğu üçün *eynilik nisbəti*

$I_A=\{(a,a):a \in A\}$,

universal nisbət isə

$U_A=\{(a,b):a \in A,\ b \in A\}$, yəni $U_A=A^2$

kimi təyin olunur.

A-da *boş nisbət* $\emptyset$ kimi göstərilir: $\emptyset \subseteq A^2$.

A və B çoxluqları arasındakı hər bir R nisbəti ilə D(R)- *təyin oblastı* və V(R)- *dəyişmə oblastı(qiymətlər çoxluğu)* əlaqələndirilir. Onlar belə təyin edilir:

$D(R)=\{x:(x,y) \in R\}$, $V(R)=\{y:(x,y) \in R\}$.

Misal 3.2. *Tutaq ki,*

$$A=\{a,b,c,1,2,3\},$$

$$R=\{(x,y):x,y \in A\},\ x=\{a,b,c\},\ y=\{1,2,3\}.$$

Onda $D(R)=\{a,b,c\}$, $V(R)=\{1,2,3\}$.

Fərz edək ki, $R\{(x,y)\}$ binar nisbətlər. Onda

$R^{-1}=\{(y,x):(x,y) \in R\}$ *əks nisbət adlanır.*

Beləliklə, R^{-1} nisbəti R nisbətindəki elementlər cütünü digər qaydada əlaqələndirir. Odur ki, $R \subseteq A\times B$ olduqda

$R^{-1} \subseteq B\times A$, $D(R^{-1})=V(R)$ və $V(R^{-1})=D(R)$.

A çoxluğunda verilmiş iki R və S binar nisbətlərin *nisbi hasili (R·S) nisbəti* belə təyin edilən çoxluqdur:

$R\cdot S=\{(x,y) \mid \exists z(z \in A) \wedge (x,z) \in R \wedge (z,y) \in S\}$,

burada $\exists$ - mövcudluq kvantorunu, $\wedge$ - konyunksiya operatorunu bildirir.

Əgər R,S,T-A çoxluğunda verilmiş binar nisbətlərdirsə, onda aşağıdakı bərabərliklər doğrudur:

$(R\cdot S)\cdot T=R\cdot(S\cdot T)$,

$(R\cup S)\cdot T=(R\cdot T)\cup(S\cdot T)$,

$(R\cap S)\cdot T=(R\cdot T)\cap(S\cdot T)$,

$(R\cdot S)^{-1}=S^{-1}\cdot R^{-1}$,

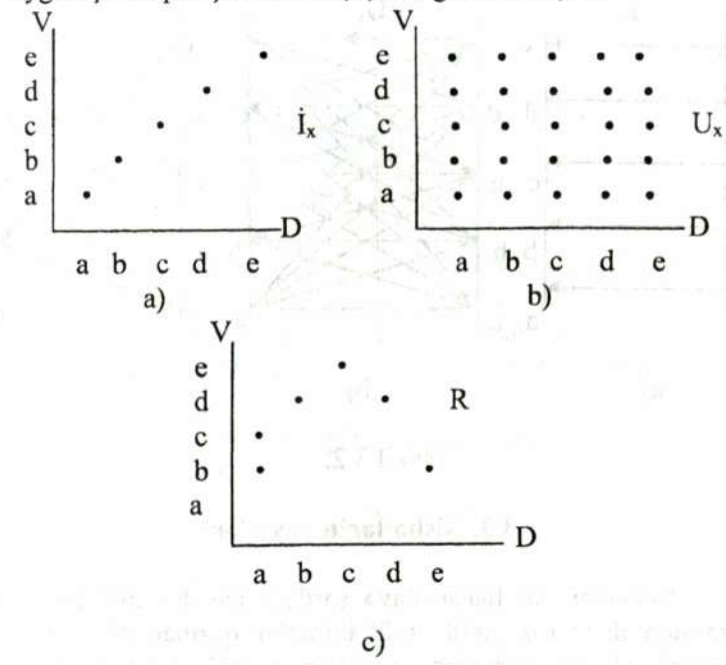
$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$,

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$.

3.2. Nisbətlərin qrafik təsviri

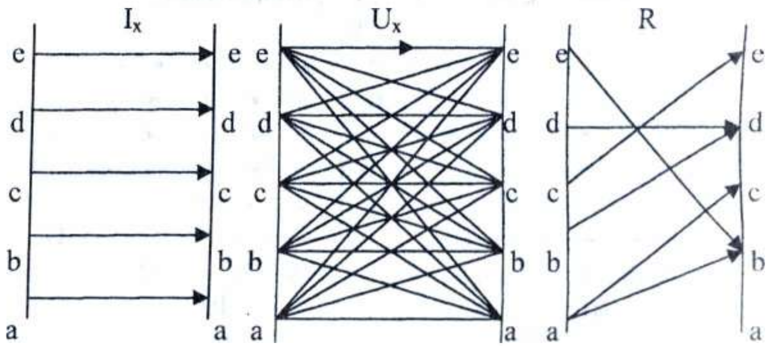
Nisbətlər müəyyən struktura malik olan çoxluqlardır və onların elementləri bir neçə konponentdən ibarətdir. Odur ki, nisbətlərin qrafik təsviri üçün Eyler-Venn diaqramlarından istifadə etmək olar. Qrafik təsvir metodlarından bəzilərinə baxaq. Bu metodlarla təsvir üçün $X=\{a,b,c,d,e\}$ çoxluğundan və I_x, U_x və R nisbətlərindən istifadə edək. Burada, $R=\{(a,b),(a,c),(b,d),(c,e),(d,d),(e,b)\}$.

Əvvəlcə ənənəvi analitik həndəsəyə aid metoda baxaq. Üfiqi *OX* və şaquli OY oxlarında $(x,y):x \in X, y \in Y$ koordinatlarına uyğun nöqtələri qeyd edək. I_x, U_x, və R nisbətlərinə uyğun çoxluqlar şəkil 3.1. a,b,c-də göstərilmişdir.



Şəkil 3.1.

Bu metodun əsas çatışmazlığı ondan ibarətdir ki, X çoxluğu böyüdükcə oblastda elementləri görmək və nisbətləri əks etdirən nöqtələrlə uyğunluğu qurmaq çətinləşir. Həmin çatışmazlığı aradan qaldırmaq üçün nöqtələri göstərməmək və $(x,y) \in R$ olduqda $x \in D$-ni və $y \in V$-ni oxla birləşdirmək olar. Lakin bu halda U_x-i təsvir edən diaqram kifayət qədər mürəkkəb alınır. Odur ki, paralel şaquli xətlərdən istifadə edib, soldan-sağa hərəkət etməklə və solda təyinat oblastını və sağda qiymətlər oblastını göstərməklə, daha əyani diaqram qurmaq olar (şəkil 3.2.). Burada oxları göstərməmək də olar, çünki nisbət təyinat oblastından qiymətlər oblastına tərəf istiqamətlənir.



a) b) c)

Şəkil 3.2.

3.3. Nisbətlərin xassələri

Nisbətlər hər hansı əlavə şərtlərə cavab verdikdə, onlar üzərində daha məzmunlu mühakimələr qurmaq olar. Bu cür şərtləri ödəyən nisbətlər müəyyən xassələrə malik olurlar. Həmin xassələrdən əsaslarına baxaq.

Fərz edək ki, R- A çoxluğunda verilmiş binar nisbətdir. Xassələrin yazılışı zamanı implikasiya("əgər - onda") bağlayıcısının "$\rightarrow$" və ümumilik kvantorunun " $\forall$ " simvollarından istifadə edək.

1) *Refleksivlik.* Əgər istənilən $x \in A$ üçün xRx şərti ödənilirsə (yəni, $\forall x(xRx)$, onda R refleksiv hesab olunur.

2) *Antirefleksivlik.* Əgər istənilən $x \in A$ üçün xRx şərti ödənilmirsə (yəni, $\forall x \neg (xRx)$), onda R antirefleksiv hesab olunur.

3) *Simmetriklik.* Əgər $\forall x \forall y\ (xRy \rightarrow yRx)$ şərti ödənilirsə, R nisbəti simmetrik hesab olunur.

4) *Antisimmetriklik:* Əgər $\forall x \forall y\ ((xRy \wedge yRx) \rightarrow (x=y))$ şərti ödənilirsə.

5) *Asimmetriklik:* $\forall x \forall y\ (xRy \rightarrow \neg\, yRx)$.

6) *Xəttilik:* $\forall x \forall y\ (xRy \vee yRx)$.

7) *Əlaqəlilik:* $\forall x \forall y\ ((xRy \vee yRx) \vee (x=y))$.

8) *Tranzitivlik:* $\forall x \forall y \forall z(\ (xRy \wedge yRx) \rightarrow xRz)$.

Misal 3.3. *Tutaq ki,*

$R=\{(x,y): x,y \in N$ və y-in böləni x-dır$\}$,

$S=\{(x,y): x,y \in N$ və $x \leq y\}$,

$T=\{(x,y): x,y \in N \setminus \{1\}$ və x,y ümumi bölənə malikdirlər$\}$.

Onda R:

a) refleksivdir, çünki bütün $x \in N$ üçün $x/x=1$;

b) asimmetrikdir, çünki 4-ün böləni 2-dir, lakin 4, 2-nin böləni deyil;

c) tranzitivdir, ona görə ki, əgər $y/x \in N$ və $z/y \in N$, onda $z/x=(y/x)*(z/y) \in N$;

d) antisimmetrikdir, çünki $x/y \in N$ və $y/x \in N$ olduqda, $x=y$ olur.

Analoji olaraq S:

a) refleksivdir, çünki bütün $x \in N$ üçün $x \leq x$;

b) asimmetrikdir, çünki $2 \leq 3$, lakin $3 > 2$;

c) tranzitivdir;

d) antisimmetrikdir, ona görə ki, əgər $x \leq y$ və $y \leq x$, onda $x=y$.

Nəhayət, T nisbəti refleksiv və simmetrikdir, lakin tranzitiv və antisimmetrik deyil.

Misal 3.4. *Fərz edək ki, A-bütün insanların çoxluğudur, B və C nisbətləri isə belə təyin olunub:*

$B=\{(x,y):x,y \in A$ və x isə y-in ulubabasıdır$\}$,

$C=\{(x,y) \in P$ və x,y eyni valideynlərə malikdirlər$\}$.

Aydındır ki, bu halda B tranzitivdir, S isə refleksiv, simmetrik və tranzitivdir.

Qeyd edək ki, simmetriklik və antisimmetriklik xassələri bir-birini inkar etmir. Məsələn, istənilən X çoxluğu üçün I_x nisbəti həm simmetrik, həm də antisimmetrikdir. Digər tərəfdən, müəyyən nisbətlər nə simmetrik, nə də antisimmetrik ola bilərlər.

3.4. Ayırma və ekvivalentlik nisbəti

Çoxluqlar nəzəriyyəsinin vacib anlayışlarından ikisi də *örtük* və *ayırmadır*. Tutaq ki, A-boş olmayan çoxluq və $\{A_i\}$ elə altçoxluqlar toplusudur ki,

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A.$$

Bu cür altçoxluqlar toplusuna A-nın örtüyü deyilir.

Misal 3.5. a) *$\{A,B\}$ toplusu A və B çoxluqlarının birləşməsi olan $A \cup B$ çoxluğunun örtüyüdür.*

b) $\{A, A \cup B, B, C\}$ toplusu A, $A \cup B$, B və C çoxluqlarının birləşməsi olan $A \cup B \cup C$ çoxluğunun örtüyüdür.

Örtük anlayışından istifadə etməklə obyektin bütün xassələrini örtüyün altçoxluqları üzrə paylamaq olar. Bu zaman təkrarlanmalar da ola bilər. Lakin, tələb olunsa ki, örtüyün elementləri cüt- cüt kəsişməsinlər, onda təkrarlanma baş verməz. Buradan da ayırma anlayışı yaranır.

Boş olmayan A çoxluğunun ayırması M(A) elə altçoxluqlar toplusudur ki, M(A)-nın bütün elementlərinin birləşdirilməsi A-ya uyğun gəlir və M(A)-nın bütün elementləri qarşılıqlı kəsişmirlər, yəni A elə bölünür ki, onun hər bir elementi ayırmanın yalnız bir altçoxluğunda olur.

Misal 3.6. *$\{A,A'\}$ –S-in ayırmasıdır (bax §1.1).*

$\{A \backslash B, A \cap B, B \backslash A\}$ - $(A \cup B)$-nin ayırmasıdır.

Ayırma birmənalı təyin olunur və ayırmanın hissələri ekvivalentlik nisbəti adlanan xüsusi növ nisbət təşkil edirlər. Həmin nisbət ədədlər və ya çoxluqlar arasındakı bərabərlik (=) nisbəti ilə analogiya təşkil edir. Bərabərliyin əsas xassələrini nəzərə alsaq, ekvivalentlik nisbətinin aşağıdakı tərifini vermək olar.

Tərif. Çoxluqdakı nisbət refleksiv, simmetrik və tranzitivdirsə, ona *ekvivalentlik nisbəti* deyilir.

Misal 3.7. *Bütün üçbucaqlar çoxluğunda $\{(x,y)$:x və y-in sahələri eynidir$\}$kimi təyin olunan nisbət adi ekvivalentlik nisbətidir.*

Əgər R ekvivalentlik nisbətidirsə, xRy əvəzinə x~Ry ("R-ə görə x və y ekvivalentdirlər") yazılır.

Əgər A çoxluğunda R ekvivalentlik nisbəti verilibsə, onda A-nın elementlərini bir-birilə qarşılıqlı kəsişməyən R-ə görə ekvivalentlik siniflərinə ayırmaq olar. Həmin siniflərə *ekvivalentlik sinifləri*, sinfin ixtiyari elementinə isə onun *nümayəndəsi* deyilir. Əgər x-hər hansı ekvivalentlik sinfinin nümayəndəsidirsə, onda həmin sinfi belə göstərirlər: [x]R. A çoxluğunun R-ə görə bütün ekvivalentlik siniflərinin çoxluğuna A çoxluğunun R-ə görə *faktor-çoxluğu* deyilir və belə işarə edilir: A/R.

A çoxluğunda verilmiş ekvivalentlik nisbətlərinin kəsişməsi də A-da ekvivalentlik nisbətidir.

3.5. Qayda nisbəti

Riyazi baxımdan bərabərlik anlayışından ekvivalentlik anlayışı yarandığından, bəzi qeyri-bərabərliklər nisbətlərin daha geniş sinifləri üçün model kimi istifadə oluna bilərlər.

A çoxluğunda refleksiv, antisimmetrik və tranzitiv xassəli nisbətə natamam qayda deyilir. *Qayda* və ya *qayda nisbəti* $\leq$ nisbətinin N-ə ümumiləşməsinə deyilir. Odur ki, tələb olunan üç xassəni asan yoxlamaq olar. Qeyd edək ki, deyilən tərifdə < nisbətini də qəbul etmək olardı. Onda qayda nisbəti yalnız tranzitiv olardı. Odur ki, tranzitivlik xassəsi qayda nisbəti üçün daha vacib hesab olunur.

$\leq$ və < nisbətlərini, uyğun olaraq, belə təyin etmək olar:

$$(x \leq y) \Leftrightarrow ((x=y) \vee (x<y)),$$
$$(x<y) \Leftrightarrow ((x<y) \wedge (x \neq y)).$$

Misal 3.8. *Tutaq ki, A ixtiyari çoxluqdur. Onda P(A)-da (A çoxluğunun dərəcəsində) verilmiş $\subseteq$ nisbəti qayda nisbətidir("$\wedge$" simvolu konyunksiya – "və" bağlayıcısı - əməlinin işarəsidir), ona görə ki:*

$$A \subseteq A;$$
$$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)) \Rightarrow (A=B);$$
$$((A \subseteq B) \wedge (B \subseteq C)) \Rightarrow (A \subseteq C).$$

Əgər istənilən $x,y \in A$ üçün xRy və ya yRx şərtlərindən biri və ya hər ikisi ödənilirsə, onda A-da verilmiş R qayda nisbəti *tam* adlanır.

Aydındır ki, baxılan çoxluğun altçoxluqlarında qayda tam ola bilməz. Təbii ki, R oxunda verilmiş həqiqi ədədlərin qaydası tamdır.

A çoxluğu ilə $\leq$ qayda nisbəti birlikdə *qismən nizamlanmış çoxluq* adlanır və belə işarə olunur (A, $\trianglelefteq$). Bu halda $x \leq e$ və $y \leq e$ şərtini ödəyən istənilən $e \in$ (A, $\trianglelefteq$) elementi x və y-in *yuxarı sərhəddi* adlanır. Analoji olaraq, əgər $l \in$ (A, $\trianglelefteq$), $l \leq x$ və $l \leq y$ isə, onda l x və y-ın *aşağı sərhəddi* olur. Bütün x və y-lərin yuxarı sərhədlərinin çoxluğu A-nın

altçoxluğu olub, $\leq$ nisbəti ilə nizamlanır. Əgər həmin çoxluğun yeganə ən kiçik elementi (m) varsa, yəni əgər istənilən yuxarı sərhəd üçün $x \leq m$, $y \leq m$ və $m \leq e$ şərtini ödəyən $m \in$ (A, $\trianglelefteq$) elementi varsa, həmin element x və y-ın *yuxarı həddi (supremum)* adlanır. Analoji olaraq, əgər x və y-ın yeganə ən böyük aşağı sərhəddi varsa, ona x və y-ın *aşağı həddi* (*infimum*) deyilir.

Nəhayət, qeyd edək ki, R-də verilmiş təbii qaydadan istifadə edilməsi yeni çoxluqları təyin edir. Onlara *intervallar deyilir*:

1. $[a,b]=\{x: x \in R, a \leq x \leq b\}$ - a-dan b-yə qədər *qapalı interval* (parça);
2. $]a,b[=\{x: x \in R, a < x < b\}$ - a-dan b-yə *açıq interval;*
3. $]a,b]=\{x: x \in R, a < x \leq b\}$ - *yarımparça(yariaçıq və ya yarıqapalı interval);*
4. $[a,b[=\{x: x \in R, a \leq x < b\}$ - *yarımparça(yariaçıq və ya yarıqapalı interval).*

Hər bir halda a və b uc nöqtələr adlanır. Qapalı interval özündə uc nöqtələri birləşdirir, açıq interval isə yox.

3.6. Verilənlər bazalarında nisbətlər

3.6.1. Nisbətlər vasitəsilə verilənlərin təsviri

Verilənlər bazalarında (VB) nisbətlər nəzəriyyəsinin elementlərindən geniş istifadə edilir. Relyasiya modelli VB-nin nəzəri əsaslarını nisbətlər nəzəriyyəsi təşkil edir. Verilənlər bazalarında verilənlərin təsvir modelində nisbətlərdən istifadə edilməsi ideyası ilk dəfə 1970-ci ildə Amerika alimi E.F.Kodd tərəfindən verilmişdir. Relyasiya modelinin adı da elə «nisbət» (ingilisçə «relation») sözündən götürülmüşdür.

VB-də verilənlərin nisbət şəklində təsvirinə təyyarə reyslərinin cədvəli misalında baxaq. Cədvələ salınmış hər bir reys müəyyən xarakteristikalara malikdir: reysin nömrəsi, yollanma məntəqəsi, təyinat məntəqəsi, uçma vaxtı, çatma vaxtı. Reyslərin cədvəlindən fraqment cədvəl 3.1-də verilmişdir.

Cədvəl 3.1.

REYSLƏR

Nömrə	Yollanma məntəqəsi	Təyinat məntəqəsi	Uçma vaxtı	Çatma vaxtı
250	Bakı	Moskva	9.30	12.40
252	Bakı	Moskva	17.40	20.50
280	Daşkənd	Sankt-Peterburq	8.10	15.20
300	Bakı	Paris	15.00	19.50
310	Bakı	London	15.20	20.30

Bu cədvəl haqqında aşağıdakıları demək olar.

Hər bir uçuş reysi cədvəlin ayrı-ayrı sütunlarından götürülmüş qiymətlər toplusu ilə təyin edilir. Sütunlardakı verilənlərə və onların tiplərinə məhdudluq qoyulur. Belə ki, «Yollanma məntəqəsi» adlı sütunda baxılan aviareysə xidmət edən aeroportların adları, uçma və çatma vaxtları sütunlarında günün vaxt momentləri yazılır.

Sütunların hansı ardıcıllıqla verilməsinin əhəmiyyəti yoxdur. «Uçma vaxtı» və «Çatma vaxtı» sütunlarının yerinin dəyişdirilməsi sətirlərin informasiya məzmununu dəyişdirmir. Hər bir reys unikal nömrəyə malik olduğundan, onun xarakteristikaları bir sətirdə yazılır.

3.1. nömrəli cədvəl REYSLƏR adlı nisbəti ifadə edir. Nisbət formatlı sütunların adları çoxluğu ilə təyin edilir: {Nömrə, Yollanma məntəqəsi, Təyinat məntəqəsi, Uçma vaxtı, Çatma vaxtı}. Onlara başqa sözlə atributların adları və ya sadəcə olaraq atributlar deyilir. Hər bir atributun adına həmin adlı sütunun mümkün qiymətlər çoxluğu uyğun gəlir. Həmin çoxluğa baxılan atributun *domeni* deyilir. Məsələn, «Nömrə» adlı atributun domeni bir-, iki-, üç- və s. rəqəmli natural ədədlər ola bilər. Nisbətin hər bir sətri hər bir atributun

domenindən götürülmüş qiymətlər çoxluğundan ibarətdir. Nisbətin sətirlərinə *kortejlər* deyilir. Sətirlər təkrarlanmadıqlarından, nisbətin kortejləri də təkrarlana bilməz. Odur ki, nisbətin kortejlərinə çoxluq kimi baxmaq olar.

Nisbətin atributlarının çoxluğunda elə bir altçoxluq olur ki, nisbətlərin kortejləri birmənalı olaraq həmin altçoxluğun uyğun atributlarının qiymətləri ilə təyin oluna bilir. Belə altçoxluğa həmin nisbətin *açarı* deyilir. Məsələn, 3.1. cədvəlində təsvir olunan nisbət üçün {Nömrə} açar ola bilər.

3.6.2. Nisbətlərin formallaşdırılması

İndi isə verilənlər bazasında cədvəl kimi təşkil olunan nisbətin formal təsvirinə baxaq.

Atributların sonlu $\{A_1,A_2,\ldots,A\}$ çoxluğuna R nisbətinin sxemi deyilir və belə yazılır:

$$R(A_1,A_2,\ldots A_n).$$

Hər bir $A_i(1 \le i \le n)$ atributuna *domen* adlanan D_i çoxluğu uyğun götürülür. Tutaq ki,

$$D=D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n.$$

Onda R sxemli r nisbətini R-in D-yə $\{t_1,t_2,\ldots,t_m\}$ inikasları çoxluğu kimi qəbul etmək olar. Bu halda hər bir $t \in r$ inikası aşağıdakı məhdudluğu ödəməlidir: $t(A_i) \in D_i$; , $1 \le i \le n$. Bu cür inikas *kortej* adlanır. Burada m- nisbətdəki kortejlərin sayıdır.

Nisbətdəki artibutların sayına (n) *nisbətin arlığı* deyilir.

Misal 3.9. *3.1. cədvəlinə uyğun nisbətin sxemi belədir:*

REYSLƏR (Nömrə, Yollanma məntəqəsi, Təyinat məntəqəsi, Uçma vaxtı, (Çatma vaxtı).

«Nömrə» domeninin qiymətlər çoxluğu bir-, iki-, üç- və s. rəqəmli ədədlər, «Yollanma məntəqəsi» və « Təyinat məntəqəsi» domenlərinin qiymətlər çoxluğu kimi müxtəlif şəhərlərin adları, «Uçma vaxtı» və «Çatma vaxtı»

domenlərinin qiymətlər çoxluğu isə günün vaxt momentləri ola bilər.

3.1. cədvəlindəki nisbət 5 kortejdən ibarətdir. Onlardan biri (onu t ilə işarə edək) belə təyin olunub: t(Nömrə)-250, t(Yollanma məntəqsi)=Bakı, t (Təyinat məntəqəsi)=Moskva, t(Uçuş vaxtı)=9.30, t (Çatma vaxtı)=12.40.

t kortejinin *A* atributdakı qiymətinə *t* kortejinin *A-qiyməti* deyilir. Əgər t-yə inikas kimi baxılırsa, t-nin A-qiyməti t(A) kimi işarə edilir. Əgər t-ni cədvəlin sətri kimi şərh etsək, onda t kortejinin A-qiymətini t kortejinin A adlı sütuna girişi kimi qəbul etmək olar. t inikas olduğu üçün, t kortejinin təyin oblastını məhdudlaşdırmaq olar. Fərz edək ki, R-in altçoxluğu X-dir. X-də məhdudlaşmış t korteji t(X) kimi göstərilir və t kortejinin *X-qiyməti* adlanır.

Verilənlər bazalarında nisbətlərdən real aləmin müəyyən hissəsini əks etdirmək üçün istifadə edilir. Real aləm bütövlükdə və həmçinin onun baxılan hissəsi vaxt üzrə dəyişir. Odur ki, nisbətlər də vaxt üzrə dəyişə bilər, kortejlər əlavə oluna bilər, silinə bilər və dəyişdirilə bilərlər. Bu əməliyyatlar haqda bir az sonra məlumat veriləcək.

Nisbətin sxemi ilə yazının formatı, kortejlə yazı, nisbətlə ifadə arasında analogiya mövcuddur. Nisbətin mümkün reallaşdırılmasından biri də formatı nisbətin sxeminə uyğun gələn yazılar faylıdır.

Sonlu nisbətlərin nüsxələr toplusu *relyasiya verilənlər bazasını* təşkil edir. Relyasiya VB-nin sxemini nisbətlər sxemlərinin toplusu kimi təsvir etmək olar:

$$R_1(A_{11}, A_{12}, \ldots, A_{1k1}),$$
$$R_2(A_{21}, A_{22}, \ldots, A_{2k2}),$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$R_m(A_{m1}, A_{m2}, \ldots, A_{mkn}).$$

3.6.3. Nisbətlərdə açarlar

Nisbətdə tələb olunan korteji (yəni faylın yazısını) tez və asan tapmaq, həmçinin VB-də nisbətlər (fayllar) arasında əlaqə yaratmaq üçün *açar* adlanan mexanizmdən istifadə edilir.

R sxemli *nisbətin açarı* elə $K=\{B_1, B_2,\ldots,B_m\} \subseteq R$ altçoxluğudur ki, iki müxtəlif t_1 və t_2 kortejləri üçün elə $B\in K$ var ki, $t_1(B)\neq t_2(B)$ şərti ödənilir. Başqa sözlə, k-nın bütün atributlarında eyni qiymətə malik olan iki kortej ola bilməz. Bu şərti belə yazmaq olar: $t_1(K)\neq t_2(K)$. Beləliklə, korteji birmənalı təyin etmək üçün onun K-qiymətini bilmək lazımdır. Açar minimal olmalıdır. Yəni K çoxluğundan bir və ya minimal sayda B açar kimi qəbul olunmalıdır.

Nisbətdə bir neçə açar ola bilər. Onlara mümkün və ya *potensial açarlar* deyilir. Baxılan halda onlardan biri seçilir və ona *birinci* və ya əsas açar (PRİMARY KEY) deyilir. Nisbətin sxemində açarı ayırmaq üçün, adətən, onun altından xətt çəkilir.

Yüxarıda açara verilən tərif həddən artıq genişdir. Onu belə dəqiqləşdirmək olar. Əgər R sxemli nisbət K` açarına malikdirsə və $K` \subseteq K \subseteq R$-sə, onda K da R-in açarıdır, çünki t_1 və t_2 kortejləri üçün $t_1(K`)\neq t_2(K`)$ şərtindən $t_1(K)\neq t_2(K)$ alınır. Beləliklə, R sxemli nisbətin açarı elə $K\subseteq R$ altçoxluğudur ki, istənilən müxtəlif t_1 və t_2 kortejləri üçün $t_1(K)\neq t_2(K)$ ödənilir və K-nın heç bir K` altçoxluğu ($K`\subset K$) üçün bu şərt ödənilmir. Bu halda K-ya *tərkibli açar* deyilir.

Relyasiya VB nəzəriyyəsində xarici açar anlayışı da var. *Xarici açar* (FOREİGN KEY) baxılan nisbətdə elə potensial açardır ki, o digər nisbətdə əsas açar rolunda çıxış edir.

Misal 3.10. *3.1.cədvəlində {Nömrə} açar, {Nömrə, Yollanma məntəqəsi} isə tərkibli açar kimi qəbul edilə bilər.*

Yuxarıda qeyd etmişdik ki, nisbətlər real aləmin bir hissəsini təsvir etdiklərindən, onlar zamana görə dəyişə bilərlər. Nisbətin hər bir baxılan vəziyyəti üçün potensial və əsas açarlar təyin edilə bilər. Nisbətlər müxtəlif vəziyyətlərdə müxtəlif açarlara malik ola bilərlər. Lakin nisbətlərin sxemləri vaxta görə invariant olmalıdırlar. Odur ki, açarların da dəyişilməməsi məqsədəuyğun olardı. Bu baxımdan nisbətin sxemi üçün açar təyin etdikdə nisbətin bütün vəziyyətləri nəzərə alınmalıdır. Açar bütün mümkün vəziyyətlərdə açar kimi qalmalıdır.

3.6.4. Nisbətlərin yeniləşdirilməsi

Qeyd etdiyimiz kimi, nisbətin məzmunu zamana görə dəyişə bilər. Bu dəyişmə nisbətə yeni kortejlərin əlavə edilməsi, nisbətdən müəyyən kortejlərin silinməsi və mövcud kortejlərin A-qiymətlərinin dəyişdirilməsi əməliyyatları ilə baş verə bilər. Bu əməliyyatlara baxaq.

Qeyd edək ki, relyasiya VB üçün standart dil kimi qəbul olunmuş SQL-də nisbətlərin yeniləşməsi əməliyyatlarının yazılışı üçün xüsusi operatorlar mövcuddur (INSERT, DELETE, UPDATE). Lakin biz oxucuların SQL dilindən asılılığını aradan qaldırmaq üçün relyasiya VB-nin nəzəriyyəsində tətbiq olunan sadə formal yazılışdan [18] istifadə edəcəyik.

1. *Nisbətə yeni kortejin əlavə edilməsi.* $R(A_1,A_2,\dots,A_n)$ nisbəti üçün bu əməliyyatı formal şəkildə belə yazmaq olar:

$$ADD\ (R;\ A_1=q_1,\ A_2=q_2,\dots,\ A_n=q_n),$$

burada $q_1, q_2, \dots, q_n$ – lər A_i atributlarının verilmiş qiymətləridir.

Misal 3.11. *Cədvəl 3.1.-ə uyğun nisbətə yeni kortejin (reysin) əlavə edilməsi:*

ADD (REYSLƏR; Nömrə=220, Yollanma məntəqəsi=Bakı, Təyinat məntəqəsi=Kiyev, Uçma vaxtı=11.50, Çatma vaxtı=14.40).

Atributların ardıcıllığı dəyişməz olduqda əlavəetmə əməliyyatını daha qısa şəkildə yazmaq olar:

$$ADD(R;\ q_1,\ q_2,\dots,\ q_n).$$

Misal 3.12. *Misal 3.11.-in qısa yazılışı:*

ADD (REYSLƏR; 220, Bakı, Kiyev, 11.50,14.40).

Əlavəetmə əməliyyatı aşağıdakı səbəblərdən nəticəsiz başa çata bilər:

a) əlavə edilən kortej baxılan nisbətin sxeminə uyğun gəlmir;

b) kortejin müəyyən qiymətləri uyğun domenlərə aid deyil;

c) əlavə edilən kortejin açarı nisbətdəki hər hansı kortejin açarı ilə eynidir.

Bütün bu hallarda yeni kortej R nisbətinə daxil edilmir və səhvlər haqqında məlumat verilir.

2. *Nisbətdən kortejin silinməsi.* Bu əməliyyatdan nisbətdən hər hansı korteji kənarlaşdırmaq üçün istifadə edilir. Formal şəkildə bu əməliyyatı belə yazmaq olar:

$$DEL(R;\ B_1=V_1,\ B_2=V_2,\dots,B_{\check{g}}=V_m),$$

burada B_1, $B_2,\dots,B_m$ nisbətin əsas açarının atributları, $V_1,V_2,\dots,V_m$ isə həmin atributların qiymətləridir.

Misal 3.13. *3.1. cədvəlindən 250-ci reysi çıxarmalı. Bu cədvəldə reysin nömrəsini əsas açar kimi qəbul etsək, silinmə əməliyyatını belə yazmaq olar: DEL(REYSLƏR; 250).*

Nisbətdən sonuncu kortejin silinməsinə məhdudluq qoyulmur, çünki boş nisbətə icazə verilir.

3. *Kortejin A-qiymətlərinin dəyişdirilməsi.* Əgər $K=\{B_1, B_2,\dots,B_m\}$ açar və qiymətləri dəyişdirilən atributları $C_i(i=\overline{1,P};\{C_1,\ C_2,\dots,C_p\}\subseteq\{A_1,\ A_2,\dots,A_n\})$ kimi qəbul etsək, onda modifikasiya əməliyyatını belə yazmaq olar:

$$UP(R;B_1=V_1,B_2=V_2,\dots,B_m=V_m;\ C_1=e_1,C_2=e_2,\dots,C_p=e_p),$$

burada $V_1,V_2,\dots,V_m$ –açara daxil olan atributların qiymətləri, $e_1,e_2,\dots,e_p$ -modifikasiya olunan atributların yeni qiyməğləridir.

Misal 3.14. *Fərz edək ki, 3.1. cədvəlində 280-ci reysin uçma vaxtı dəyişərək 10.10, çatma vaxtı isə 17.20 olub. Bu dəyişilmə nisbətdə belə ifadə olunacaq: UP(REYSLƏR; Nömrə=280; Uçma vaxtı=10.10, Çatma vaxtı=17.20).*

3.6.5. Relyasiya hesabı

Relyasiya hesabı birtərtibli predikatlar hesabı adlanan formal mexanizmin tətbiq sahələrindən biridir. Relyasiya hesabının əsas anlayışlarına mümkün qiymətlər oblastı ilə təyin olunan dəyişənlər və dəyişənlər, predikatlar, kvantorlar əsasında düzgün qurulmuş düsturlar aiddir.

Dəyişənin təyin olunma oblastı kortejlər olduqda, bu cür hesaba *kortejlər hesabı*, domenlər olduqda isə-*domenlər hesabı* deyilir.

Kortejlər hesabı. Kortejlər hesabında dəyişənlərin təyin olunma oblastı VB-nin nisbətləri olur, yəni hər bir dəyişənin mümkün qiyməti hər hansı nisbətin korteji olur. Kortejlər hesabını formal olaraq belə yazmaq olar:

$$\{t \setminus f(t)\},$$

burada t yeganə sərbəst dəyişən olub, sabit uzunluqlu korteji göstərir, f isə qaydalarla qurulmuş düsturdur.

Məsələn, $\{t\setminus R_1(t)^{\vee}R_2(t)\}$ ifadəsində ("v" simvolu dizyunksiya – "və ya" bağlayıcısı - əməlinin işarəsidir) $R_1(t)$ $^{\vee}R_2(t)$ düsturdur və göstərir ki, R_1 və R_2 nisbətlərinə daxil olan bütün kortejlərin çoxluğunu almaq lazımdır. $(R_1(t)^{\vee}$ $R_2(t)$ düsturu R_1 və R_2 nisbətinin eyni arlığa malik olması halında məna kəsb edir, çünki t korteji sabit uzunluqlu dəyişən kimi verilmişdir. $\{t\setminus R_1(t)$ $^{\vee}$ $R_2(t)\}$ ifadəsi relyasiya cəbrinin $(R_1 \cup R_2)$-birləşmə əməliyyatına ekvivalentdir.

Relyasiya hesabında düsturlar atomlardan, hesabi və məntiqi operatorlardan ibarət olurlar.

Düsturların atomları üç tipdə ola bilər:

1) R(t), burada R nisbətin adıdır. Bu atom R nisbətinin t kortejini göstərir;

2) s[i] Θ u [i] , burada s və u dəyişənlər (kortejlər); Θ-hesabı operator (<, =, >, ≲ ≳ ≠); i, j,-uyğun kortejlərdə lazımi komponentlərin (sütunların) nömrələri və ya adları; s[i] –s kortejində i-ci komponent; u [j]-u kortejində j-ci komponentdir.

Məsələn, (s[2] =u[3]) atomu s dəyişənin (kortejin) 2-ci komponentinin u dəyişəninin 3-cü komponentinə bərabərliyini göstərir;

3) s[i] Θ a və ya a Θ s[i], burada a-sabit kəmiyyətdir. Məsələn, (s[4] =50) göstərir ki, s kortejinin 4-cü komponenti 50-yə bərabərdir.

Düsturların yazılışında ümumilik - ∀ və mövcudluq - ∃ kvantorlarının düsturda istifadə edilməsinin xarakteri ilə təyin olunan sərbəst və əlaqəli dəyişənlər-kortejlər anlayışlarından istifadə edilir. Əgər t dəyişəni ∀ və ya ∃ kvantorları ilə başlayan altdüsturda yazılıbsa, onun f düsturuna daxil edilməsi *əlaqəli* hesab edilir. Digər hallarda t-nin f düsturuna daxil edilməsi *sərbəst* sayılır.

Relyasiya hesabında kvantorlar, proqramlaşdırma dilində elanetmənin (deklarasiyanın) oynadığı rolu oynayır. Sərbəst dəyişən anlayışı qlobal anlayışı ilə analoji məna daşıyırlar.

Düsturlar, dəyişənlərin-kortejlərin bu düsturlara sərbəst və əlaqləi daxil olmalarına görə rekursiv olaraq aşağıdakı kimi təyin edilir.

1. Hər bir atom düsturdur. Atomda adları çəkilən bütün dəyişənlər-kortejlər sərbəst sayılır.

2. Əgər f_1 və f_2 düsturdursa, onda f_1 $^{\wedge}$ f_2, f_1 $^{\vee}$ f_2 və $\neg f_1$ həmçinin düstur sayılrlar.

$(f_1$ $^{\wedge}$ $f_2)$, $(f_1$ $^{\vee}$ f_2) və ($\neg f_1$) düsturlarında dəyişənlərin-kortejlərin nüsxələrinin sərbəstliyi və ya əlaqəliliyi f_1 və f_2-də olduğu kimidir. Beləliklə, sərbəst (və ya əlaqəli) o dəyişənlər hesab olunur ki, onlar f_1 və f_2 –yə sərbəst (və ya əlaqəli) daxil olur. Bəzi dəyişənlər f_1-ə, digərləri isə f_2-yə sərbəst daxil ola bilər.

3. Əgər f-düsturdursa, onda (∀ s)(f) də düsturdur. s dəyişənin f-ə sərbəst daxil olması (∀ s) kvantoru ilə dəyişir və (∀ s)(f) düsturunda əlaqəli olur. (∀ s)(f) göstərir ki, s-in yerinə uyğun arlıqlı istənilən korteji qoyduqda düstur doğru olur.

4. Əgər f –düsturdursa, ($\exists$)(f) də düsturdur. s dəyişəninin f-ə sərbəst daxil olması ($\exists$s) kvantoru ilə dəyişir və ($\exists$s)(f) düsturunda əlaqəli olur. ($\exists$s)(f) düsturu göstərir ki, s-in uyğun arlıqlı elə qiyməti var ki, onu f-də s-in yerinə qoyduqda düstur doğru olur.

Məsələn, ($\exists$ s)(R(s)) düsturu gösrəir ki, R nisbəti boş deyil, yəni R-ə mənsub olan hər hansı s korteji var.

5. Lazım gəldikdə düsturlar mötərizədə yazıla bilər. Aşağıdakı üstünlük dərəcəsindən istifadə olunur: hesabi müqayisə operatorları; $\exists$ və $\forall$ kvantorları; $\neg$, $\vee$,$\wedge$ məntiq operatorları.

Relyasiya hesabında yalnız müəyyən şərti ödəyən {t\f(t)} təhlükəsiz ifadələrə baxılır. O ifadəyə təhlükəsiz ifadə deyilir ki, f(t)-ni təmin edən t kortejinin hər bir komponenti (sütunun elementi) hər hansı D(f) çoxluğunun elementləridir. D(f) çoxluğu f(t)-də göstərilən faktiki nisbətlərin və düsturdakı sabitlərin funksiyası kimi təyin edilir. Odur ki, D(f) çoxluğu f(t)-də olan sabitlərdən və f(t)-də göstərilən nisbətlərin kortejlərinin elementlərindən ibarət olur. VB-nin bütün nisbətləri sonlu olduğundan, D(f) çoxluğu da sonludur və onu ümumi şəkildə belə təyin etmək olar [19]:

$$D(f)= =\{a_{1.f}\} \cup \{a_{2.f}\} \cup \ldots \cup \{a_{n.f}\} \cup \pi_1(R_1) \cup \pi_2(R_2) \cup \ldots \cup \pi_n(R_n),$$

burada $a_{1.f}, a_{2.f}, \ldots, a_{2n.f} - f(t)$ düsturunda rast gələn sabitlərdir; $\pi_1(R_1), \ldots, \pi_n(R_n)$ -f(t) düsturunda rast gələn faktiki nisbətlərin (əslində kortejlərin komponentlərinin) proyeksiyalarıdır.

Relyasiya hesabı aşağıdakı şərtlər daxilində *təhlükəsiz* adlanır:

1) f(t)-nin doğruluğundan o nəticə çıxarılır ki, t kortejinin hər bir komponenti $D(t_\ell)$-ə daxildir;

2) f-in tərkibinə daxil olan ($\exists$u($f_\ell(u)$) üçün f_ℓ(u) doğru olduqda, u elementi $D(f_\ell)$-ə daxildir;

3) $\forall$(u)($f_\ell(u)$) tipli istənilən altdüstur üçün f_ℓ(u) doğrudursa, u komponenti $D(f_\ell)$-ə daxil deyil və ya $\neg f_\ell(u)$ doğrudursa, u –komponenti $D(f_\ell)$-ə daxildir.

Bu şərtlər ödənildikdə $\{t \setminus f(t)\}$ ifadəsi təhlükəsiz olur. $(\forall u(f_1(t))$ ifadəsi $\neg$ $(\exists u)(\neg f_1(u))$ ifadəsinə ekvivalentdir.

Yuxarıda deyilənlər əsasında təsdiq etmək olar ki, əgər elə f(t) düsturu varsa ki, onun $(\exists u)(f_i(t))$ və ya $(\forall u)(f_j(t))$ kimi istənilən altdüsturu təhlükəsizdir, onda $\{t \setminus R(t) \wedge f(t)\}$ kimi hər bir ifadə təhlükəsizdir. Əgər f(t) düsturunda təhlükəsiz olmayan heç olmasa bir $(\exists u(f_i(t))$ və ya $(\forall u(f_j(t))$ kimi altdüstur varsa, onda $\{t \setminus R(t) \wedge f(t)\}$ ifadəsi də təhlükəsiz olmayacaq. Əgər f(t) düsturunda $(\exists u(f_i(t))$ və ya $(\forall u(f_j(t))$ kimi və ya onlara uyğun ekvivalent $\neg$ $(\forall u(\neg f_i(t))$ və ya $\neg$ $(\exists u)(\neg f_j(t))$ altdüsturlar ümumiyyətlə yoxdursa, onda $\{t(R(t) \wedge f(t)\}$ ifadəsi həmişə təhlükəsiz olur.

Məsələn, əgər f(t)= $\neg R_2$(t) olsa, onda relyasiya cəbrində nisbətlərin fərqi əməliyyatına (R_1-R_2) uyğun təhlükəsiz $\{t \setminus R_1(t) \wedge R_2(t)\}$ ifadəsini alarıq.

R nisbətinə uyğun olan {t R(t)} ifadəsi (başqa sözlə, nisbəti göstərən R dəyişəni) də təhlükəsizdir.

Dəyişənlərdə-kortejlərdə relyasiya hesabatında təhlükəsiz ifadələrin relyasiya cəbrinin ifadələrinə ekvivalentliyi haqqında teorem mövcuddur.

Relyasiya cəbrinin əsas əməliyyatları üçün dəyişənlərdə-kortejlərdə relyasiya hesabının uyğun ifadələrinə baxaq.

1. Nisbətlərin birləşdirilməsi əməliyyatına $(R_1 \cup R_2)$ aşağıdakı ifadə uyğun gəlir:

$$\{t \setminus R_1(t) \vee R_2(t)\}.$$

2. Nisbətlərin fərqi əməliyyatına (R_1-R_2) aşağıdakı ifadə uyğun gəlir:

$$\{t \setminus R_1(t) \wedge \neg R_2(t)\}.$$

Burada R_1-ə daxil olan və R_2-yə daxil olmayan t kortejlər çoxluğuna baxılır.

3. Dekart hasil ($R_1 x R_2$) əməliyyatına aşağıdakı ifadə uyğun gəlir:

$$\left\{ \begin{matrix} t^{(k+m)} \setminus (\exists u)(\exists v)(R_1(u) \wedge R_2(v) \wedge t[1] = u[1] \wedge ... \wedge t[k] = \\ = u[k] \wedge t[k+1] = v[1] \wedge ... \wedge t[k+m] = v[m]) \end{matrix} \right\}$$

Burada (k+m)-arlı elə *t* kortejlər çoxluğuna baxılır ki, *u* korteji R_1-ə və *v* korteji R_2 -yə daxil olduqda, *t* kortejinin birinci *k* komponentləri *u* kortejinə, *t* kortejinin sonrakı *m* komponentləri isə *v* kortejinə aiddir.

4. Proyeksiya əməliyyatı $\pi i_1, i_2, ..., i_k(R)$ aşağıdakı ifadəyə uyğun gəlir:

$$\{t^{(k)} \mid (\exists u)(R_1 \wedge t[1] = u[i_1] \wedge ... \wedge t[k] = u[i_k])\}.$$

5. Seçmə əməliyyatı $\sigma_F(R)$ aşağıdakı ifadəyə uyğundur:

$$\{t | R(t) \wedge F'\},$$

burada F^1 elə F ifadəsidir ki, i komponentini göstərən hər bir operand t[i] ilə əvəz edilir.

Qeyd edək ki, relyasiya cəbrinin bütün əməliyyatlarına [1]-də ətraflı baxılır.

Dəyişənlər-kortejlərlə relyasiya hesabını reallaşdıran real dilə misal olaraq QUEL sorğular dilini göstərmək olar.

Domenlər hesabı. Domenlərdə dəyişənlərlə hesablama aparan relyasiya hesabında kortejlərdən istifadə edilmir. Onların yerinə domenlərdə dəyişənlərdən istifadə edilir. Digər məsələlərdə domenlərdə dəyişənlərlə relyasiya hesabı dəyişənlərlə-kortejlərlə relyasiya hesabında olduğu kimi aparılır.

Düsturların atomları iki tipdə ola bilərlər.

1) $R(x_1x_2x_3...x_k)$, burada R k-arlı(k-arqumentli, k-yerli, k-dəyişənli) nisbət, x_i-sabit və ya hər hansı domendə dəyişəndir. $R(x_1, x_2, ..., x_k)$ atomu onu göstərir ki, x_i dəyişənləri elə seçilir ki, $(x_1, x_2, ..., x_k)$ korteji R nisbətinə məxsus olsun.

2) $x\Theta y$, burada x və y –sabitlər və ya hər hansı domendə dəyişənlərdir, Θ-hesabı müqayisə operatorudur. $x\Theta y$ atomu onu göstərir ki, x və y-in cari qiymətləri üçün $(x\Theta y)$ doğrudur.

Domenlərdə dəyişənlərlə relyasiya hesabının düsturlarında, kortejlər hesabında olduğu kimi, $\wedge$, $\vee$, $\neg$ məntiqi əlaqələrindən və $(\forall x), (\exists x)$ kvantorlarından istifadə edilə bilər (burada x-domendə dəyişəndir). Analoji olaraq, sərbəst və əlaqəli dəyişənlər anlayışlarından istifadə edilir.

Domenlərdə dəyişənlərlə qurulan relyasiya hesabı aşağıdakı kimi yazılır:

$$\{x_1x_2...x_K | \ f(x_1, x_2, ..., x_k)\},$$

burada f-düsturdur və onun domendə sərbəst dəyişənləri $x_1, x_2, ..., x_k$ -dır.

Misal 3.15.

$$\{x_1x_2 \mid R_1(x_1x_2) \wedge (\forall y)(\neg R_2(x_1y) \wedge \neg R_2(x_2y))\}$$

ifadəsi R_1 nisbətinin elə kortejlər çoxluğunu göstərir ki, R_1-in komponentlərindən heç biri R_2 nisbətinin hər hansı kortejinin birinci komponenti deyil.

Real nisbətlərin sonlu olması məhdudluğunun ödənilməsi üçün analoji olaraq təhlükəsiz ifadələr anlayışından istifadə edilir.

Domenlərdə dəyişənlərlə aparılan relyasiya hesabı aşağıdakı şərtlər ödənildikdə təhlükəsiz olur:

1)$f(x_1,x_2,...,x_k)$-nin doğruluğundan x_i -nin D(f)-ə mənsub olması nəticəsi çıxarılır;

2)əgər $(\exists u)(f_1(u))$ f-in altdüsturudursa, onda $f_1(u)$-nun doğruluğundan nəticə çıxarılır ki, u $D(f_1)$-ə mənsubdur;

3)əgər $(\forall u)(f_1(u))$ f-in altdüsturudursa, onda $f_1(u)$-nun doğruluğundan u-nun $D(f_1)$-ə mənsub olmaması nəticəsi çıxarılır.

Domenlərdə dəyişənlərlə hesab ifadəsinin verilmiş kortejlərdə dəyişənlərlə hesab ifadəsinə $\{t \mid f(t)\}$ ekvivalentliyi belə əldə edilir:

1) əgər t korteji k –arlıdırsa, onda $t_1,t_2,\ldots,t_k$ domenlərində k sayda yeni dəyişən formalaşdırılır;

2) R(t) atomları $R(t_1,t_2,\ldots,t_k)$ atomları ilə əvəz edilir;

3) Hər bir sərbəst t[i] daxilolması t_i ilə əvəz edilir;

4) Hər bir $(\exists u)$ və ya $(\forall u)$ kvantoru üçün $u_1,u_2,\ldots,u_m$ domenlərində m sayda yeni dəyişən daxil edilir, burada *m u*-kortejinin arlığıdır; həmin kvantorların təsir oblastında aşağıdakı əvəzləmələr aparılır:

$$R(u) \to R(u_1 u_2,\ldots,u_m),$$
$$u(i) \to u_i,$$
$$(\exists u) \to (\exists u_1)\,(\exists u_2)\ldots(\exists u_м),$$
$$(\forall u) \to (\forall u_1)(\forall u_2)\ldots(\forall u_m);$$

5) Aşağıdakı ifadə qurulur:

$$\{t_1,t_2,\ldots,t_k \mid f'(t_1,t_2,\ldots,t_k)\},$$

burada f'-uyğun əvəzləmələr aparılmış f-dir.

Misal 3.16.

$\{t \setminus R_1(t) \vee R_2(t)\}$ *ifadəsi belə yazıla bilər:*

$$\{t_1,t_2,\ldots,t_k \setminus R_1(t_1,t_2,\ldots,t_k) \vee R_2(t_1,t_2,\ldots,t_k)\}.$$

Relyasiya hesabında belə bir teorem mövcuddur:

Dəyişənlərlə-kortejlərlə relyasiya hesabının hər bir təhlükəsiz ifadəsinə ekvivalent olan domenlərdə dəyişənlərlə relyasiya hesabının təhlükəsiz ifadəsi var və əksinə-domenlərdə dəyişənlərlə relyasiya hesabının hər bir təhlükəsiz ifadəsinə ekvivalent olan dəyişənlərlə-kortejlərlə relyasiya hesabının təhlükəsiz ifadəsi var.

Domenlərdə dəyişənlərlə relyasiya hesabını reallaşdıran sorğu dillərinə misal olaraq QBE dilini göstərmək olar.

Yoxlama tapşırıqları

3.1. Tutaq ki, A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10}. R={(x,y): x -y-in bölənidir və $x \le 5$} kimi təyin edilən çoxluğu açıq şəkildə yazmalı.

3.2. Tutaq ki, F={a,b,c,d,,f,g,h}, R={1,2,3,4,5,6,7,8} və S=F×R. $C \subseteq S \times S$ –i təyin etməli.

3.3. Tutaq ki, R çoxluğu 3.1-ci tapşırıqdakı kimi təyin edilib. R –in D(R) təyin oblastını və $\Re$ (R) qiymətlər çoxluğunu tapmalı.

Göstəriş: D(R) = {x: (x,y)∈ R}, $\Re$(R) = {y: (x,y)∈ R} kimi təyin olunur.

3.4. Tutaq ki, A={2,4,6,8,10} və R={(x,y):x,y ∈ A və x<y}.-in və R^{-1}-in bütün elementlərini yazmalı.

3.5. Tutaq ki, A={a,b,c}, B={1,2}.

$R = AxB$ və R^{-1} nisbətlərinin elementlərini yazmalı.

3.6. Tapşırıq 3.4-dəki nisbətləri təsvir edən diaqramı qurun.

3.7. Tapşırıq 3.5-də alınan nisbətləri təsvir edən diaqramı qurun.

Tapşırıq 3.6. Aşağıda göstərilən nisbətlərin xassələrini təyin edin:

1) A={1,2,3,4,5,6,7}çoxluğunda verilmiş

R={(a,b): a-cüt, b-tək ədəddir};

2) a={(a,b): a+b cüt ədəddir};

3) p={(a,b): a-b tək ədəddir};

4) 3.4-cü misaldakı A çoxluğunda verilmiş D={(a,b): a və b ümumi ulubabaya malikdirlər}.

3.8. İsbat edin ki, istənilən ekvivalentlik nisbəti elə ayırma törədir ki, istənilən x,y∈ A üçün [x]=[y] və ya [x]∩[y]= Ø.

3.9. Tutaq ki, A-ixtiyari çoxluqdur və R nisbəti P(A)xP(A) (P(A)-A çoxluğunun dərəcəsidir) çoxluğunda aşağıdakı kimi təyin edilmişdir: (C,D)R(X,Y) o vaxt mümkündür ki, $(C\Delta D) \subseteq (X\Delta Y)$ olsun. Burada Δ simmetrik fərqdir. R-in qayda nisbəti olub-olmadığını təyin etməli.

3.10. Tutaq ki, A-ixtiyari çoxluqdur və R nisbəti P(A)xP(A) çoxluğunda aşağıdakı kimi təyin edilmişdir:yalnız $C \subseteq X$ və $D \subseteq Y$ olduqda, (C,D)R(C,Y) mümkündür.

Əgər R qayda nisbətidirsə, o tamdırmı?

FƏSİL 4. RİYAZİ MƏNTİQ

4.1. Aristotel məntiqinə dair. Məntiqin predmeti

"Məntiq" sözü sistemli mühakimə üsulları mənasını verir. Bizim dilimizdə "məntiq" sözünün sinonimi kimi "ağıl" sözünü göstərmək olar. "Ənənəvi məntiq" qədim yunanlar tərəfindən öyrənilib və bizim eramızdan əvvəl Aristotel (b.e.əv. 3-cü əsr) tərəfindən inkişaf etdirilmişdir. Aristotel, əsasən, düzgün mühakimə üsullarının nəzəri əsasları üzərində işləmişdir.

Həmin vaxtlar xristianlar antik elmə mənfi baxırdılar. Aristotelin "Analitik" kitabı antik elmi bərqərar etdi. Məntiqi üsullar işləndi və onların köməyi ilə digər elmlər inkişaf etməyə başladı.

Aristotelə görə mühakimə 4 elementdən ibarətdir; kvantor, subyekt, əlaqə(bağlayıcı), predikat.

Məsələn: (1) – "bütün *(kvantor)* amerikalılar *(subyekt)* avtomobil sürücüsü *(predikat)* olurlar *(əlaqə)"* və yaxud (2) – "bir sıra *(kvantor)* taksi sürücüləri *(subyekt)* qeyri aqressiv *(predikat)* deyillər *(əlaqə)"*.

Məntiqdə iki sinif arasında mümkün münasibətləri xarakterizə edən 8 formada mühakiməyə yol verilir:

1) Bütün S-lər P-dir,
2) Bütün S-lər P deyil,
3) Bir neçə S P-dir,
4) Bir sıra S P deyil,
5) S P-dir,
6) S P deyil,
7) a P-dir,
8) a P deyil.

Burada S - subyektlər sinfi; P - predikatlar sinfi; a-element; "bütün", "ixtiyari" - *ümumilik*; "bir sıra", "bir neçə" - isə *mövcudluq kvantorlarıdır*.

Ənənəvi məntiqdə isə yuxarıdakı 8 formanın ilk 6 mühakiməsindən istifadə olunur.

Bəs, ümumi əhəmiyyətli düzgün mühakimə nədir?

Misala baxaq: Rəvayətə görə İsgəndəriyyə kitabxanasını Xəlifə Ömər yandırıb. Kitabxananı yandırmazdan əvvəl o, öz hərəkətininin düzgünlüyünü aşağıdakı mühakimə ilə əsaslandırıb:

"Əgər sizin kitablarınız Quranla həmahəngdirlərsə, onda onlar artıqdırlar" -(1);

"Əgər onlar Qurana uyğun deyillərsə, onda onlar zərərlidirlər" -(2);

"Lakin, zərərli və artıq kitabları məhv etmək lazımdır" -(3);

Deməli,

"Sizin kitablar məhv edilməlidir" -(4).

Mühakimə istinad adlanan bir sıra təklifdən nəticə adlanan təklifə keçid deməkdir.

Baxılan misalda birinci üç təklif – (1)÷(3) istinad, dördüncüsü – (4) isə nəticədir və məntiqi nöqteyi-nəzərdən düzgündür.

Başqa misala baxaq: "Vəhşilər öz bədənlərini rəngləyirlər. Bir sıra müasir qadınlar öz bədənlərini rəngləyirlər. Bu səbəbdən bir sıra müasir qadınlar vəhşidirlər". Əlbəttə, bu düzgün mühakimə deyil(siniflər müxtəlifdir).

Deməli, məntiqin birinci məsələsi hansı mühakimə üsullarının düzgün, hansılarının düzgün olmadığını müəyyənləşdirməkdir.

Mühakimənin üç tipi var: deduktiv mühakimə, induktiv mühakimə və gerçəyəoxşar mühakimə.

İnduktiv mühakimə "xüsusidən ümumiyə doğru" prinsipi ilə qurulur. Buna misal kimi riyazi induksiya metodu ilə isbat mexanizmini göstərə bilərik.

Gerçəyəoxşar mühakimədə predikatlar sinfinin hər bir elementinin deyil, yalnız bir neçə elementin eyni xassələrinə

əsasən bütün sinif üçün ümumiləşdirmə aparılır. Başqa tərzdə ifadə etsək, mühakimələr siniflər aralarındakı münasibətlərlə deyil, element və sinif arasında aparılır.

Deduktiv mühakimə "ümumidən xüsusiyə doğru" prinsipi ilə qurulduğundan, alınan nəticə səhih olur. Deduktiv mühakimələrin **doğrluq kriterisi** aşağıdakı ümumi prinsipdən ibarətdir: düzgün mühakimə istinad edilən mühakimələr doğru olduqda həmişə düzgün nəticəyə zəmanət verir. Odur ki, məntiq elminin vəzifəsi düzgün mühakimə yollarını mümkün qədər daha tam yazmaq və araşdırmaqdan ibarətdir.

Məntiq elmində mülahizələr hesabı və predikatlar hesabı əsas yer tuturlar.

Əvvəlcə riyazi induksiya metodu ilə isbat mexanizminə baxaq.

4.1.1. Riyazi induksiya metodu

Bir sira təkliflərin isbatında riyazi induksiya metodutdan istifadə edilir.

Riyazi induksiya metodunun məğzi aşağıdakından ibarətdir:

əgər bir təklif

1) $n=1$ qiyməti üçün doğrudursa,

və

2) $n=k$ qiymətində onun doğru olması fərziyyəsindən $n=k+1$ qiymətində də doğruluğu alınarsa (isbat edilərsə), onda deyirlər ki, həmin təklif istənilən n üçün doğrudur.

Bu isbat metodundan istifadə etməklə bir neçə tapşırığın həllini aparaq.

Tapşırıq 4.1. Aşağıdaki eyniliyi isbat etməli:

$$1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)n=\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Həlli:

1) $n=1$ olduqda $0=0$ doğru bərabərliyi alınır.

2) Fərz edək ki, $n=k$ olduqda $1\cdot 2+2\cdot 3+...+(k-1)k=\frac{(k-1)k(k+1)}{3}$ bərabərliyi doğrudur.

Bu sonuncu bərabərliyin sağ tərəfini $\alpha(k)$ ilə işarə edək: $\alpha(k)=\frac{(k-1)k(k+1)}{3}$.

İndi isə həmin fərziyəyə əsaslanaraq isbat edək ki, $n=k+1$ olduqda aşağıdakı münasibət də ödənilir: $\alpha(k+1)=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}$.

Doğrudan da,

$$\alpha(k+1)=\alpha(k)+k(k+1)=\frac{(k-1)k(k+1)}{3}+k(k+1)=$$
$$=\frac{(k-1)k(k+1)+3k(k+1)}{3}=$$
$$=\frac{k(k+1)((k-1)+3)}{3}=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

Bununla da verilmiş eynilik isbat edildi.

Tapşırıq 4.2. Aşağıdaki ifadənin 7–yə tam bölündüyünü isbat etməli: $(n^7-n)\vdots 7$. Burada $\vdots$ işarəsi qalıqsız bölməni bildirir.

Həlli:

1) $n=1$ olduqda $1-1=0\vdots 7$ doğru münasibəti alınır.

2) Fərz edək ki, $n=k$ olduqda $\alpha(k)=(k^7-k)\vdots 7$ münasibəti doğrudur. İndi isə isbat edək ki, $n=k+1$ olduqda aşağıdakı münasibət də doğrudur (yəni, ödənilir):

$$\alpha(k+1)= (k+1)^7-(k+1)=(k+1)^7-k-1$$

Doğrudan da,

$$\alpha(k+1)=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+7k+1-$$
$$-k-1=k^7+7k^6+21k^5+35k^4+35k^3+21k^2+6k=$$
$$=k^7+6k+7(k^6+3k^5+5k^4+5k^3+3k^2)=$$
$$=k^7+6k-7k+7k+7(k^6+3k^5+5k^4+5k^3+3k^2)=$$
$$=(k^7-k)+7(k^6+3k^5+5k^4+5k^3+3k^2)+7k.$$

Bununla da verilmiş təklifin doğruluğu isbat olundu.

Tapşırıq 4.3. Aşağıdaki bərabərsizliyi isbat etməli:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Həlli:

1) $n=1$ olduqda $\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{3}}$ doğru münasibəti alınır.

2) Fərz edək ki,

$n=k$ olduqda $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}$

münasibəti doğrudur.

İndi isə fərziyəyə əsaslanaraq, isbat edək ki, $n=k+1$ olduqda aşağıdakı münasibət də doğrudur:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2(k+1)-1}{2(k+1)}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

isbatı:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2(k+1)-1}{2k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}<$$

$$<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\cdot\sqrt{\frac{2k+3}{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\cdot\sqrt{\frac{(2k+3)(4k^2+4k+1)}{(2k+1)(4k^2+8k+4)}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2k+3}}\cdot\sqrt{\frac{8k^3+20k^2+14k+3}{8k^3+20k^2+16k+4}}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}=\frac{1}{\sqrt{2k+3}}.$$

Bununla da verilmiş bərabərsizliyin doğruluğu isbat olundu.

Tapşırıq 4.4. $2^{2^n}+1$ ifadəsinin n>1 olduqda 7 rəqəmi ilə qurtardığını isbat etməli.

Həlli:

1) $n=2$ olduqda $2^{2^2}+1=17$ doğru münasibəti alınır.

2) Fərz edək ki, $n=k$ olduqda $\alpha(k)=2^{2^k}+1$ münasibəti doğrudur. İndi isə isbat edək ki, $n=k+1$ olduqda aşağıdakı münasibət də doğrudur (yəni, ödənilir):

$$\alpha(k+1)=2^{2^{(k+1)}}+1$$

isbatı:

$$\alpha(k+1)=2^{2^{(k+1)}}+1=(2^{2^k})^2+1=(\alpha(k)-1)^2+1.$$

Bununla da verilmiş təklifin doğruluğu isbat olundu.

4.2. Mülahizələr hesabı

Qeyd etdiyimiz kimi, məntiq sistemli mühakimə metodudur. Biz məntiqin iki konkret sisteminə baxacağıq: bazis (mülahizələr hesabı) və daha zəngin mühakimə metodu olan predikatlar hesabı.

Mülahizələr hesabı ancaq yalan və ya ancaq doğru ola bilən təklifləri (mülahizələri) öyrənir.

Aşağıdakı üç doğru mülahizəyə baxaq:

1) Ölümünə 15 dəqiqə qalmış o hələ sağ idi.
2) Əgər bu düzgündürsə ki, "yağış yağanda yol yaş olur", onda, həmçinin, aşağıdakı təklif də doğrudur: "əgər yol qurudursa, onda yağış yağmır".
3) Yer fırlanır.

Birinci təklif dilin doğruluğuna, 2-ci təklif məntiqi doğruluğa, (burada "yağış yağır", "yol qurudur" mülahizələrdir), 3-cü təklif isə faktiki doğruluğa aid misallardır.

4.2.1. Mülahizələr hesabının əlifbası

İstənilən boş olmayan çoxluğa *əlifba* deyilir. Bu çoxluğun elementlərinə həmin əlifbanın simvolları deyilir.

U əlifbasında *söz* dedikdə, U-dan olan istənilən sonlu(boş da ola bilər) simvollar yığımı başa düşülür. a və b sözlərinin hasili ab sözü adlanır. Hər hansı a_1 və a_2 sözləri üçün $a=a_1ba_2$ şərtini ödəyən b sözünə a sözünün *altsözü* deyilir. b sözü altsöz sifətilə a sözünə bir neçə dəfə daxil ola bilər. b altsözünün a sözünə bu cür daxil edilməsinin nəticəsi olan a_1ba_2 -dən c-yə keçid a_1ca_2 sözü olacaq.

İndi isə mülahizələr hesabının əlifbasına baxaq.

Mülahizələr hesabının əlifbası, ənənəvi olaraq, sonsuz sayda mülahizələr çoxluğundan (onları kiçik hərflərlə işarə edəcəyik), {"doğru"-D, "yalan"-Y} məntiqi doğruluq qiymətlərindən və cədvəl 4.1-də verilmiş beş bağlayıcıdan ibarətdir.

Cədvəl 4.1

Məntiqi bağlayıcılar			
Adları	Simvolik işarələri	Tipləri	Təbii dildə adı
inkar	$\neg$	unar	deyil
konyunksiya	$\wedge$	binar	və
dizyunksiya	$\vee$	binar	və ya
implikasiya	$\Rightarrow$	binar	əgər-onda
ekvivalentlik	$\Leftrightarrow$	binar	eynilik

Məntiqi bağlayıcıları təyin olunma və dəyişmə oblastları {"doğru"-D, "yalan"-Y} çoxluğu olan funksiya kimi şərh edəcəyik.

Mülahizə dedikdə doğru və ya yalan olan təklif başa düşülür.

Məntiqi doğruluq simvolik olaraq, aşağıdakı kimi yazılır:

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

4.2.2. Mülahizələr hesabının sintaksisi

Mülahizələr hesabının lüğəti verilmiş elementar(atomar) mülahizələri bağlayıcılarla birləşdirib, mürəkkəb mülahizələr qurmağa imkan verir. Qurma qaydası dilin obyekti olan ifadələri müəyyən edir. Belə mülahizələr düstur adlanır. Təbii dildə bunun analogiyası frazadır.

Qurma qaydası aşağıdakılardan ibarətdir:

I. bazis: hər bir mülahizə düsturdur,

II. induksiya addımı: əgər P və Q-düsturdursa, onda $\neg$ P, $(P \wedge Q), (P \vee Q), (P \Rightarrow Q)$ və $(P \Leftrightarrow Q)$ -da düsturlardır.

III. məhdudiyyət: Düstur bazis və induksiya addımında müəyyən edilmiş qaydaların köməyilə birqiymətli olaraq alınır.

$((U \Rightarrow V) \wedge (V \Rightarrow U))$ düsturunu $(U \Leftrightarrow V)$ kimi işarə edəcəyik və ona ekvivalentlik münasibəti deyəcəyik.

Dairəvi mötərizə qurma qaydasının tətbiq olunma ardıcıllığıdır. Məsələn, $(p \wedge (q \vee r))$ düsturunda induksiya addımı iki dəfə tətbiq edilib: birinci dəfə q və r düsturlarından $(q \vee r)$ düsturunun qurulması, ikinci dəfə isə p və $(q \vee r)$ düsturlarından verilmiş $(p \wedge (q \vee r))$ düsturunun alınması zamanı.

U düsturunun özü düstur olan istənilən altsözünə U düsturunun *altdüsturu* deyilir.

4.2.3. Mülahizələr hesabının semantikası

Məlum olduğu kimi, təbii və formal dillər sintaksis (söz yığımında frazanı ayırd edir) və semantikaya (frazaya müəyyən qiymət verir) malik olurlar. Bunlar mülahizələr hesabına da aiddirlər.

Semantika - düsturu izah edən qaydalar yığımıdır.

Qəbul edək ki, D - "doğru", Y – "yalan" məntiqi doğruluq qiymətləri, P və Q atomar mülahizələrdir(və yaxud, düsturlardır). Bu işarələmələrdən istifadə edərək, məntiqi bağlayıcıların(onlara operatorlar da deyirlər) semantikalarının şərhini verək.

İnkarın semantikası cədvəı 4.2.-də verilib.

Cədvəl 4.2

P	$\neg$P
D	Y
Y	D

Cədvəl 4.2-dən göründüyü kimi, "doğru" – nun inkarı "yalan", "yalan" – ın inkarı isə "doğru"dur: $\neg$D=Y, $\neg$Y=D.

Binar məntiqi bağlayıcıların semantikası isə cədvəl 4.3. – də təsvir edilir.

Cədvəl 4.3

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$	ayırıcı dizyunk-siya
D	D	D	D	D	D	Y
D	Y	Y	D	Y	Y	D
Y	D	Y	D	D	Y	D
Y	Y	Y	Y	D	D	Y

Semantik cədvəllərin köməyilə mürəkkəb düsturların doğruluqlarının yoxlanılması zamanı verilmiş düsturda iştirak edən operandların sayı (n) mühüm rola malikdir. Beləki, doğruluq qiymətləri cədvəlindəki sətirlərin sayının 2^n -ə bərarər olması şərti ciddi olaraq gözlənilməlidir.

Cədvəl 4.3-dən göründüyü kimi:

• P və Q atomar mülahizələrinin(düsturlarının) hər ikisi D - "doğru" – olduqda onların konyunksiyası - ($P \wedge Q$) mürəkkəb mülahizəsinin(düsturunun) məntiqi doğruluq qiyməti D - "doğru" –, digər 3 halda isə Y – "yalan" – olur;

• P və Q atomar mülahizələrinin(düsturlarının) hər ikisi Y – "yalan" – olduqda onların dizyunksiyası - ($P \vee Q$) mürəkkəb mülahizəsinin(düsturunun) məntiqi doğruluq qiyməti Y – "yalan" –, digər 3 halda isə D - "doğru"– olur;

• P atomar mülahizəsi(düsturu) D - "doğru" - və Q atomar mülahizəsi(düsturu) Y – "yalan" – olduqda onların implikasiyası - ($P \Rightarrow Q$) mürəkkəb mülahizəsinin(düsturunun) məntiqi doğruluq qiyməti Y – "yalan" –, digər 3 halda isə D - "doğru" – olur;

• P və Q atomar mülahizələrindən(düsturlarından) biri D - "doğru"– , digəri Y – "yalan" – olduqda onlar arasındakı ekvivalentlik operatoru vasitəsi ilə alınan - ($P \Leftrightarrow Q$) mürəkkəb mülahizəsinin(düsturunun) məntiqi doğruluq qiyməti Y – "yalan" –, digər 2 halda isə D - "doğru"– olur;

Qeyd edək ki, ənənəvi məntiqdə adi dizyunksiyadan istifadə olunur: "Ya P doğrudur, ya Q doğrudur, ya da hər ikisi doğrudur". Lakin təbii danışıq dilində ayırıcı dizyunksiyadan da istifadə olunur.

Misal: a) "O indi ya futbola baxır, ya da yuyunur";
b) "Ya qalib gələcəyik, ya da öləcəyik".

4.2.4. Bul cəbrinin qanunları

Riyazi məntiqin banisi böyük alman riyaziyyatçısı Qotfrid Vilhelm Leybnis (1646-1716) olmuşdur. O, insanlar arasındakı mübahisəli məsələlərin həllinin hesablamalar əsasında aparılmasına cəhd etmişdir; 1666-cı ildə ədədlərin (simvolların) ikilik rəqəmlərlə təsviri ideyası da ona məxsusdur. Q.V. Leybnisin qoyduğu fundament əsasında İrlandiya riyaziyyatçısı və məntiqçisi Corc Bul (1815-1864) ədədlərlə deyil, mülahizələr üzərində əməllərə dair cəbr yaratdı.

C. Bul $\wedge$ (konyunksiya), $\vee$ (dizyunksiya), $\neg$ (inkar) operatorlarına əsaslanaraq, yazdığı cəbr – qeyri-adi cəbr, sonralar isə onun şərəfinə olaraq, Bul cəbri adlandırılmışdır. Bul cəbri kompyuterin əsas sxemlərinin layihələndirilməsi və onların xassələrinin analizi zamanı istifadə olunur. Bul cəbrinin əsas qaydaları və yaxud qanunları aşağıdakılardır (eyniliklərdəki A,B,C – ixtiyari çoxluq; D,Y isə uyğun olaraq "doğru" və "yalan" məntiqi doğruluq qiymətləridir):

kommutativlik qanunları:

$$A \wedge B = B \wedge A,$$

$$A \vee B = B \vee A.$$

assosiativlik qanunları:

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C,$$

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C.$$

distributivlik qanunları:

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C),$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C).$$

Kommutativlik qanunu göstərir ki, operatorların yerini dəyişmək olar. Məsələn, "hava istidir və maşın qırmızıdır" və " maşın qırmızıdır və hava istidir" mülahizələrin hər ikisi eyni mənanı verir.

Bu qanunlardan aşağıdakı qanunlar da alınır:

tamamlama(involyusiya) qanunu:

$$\neg(\neg(A)) = A$$

idempotentlik qanunları:

$$A \wedge A = A;$$

$$A \vee A = A.$$

neytrallılıq qanunları:

$$A \wedge (B \vee \neg B) = A;$$

$$A \vee (B \wedge \neg B) = A.$$

udulma qanunları: $A \wedge (A \vee B) = A$ ... (4.1)

$$A \vee (A \wedge B) = A.$$

"Və" və "və ya" əməliyyatlarının xassələri:

$$A \wedge D = A;$$

$$A \wedge Y = Y;$$

$$A \vee Y = A;$$

$$A \vee D = D.$$

İnkarın xassələri:

$$A \wedge \neg A = Y;$$

$$A \vee \neg A = D.$$

İndi isə, udulma qanunlarından birinin (4.1-in) isbatına baxaq:

$A \wedge (A \vee B) = (A \vee Y) \wedge (A \vee B) = \{ \vee$ əməliyyatının xassələri $\} =$

$= A \vee (Y \wedge B) = \{$ distributivlik $\} =$

$= A \vee (B \wedge Y) = \{$ komutativlik $\} =$

$= A \wedge Y = \{ \wedge$ əməliyyatının xasələri $\} =$

$= A \quad \{ \vee$ əməliyyatının xassələri $\}$.

de-Morqan qanunları. de-Morqan qanunları düsturların inkarını sadələşdirməyə imkan verir. Onları asanlıqla doğruluq cədvəllərinin köməyilə yoxlamaq olar:

$$\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B),$$

$$\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B).$$

İnduksiya və assosiativliyi tətbiq etməklə alınır ki:

$$\neg(A \wedge B \wedge C \wedge \ldots) = (\neg A) \vee (\neg B) \vee (\neg C) \vee \ldots$$

Düsturun inkarını qurmaq üçün bütün düsturda işarə və operatorları dəyişmək lazımdır.

Məsələn:

$$\neg(\neg A \vee B) = \neg(\neg A) \wedge \neg B = A \wedge \neg B.$$

Paskal dilində aşağıdakı iki şərt eynigüclüdür:

while (($i < N$) $\wedge$ (A[i] <> x) $\wedge \neg$ marked [i]);

while $\neg$ (($i >= N$) $\vee$ (A[i] = x) $\vee$ marked [i]).

4.2.5. Mülahizələr hesabı və təbii dil

Qeyd etdiyimiz kimi, mülahizələr hesabında beş bağlayıcıdan(operatordan) ictifadə olunur. Digər tərəfdən, aşkardır ki, bu bağlayıcıların təbii dildə ekvivalentləri vardır.

Təbii dildəki "deyil" (inkar), "və", "və ya", "əgər - onda" bağlayıcıları ilk baxışdan adama elə gəlir ki, yuxarıdakı bağlayıcıları təyin edir. Məsələn, "Ya hava yaxşıdır, ya da yağış yağır" və "Ya yağış yağır, ya da hava yaxşıdır" frazaları sinonim kimi görünürlər. Əslində isə aşağıdakı frazalarla iş başqa tərzdədir:

"Onu dəhşət bürüdü və o, vəhşini öldürdü" və "O, vəhşini öldürdü və onu dəhşət bürüdü".

Beləki, buradakı "və" müəyyən zaman və səbəb nyuansını bildirir.

"Yer yaşdır" -q, ona görə ki, "yağış yağır" –p" mühakiməsi aşağıdakı kimi yazılır: $p \rightarrow q$.

Bunlar "ona görə ki" bağlayıcısının doğruluq funksiyalarına uyğun olmadığına daha bir misaldır.

Məntiqi dizyuksiyanın (MD) iki operandından heç olmasa biri doğru olduqda, onda o ayırmayan (birləşdirən) adlanır.

Təbii dildə "və ya" bağlayıcısı bəzən kənar edən (ayıran) rolunu görür. Məsələn, "Tam ədəd tək və ya cütdür" cümləsində bir şaxə düzgün olma alternatividir, ancaq o biri - yalandır.

İmplikasiya – çox vacib bağlayıcıdır. O mühakimələrin strukturunu əks etdirir (xüsusi halda riyazi). Onun birinci operandı istinad (və ya antesedent), ikincisi isə nəticə (və ya konsekvent) adlanır. Aydındır ki, əgər istinad doğrudursa, onda implikasiya nəticənin doğruluq qiymətini qəbul edir. Lakin təəccüblü budur ki, istinad yalan olduqda belə implikasiya doğru ola bilər.

İmplikasiya yeganə bağlayıcıdır ki, aşağıdakı tələbləri ödəyir:

- əgər birinci operand doğrudursa, onda doğruluq qiyməri ikinci operandın qiymətilə üst-üstə düşür;
- doğruluq qiyməti iki operanddan asılıdır;
- bağlayıcı kommutativ deyil.

Riyaziyyatda bəzən $\Rightarrow$ (bu bağlayıcı $\supset$, yaxud $\rightarrow$ kimi də işarə edilir) bağlayıcısını materiallı implikasiya adlandırırlar. O, riyazi mühakimədə əsas sayılır və teoremdə şərtlə (H) nəticəni (T) birləşdirir. Buna baxmayaraq, $H \supset T$ deyil, $H \Rightarrow T$ yazılışı daha yaxşıdır.

Eyni zamanda $C_1 \equiv C_2$ yox, $C_1 \Leftrightarrow C_2$ yazılışından daha geniş istifadə olunur.

Mülahizələr hesabı mülahizələr arasında xalis funksional-doğru əlaqəni ifadə edir.

Funksional-doğru ifadə özünün doğruluq cədvəli ilə verilir. n operandlı ifadə üçün bu cədvəl 2^n sayda sətrə malik olur. Deməli, binar və unar əlaqələrdən başqa n-ar əlaqələr də mövcuddur.

Ənənəvi bağlayıcılardan başqa aşağıdakı kimi təyin edilən və $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ simvolu ilə işarə edilən "tərifə görə bərabərlik" bağlayıcısı da var:

$$(X \vee Y) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\neg X \Rightarrow Y),$$

$$(X \wedge Y) \overset{def}{\Leftrightarrow} (X \Rightarrow \neg Y),$$

$$(X \Leftrightarrow Y) \overset{def}{\Leftrightarrow} ((X \Rightarrow Y) \wedge (Y \Rightarrow X)).$$

4.2.6. Düzgün qurulmuş düsturlar

Məlum olduğu kimi, doğruluq qiymətinə malik mühakimə subyektdən (və yaxud bir neçə arqumentdən) və predikatdan ibarətdir.

Arqumentlər dedikdə ifadənin məna kəsb etdiyi sərhədlərdə dəyişən sözlər başa düşülür. Məsələn, "Siz kitab oxuyursunuz"- cümləsində "kitab" sözünü "qəzet", "siz" sözünü- "mən" sözü ilə əvəz etmək olar və yeni ifadə məna kəsb edər: "Mən qəzet oxuyuram". Əlbəttə, burada feil təsrif olunur.

Predikat ifadənin elə hissəsidir ki, onun dəyişməsi mənanın ciddi dəyişməsinə təsir göstərir və hətta onu mənasız edir. Təsəvvür edin ki, həmin cümlədə "oxuyursunuz" sözünü "yeyirsiniz" sözü ilə əvəz etsək nə baş verər.

Mülahizələr hesabında mürəkkəb düsturlar atomar mülahizələri məntiqi bağlayıcıların köməyilə kombinasiya etməklə alınır.

Ayrı-ayrı komponentlərə ayrıla bilməyən mülahizə *atomar* adlanır.

Düzgün qurulmuş düstur (DQD) anlayışı məntiqi bağalyıcılara malik mürəkkəb düstürla əlaqəlidir. Məntiqin leksikonunda *p, q* və *r* ilə mövqelənmiş(mövqeli) dəyişənlər işarə edilir. Bu dəyişənlərdən DQD-ın ifadə olunması üçün istifadə edilir.

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, *düzgün qurulmuş düstur* ancaq və ancaq aşağıdakı iki qayda ilə təyin olunur:

- atomar mülahizəni təsvir edən simvol (məsələn, p) DQD-dur;
- əgər p , q - DQD-sa, onda $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \Rightarrow q$ və $p \Leftrightarrow q$ də düzgün qurulmuş düstur olacaqdır.

DQD-run doğruluq qiyməti onun *semantikası* və ya mənası adlanır.

Fərz edək ki, p ilə ifadə edilmiş düzgün qurulmuş düstur hər hansı İ konkret şərhinə görə doğrudur. İ şərhinin p dəyişənini doğru etməsi faktını aşağıdakı üsullardan biri ilə ifadə etmək olar:

İ şərhi p-ni ödəyir;
İ şərhi p-nin modelidir;
İ şərhi p-ni təsdiq edir;
İ şərhi p-yə görə doğrudur.

Model elə şərhdir ki, onunla hər bir aksiom doğru olur.

4.2.7. Düsturların növləri

Qeyd etdiyimiz kimi, mülahizələr hesabında hər bir düstur {"doğru"-D, "yalan"-Y} məntiqi doğruluq qiymətləri çoxluğunda təyin olunmuş və dəyişmə oblastı da həmin çoxluqdan olan, verilmiş düsturun qurulması qaydalarına

əsasən $\neg$(inkar), $\wedge$(konyunksiya), $\vee$(dizyunksiya), $\Rightarrow$(implikasiya) operatorları vasitəsilə qurulan, funksiya kimi şərh edilir. Belə funksiyanı, həmçinin, verilən düsturun doğruluq cədvəli adlandıracağıq. Yəni, mülahizələr hesabında düsruru cədvəl vasitəsilə verilmiş funksiya kimi başa düşəcəyik.

Dəyişənlərin {"doğru"-D, "yalan"-Y} çoxluğunda verilən qiymətlərində U düsturunun qiyməti, bu düstura uyğun olan funksiyanın dəyişənlərin həmin qiymətlərindəki qiymətinə deyilir.

Əgər dəyişənlərin istənilən qiymətlərində U düsturunun qiyməti V düsturunun qiyməti ilə üst-üstə düşərsə, onda U və V düsturları *ekvivalent* adlanır. U və V düsturlarının ekvivalentlik münasibəti $U \sim V$ kimi işarə edilir.

Yerinə yetirilə bilən və ümuməhəmiyyətli düsturlar. Düstur o vaxt semantik yerinə yetirilə bilən (və yaxud, sadəcə olaraq, yerinə yetirilə bilən) adlanır ki, onu modelləşdirmək, yəni "doğruluq" qiymətlərinə görə izah etmək mümkün olsun. Məsələn, $(p \wedge q)$ və $(p \vee q)$ düsturları semantik yerinə yetirilə biləndirlər. Odur ki, aşağıdakı tərifi söyləmək olar.

Əgər dəyişənlərin elə qiymətləri yığımı mövcuddursa ki, həmin qiymətlərdə U düsturu "doğru" qiymətini alsın, onda U düsturuna *yerinə yetirilə(icra oluna) bilən düstur* deyilir.

Əgər dəyişənlərin elə qiymətləri yığımı mövcuddursa ki, həmin qiymətlərdə U düsturu "yalan" qiymətini alsın, onda U düsturuna *yalana çıxarıla(təkzib oluna) bilən düstur* deyilir.

Elə düzgün qurulmuş düsturlar mövcuddur ki, onların doğruluq qiyməti təşkil olduqları atomar düsturların doğruluq qiymətlərindən asılı deyil. Məsələn, $(a \vee \neg a)$ - düzgün qurulmuş düsturunun qiyməti a -dan asılı olmadan həmişə doğrudur. Belə düzgün qurulmuş düstur eyniliklə doğru adlanır. Ona *tavtologiya* deyirlər.

Dediklərimizə əsasən aşağıdakı tərifi söyləmək olar.

Dəyişənlərin bütün yığımlardakı qiymətlərində "doğru" qiymətini alan düstur eyniliklə doğru və ya *tavtologiya* adlanır.

Digər tərəfdən $b \wedge \neg b$ -düzgün qurulmuş düsturunun doğruluq qiyməti b-nin qiymətindən asılı olmayaraq, həmişə yalandır. Belə eynilklə yalan düzgün qurulmuş düstura deyirlər ki, o ardıcıl deyil. Onu *ziddiyyətli(təzadlı) düstur* adlandırırlar. Odur ki, aşağıdakı tərifi söyləmək olar.

Buna görə də aşağıdakı tərifi söyləmək olar.

Dəyişənlərin bütün yığımlardakı qiymətlərində "yalan" qiymətini alan düstur eyniliklə yalan və ya *ziddiyyətlı* adlanır.

4.2.8. Nəzəriyyə və aksiomlar

Mülahizələr hesabının metodlarını konkret biliklər oblastında tətbiq etmək üçün öncə bu oblastın strukturunu analiz etmək lazımdır. Analiz mərhələsində verilən oblastda fəaliyyət göstərən atomar mühakimələr və onlar arasındakı bağlayıcılar (qarşılıqlı əlaqələr) axtarılır. Belə uyğun atomar mühakimələrin seçilməsindən sonra hər bir mühakimə üçün işarələmələr aparmaq lazımdır. Bundan sonra düzgün qurulmuş düsturların köməyilə məntiqi qarşılıqlı əlaqələr yaradılır.

Bu yolla generasiya edilmiş düzgün qurulmuş düsturlar çoxluğu verilmiş biliklər oblastının nəzəriyyəsi, ayrılıqda hər bir DQD isə aksiomu adlanır.

Əgər nəzəriyyə verilmiş biliklər oblastını tamamilə adekvat şəkildə təsvir edirsə, onda həmin oblastdan olan ixtiyari fakt doğru olacaq, yəni bu nəzəriyyə aksiomların nəticəsi olacaqdır. Heç bir yalan fakt bu aksiomların nəticəsi olmayacaq. Əgər verilmiş biliklər oblastından olan bütün doğru faktlar nəzəriyyənin nəticəsi olarsa, onda belə nəzəriyyə tam adlanır. Nəzəriyyəyə aid *misala* baxaq.

Mülahizə:

Əgər "Cavid məntiqlə maraqlanır"sa - (d),
onda o növbəti semestrdə ya
"məntiq kursu üzrə əlavə dərsə yazılacaq" - (a)
ya da "o tənbəldir" - (b).
Əgər Cavid məntiqə dair ədəbiyyatı sərbəst öyrənirsə,
onda o məntiqlə maraqlanır.
"Cavid məntiqə dair ədəbiyyatı sərbəst öyrəndi" - (c).
Deməli, Cavid tənbəl deyil.

Nəzəriyyə:

$d \Rightarrow a \vee b$	(1) aksiom: *d* doğrudursa, onda ya *a* ya da *b* doğrudur.
$c \Rightarrow d$	(2) aksiom: əgər *c* doğrudursa, onda *d* də doğrudur.
c	(3) aksiom: *c* doğrudur.
$\neg b$	(4) aksiom: *b* yalandır.

Deməli, (1) ÷ (4) aksiomları ilə tədqiq edilən nəzəriyyə ardıcıl və tamdır.

4.2.9. Normal formalar

Normal formaları(düsturları) şərh etməmişdən öncə liter anlayışını verək.

Elementar(atomar) mülahizə və ya onun inkarına *liter* deyilir.

Sonlu sayda literin dizyuksiyasına dizyunkt deyilir. Yəni, $(l_1 \vee l_2 \vee l_3 \vee ... \vee l_n)$ və ya $\vee\{l_i \mid i=\overline{1,n}\}$, yaxud da $\{\vee_i l_i \mid i=\overline{1,n}\}$ şəklində olan düsturları *dizyunkt* adlandıracağıq.

İstənilən(atomar və ya mürəkkəb) sayda düsturun dizyunksiyası belə təyin edilir.

Tutaq ki, $U_1, U_2, ..., U_n$ – düsturlardır($n \geq 1$). Onda $U_1, U_2, ..., U_n$ düsturlarının dizyunksiyası $(...(U1 \vee U2 \vee, ..., \vee U_n)$ düsturuna deyilir və $(U1 \vee U2 \vee, ..., \vee U_n)$ - kimi işarə edilir.

Deməli, dizyunkt öz elementlərinin dizyunksiyasına ekvivalentdir. Bu səbəbdən demək olar ki, literlər çoxluğu dizyunkt əmələ gətirir.

Boş dizyunkt - yeganə yerinə yetirilməyən dizyunktdur və L kimi işarə olunur.

Konyunkt düsturları da dizyunkt düsturlarına uyğun olaraq, aşağıdakı şəkildə təyin edə bilərlər.

Sonlu sayda literin konyunksiyasına konyunkt deyilir. Yəni, $(l_1 \wedge l_2 \wedge l_3 \wedge ... \wedge l_n)$ və ya $\wedge \{l_i \mid i = \overline{1,n}\}$, yaxud da $\{\underset{i}{\wedge} l_i \mid i = \overline{1,n}\}$ şəklində olan düsturları *konyunkt* adlandıracağıq.

Dizyunksiyaya analoji olaraq, istənilən(atomar və ya mürəkkəb) sayda düsturun konyunksiyası isə belə təyin edilir.

Tutaq ki, $U_1, U_2, ..., U_n$ – düsturlardır$(n \geq 1)$. Onda $U_1, U_2, ..., U_n$ düsturlarının konyunksiyası $(...(U1 \wedge U2 \wedge, ..., \wedge U_n)$ düsturuna deyilir və $(U1 \wedge U2 \wedge, ..., \wedge U_n)$ - kimi işarə edilir.

Hər birisi mövqeli dəyişən və ya mövqeli dəyişənin inkarından ibarət olan düsturların ixtiyari konyunksiyası *elementar konyunksiya* adlanır.

Hər birisi mövqeli dəyişən və ya mövqeli dəyişənin inkarından ibarət olan düsturların ixtiyari dizyunksiyası *elementar dizyunksiya* adlanır.

Qeyd etdiyimiz kimi, düstura *forma* da deyirlər.

Sonlu sayda elementar dizyunksiyaların ixityari konyunksiyasına *konyunktiv normal forma*(KNF) deyilir.

Teorem. İstənilən düstur ona məntiqi ekvivalent olan konyunktiv normal formaya malikdir.

Sonlu sayda elementar konyunksiyaların ixtiyari dizyunksiyasına *dizyunktiv normal forma*(DNF) deyilir.

İsbat etmək olar ki, ixityari düstur ona məntiqi ekvivalent olan dizyunktiv normal formaya gətirilə bilər.

Əgər U formasının hər bir dəyişəni hər bir elementar konyunkta(sonlu sayda literin konyunksiyasına) düz bir dəfə özünün inkarı ilə və ya onsuz daxil olarsa, onda həmin forma *mükəmməl dizyunktiv normal forma* (MDNF) deyilir.

Əgər U formasının hər bir dəyişəni hər bir elementar dizyunkta(sonlu sayda literin dizyunksiyasına) düz bir dəfə özünün inkarı ilə və ya onsuz daxil olarsa, onda həmin forma *mükəmməl konyunktiv normal forma* (MKNF) deyilir.

Verilmiş U düsturuna(yəni, formasına) ekvivalent olan dizyunktiv normal formaya onun DNF-sı deyilir.

U düsturuna ekvivalent olan konyunktiv normal formaya U formasının KNF-sı deyilir.

Verilmiş U düsturuna ekvivalent olan mükəmməl dizyunktiv normal formaya U -nun MDNF-sı deyilir.

U düsturuna ekvivalent olan mükəmməl konyunktiv normal formaya U formasının MKNF-sı deyilir.

4.3. Formal məntiq və informatika

Qeyd etdiyimiz kimi, məntiq - insan təfəkkürünün müəyyən dərketmə aspekti haqqında elm kimi meydana gəlmişdir. Buna baxmayaraq, məntiq dərketmə prosesinin mühakimə metodlarına aid olan formal tərəfi ilə yanaşı, eyni zamanda, insanın ağlına sığmayan müəyyən obyektiv faktorları da ifadə edir[4].

İnformatika isə müasir anlamda nəinki informasiyanın toplanması, emalı, saxlanılması, təqdimatı vasitə və üsullarını, habelə, hesablama maşınları və sistemlərinin hazırlanıb quraşdırılmasını, həmçinin, müxtəlif sahələrdə qərarlar qəbulu üçün metodların işlən-məsini də əhatə edir. İnsanların informasiyalaşdırılmalarından məhz onların sosial aktivliyi, iş qabiliyyətləri və s. artdığından informasiyalaşdırma prosesini daim inkişaf etdirmək çox zəruridir. Odur ki, informatika, əsasən, kompyuter vasitəsilə hesablama haqqında elm kimi meydana gəlib inkişaf etdirildiyindən, kompyuterin əsasını təşkil edən məntiqi əməliyyatları, hal-hazırda isə hətta formal məntiqi belə əhatə etməkdə olan müasir hesablama komplekslәri arasındakı sıx әlaqәlәri araşdırmaq böyük maraq kәsb edir.

Formal mәntiq әsrlәr boyu fәlsәfә ilә sıx bağlı olmuşdur. Daha dәqiq desәk, o fәlsәfәnin tәrkib hissәsi kimi uzun tarixi yol keçmişdir. Elmi biliklәrin inkişafı bu әlaqәnin müәyyәn dәyişikliyә mәruz qalmasının nәticәsidir. Belәki, iyirminci әsrin ortalarında mәntiq riyaziyyatda әsaslandırma alәtinә, sonralar isә kibernetikada süni intellekt mәsәlәlәrinin hәlli vasitәsinә çevrilmişdir. Artıq mәntiq elmi informasiya sistemlәrinin nәzәri cәhәtdәn әsaslandırılmasının metodologiyasına çevrilmişdir.

Qeyd edilәn bu meyl formal mәntiqi qnoseoloji vә metadoloji problemlә üzlәşdirir. Başqa tәrzdә desәk, mәntiq fәlsәfi vә riyazi deyil, artıq sәrbәst elm sahәsi kimi qәrarlaşmışdır. Hәm riyazi, hәm dә fәlsәfi mәntiq öz predmetinә görә eynidir, abstrakt tәfәkkür vә dәrk edilә bilәn fikir onun әsas mövzusudur. Әnәnәvi olaraq, mәntiq ancaq "düzgün mühakimә haqqında elm kimi" başa düşülürdü. Sonralar mәntiq dәrketmә vә nәzәri proqnozlaşdırmada mühüm rol oynadı. Tәfәkkür vә dәrketmәnin mahiyyәtini qnesologiya vә psixologiya öyrәnir. Formal mәntiq isә qnesologiya vә psixologiyanın tәdqiq edilәn aspektlәrinә aydınlıq gәtirmәk üçün yeganә vasitәdir.

İnformatikaya uzun müddәt riyaziyyatın bir hissәsi kimi baxılmışdı. Mәntiq tarixәn formal vә riyazi mәntiq kimi 2 şaxәyә ayrılmışdı. Elә buna görә dә müasir formal mәntiq vә informatikanın qarşılıqlı әlaqәlәrini müәyyәnlәşdirmәk mühüm әhәmiyyәt kәsb etmәlidir.

Әslindә mәntiqdә ümumilәşdirmә vә ideallaşdırma әsasdır. Mәntiq obyekt vә subyektlәrin xassә vә münasibәtlәri arasındakı әlaqәlәri tәdqiq edir, mәntiqi nәticә özündә uzaqgörәnlik, mәqsәdәçatma, inkaretmә, ekvavilentlik, eyniyyәt, mövcudluq vә s. әlamәtlәri ehtiva edir.

Tәkzibedilmәz faktdır ki, mәntiq yeni nәsil kompyuterlәrin yaranmasından sonra daha aktuallıq kәsb edәcәkdir. Bu isә mәntiq vә informatikanın daxili әlaqә tükәnmәzliyinә dәlalәt edir.

4.4. Rezolyusiya prinsipi

Konyunktiv normal formaların yerinә yetirilәn olmasının yoxlanılması üçün ümumi sәmәrәli kriteriya mövcud deyil. Buna baxmayaraq, dizyunktlar çoxluğunun yerinә yetirilә bilәn olmadığını aşkara çıxaran rahat metod var. Doğrudan da, dizyunktlar çoxluğu yerinә yetirilә bilәn deyil ancaq vә ancaq o vaxt ki, boş dizyunkt (Y-"yalan") ondan mәntiqi nәticә kimi alınsın. Belәliklә, S çoxluğunun yerinә yetirilәn olmadığını S-dәn boş dizyunktu çıxarana qәdәr mәntiqi nәticә almaqla yoxlamaq olar.

Mәntiqi nәticә çıxarmaq üçün çox sadә mühakimә sxemindәn istifadә etmәk olar.

Tutaq ki, A, B vә X -düsturlardır. Fәrz edәk ki, $(A \vee X)$ vә $(B \vee \neg X)$ düsturları doğrudur. Әgәr X dә doğrudursa, onda buradan almaq olar ki, B dә doğrudur. Әksinә, әgәr X yalandırsa, onda A doğrudur. Hәr iki hala $(A \vee X)$ doğrudur. Yәni:

$$\{A \vee X, B \vee \neg X\} = A \vee B \qquad (4.2)$$

Xüsusi halda X -mülahizә, A vә B dizyunktlar olduqda, (4.2) rezolyusiya qaydası adlanır.

Rezolyusiya metodu deduksiya prinsipinin yerinә yetirilmәsi zamanı isbat mexanizmi kimi istifadә edilir.

Mәntiqi deduksiya adlanan fundamental problem aşağıdakından ibarәtdir:

C düsturunun E düsturlar çoxluğunun mәntiqi nәticәsi olub-olmadığını tәyin etmәli.

C düsturu ancaq və ancaq o vaxt sonlu E çoxluğunun məntiqi nəticəsi olur ki, $E \cup \{\neg C\}$ - yerinə yetirilə bilməyən olsun.

Deyilənlər aşağıdakı teoremlə ümumiləşdirilir.

Teorem. S düsturlar çoxluğu ancaq və ancaq o vaxt yerinə yetirilə biləndir ki, onun bütün sonlu altçoxluqları yerinə yetirilə bilən olsun.

4.5. Predikatlar hesabı

Mülahizələr hesabı mühakimələr çoxluğunun ancaq kiçik bir hissəsini formalaşdırmağa imkan verir. Məsələn, aşağıdakı mühakimələrə baxaq:

Bütün insanlar öləcək;
Sokrat insandır; (4.3)
deməli, Sokrat öləcək.

Bu mühakimə doğrudür, lakin mülahizələr məntiqi çərçivəsindən kənara çıxır. Onda, üç mülahizə var:

p : Bütün insanlar öləcək,
q : Sokrat insandır, (4.4)
r : Sokrat öləcək.

Məntiqi bağlayıcılardan istifadə edərək, aşağıdakı düsturu yazmaq olar: $((p \wedge q) \Rightarrow r)$. Bu düstur ümumi əhəmiyyətli deyil. Beləliklə, mülahizələr məntiqi (4.4) mühakiməsini korrekt şəkildə ifadə etməyə imkan vermir. Bu müvəffəqiyyətsizliyin səbəbi aşkardır. Mülahizələr mətniqi mülahizələri və mülahizələri əlaqələndirən bağlayıcıları modelləşdirir. Bu mənada mülahizə bölünməz obyektdir.

Eyni zamanda aydındır ki, təbii dildə mülahizə daxili struktura malikdir. Başqa sözlə desək, mülahizənin qiyməti ən azı birinci yaxınlaşmada onun komponentlərinin qiymətlərinin funksiyasıdır.

(4.4) mətnini semantika baxımından aşağıdakı kimi də yazmaq olar: insan olmaq ölümə məruz olmaq deməkdir.

Bu formada deyiliş tam qənaətbəxş deyil: belə təsəvvür yaranır ki, ona $A \Rightarrow B$ tip düstur uyğundur. Bu belə deyil: olmaq (mövcudluq) sözü A isitnadı ilə B nəticəsi arasında əlaqə yaradır. Sokrat sözü də sonuncu iki sətr arasında analoji əlaqə yaradır. Buna baxmayaraq, bu iki hal müxtəlifdir: olmaq – qeyri müəyyənlikdir, Sokrat – konkret üzvdür. Riyazi dildə deyirlər ki, olmaq – dəyişəndir (onu x ilə işarə edək), onda Sokrat – sabitdir.

Beləliklə, (4.4) mətninin ən yaxşı real strukturu aşağıdakı kimi olacaq:

əgər bütün x-lər üçün x insandırsa,
onda x ölümə məhkumdur (öləcək);
Sokrat insandır; (4.5)
(deməli), Sokrat öləcək.

İndi artıq müxtəlif təşkiledicilər ehtiyatını doldurmaq olar. Yəni, mülahizələr və bağlayıcıların çoxaldılması üçün müxtəlif təzə komponentlər alırıq: "bütün", "x", "Sokrat", "insandır", "öləcək".

"Bütün x-lər üçün A-dır" ifadəsi kvantordur. Onun inkarı isə "heç olmazsa elə bir x var ki, $\neg$ A-dır" ifadəsidir.

Deməli, mövcudluq kvantoru lazımdır. Digər mümkün kvantorlar aşağıdakılardır:

Demək olar ki, hamısı üçün...;
Düz biri üçün...;
Düz biri mövcuddur...;
Birdən çox mövcud deyil...;
Çox mövcuddur...;
Sonsuz sayda çox mövcuddur...;
Düz beşi mövcuddur... ; və s.

Biz hələlik "hamısı üçün" kvantoru ilə kifayətlənək. "Hamısı üçün" kvantorunu "ixtiyari", "c - insandır" mülahizəsini N(c), "d - öləndir"-i isə M(d) ilə işarə edək. Beləliklə, yarımformal mühakimə yaranır:

$x(N(x) \Rightarrow M(x))$ və N(Sokrat) isə, onda alınır ki, M(Sokrat).

Düsturların görünüşündən başa düşmək olar ki, M və N biryerli predikat sabitləridir. Yəni, M və N vahid (eyni) arqumentə malik olur. Əksinə, heç cür alınmır ki, "Sokrat" sabitdir.

İndi isə predikatlar hesabı məntiqinin formalaşması ilə məşğul olaq. Öncə predikatlar hesabı məntiqi dilini şərh edək.

4.5.1. Predikatlar hesabının əsas elementləri

Predikatlar hesabının əsas elementlərinə *dəyişənlər, fərdi(individ) sabitlər, predikat sabitləri, məntiqi bağlayıcılar* ($\neg$, $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$) , $\forall$ - *ümumilik* (hamısı üçün) *və* $\exists$ - *mövcudluq*(bəziləri üçün) *kvantorları* daxildir. Mülahizələr dili prediaktlar dilinə daxildir. Bu sıfır yerli (arqumentsiz) predikat sabitidir. İndivid sabitləri funksional sabit kimi daha ümumi anlayışla əvəz edək. İndivid sabiti, sadəcə olaraq, sıfır yerli funksional sabitidir. Müəyyən sayda arlığa(yerə,arqumentə) malik funksional sabit predikat sabitidir. Aşağıdakı leksikonu qəbul edək:

x, y, z - dəyişənlər,
a, b, c - individ sabitlər,
f, g, h - funksional sabitlər,
p, q, r - mülahizələr,
P, Q, R - predikat sabitləri.

Mülahizələr hesabında hər bir atomar (elementar) simvol (P,Q və s.) hər hansı mürəkkəblikli mülahizəni bildirir. Bu zaman ayrıca mühakimənin komponentlərinə çıxış almaq mümkün olmur. Predikatlar hesabı isə bu çıxışı mümkünlü edir. Məsələn, "Bazar ertəsi yağış yağdı" cümləsini P mülahizə simvolu qəbul etmək əvəzinə gün və hava arasındakı münasibəti ifadə edən aşağıdakı predikatı yaratmaq olar: hava (bazar ertəsi, yağış). Çıxarış qaydaları vasitəsilə predikatlar hesabının (PH) ifadələrini onların komponentlərinə bilavasitə müraciət edərək, yeni cümlə yaratmaqla dəyişmək olar.

Bundan başqa, PH ifadəyə dəyişən əlavə etməyə imkan verir. Dəyişənlər məntiqi obyektlər siniflərinə nisbətən ümumiləşdirilmiş təkliflər yaratmağa kömək edir. Məsələn, X-hərfi günü ifadə edirsə, X-ın bütün qiymətləri üçün demək olar ki, hava (X, yağış) düsturu doğrudur, yəni hər gün yağış yağır.

Predikatlar hesabı deklarativdir, yəni hər bir ifadəyə baxış zamanı qəbul edilmiş ardıcıllıq və ya sinxronlaşdırma mövcud deyil.

Bir tərtibli predikatorlar hesabı predmet sahəsinin obyektlərinə uyğun dəyişənləri kvantor işarələri ilə əlaqələndirməyə imkan yaradır, məsələn: $\forall$(X).

Lakin aşağıdakı yazılış bir tərtibli predikatlar hesabında düzgün qurulmuş ifadə deyil:

$$\forall(X)\ X(Y,Z).$$

Bu və ya digər tip ifadələr ancaq yüksək tərtibli predikatlar hesabında mənaya malikdirlər.

4.5.2. Predikatlar hesabının sintaksisi

Daxil etdiyimiz lüğət - term, forma və kvantlaşmaları, həmçinin, atom və düsturları təyin etməyə imkan verir. İndi uyğun qurma qaydalarını şərh edək.

- İstənilən dəyişənə və istənilən funksional formaya term deyilir.
- Müvafiq sayda termlərlə birləşən funksional sabitə funksional düstur(forma) deyilir.
- Əgər f – n-yerli funksional sabitdirsə, və $t_1,t_2,...,t_n$ termlərdirsə, onda uyğun funksional forma adətən $f(t_1,t_2,...,t_n)$ ilə işarə olunur. Əgər n=0 isə, onda $f(\,)$ əvəzinə f yazılır.
- Müvafiq sayda termlərlə birləşən predikat sabitə predikat forma deyilir. Əgər P – m-yerli predikat sabiti və $t_1,t_2,...,t_n$ termlər isə, onda uyğun predikat forma, adətən, $P(t_1,t_2,...,t_n)$ ilə işarə edilir. m=0 olduqda, $P(\,)$ əvəzinə P yazılır.

• Predikat formaya və ya hər hansı bərabərliyə, yəni S=t şəkilli ifadəyə (burada S,t - termlərdir), atom deyilir.

• Düstur anlayışı aşağıdakı qaydalarla təyin olunur:

- atom düsturdur;
- əgər A və B düsturdursa, onda $\neg A$, $(A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B)$ və $(A \Leftrightarrow B)$-də düsturdurlar;
- əgər A düstur, x -dəyişəndirsə, onda $\forall xA$ və $\exists xA$ da düsturdurlar.

Qeyd edək ki, bəzən "funksional forma" və "predikat forma" ifadələri əvəzinə uyğun olaraq "funksiya" və "predikat" sözləri işlədilir.

Göründüyü kimi, mülahizələr hesabı predikatlar hesabından, əsasən, term və kvantorlarla zənginliyə görə fərqlənir.

4.5.3. Predikatlar hesabının semantikası

Predikatlar hesabı düsturları da mülahizələr hesabı düsturları kimi doğruluq qiymətləri ala bilər. Buna baxmayaraq, predikatlar hesabı düsturları ancaq altdüsturlardan deyil, eyni zamanda termlərdən də təşkil olunur. Deməli, termləri də şərh etmək zəruridir. Term intuitiv olaraq, obyekt mənasını verir.

$\dot{I}$ – interpretasiyası (şərhi) aşağıdakı xassələrə malik (R, I_c, I_v) - üçlüyüdür:

1) R - boş olmayan interpretasiya oblastıdır;

2) I_c - hər bir n-ölçülü funksional f sabitinə R -dən olan n-dən hər hansı $I_c(f)$ funksiyasını və hər bir m-ölçülü predikat P sabitinə {Y-"yalan",D-"doğru"} çoxluğunda R^m -dən hər hansı $I_c(P)$ funksiyasını qarşı qoyur;

3) I_v - hər bir dəyişənə R -dən hər hansı elementi qarşı qoyan funksiyadır.

İndi $I = (R, I_c, I_v)$ şərhi üçün elə qaydalar vermək olar ki, hər bir A düsturuna uyğun I(A) doğruluq qiymətini, hər bir t terminə isə R-dən I(t) elementini qarşı qoysun. Aşağıdakıları təyin edək:

- əgər x -sərbəst dəyişəndirsə, onda $I(x) \overset{def}{\Leftrightarrow} I_v(x)$;
- əgər f - n-ölçülü funksional sabit, $t_1,...,t_n$ isə termlərdirsə, onda $I(f(t_1,...,t_n)) \overset{def}{\Leftrightarrow} (I_c(f))(I(t_1),\ldots,I(t_n))$;
- əgər P - m-ölçülü predikat sabit, $t_1,...,t_m$ - termlərdirsə, onda $I(P(t_1,...,t_m)) \overset{def}{\Leftrightarrow} (I_c(P))(I(t_1),\ldots,I(t_m))$;
- əgər S və t termdirsə, onda I(S)= I(t) olduqda I(S=t) D("doğru")-dur, əks təqdirdə Y("yalan")-dır;
- əgər A və B düsturdursa, onda $\neg A$, $(A \wedge B), (A \vee B), (A \Rightarrow B)$ və $(A \Leftrightarrow B)$ -də mülahizələr hesabındakı kimi şərh olunur, yəni, onlar da düsturdurlar.

Ümumilik və mövcudluq kvantorları ilə məntiqi bağlayıcılar arasında aşağıdakı düsturlar möcuddur:

a) $\forall$ - ümumilik kvantoru üçün:

$$(\forall xA \wedge \forall xB) \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B);$$
$$(\forall xA \vee \forall xB) \Rightarrow \forall x(A \vee B);$$
$$\forall x(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall xA \Rightarrow \forall xB);$$
$$\forall x(A \Leftrightarrow B) \Rightarrow (\forall xA \Leftrightarrow \forall xB).$$

b) $\exists$ - mövcudluq kvantoru üçün:

$$\exists x(A \vee B) \Leftrightarrow (\exists xA \vee \exists xB);$$
$$\exists x(A \wedge B) \Rightarrow (\exists xA \wedge \exists xB);$$
$$\exists x(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\exists xA \Rightarrow \exists xB).$$

c) $\forall$ - ümumilik və $\exists$- mövcudluq kvantorları üçün:

$$\forall x \neg A \Leftrightarrow \neg \exists xA.$$

Predikatlar hesabında da *ikilik prinsipi* var. Belə ki, hər hansı $\Rightarrow$ ("implikasiya" bağlayıcısı) daxil olmayan məntiqi ekvivalentlikdə D("doğru") və Y("yalan") doğruluq qiymətləri, $\wedge$ ("konyunksiya" məntiqi bağlayıcısı), $\vee$ ("dizyunksiya" məntiqi bağlayıcısı), $\forall$ (ümumilik kvantoru) və $\exists$ (mövcudluq kvantoru) simvollarının yerlərini dəyişsək, yenə də məntiqi ekvivalentlik alarıq.

Müxtəlif kvantorlar arasında da aşağıdakı mühüm münasibətlər vardır:

$$\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A;$$

$$\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A;$$

$$\exists x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \exists x A.$$

Nəhayət, aşağıdakı qayda onu göstərir ki, predikatlar hesabı doğrudan da mülahizələr hesabının genişləndirilməsidir.

Qayda. Əgər $S(A_1,...,A_n)$ mülahizələr hesabının ümumiəhəmiyyətli sxemidirsə, onda o, həmçinin, predikatlar hesabının ümumiəhəmiyyətli sxemidir.

Mülahizələr hesabının ümumiəhəmiyyətli $\neg\neg A \Leftrightarrow A$ sxemindən nəinki $\neg\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$, həmçinin də, $\neg\neg \forall x P(x) \Leftrightarrow \forall x P(x)$ alınır.

4.5.3.1. Predikatlar hesabında çıxarış qaydaları

Predikatlar hesabının semantikası məntiqi çıxarış nəzəriyyəsinin formalaşdırılmasının əsasını təmin edir. Predikatlar hesabının əsas xassəsi belədir: doğru təkliflər yığımından yeni doğru təkliflərin məntiqi çıxarışının mümkünlüyü. Məntiqi çıxarılan təkliflər (ifadələr) korrektdirlər, çünki onlar əvvəlki mərhələlərin ifadələrinin hamısı ilə uzlaşandırlar.

Təklifi doğru şərh edən və bu təklifi ödəyən ifadələr yığımının hər bir elementini ödəyən şərh (interpretasiya) həmin ifadələr yığımını da ödəyir. X ifadəsi məntiqi olaraq predikatlar

hesabının S ifadəsi yığımından alınır o vaxt ki, S yığımını ödəyən hər bir şərh X -i də ödəsin. Bu təklif çıxarış qaydalarının düzgünlüyünün yoxlanılması üçün əsas verir: məntiqi çıxarış funksiyası predikatlar hesabının təkliflər yığımından məntiqi olaraq alınan yeni təkliflər doğurmalıdır.

"Məntiqi olaraq alınır"-sözlərinin mənasını doğru başa düşmək vacibdir: S yığımından X ifadəsinin məntiqi olaraq alınması onu bildirir ki, X S-in ilkin ifadələr yığımını ödəyən hər bir şərh üçün doğru olmalıdır. Bu onu göstərir ki, məsələn, B blokuna əlavə edilən predikatlar hesabının hər bir yeni ifadəsi B -də doğru olmalıdır. Predikatlar hesabının hər bir yeni ifadəsi bu ifadələr yığımının malik ola biləcəyi istənilən digər şərhlərdə də doğru olmalıdır.

"Məntiqi olaraq alınır" termini onu bildirmir ki, X ifadəsi S yığımından məntiqi surətdə çıxarılıb və yaxud X-i S-dən almaq mümkündür. Bu sadəcə onu bildirir ki, X ifadəsi S-i ödəyən istənilən şərh üçün doğrudur.

Lakin predikatlar sistemi sonsuz sayda mümkün interpretasiyalara malik olduğundan, bütün halların praktiki olaraq yoxlanılmasına çox nadir hallarda rast gəlinir. Çıxarış qaydaları hesablama nöqteyi-nəzərindən interpretasiyadan alınma zamanı ifadəni təyin etməyə imkan verir.

Çıxarış qaydaları verilmiş təkliflər əsasında PH-nın yeni təkliflərinin yaradılmasını təmin edir. Deməli, çıxarış qaydaları məntiqi təkliflərin sintaksis formalı dəyişənlərinə əsaslanan yeni təkliflər törədir. Əgər S məntiqi ifadələr çoxluğunda hər hansı çıxarış qaydasının köməyi ilə alınan hər bir X təklifi, həmçinin, S yığımından alınırsa, onda bu çıxarış qaydası *əsaslandırılmış* adlanır.

S-dən məntiqi olaraq alına bilən hər bir ifadəni hasil etməyə qadir olan çıxarış qaydaları sistemi *tam* adlanır. Məsələn, *modus ponens qaydası*(əgər İ interpretasiyasında doğru olan $P \rightarrow Q$ və P ifadələri verilibsə, onda Q ifadəsi də həmin interpretasiyada doğrudur) və rezolyusiya prinsipi əsaslandırılmış çıxarış qaydalarındandır, həmçinin, müvafiq strategiyalardan istifadə zamanı tamdırlar. Məntiqi çıxarış sistemləri, adətən, əsaslandırılmış çıxarış qaydalarından istifadə edirlər, lakin mühakimələrin evristik üsulları da mövcuddur. *Modus tollens qaydası* da var: əgər İ interpretasiyasında $P \rightarrow Q$ doğru, Q yalandırsa, onda $\neg P$ həmin interpretasiyada doğrudur.

Qeyd etdiyimiz fikirləri təriflər şəklində formalaşdıraq. Predikatlar hesabının *X* ifadəsi və *İ* interpretasiyası üçün aşağıdakı təriflər doğrudur.

Tərif 4.1. Əgər dəyişənlərin konkret qiymətlərində *X* ifadəsi *İ* interpretasiyasında "doğru" qiymətini alırsa, onda deyirlər ki, *İ X*-i ödəyir.

Tərif 4.2. Əgər *İ* interpretasiyası dəyişənlərin hamısı üçün *X* ifadəsini ödəyirsə, onda *İ*-yə *X*-in modeli deyilir.

Tərif 4.3. X ancaq və ancaq o vaxt yerinə yetirilə bilən sayılır ki, onu ödəyəcək interpretasiya və dəyişənin qiyməti mövcud olsun; əks halda X yerinə yetirilə bilməyən ifadə adlanır.

Tərif 4.4. İfadələr yığımı ancaq və ancaq o vaxt yerinə yetirilə bilən sayılır ki, onun hər bir elementini ödəyəcək interpretasiya və dəyişənlərin qiymətləri mövcud olsun.

Tərif 4.5. Əgər ifadələr yığımı yerinə yetirilə bilən deyilsə, onda o, ziddiyyətlidir.

Tərif 4.6. Əgər X ifadəsi bütün mümkün interpretasiyalar üçün "doğru" qiymətlərini alırsa, onda deyirlər ki, o gücə malikdir və adekvatdır. Məsələn, $\exists x(P(X) \wedge \neg P(X))$ ifadəsi ziddiyyətlidir, $\forall x(P(X) \vee \neg P(X))$ ifadəsi isə adekvatdır.

4.5.4. Əvəzləmə və konkretləşdirmə

Tərif. V – dəyişənlər çoxluğunun T - termlər çoxluğuna inikasına əvəzləmə deyilir.

σ əvəzləməsi o vaxt sonlu hesab olunur ki, σ (x) $\neq$x münasibəri V-dən olan ancaq sonlu sayda elementlər üçün

ödənilsin. Biz ancaq sonlu əvəzləmələrdən söhbət açacağıq. σ əvəzləməsi (x, σ(x)) cütlər çoxluğu ilə verilir, burada σ (x)$\neq$x.

Tutaq ki, t - term və σ - əvəzləmədir. σ [t] termi x və t dəyişənlərinin hər yerdə σ (x)-ə nəzərən onların obrazları ilə əvəz olunması ilə alınır.

Məsələn, əgər σ = {(x, f(x)), (y, g(y, z))} və

t = g(f(x),g(f(z),y)) isə,

onda

σ [t]=g(f(f(x)),g(f(z),g(x,z))) olar.

İki σ_1 və σ_2 əvəzləməsinin kompozisiyası $\sigma_2 \circ \sigma_1$ funksiyası olub, aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1)[t] = \sigma_2[\sigma_1[t]].$$

Bu kompozisiya qaydası bütün əvəzləmələr üçün məna kəsb edir və nəticədə yeni əvəzləmə verir.

Əğər *x* dəyişəni üçün σ_1 və σ_2 əvəzləmələrinin σ_1 (x) və σ_2 (x) termlərindən biri *x*-ə bərabərdirsə, onda σ_1 və σ_2-nin obrazları yeni bir əvəzləməni təyin edir. Bu əvəzləmə σ_1 və σ_2 əvəzləmələrinin birləşməsi adlanır və $\sigma_1 \cup \sigma_2$ kimi işarə olunur.

t_2-termi o vaxt t_1-terminin *konkretləşdirmə*si adlanır ki, $t_2 = \sigma\ [t_1]$ münasibətini ödəyən σ əvəzləməsi mövcud olsun.

t -term dəyişənləri çoxluğunu *var(t)* ilə işarə edək. *var(t)=0* şərti ödənildikdə *t* -termi konkretləşdirilmiş adlanır. "Konkretləşdirmədir" münasibəti $\prec$ kimi işarə olunur.

4.5.5. Qabaqcadan bildirilmiş və normal formalar

Mülahizələr məntiqində iki normal forma ilə tanış olduq: konyunktiv və dizyunktiv(KNF və DNF). Bunların köməyilə ümuməhəmiyyətli düsturlar qurulur. Analoji olaraq, predikatlar hesabında da normal düsturlar qurulur.

Qabaqcadan bildirilmiş forma dedikdə qarşısında önşəkilçi duran matrisdən ibarət düstur başa düşülür. Önşəkilçi (prefiks) dedikdə hər hansı sonlu kvantlaşma atdıcıllığı başa düşülür.

Düstur aşağıdakı kimi yazılır:

$Q_1x_1...Q_nx_nM$,

burada Q_i simvolu ya $\forall$, ya da $\exists$ kvantoru, M-matrisdir.

Teorem. İstənilən məntiqi düstur üçün ona məntiqi ekvivalent olan qabaqcadan bildirilmiş forma (düstur) var.

Tapşırıq 4.5. $\forall x[P(x) \wedge \forall y \exists x(\neg Q(x,y) \Rightarrow \forall zR(a,x,y))]$ düsturuna uyğun gələn qabaqcadan bildirilmiş düsturu qurmalı.

Həlli:

Axtarış alqoritminin mərhələləri aşağıdakılardır.

İmplikasiya bağlayıcısının kənar edilməsi:

$\forall x[P(x) \wedge \forall y \exists x(\neg\neg Q(x,y) \vee \forall zR(a,x,y))]$.

Addəyişmə:

$\forall x[P(x) \wedge \forall y \exists u(\neg\neg Q(u,y) \vee \forall zR(a,u,y))]$.

Artıq kvantifikasiyanın çıxarılması:

$\forall x[P(x) \wedge \forall y \exists u(\neg\neg Q(u,y) \vee R(a,u,y))]$.

İnkara aid tətbiq olunan qaydalar:

$\forall x[P(x) \wedge \forall y \exists u(Q(u,y) \vee R(a,u,y))]$.

Kvantifikasiyaların addəyişməsi:

$\forall xy[P(x) \wedge \exists u(Q(u,y) \vee R(a,u,y))]$,

$\forall x \forall y \exists u[P(x) \wedge (Q(u,y) \vee R(a,u,y))]$.

Qeyd. Bir düstura qarşı bir neçə ekvivalent qabaqcadan bildirilmiş düstur qoymaq olar.

Məsələn, aşağıdakı qabaqcadan bildirilmiş düsturlar ekvivalentdir:

$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ və $\forall x \forall y(P(x) \wedge Q(y))$.

4.5.6. Skolemov və klauzal formalar

Predikatlar hesabında istənilən düsturu Skolemov formaya gətirmək üçün aşağıdakı iki əməli yerinə yetirmək lazımıdır:

- verilən düsturu prefiks (önşəkilçi) və matrisdən ibarət qabaqcadan bildirlmiş formaya çevirmək;
- sonra matrisi konyunktiv normal formaya çevirmək.

Bu əməllərin nəticəsi qabaqcadan bildirilmiş qapalı forma olacaq.

Məsələn, qabaqcadan bildirilmiş qapalı

$A: \exists u \forall v \exists w \forall x \forall y \exists z M(u,v,w,x,y,z)$

formasına aşağıdakı Skolemov forması uyğundur:

$S_A: \forall v \forall x \forall y M(a,v,f(v),x,y,g(v,x,y))$.

Burada fərz edilir ki, *a, f* və *g* –lər M(u,v,w,x,y,z) matrisinə aid deyil.

Qeyd edək ki, $S_A \Rightarrow A$ düsturu ümuməhəmiyyətlidir. Buradan alınır ki, əgər A düsturu yerinə yetirilən deyilsə, onda S_A da yerinə yetirilən deyil.

Skolemov forması qabaqcadan bildirilmiş formadır. Onun önşəkilçisi ancaq $\forall$ - kvantifikasiyasıdır(yəni, $\forall$ - ümumilik kvantorunun tətbiqidir).

Digər tərəfdən, hər bir qabaqcadan bildirilmiş forma onun məxsusi Skolemov formasıdır. Buna görə də bu iki anlayışı birləşdirmək daha rahatdır.

Klauzal(şərtli) forma matrisi konyunktiv normal forma olan Skolemov formaya deyilir.

İxtiyari Skolemov forma klauzal formaya malikdir.

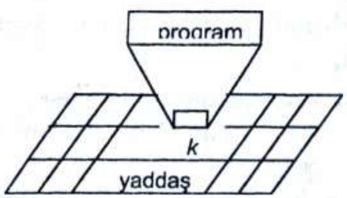
4.6. Proqramlaşdırmada məntiq

4.6.1. Alqoritmlər nəzəriyyəsi və məntiq – proqramlaşdırmanın valideyinləridir

Proqramlaşdırma, hesablama maşınları riyazı məntiqlə sıx əlaqədardır. Proqramla idarə olunan hesablama maşınları ideyasını ilk dəfə bolqar alimi S. Atanosov (1940) və alman alimi K. Tsuze (1942 -ci ildə) həyata keçirə bilmişlər. Onlar Ç. Bebbicin fikirlərindən, "hesablama" riyazi nəzəriyyəsindən və "alqoritmlər" nəzəriyyəsindən bəhrələnmişlər.

Alqoritmlər nəzəriyyəsində kompyuterin aparat hissəsində və proqramlaşdırma dillərində təşəkkül tapmış əsas konsepsiyaları tapıldı. Alqoritmin dörd əsas modeli riyazi baxımdan ekvivalent olsalar da, praktikada proqramlaşdırma zamanı müxtəlif istiqamətlər doğurur.

Birinci model – abstrakt hesablama maşınıdır (Alan Tyurinq və Emil Post maşınları, şəkil 4.1).



Şəkil 4.1. Abstrakt hesablama maşını

Hesablama maşını onda olan sonlu proqram əsasında işləyir. Bu proqramın əmrləri nömrələnir: n - verilən anda yerinə yetirilən əmrin nömrəsidir. Maşın xanalara bölünən yaddaşdakı məlumatı emal edir. Hər anda o, bir xananın məlumatına baxır.

Bu məlumatı *a* ilə işarə edək. Onda maşın hər hansı P(a) şərtini yoxlayır (Post modelində): a=0 və ya a≠0. Tyurinq nəzəriyyəsində xana özündə əvvəlcədən məlum olan əlifbanın müəyyən simvolunu (S) saxlayır və sadəcə olaraq, a=S şərtini yoxlayır. Şərt ödənildikdə maşın P(a)-ya uyğun n əmrinin hissəsinə keçir. O, *a* üzərində ixtiyari sadə f əməlini yerinə yetirir və qonşu xanalardan birinə keçir.

Tyurinq göstərmişdir ki, nəzəri olaraq yaddaşa qeyri-məhdud lent kimi baxmaq olar və hər bir xanada 1 və ya 0 olmalıdır. Onda yeganə mümkün əməl xananın məzmununu ya saxlamaq, ya da əksinə dəyişməkdən ibarət olur. Beləliklə, ixtiyari bir maşında hesablanıla bilən istənilən funksiya digərində də hesablanıla bilən olur.

Məntiqin tətbiqi üçün yaradılan vacib anlayışlar aşağıdakılardır:

Hesablanılan funksiya - odur ki, onun üçün qiymətini sonlu zamanda hesablayan abstrakt maşın olsun.

Həll edilə bilən məsələ - odur ki, ixtiyari ilk verienlərə görə məsələnin həllinin (sonlu mərhələdən sonra) olub-olmadığını müəyyənləşdirən maşın mövcud olsun.

Həll edilə bilməyən məsələ - odur ki, onun üçün belə abstrakt maşın olmasın.

İndiyə qədər mövcud olan bütün hesablama maşınları müəyyən mənada Tyurinq ideyalarına əsaslanır: onların yaddaşı fiziki olaraq hər biri "0"(sıfır) və ya "1"-i özündə saxlayan bitlərdən təşkil olunur.

Alqoritmin yazılmasında *ikinci model* rekursiv funksiyalardır. Bu ideyanın əsas konsepsiyaları struktur proqramlaşdırmada tətbiq edilir.

Üçüncü model siyahılarla hesablama ideyasıdır Bu ideya LİSP proqramlaşdırma dilində, funksional proqramlaşdırmada və digər perspektiv proqramlaşdırma sahələrində tətbiq olunur.

Dördüncü model A. A. Markovun normal alqoritmlər nəzəriyyəsidir. Bu ideya əsasında REFAL və digər simvol emal edən dillər meydana gəlmişdir (həmçinin, PROLOQ məntiqi proqramlaşdırma dili).

Əgər alqoritmlər nəzəriyyəsi müəyyən mənada müasir kompyuter və proqramlaşdırmanın anasıdırsa, onda riyazi məntiq özü-özündə onların atasıdır.

Deməli, məntiq - proqramlaşdırma anlayışının analizi alətidir.

4.6.2. Proqramların düzgünlüyünün isbatı haqqında

Proqramların düzgünlüyünün isbatı zamanı aşağıdakı iki əsas məsələyə baxılır.

Birincisi: Proqramların düzgünlüyünün isbatı nə üçün lazımdır?;

İkincisi: düzgün proqram anlayışı.

Tapşırıq 4.6. İki mənfi olmayan x və y ədədləri verilmişdir. x-in y-ə bölünüb-bölünmədiyini yoxlamalı:

Həlli:

Məsələnin həlli alqoritminin sxemi şəkil 4.2.-də təsvir edilir.

Şəkildə Y-"yalan", D-"doğru" sözlərini bildirir.

x-in y-ə bölünməsinin tərifini sxematik olaraq belə yazmaq olar.

$(\forall x \in Z)(\forall y \in Z)((x$ y-ə bölünür$) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists z \in Z)(z * y = x))$

$x \geq 0,\ y \geq 0$ olduğundan

$(\forall x \in N)(\forall y \in N)((x$ y-ə bölünür$) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists n \in N)(n * y = x))$.

Bu ideyanı aşağıdakı BASİC-proqram fraqmenti ilə həyata keçirmək olar:

```
10 n=-1
20 REPEAT
30 n=n+1
40 UNTİL n*y=x
```


Simvolik şəkildə isbatı belə yaza bilərik.

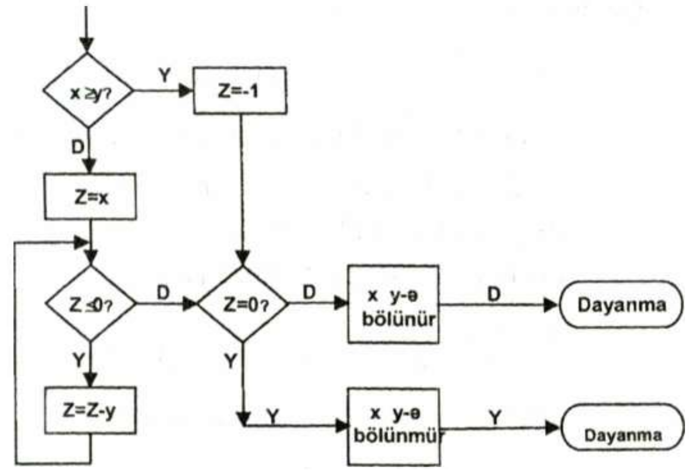
$$(n * y = x) \Leftrightarrow 0 = (x - \underbrace{y - y - y ... - y}_{n \text{ sayda}}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists n \in N)(n * y = x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists n \in N)(0 = (x - \underbrace{y - y - y ... - y}_{n \text{ sayda}}).$$

Ümumi halda düzgün proqram anlayışını verək.

Fərz edək ki, *a* - proqram, *P* - ilk verilənlərə aid və proqramın icrasından əvvəl doğru olan təklif, *R* – proqramın icrasından sonra doğru olacaq təkilifdir. *P* - *a* proqramının önşərti, *R* – sonşərti adlanır.



Şəkil 4.2.

İki cür düzgünlük var: *qismən və tam.*

Əgər *P*-nin *a* proqramının icrasından əvvəl doğru olduğu bütün hallarda və a proqramı icra oluna bildikdə, *R* sonşərti də doğru qiymət alırsa, onda *a* pqoramı *P* və *R*-ə nəzərən düzgün hesab olunur. Bu belə işarə olunur: *P{a}R.*

P doğru olduqda proqram P və R-ə nəzərən qisməm doğrudursa,həmçinin, proqram öz işini hökmən qurtarırsa, onda həmin proqram P və R-ə nəzərən *tam düzgün proqram* adlanır və belə işarə olunur:

$$P\{a\downarrow\}R.$$

Proqramın doğruluğunun isbatını əksini fərz etmə metodundan əlavə, riyazi induksiya metodu və zaman məntiqinin köməyi ilə də aparmaq olar.

Yoxlama tapşırıqları

4.1. Riyazi induksiya metodu ilə aşağıdakı təkliflərin doğruluqlarını isbat etməli:

a) $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, n>1 olduqda;

b) $(5\cdot 2^{3k-2}+3^{3k-1})$ ifadəsinin 19 – a tam bölündüyünü;

c) $2!\cdot 4!\cdot\ldots\cdot(2n)! > [(n+1)!]^n$, n>1 olduqda;

d) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

ç) $(1+a)^n \geq 1+na$, a>-1olduqda;

d) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

e) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\cdot n^2\cdot(n+1)^2$;

ə) $1^5+2^5+\ldots+n^5=\frac{1}{12}\cdot n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)$;

f) $n^{n+1} > (n+1)^n; n\geq 3$ olduqda.

4.2. Aşağıdakı ardıcıllıqların hər birinin düstur olub-olmadığını təyin etməli:

a) $(A_0, \wedge A_1)A_2 \neg A_3$;

b) $(A_0, \wedge A_1) \Rightarrow A_5$;

c) $((A_3 \Rightarrow A_0)\wedge A_0)$;

ç) $(((\neg A_0)\Rightarrow A_1)\Rightarrow\neg(A_1 \vee A_3))$.

4.3. Aşağıdakı ardıcıllıqların hər birindən mötərizələrin köməyi ilə neçə yolla düstur almaq olar?

a) $A_0 \Rightarrow \neg A_1 \vee A_1 \wedge A_2$;

b) $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow A_3 \neg A_1 \Rightarrow \neg A_2$.

4.4. Aşağıdakı düsturlar üçün doğruluq cədvəlləri qurmalı:

a) $((P\Rightarrow Q)\vee(P\Rightarrow(Q\wedge P)))$;

b) $(\neg(P\Rightarrow\neg(Q\wedge P))\Rightarrow(P\vee R))$;

c) $((P\vee P)\Rightarrow P)$;

ç) $(P\Rightarrow\neg\neg P))$;

d) $((P\Rightarrow(Q\Rightarrow R))\Rightarrow((P\Rightarrow Q)\Rightarrow(P\Rightarrow R)))$;

e) $(Q\Rightarrow(P\vee Q))$.

4.5. Aşağıdakı düsturların eyniliklə doğruluqlarını isbat etməli:

a) $(P\vee\neg P)$;

b) $((P\wedge Q)\Rightarrow P)$;

c) $(((P\Rightarrow Q)\Rightarrow P)\Rightarrow P)$;

ç) $(\neg P\Rightarrow(P\Rightarrow Q))$;

d) $(P\Rightarrow(P\vee Q))$.

4.6. Aşağıdakı eynilikləri isbat etməli:

a) $(A\vee A)\Leftrightarrow A$;

b) $(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$;

c) $\neg(A\wedge B)\Leftrightarrow(\neg A\vee\neg B)$;

ç) $(A\wedge(A\vee C)\wedge(B\vee C))\Leftrightarrow((A\wedge B)\vee(A\wedge C))$.

4.7. Aşağıdakılari dizyunktiv və konyunktiv normal formalara gətirməli:

a) $(((A\Rightarrow B)\Rightarrow(C\Rightarrow\neg A))\Rightarrow(\neg B\Rightarrow\neg C))$;

b) $(((((A\Rightarrow B)\Rightarrow\neg A)\Rightarrow\neg B)\Rightarrow\neg C)\Rightarrow C)$;

c) $((A\Rightarrow(B\Rightarrow C))\Rightarrow((A\Rightarrow\neg C)\Rightarrow(A\Rightarrow\neg B)))$.

4.8. Aşağıdakı düsturların eyniliklə doğruluqlarının şərtini müəyyən etməli:

a) $(\neg\exists U(X) \Rightarrow \neg\forall x U(x))$;

b) $(\neg\exists U(X) \Leftrightarrow \neg\forall x U(x))$;

c) $(\neg\exists U(X) \wedge V \Leftrightarrow \neg\forall x U(x) \wedge V)$;

ç) $(\neg\exists U(X) \Rightarrow V \Leftrightarrow \neg\forall x U(x) \Rightarrow V)$.

4.9. X,Y və Z -in hansı qiymətlərində aşağıdakı düsturlar "yalan" məntiqi doğruluq qiymətini olur?

a) $(((X \vee Y) \vee Z) \Rightarrow ((X \vee Y) \wedge (X \vee Z)))$;

b) $(((X \Rightarrow (Y \wedge Z)) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow \neg X)) \Rightarrow \neg Y)$.

FƏSİL 5. ALQORİTMLƏR NƏZƏRİYYƏSİ

5.1. Alqoritmlər nəzəriyyəsinin predmeti və əsas anlayışları

Alqoritmlər nəzəriyyəsi kibernetika ilə sıx əlaqədardır. Burada vacib yeri idarəetmə alqoritmlərinin öyrənilməsi tutur. Digər tərəfdən, kompyuterdən istifadə - məsələlərin alqoritmik həllərinin mümkünlüyü və funksiyaların qiymətlərinin səmərəli metodlarla hesablanılması ilə bağlıdır. Eyni zamanda, riyaziyyatda səmərəsiz üsulla təyin edilmiş funksiyalardan da geniş istifadə edilir.

Aşkardır ki, funksiyanın verilmə üsulları aşağıdakılardır: cədvəl üsulu, qrafik üsul, analitik üsul, sözlərlə təsvir üsulu. Bunlar isə ona gətirib çıxarır ki, bir sira funksiyaların (demək olar ki, analitik üsuldan başqa digər metodlarla təsvir edilmiş funksiyaların hamısı üçün) qiymətlərinin hesablanılması alqoritmin köməyi ilə mümkün olur.

Riyaziyyatın bir bölməsi olan alqoritmlər nəzəriyyəsi alqoritmlərin ümumi xassələrini öyrənir. O, alqoritm qurmağı öyrətmir. Klassik alqoritmlər nəzəriyyəsinin əsas mövzusu aşağıdakı sualı cavablandırmaqdan ibarətdr: "Verilən tip məsələlər üçün alqoritm qurmaq mümkündürmü?". Daha elmi dildə desək: "Verilən tip məsələlər alqoritmik olaraq həll edilə biləndirlərmi?".

Bütün bunlar onunla əlaqədardır ki:

- bütün məsələlər üçün onların həll alqoritmlərini qurmaq mümkün deyil;
- alqoritm qurmağın mümkünsüzlüyü haqqında ciddi riyazi çıxarış etmək üçün alqoritmin özü formal tərifə malik olmalıdır.

Ancaq alqoritm anlayışı təyinedilməmiş fundamental anlayışlar sırasına aiddir. Alqoritm anlayışını müxtəlif cür təfsir etmək olar.

Alqoritm anlayışının "dəqiqləşdirilmə"si. Bir qayda olaraq, verilən alqoritm üçün onu xarakterizə edən yeddi parametr ayırd edilir:

1) mümkün ilk verilənlər toplusu;
2) mümkün nəticələr toplusu;
3) mümkün aralıq nəticələr toplusu;
4) başlanğic qaydası;
5) bilavasitə emal qaydası;
6) qurtarma(sona çatma) qaydası;
7) nəticənin alınması qaydası.

Alqoritm anlayışının mümkün "dəqiqləşdirmə"ləri bu anlayışın mənasını dar çərçivə daxilinə gətirir. Hər bir belə "dəqiqləşdirmə" ondan ibarətdir ki, alqoritmin yuxarıda qeyd etdiyimiz 7 parametrinin hərəsi üçün həmin parametrin dəyişə biləcəyi aralıqda dəqiq olaraq bir neçə sinif təsvir edilir. Belə siniflərin seçimi isə bir "dəqiqləşdirmə"ni digərindən fərqləndirir. Bu yeddi parametr hər hansı alqoritmi birqiymətli olaraq təyin etdiyindən, həmin parametrlərin yeddi sinif dəyişməsinin seçimi də bir neçə sinif alqorittmləri təyin edir. Odur ki, bu seçim ancaq "dəqiqləşdirmə" adlana bilər (yəni, dırnaqarası dəqiqləşdirmə, - məcazi mənada deyim). Belə ki, bu cür aparılan "dəqiqləşdirmə" mümkün ilk verilənlər çoxluğuna və mümkün nəticələr toplusuna malik istənilən alqoritmə tətbiq oluna bilər.

Bu əminlik isə hər bir "dəqiqləşdirmə" üçün *əsas hipotez* şəklində riyazi isbatın predmeti ola bilməz.

Buna baxmayaraq, alqoritm anlayışı riyaziyyatın mövcud olduğu bütün zamanlarda yeniləşir. Qeyd edək ki, alqoritm anlayışı onun ümumi halında riyaziyyatın ilk anlayışları sırasına daxildir və o, daha sadə anlayışlara dair terminlər vasitəsi ilə tərif edilmir.

Alqoritm anlyaişına dair tarixi xülasə. Bizə gəlib çıxan intuitiv mənada ilk alqoritm – məsələni həll etmək üçün sonlu elementar əməliyyatlar yığımı – bizim eradan əvvəl 3-cü əsrdə

Evklid tərəfindən təklif edilmiş "iki ədəddin ən böyük ortaq böləninin tapılması" hesablama prosesinə dair dəqiq təlimatdır(Evklid alqoritmi). Odur ki, "alqoritm" anlayışını uzun zamanlar "Evklid alqoritmi" dayanıqlı söz birləşməsi kimi, sonra digər riyazi məsələlərin mərhələlərlə təsviri üçün "metod" sözü, daha sonralar isə ciddi riyazi formallaşdırılmış "model"lərlə əvəz etdilər.

"Alqoritm" anlayışı orta əsrlərdə "alqorism" kimi işlənmişdir və o, ərəb rəqəmlərinin vasitəsilə hesab əməllərinin yerinə yetirilməsi qaydasından ibarət olmuşdu. Həmin vaxtlarda hesabda iki əks mövqe var idi: abakistlər və alqoritmistlər. Abakistlər hesaba üstünlük verdikləri halda, alqoritmistlər riyazi simvolikadan istifadə etməyi ön plana çəkirdilər.

Algorism - "Abu Ja`far Mohammed ibn Mûsâ al - Khowârizmi" adlı kitabın müəllifinin adından yaranmışdır. Onun hərfi tərcüməsi belədir: Cəfərin atası Xovarizmli Musa oğlu Məhəmmədir (825-ci il). O, təxminən 783- 850 –ci illərdə yaşamışdır.

Həmin şəxs eyni zamanda "cəbr" sözünün əsasını qoyan "Kitab al jabr w`al – muqabala" kitabının da müəllifidir və o, hərfi tərcümədə "Bərpa etmə və çevirmə qaydaları" mənasını verir.

İndi isə Evklid alqoritminə baxaq.

Alqoritm E. Verilmiş iki m və n müsbət tam ədədlərin ən böyük ortaq bölənini (ƏBOB) tapmalı.

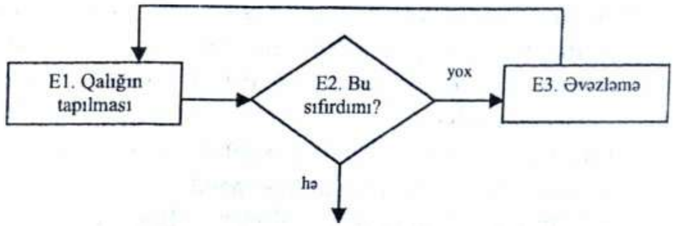
Həlli:

E1. [Qalığın tapılması]. m -i n -ə bölək və qalığı r ilə işarə edək. Aşkardır ki, $0 \leq r < n$.

E2. [Bu sıfırdırmı?]. Əgər $r = 0$ olarsa, alqoritm öz işini qurtarır və n - axtarılan ədəd hesab olunur.

E3. [Əvəzləmə]. $m \leftarrow n$, $n \leftarrow r$ ($m := n$, $n := r$) qəbul edib, E1 addımına qayıtmalı ▌.

Burada E alqoritmin adı, E1, E2, E3 isə onun addımlarının qısa işarələridir. E alqoritminin blok sxemini verək.



Alqoritmin sözlərlə təsvirində kvadrat mötərizələrdə yazdığımız cümlələr (frazalar) şərhlərdir.

Alqoritm ən kiçik nömrəli addımdan başlayaraq xüsusi göstəriş olana qədər nömrələrin artma ardıcıllığı ilə icra olunur. ▌ işarəsi alqoritmin mətninin sonunu bildirir.

Alqoritmdən istifadə etməzdən əvvəl onu qavramaq gərəkdir. Ən yaxşı qavrama (başa düşmə) yolu alqoritmi konkret verilənlərlə yoxlamaqdır.

Məsələn, ***E*** alqoritmini araşdıraq.

Tutaq ki, m=119, n=544. Onda, aşkardır ki, r =119. Çünki, $\frac{119}{544}$ nisbətində kəsrin surəti(bölünən) 119-a, məxrəci(bölən) isə 544-ə bərabərdir və 119< 544 olduğundan, qalıq elə surətin özüdür.

İndi isə, alqoritmik prosesi davam edərək, m:=544 və n:=119 qəbul etsək, alarıq:

$$\frac{544}{119}=4\frac{68}{119}.$$

Sonuncu münasibətdən görünür ki, $r = 68 \neq 0$. Odur ki, yenidən m:=119, n:=68 qəbul etməklə, alınır:

$$\frac{119}{68}=1\frac{51}{68}.$$

Axırıncı münasibətdən görürük ki, $r = 51 \neq 0$. Odurki, yenidən əvəzləmə aparıb, m:=68, n:=51 qəbul etməklə, alırıq:

$$\frac{68}{51}=1\frac{17}{51}.$$

Bu münasibətdən görünür ki, $r = 17 \neq 0$. Odur ki, prosesi davam edərək m:=51 və n:=17 qəbul etməklə, alınır:

$$\frac{51}{17}=3.$$

Buradansa r = 0 olduğu aşkarlanır və alqoritm öz işini qurtarır. Onda, ƏBOB(544,119)= 17 olar.

Deməli, ***E***- alqoritmdir.

Müasir alqoritmlər nəzəriyyəsinin başlanğıcını alman riyaziyyatçısı Kurt Hedelin 1931-ci ildə isbat etdiyi simvolik məntiqin tamsızlığı haqqındakı teoremindən etibarən saymaq olar. Həmin teoremdə göstərilir ki, elə riyazi problemlər var ki, onlar müəyyən sinifdən olan alqoritmlərlə həll edilə bilməzlər. Bu teorem alqoritmin müxtəlif formalaşdırmalarının axtarılmasına və analizinə təkan verdi.

Alqoritmlər nəzəriyyəsinin ilkin müddəaları alman riyaziyyatçısı Kurt Hedelə məxsus olmasına baxmayaraq, 1936 –cı ildə bir-birindən asılı olmadan ingilis riyaziyyatçısı Alan Tyurinq, amerika riyaziyyatçısı Emil Post, Hilbert və Aloiz Çerç tərəfindən bu nəzəriyyəyə dair ilk fundamental işlər çap edildi. Bu işlər alqoritm anlayışının dəqiq təyin edilməsinə xidmət etməklə, 2 formada aparılmışdır:

1. Rekursiv funksiya anlayışı əsasında;
2. Alqoritmik prosesin təsviri əsasında.

Həmin alimlər tərəfindən təklif olunmuş Tyurinq maşınları, Post maşınları və Çerçin lambda-hesablaması alqoritmin formalaşdırılma üsullarıdır. Eyni zamanda, onların işləri formal sistemlər və müxtəlif intuitiv alqoritm anlayışlarının ekvivalentliyini təsdiqlədi.

Alqoritmlər nəzəriyyəsinin məqsəd və vəzifələri. Alqoritmlər nəzəriyyəsinin bölmələrini ümumiləşdirərək, onun aşağıdakı məqsədlərini və həll edilən məsələlərini ayird edə bilərik:

- "alqoritm" anlayışının formalaşdırılması və formal alqoritmik sistemlərin araşdırılması;
- alqoritmik həll edilə bilməyən bir sıra məsələnin formal isbatı;
- məsələlərin təsnifi, mürəkkəblik dərəcəli siniflərin təyini və araşdırılması;
- alqoritmlərin mürəkkəbliyinin asimptotik analizi;
- rekursiv alqoritmlərin tədqiqi və analizi;
- alqoritmlərin müqayisəli təhlili məqsədi ilə məxsusi mürəkkəblik funksiyalarının alınması;
- alqoritmlərin keyfiyyətlərinin müqayisəli qiymətləndirilməsi kriterilərinin işlənməsi.

Alqoritmlər nəzəriyyəsinin nəticələrinin tətbiqləri. Alqoritmlər nəzəriyyəsində alınan nəzəri nəticələr elmdə və praktikada kifayət qədər geniş tətbiq tapmışdır. Bu zaman iki aspekti ayırmaq olar: nəzəri və praktiki.

Nəzəri aspekt. Bir sıra məsələlərin araşdırılması zamanı alqoritmlər nəzəriyyəsinin nəticələri "hər hansı məsələ, prinsipcə, alqoritmik həll edilə bilən dirmi?" sualını cavablandırmağa imkan verir. Eyni zamanda, alqoritmik həll edilə bilməyən məsələlər üçün onların Tyurinq maşınının dayanma əmrinə gətirilməsinin mümkünlüyüdür. İkinci əsas nəzəri sual "böyük ölçulu ilkin verilənlərə malik məsələlərin həlli üçün əhəmiyyətli dərəcədə vaxt itkisinin miqdarı" məsələsidir.

Praktiki aspekt. Alqoritmlər nəzəriyyəsinin metod və metodikaları(əsasən, asimptotik və praktiki analiz bölmələri) aşağıdakıları yerinə yetirməyə imkan verir:

- verilən məsələnin həlli üçün məlum çoxluqdan olan alqoritmin tətbiq xüsusiyyətini nəzərə almaqla seçilməsi (məsələn, ilkin verilənlərin ölçülərinə və ya

əlavə yaddaşın həcminə qoyulan məhdudiyyətlər zamanı);
- mürəkkəb məsələlərin həllərinin qiymətləndirilməsi üçün onların zamana görə qiymətlərinin alınması;
- hər hansı məsələnin həllinin müəyyən vaxt ərzində mümkün olmadığının, kriptoqrafik metodlar üçün vacib sayılan, doğru qiymətinin alınması;
- praktiki analizə əsaslanaraq, informasiyanın emalı oblastında məsələnin həllinin effektiv alqoritminin işlənilməsi və təkmilləşdirilməsi.

5.1.1 Alqoritm anlayışının formallaşdırılması

İnsan öz fəaliyyətinin bütün sahələrində rast gəldiyi məsələlərin həllərindən arzu olunan nəticələrin alınması üçün əməliyyatların yerinə yetirilmə ardıcıllığını təyin edən müxtəlif üsul və metodlardan istifadə etmək zərurətində qalır. Deməli, "məsələlərin həllərindən arzu olunan nəticələrin alınması üçün əməliyyatların yerinə yetirilmə ardıcıllığını təyin edən müxtəlif üsul və metodlar"ı alqoritmin ilkin və ya intuitiv tərifi kimi şərh edə bilərik. Digər bir sıra tələblər alqoritmin qeyri-formal tərifinə gətirib çıxarır. İndi həmin formal təriflərdən(FT) bir neçəsini qeyd edək.

FT 1. Alqoritm hər hansı ilk verilənlərdən başlayaraq, bu ilk verilənlərlə dəqiq təyin edilən nəticələrin alınmasına – məsələnin həllinə - yönəldilən elementar hesablama əməliyyatları ardıcıllığını müəyyən dildə təsvir edən sonlu təlimatdır.

Tutaq ki, D – məsələnin ilk verilənləri oblastı(çoxluğu), R – mümkün nəticələri çoxluğudur. Onda deyə bilərik ki, alqoritm $D \rightarrow R$ inikasını həyata keçirir. Belə inikas tam olmaya da bilər. Odur ki, aşağıdakı anlayışlar da daxil edilməlidir.

Alqoritmin icrasından sonra ancaq bir neçə $d \in D$ üçün nəticə alınarsa, onda o, *qismən(hissə-hissə) alqoritm* adlanır.

Əgər alqoritmdən bütün $d \in D$ üçün düzgün nəticə alınarsa, onda o, *tam alqoritm* adlanır.

FT 2. Alqoritm dedikdə informasiyanın təqdiminin dəyişdirilməsi üsulu başa düşülür.

FT 3. Alqoritm məqsədə çatmaq üçün gedilən yoldur.

FT 4. (Kolmoqorov). Alqoritm – elə ciddi təyin edilmiş qaydalarla yerinə yetirilən istənilən hesablama sistemidir ki, hər hansı sayda addımdan sonra o, qoyulan məsələnin həllini təmin edir.

FT 5 (Markov). Alqoritm – seçilən ilk verilənlərdən başlayaraq, axtarılan nəticənin alınmasına gedən hesablama prosesini təyin edən dəqiq təlimatdır.

Tədqiqatçıların cəhdlərinə baxmayaraq, alqoritmin yeganə ciddi tərifi mövcud deyildir. Lakin aqoritmlər nəzəriyyəsinə alqoritmin müxtəlif formal tərifləri daxildir. Təəccüblü elmi nəticə ondan ibarətdir ki, alqoritmin müxtəlif formal təriflərinin hamısının eynigüclülük mənasında ekvivalentliyi isbat edilir.

Alqoritmin bu cür aşkar və ya qeyri-aşkar formada izahı aşağıdakı kimi bir sıra tələbləri postulatlaşdırır(aksiom şəklinə gətirir):

- alqoritm sonlu sayda elementar yolla yerinə yetirilə bilən təlimatlara malik olmalıdır;
- məsələnin həlli zamanı alqoritm sonlu sayda addımı yerinə yetirməlidir;
- alqoritm bütün mümkün ilk verilənlər üçün eyni olmalıdır;
- alqoritm qoyulmuş məsələnin doğru həllini verməlidir, yəni doğruluq məhdudiyyətini ödəməlidir.

Alqoritmin digər formal tərifləri xüsusi riyazi konstruksiyalar(Post maşını, Tyurinq maşını, rekursiv hesablanıla bılən funksiyalarla), belə riyazi formalizmlər və “alqoritm” haqqında tezisin potulatlaşdırılması ilə əlaqədardır.

5.1.2. Alqoritmlər nəzəriyyəsinin əsas anlayışları

Alqoritmlər nəzəriyyəsində istifadə olunan əsas anlayışları şərh edək.

*Tərif 5.1.*Qoyulan məsələnin həllini hesabi əməliyyatlara gətirən alqoritmə ədədi alqoritm deyilir.

*Tərif 5.2.*Qoyulan məsələnin həllini məntiqi əməliyyatlara gətirən alqoritmə məntiqi alqoritm deyilir.

Müasir riyaziyyatda alqoritm-abstrakt əlifbada sözlər arasında konstruktiv verilən uyğunluq kimi qəbul edilib.

Abstrakt əlifba dedikdə verilən hərflərin və ya simvollar adlanan obyektlərin istənilən sonlu yığımı başa düşülür. Bu zaman həmin obyektlərin təbiəti bizi tamamilə maraqlandırmır. Hər hansı dilin əlifbasının hərfləri, rəqəmlər, istənilən işarələr, şəkil və hətta müəyyən konkret dilin sözləri abstrakt əlifbanın simvolları hesab edilə bilər. Vacib ancaq odur ki, baxılan əlifba sonlu (yəni, sonlu sayda simvoldan ibarət) olsun.

Qısaca deyə bilərik ki, əlifba-müxtəlif simvolların sonlu çoxluğudur. Yazılışın qısa olması üçün “abstrakt” sözünü atacağıq. Əlifba, istənilən çoxluq kimi, onun elementlərinin (yəni, simvollarının) sadalanması ilə verilir.

Əlifbaya dair misallar: $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$, $B = \{x, y\}$.

Əlifbanın sözü və ya sətri dedikdə onun simvollarının istənilən sonlu nizamlı ardıcıl düzülüşünü başa düşəcəyik.

Məsələn, $\alpha, \alpha\gamma, \gamma\beta, \delta\delta\gamma, \beta\beta$ və s. A əlifbasında yazılmış sözlərdir.

Tərif 5.3. Sözdəki simvolların sayına həmin sözün uzunluğu deyilir.

Yuxarıda, A əlifbasında yazdığımız $\alpha, \alpha\gamma, \gamma\beta, \delta\delta\gamma, \beta\beta$ sözlərinin uzunluqları, uyğun olaraq, 1, 2, 2, 3, 2-dir.

Müsbət uzunluğa malik sözlərlə yanaşı, uzunluğu sıfıra (“=0”) bərabər sözlərdən də istifadə etmək bəzən məqsədəuyğun olur. Heç bir simvolu olmayan söz-boş söz adlanır. Adətən, boş söz latın əlifbasının kiçik *e* hərfi ilə işarə edilir.

Tərif 5.4. r istənilən söz olduqda (boş da ola bilər) q sözü $q=pr$ şəklində təsvir edilə bilərsə, onda *p* sözünə *q* sözünün altsözü deyilir.

Bu tərifə əsasən, simvolların istənilən ardıcıllıqla birləşdirilməsi (o cümlədən, mənasız yığım da) söz hesab olunur.

Əlifbanın genişlənməsi zamanı (yəni, onun tərkibinə yeni simvolların əlavə edilməsi) "söz" anlayışı əhəmiyyətli dərəcədə dəyişikliyə məruz qala bilər. Məsələn, R= $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ əlifbasında «69+73» ifadəsi toplama ("+") işarəsi ilə birləşdirilmiş iki sözdən ibarətdir, R'= $\{+,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ əlifbasında isə həmin ifadə bir söz olacaqdır.

Durğu və boşluq işarələrindən başqa simvol sifətilə ayrı-ayrı sözlər, frazalar, abzaslar və hətta bütöv kitab istifadə oluna bilər.

Tərif 5.5. Hər hansı əlifbanın sözlərinə həmin əlifbada və ya qeyd edilmiş digər əlifbada sözləri qarşı qoyan istənilən uyğunluğa *əlifba operatoru* və ya *əlifba inikası* deyilir.

Bu zaman birinci əlifba verilən operatorun giriş, ikinci əlifba isə çıxış əlifbası adlanır.

Giriş və çıxış əlifbalar üst-üstə düşdükdə, əlifba operatoru həmin əlifbada verilmiş hesab olunur.

Başqa sözlə desək, əlifba operatoru -giriş əlifbanın sözləri ilə bu və ya digər çıxış əlifbanın sözləri arasında uyğunluğu təyin edən funksiyadır.

Əlifba operatorlarını 2 yerə bölürlər: birqiymətli və çoxqiymətli.

Birqiymətli əlifba operatoru hər bir giriş sözə yalnız bir çıxış sözünü qarşı qoyur.

Əlifba operatorunun təyin olunduğu bütün sözlər çoxluğuna onun təyin olunma oblastı deyilir.

"Əlifba operatoru" ümumi anlayışdır. Faktiki olaraq, informasiyanın istənilən emalı prosesi əlifba operatoruna gətirilir və yaxud gətirilə bilər.

Sonlu qaydalar sistemi vasitəsilə verilən əlifba operatorlarını alqoritm adlandırmaq qəbul olunub. Lakin əlifba operatoru ilə alqoritm arasında bir fərqi qeyd etmək lazımdır. Əlifba operatorunda giriş-çıxış sözlər arasında uyğunluğu yaradan üsul deyil, ancaq həmin uyğunluğun özü mahiyyət kəsb edir.

Alqoritm anlayışında isə tərsinə, uyğunluğu yaradan həmin alqoritmlə təyin olunan üsul əsas hesab edilir. Beləliklə, *əlifba* - operatoru və onun əməliyyatlarını təyin edən qaydalardır.

İki alqoritm o vaxt *bərabər* hesab edilir ki, onlara uyğun əlifba operatorları eyni olsun və bu alqoritmlərin çıxış sözləri üzərində emal qaydaları üst-üstə düşsün.

İki alqoritm o vaxt *ekvivalent* hesab edilir ki, uyğun əlifba operatorları, onların verilmə üsullarından asılı olmayaraq, üst-üstə düşsün.

Bu qəbildən olan istənilən giriş sözə ancaq bir çıxış sözü aid edir. Belə alqoritmlər və onlara uyğun olan əlifba operatorları *determinik* adlanırlar.

İki alqoritm o vaxt ekvivalent hesab edilir ki, onların tətbiq olunma oblastları və bu oblastlardan olan istənilən sözün emalının nəticələri üst-üstə düşsün.

Ümumi halda alqoritmlər *təsadüfi* və özü-özünə dəyişən kimi də təsnif olunurlar. Alqoritm o vaxt təsadüfi hesab edilir ki, alqoritmi təsvir edən qaydalar sistemində bu və ya digər sözün (və ya qaydanın) təsadüfi seçiminin mümkünlüyü nəzərdə tutulsun.

Alqoritm o vaxt *özü-özünə dəyişən* adlanır ki, alqoritm nəinki giriş sözlərini emal edir, hətta onun özü də belə emal zamanı dəyişir. Belə alqoritmin bu və ya digər sözə təsirinin nəticəsi ancaq həmin sözdən deyil, həm də alqoritmin bundan əvvəlki işindən asılı olur.

Alqoritmlər nəzəriyyəsində alqoritmin verilməsinin ümumi üsulu böyük əhəmiyyətə malikdir.

Alqoritmin verilməsinin istənilən ümumi üsulu *alqoritmik sistem* adlanır. Alqoritmik sistemlərin təsviri zamanı xüsusi formalaşdırılmış vasitələrdən istifadə edilir.

Alqoritmin tətbiqi nəzəriyyəsinin əsas formalaşmalarını 2 istiqamətə ayırmaq olar: "*cəbri*" və "*həndəsi*".

Cəbri nəzəriyyə hər hansı konkret simvolikada qurulur; burada alqoritmlərə xətti mətnlər şəklində baxılır.

Həndəsi nəzəriyyədə alqoritmlər çoxluqlar şəklində qurulur; bu çoxluqlar arasında inikas və binar münasibət daşıyan əlaqələr daxil edilir. Burada əhəmiyyətli yeri obyektlərin qraf şəklində təsviri tutur; qrafın təpələri çoxluğun elementlərini, tərəfləri isə elementlər arasındakı əlaqələri əks etdirirlər. Belə interpretasiyada inikas təpə və ya tərəflərin nişanlanması ilə verilir.

Birinci istiqamətə rekursiv funksiyalar, Tyurinq maşınları, Van-Xaonun operator sistemləri və s. aiddirlər.

İkinci istiqamətə A.A.Markovun normal alqoritmləri, alqoritmləşdirmənin blok-sxem üsulu və s. aid edilir.

Bütün ədəd oxunda təyin olunmuş, arqumenti verilmiş əlifbanın sözlərindən ibarət funksiya o zaman həcmə görə qurula bilən hesab edilir ki, onun qiymətlərini hesablayan alqoritmin girişində verilən x- lərə qarşı $f(x)$ – nəticələrinin alınması üçün tələb olunan hesablamaların həcminə uyğun Tyurinq maşını mövcud olsun.

Tərif 5.6. Alqoritmin tətbiq edilə biləcəyi obyektlər küllüsünə onun tətbiq olunma oblastı deyilir. Yəni, alqoritmin obyektə tətbiqi nəticə verir.

Ψ alqoritmi haqqında deyirlər ki, o:

1) "f funksiyasını hesablayır", belə ki, Ψ alqoritminin tətbiq olunma oblastı f funksiyasının təyin olunma oblastı ilə üst-üstə düşür və alqoritm özünün tətbiq oblastından olan istənilən x –i $f(x)$ –də emal edir;

2) "A çoxluğunu X çoxluğuna nəzərən həll edir", belə ki, alqoritm istənilən $x\in X$ üçün tətbiq oluna bilənliyinin "hə" və "yox" cavablarına uyğun olaraq, istənilən $X\cap A$ çoxluğuna aid olan x –i və ya $X\setminus A$ çoxluğuna daxil olan x–i emal edir;

3) "B çoxluğunun elementlərini sadalayır", beləki, Ψ alqoritminin tətbiq olunma oblastı natural siradir, B çoxluğu isə nəticələr küllüsüdür.

Tərif 5.7. Qiymətlərini hesablayan alqoritmi mövcud olan funksiyaya hesablanıla bılən funksiya deyilir.

k – yerli f funksiyası o vaxt effektiv hesablanıla bilən(və yaxud, sadəcə, hesablanıla bilən) adlanır ki, aşağıdakı şərtləri ödəyən, onu hesablayan, Ψ alqoritmi mövcud olsun:

1. Əgər Ψ alqoritminin girişinə f funksiyasının Df təyin oblastından olan $x=\langle x_1, x_2,..., x_k\rangle$ vektoru daxil olarsa, onda hesablama sonlu sayda addımdan sonra qurtarmalı və $f(x)$ nəticəsini verməlidir;

2. Əgər Ψ alqoritminin girişinə f funksiyasının Df təyin oblastına aid olmayan x vektoru daxil olarsa, onda A alqoritmi heç zaman işini qurtarmır.

Tərif 5.8. X çoxluğuna nəzərən həll edilə bilən alqoritmi mövcud olan çoxluğa X -ə nəzərən həll edilə bilən çoxluq deyilir.

Tərif 5.9. Boş çoxluğa və ya elementlərini bir-bir sadalayan alqoritmə malik olan çoxluğa sayıla bilən çoxluq deyilir.

5.1.3. Alqoritm anlayışının analizi

"Alqoritm" anlayışının müfəssəl analizi aşağıdakı təklifləri aşkar edir.

1. Mümkün ilk verilənlər və istənilən alqoritmin tətbiq oluna bilmə oblastları mahiyyətcə sadalanılan çoxluqlardır.

2. Bir-birinə daxil olan istənilən iki sadalanılan çoxluq üçün elə alqoritm seçmək olar ki, onlardan böyüyü mümkün ilk verilənlər, kiçiyi isə tətbiq olunma oblastlarına uyğun gəlsinlər.

Həmçinin, aşağıdakı teoremləri də isbatsız qeyd edək.

Teorem 5.1. f funksiyası ancaq və ancaq onun qrafikinin nöqtələrinin $<x, f(x)>$ cütləri şəklində təyin edildiyi halda hesablanıla biləndir.

Teorem 5.2. Sadalanıla bilən X çoxluğunun A altçoxluğu ancaq və ancaq A və $X \setminus A$ çoxluqlarının sadalanılan olduqları halda X-ə nəzərən həll edilə bilən sayılır.

Teorem 5.3. Əgər A və B sadalanıla biləndirsə, onda $A \cup B$ və $A \cap B$ çoxluqları da sadalanılandırlar.

Teorem 5.4. Hər bir sadalanılan sonsuz X çoxluğunda sadalanıla bilməyən tamamlayıcı çoxluğa malik olan sadalanıla bilən altçoxluq mövcuddur(teorem 5.2 – yə əsasən bu sadalanıla bilən altçoxluq sadalanılan sonsuz X çoxluğuna nəzərən həll edilə bilməyən olacaq).

Hər bir sadalanıla bilən sonsuz X çoxluğu üçün bu çoxluğun bütün altçoxluqlarında təyin olunmuş funksiya mövcuddur.

Teorem 5.4 və 2-ci təklif birlikdə həll edilə bilməyən tətbiq oblastlı alqoritmə dair misaldır.

Sadalanıla bilən çoxluq ya natural arqumentli həmişə hesablanıla bilən funksiyanın qiymətləri çoxluğudur, ya da boş çoxluqdur.

Alqoritmlər nəzəriyyəsini 2 hissəyə bölmək olar:

1. Deskriptiv(keyfiyyətcə);
2. Metrik(kəmiyyətcə).

Deskriptivlik alqoritmləri ilk verilənlər və nəticələr arasında qərarlaşmış uyğunluqlar nöqteyi-nəzərincə araşdırır. Buraya, xüsusi halda bu və ya digər xassələrə malik alqoritmin qurulması prosesi – alqoritmik problemlər – aiddir.

Metriklik alqoritmlərin özlərini, eləcə də onların tərkibindəki hesablamaları mürəkkəbliklər(yəni, konstruktiv obyektlərin ardıcıl çevrilmələri) baxımından araşdırır. Qeyd edək ki, alqoritmlərin, eləcə də hesablamaların mürəkkəbliklərinin qiymətləndirilməsi metodlarının işlənilməsi vacib nəzəri və praktiki əhəmiyyətə malikdir.

"Alqoritm" anlayışının müasir mənası resept, proses, metod, üsul, proqram, prosedura sözlərinə çox yaxındır. Buna baxmayaraq, "alqoritm" sözünün özünə məxsus əlavə məna çalarları var. Bütün bunlardan əlavə, alqoritm mühüm xassələrə də malikdir. Odur ki, alqoritmin xassələrini ayrı-ayrılıqda şərh etmək lazımdır.

5.2. Alqoritmin xassələri

Baxmayaraq ki, "alqoritm" anlayışının ciddi riyazi tərifi və onun qurulmasında ümumi qaydalar yoxdur, alqoritmin tərtib edilməsi zamanı müəyyən şərtlərə əməl etmək lazımdır. Bu şərtlərə başqa sözlə alqoritmin xassələri deyilir. İndi həmin xassələri şərh edək.

1) Sonluluq (finitlik). Alqoritm həmişə sonlu sayda addımlardan ibarət olur. Yəni onun icrası sonlu sayda mərhələlərin yerinə yetirilməsindən sonra qurtarmalıdır.

Qeyd: Hesablama metodu alqoritmin sonluluq xassəsindən başqa, digərlərinə malik proseduradır. Məsələn, uzunluqları təyin edilə bilməyən iki parçanın "ən böyük ümumi ölçüsü"nü tapa bilməzsən.

2) Müəyyənlik. Alqoritmin hər bir addımı və addımların ardıcıllığı dəqiq təyin olunmalıdır. Zəruri əməliyyatlar istənilən mümkün halda ciddi və birqiymətli təyin olunmalıdır.

3) Daxiletmə. Alqoritm qabaqcadan verilən konkret obyektlər çoxluğundan götürülən müəyyən sayda (=0 da ola bilər) giriş (ilkin) verilənlərə malikdir. Məsələn, **E**- Evklid alqoritmində $m,n \in N$.

4) Xaricetmə. Alqoritm ilkin verilənlərə nəzərən tamamilə müəyyən olunmuş bir və ya bir neçə çıxış kəmiyyətlərinə malik olur. Məsələn, **E** alqoritmində *n* kəmiyyəti.

5) Effektivlik (təsirlilik). Alqoritmdən tələb edilir ki, o effektiv olsun. Bu o deməkdir ki, alqoritmdə yerinə yetiriləcək bütün əməliyyatlar kifayət qədər elə sadə olmalıdırlar ki, onları prinsipcə kağız və qələmlə dəqiq və sonlu vaxtda icra etmək mümkün ola bilsin.

6) Kütləvilik. Bu xassə 2 tələbi nəzərdə tutur: a) alqoritm elə təsvir olunmalıdır ki, onu hər kəs öyrənib, istifadə edə bilsin; b) alqoritm elə qurulmalıdır ki, o baxılan məsələnin sinfinə aid olan bütün məsələlərin həllini təmin edə bilsin.

Bəzən eyni bir məsələnin həlli üçün bir neçə alqoritm mövcud olur. Odur ki, onlardan ən yaxşısını seçmək zərurəti – alqoritmlərin analizi zərurəti meydana gəlir.

Alqoritmlərin analizi dedikdə verilən alqoritmə görə onun işçi xarakteristikalarının təyini başa düşülür. Yəni optimallılıq müəyyən olunur.

Alqoritmlər nəzəriyyəsi isə tamamilə başqa oblastdır. Burada söhbət başlıca olaraq, qeyd etdiyimiz kimi, bu və ya digər kəmiyyətin hesablanılması üçün effekli alqoritmin mövcud olub-olmamasından gedir.

5.3. Alqoritmlər nəzəriyyəsinin ilk anlayışları: konstruktiv obyektlər və onların ansamblları

A.N. Kolmoqorov (1954) yazırdı: Bütün müasir riyazi təfəkkürdə "konstruktiv" (əməli) və "qeyri-konstruktiv" liyin arasındakı fərqləndirmə xüsusi yer tutur.

"İstənilən natural ədəd, prinsipcə, konstruktiv olaraq 1+1+1+...+1 şəklində verilə bilər."

Buradan əyani olaraq, natural ədədin (onun miqdarı baxımından) konstruktiv olmayan obyekt kimi və onun vahidlə toplama işarələrinin (konstruktiv obyektlərin) zənciri ilə verilməsi arasındakı fərq aşkar edilir. Deməli, alqoritmlər ancaq

işarələr kombinasiyası ilə, yəni konstruktiv obyektlərlə əlaqədardır. "Konstruktiv" anlayışı alqoritmlər nəzəriyyəsinin nəinki əsas, hətta ilk anlayışıdır.

Konstruktiv obyektlərə aid ilk misallar: sözlər və ağaclar. Ən çox öyrənilmiş konstruktiv obyektlər sözlərdir. Sözlər hər-hansı sonlu *B* əlifbasının hərflərindən təşkil olunur və o qısa şəkildə *B-də söz* və daha sadə olaraq *B-söz* adlanır. Sözlər alqoritmlər nəzəriyyəsinin qurulmasında çox vaxt əsas obyekt rolunda çıxış edir (məsələn, Markovun formal alqoritmlər nəzəriyyəsində).

Tutaq ki, B -əlifba, k -natural ədəddir. Onda *(B,k)-ağacı* aşağıdakı əlavə xassələrə malik olmalıdır. Təpələrdən biri ayrılır və kök adlanır (belə ağac köklü adlanır), bütün tillərdə istiqamət verilir. Belə ki, hər bir təpəyə kökdən istiqamətlənmiş yolla getmək mümkündür. Fərz edılır ki, ağacın hər bir təpəsi B əlifbasının bir hərfi ilə və hər bir təpədən çıxan tillər müxtəlif natural ədədlərlə işarə olunub (çıxan tillərin sayı *k*-dan böyük deyil).

Aşkardır ki, hər bir B-sözə kökü sözün birinci hərfiə uyğun olan *(B,1)-ağacı* kimi baxmaq olar.

Konstruktiv obyektlərin izahını verməmişdən öncə daha geniş anlayış olan "sonlu obyekt"i təyin edək.

Sonlu obyekt elə obyektdir ki, aktual sonsuzluq abstraksiyasını cəlb etmədən onun haqqında fikirləşmək mümkün olur. Yəni, obyekt bütünlüklə verilir.

Qeyd edək ki, sonlu obyektlərin sonlu çoxluğu sonlu obyektdir. Sonlu obyektlərə aid klassik misal olaraq sonlu qrafı göstərmək olar.

Sonlu obyektlərin bir qismi konstruktiv obyektlərdir. İstənilən konstruktiv obyekt hər biri sonlu sayda tipdən olan sonlu elementlər çoxluğundan ibarətdir. Məsələn, "əməl" sözü 3 tipə aid 4 hərfdən ibarətdir. Deməli, konstruktiv obyekt hədlərə ayrılmış (diskret) quruluşa malikdir və müxtəlif elementlərdən təşkil olunur.

5.4. Lokal xassə və lokal əməllərin qeyri-formal izahı

Fərz edək ki, baxılan konstruktiv obyektdən hər hansı məhdud sahə ayrılmlışdır (bunu “aktiv hissə” adlandıraq) və o başlanğıc elementdən və ona kifayət qədər yaxın olan digər elementlərdən ibarətdir. Ölçü nöqteyi-nəzərincə hüdudlanma başlanğıc elementə görə aparılır və o, hüdudlanma göstəricisi və ya aktiv hissənin radiusu adlanır. Məsələn, sözün aktiv hissəsi onun başlanğıcıdır, sözün bu başlanğıcdan etibarən hesablanılan uzunluğu isə seçilmiş göstəricidən (radius) asılıdır.

Ümumi halda aktiv hissəni konstruktiv obyektin başlanğıc elementdə yerləşən nəzarətçi və ya qurğu ilə təhlil edilən oblastı kimi şərh etmək olar. Verilmiş radiusda ancaq sonlu sayda aktiv hissələr olduğundan, hər bir lokal xassəni onun aktiv hissəsini ödəyən sonlu siyahı ilə vermək mümkündür.

Lokal əməl - baxılan obyektin aktiv hisəsinin onun digər hissəsi ilə əvəz olunmasından ibarətdir. Bəzən (Kolmoqorov) “konstruktiv obyekt” anlayışı “vəziyyət” (alqoritmik prosesin) anlayışı kimi işlədilir. Komoqorova görə; konstruktiv obyekt dedikdə, hər hansı münasibətlərlə əlaqələndirilən sonlu elementlər çoxluğu başa düşülür. Beləki, həm elementlər, həm də münasibətlər əvvəlcədən göstərilmiş sonlu sayda tiplərdən biri ola bilər.

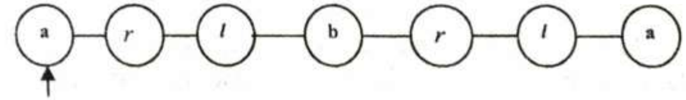
Ansambl (ahəng) anlayışı konstruktiv anlayışdan da öncədir. Belə ki, obyekt ancaq hər hansı ahənglə konstruktiv ola bilər.

Hər hansı sonlu B əlifbası və k natural ədədi üçün aşağıdakı ansamblları göstərmək olar.

1. B-söz ansamblı. Əgər B birdən çox hərfdən ibarətdirsə, *B-söz* ahəngi lüğət ansamblı adlanır: B əlifbası bir hərfli olduqda *B-söz* ansamblı təbii olaraq N natural sırası (0,1,2,...) ilə eyniləşir.

2. İxtiyari sonlu B və $k \in N$ üçün (B,k) - ağac ansamblı.

3. Kolmoqorovun B - ansamblı. B əlifbası üzrə Kolmoqorov kompleksi və ya B- ansamblı dedikdə, elə istiqamətlənməmiş adlandırılmış qraf başa düşülür ki, təpələri sonlu B əlifbasının hərfləri ilə işarə olunmuş olsun və Kolmoqorovun qeyd etdiyi xassələrə malik olsun:

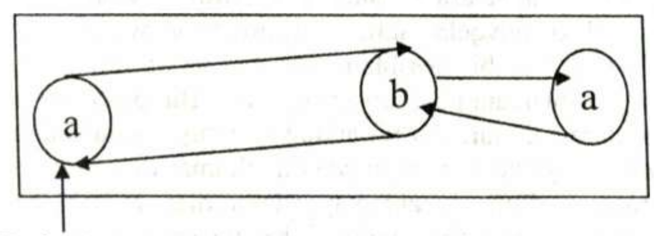


Başlanğıc təpə

Yəni, B'*-sözü* $B'=B \cup \{L,R\}$ ansamblı kimi təsvir edilsin. Burada, L – sola, R – sağa doğru hərəkətlərə uyğundur.

4. (B,k) - kompleksləri. Aşağıdakı konstruktiv obyekt *(B,k)-kompleksi* adlanır: adlandırılmış B -təpə , k –tilə malik sonlu isitqamətlənmiş qraf.

B əlifbasında hər bir söz asanlıqla *$(B,2)$-kompleksi* şəklində təsvir edilir. Məsələn, *aba* sözünü belə təsvir etmək olar:



Başlanğıc təpə

İstənilən iki ansambl arasında alqoritmlərlə verilən qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq mövcuddur. Belə uyğunluq *ansamblların izomorfizmi* adlanır. Bu mənada bütün ansambllar izomorfdurlar.

Lokal xassələr formal olaraq *(B, k, r) -dairəsi* ilə müəyyənləşdirilir.

Lokal əməl *(B,k)-ansamblı*nda formal olaraq bir sıra *(B,k)-kompleks*lərini digər *(B,k)-kompleks*lərinə çevirir.

5.5. Hesablama anlayışı

Ümumi hesablama anlayışı alqoritm anlayışı kimi fundamentaldır və heç bir formal dəqiqləşdirmədən asılı olmayaraq, ona ayrıca anlayış kimi baxılmalıdır. Dəqiq qaydalara əsaslanan şahmat, domino və s. kimi oyunlar, ehtimal ki, hesablamaya dair ilk misallardır.

Diferensial və inteqral hesablarını da, onlara aşağıdakı doğru bərabərlikləri doğuran proseduralar kimi baxdıqda, hesablamaya aid misal kimi göstərmək olar:

$$dF(x)=f(x)dx, \int f(x)dx=F(x)+C$$

Sadə şəkildə desək, *hesablama* – "törədə bilən" adlanan sonlu "həll edə bilən" qaydaların siyahısıdır. Bu qaydalar bir sıra konstruktiv obyektlərdən digərlərinə keçidləri reallaşdırırlar. "Həll edə bilən" qaydalara tipik misal şahmat oyununun qaydalarıdır. Burada konstruktiv obyektlər rolunda şahmatdakı mövqelər durur. Bu mövqelər oyunun vəziyyətini təyin edir. Hər bir hesablama hesabat və ya törəmə prosesini, yəni hesablamanın iş prosesini verir. Bu proseslər ayrı-ayrı addımlara bölünür. Hər bir addımın mahiyyəti bu addıma qədər alınmış obyektdən yeni obyektin alınmasıdır. Yeni obyektin alınması verilmiş hesablamaya daxil olan ixtiyari "həll edə bilən" qaydanın tətbiqi yolu ilə həyata keçirilir. Qayda tətbiq olunan obyektlər onların mühakiməsi adlanır. Qeyd edək ki, eyni bir mühakimə ilə eyni qaydaların tədbiqi müxtəlif nəticə verə bilər: qayda müxtəlif cür tətbiq oluna bilər. Məsələn, şahmat oyununda piyadanın gedişi qaydası var, ancaq bu qayda

müxtəlif piyadaya müxtəlif cür tətbiq oluna bilər. Buna baxmayaraq, qeyd edilmiş qayda və mühakimə üçün müxtəlif nəticələr sayı həmişə sonludur. Hər bir qayda üçün mühakimələr sayı qeyd olunur. Əgər bütün belə mühakimələr sayı müəyyən k ədədi ilə məhduddursa, onda hesablama *k-mühakiməli* adlanır.

Hər bir hesablama müəyyən W ansamblı ilə işləyir. Bu W ansamblı hesablamanın işçi mühiti adlanır. Hesabat prosesinin bütün vəziyyətləri W-də yerləşir. Oyunun bütün mümkün vəziyyətləri toplusu asanlıqla uyğun ansambla yığılır. Hesablamanın işi yeni-yeni işçi mühit elementlərinin və ya mümkün vəziyyətlərin alınmasından ibarətdir.

Alqoritmik və hesablama proseslərinin prinsipial fərqi aşağıdakından ibarətdir: alqoritmik prosesdə hər bir yaranan vəziyyət əvvəlki gedişlə birqiymətlidir, hesablama prosesində isə vəziyyət özündən əvvəlki bütün mümkün vəziyyətlərdən ancaq birinin nəticəsidir. Yəni, alqoritmik prosesdə vəziyyətlərin dəyişməsi xətti, hesablama prosesində isə budaqlanan struktura malikdir.

5.5.1.Alqoritm və hesablama arasındakı əlaqənin aydınlaşdırılması

Alqoritm və hesablama arasındakı əsas əlaqələr bunlardır:

1) Hər bir alqoritm üçün hesablama mövcuddur. Bu hesablama həmin alqoritmin təyin oblastını törədir.

2) Hər bir *U* alqoritmi üçün ancaq *U(x)=y* münasibətini ödəyən, ancaq və ancaq $<x,y>$ cütünü törədən hesablama vermək olar.

3) Hər bit hesablama üçün alqoritm mövcuddur. Bu alqoritmin təyin oblastı ilk hesablamadan törənmiş çoxluqla üst-üstə düşməlidir.

4) Funksional <x,y> cütlər çoxluğunu törədən hər bir hesablama alqoritmə çevrilə bilər. Bu alqoritm hesablama ilə törənən <x,y> cütləri üçün hər bir x-i y-ə çevirməlidir.

5) Hər bir alqoritm hesablama ilə əvəz oluna bilər. Bütün alqoritmlər girişə malik xüsusi formalı hesablamalardır.

6) Hər bir hesablama alqoritmlə əvəz oluna bilər. Həmin alqoritmin nəticəsi dəqiq olaraq ilkin hesablamalardan törənən obyektlərdir.

7) İlkin hesablamalardan törənən obyektlərin mövcud olmadığı halda həmişə alınan alqoritmin təyin oblastının natural sıraya yığılmasına nail olunur.

Beləliklə, bütün alqoritmlər girişə malik hesablamanın xüsusi şəkli kimi şərh oluna bilər. Yəni, alqoritm anlayışının özü hesablama anlayışına gətirilə bilər.

5.6. Ümumi alqoritm anlayışının dəqiqləşdirilməsi

Alqoritm anlayışı, çoxluq və natural ədəd anlayışlarına oxşar olaraq, elə fundamental anlayışlar sırasına daxildir ki, o başqaları vasitəsilə ifadə edilə bilməz. Alqoritm anlayışına tərif vermək yox, onu izah etmək olar. Məsələn, alqoritm ilk verilənlərdən başlayaraq bu ilk verilənlərlə tamamilə təyin edilən nəticələrin alınmasına yönəldilən hesablama prosesinin verdiyi dəqiq təlimatdır (Markov, 1957).

Markovun bu izahından göründüyü kimi, hesablama modelləri (Tyurinq, Post, Markov, Kolmoqorov) ilə alqoritm anlayışlarını eyniləşdirmək olmaz.

Alqoritm anlayışının daha da dəqiqləşməsi baxımından Kolmoqorov yazır:

"Alqoritm haqqında aşağıdakı əyani təsvirlərdən başlayırıq:

1) Hər hansı *X* çoxluğundan olan *A* "şərtinə" ("başlanğıc vəziyyətinə") tətbiq olunan *Q* alqoritmi istənilən B "həllini" ("son vəziyyət"i) verir.

2) Alqoritmik proses əvvəlcədən məhdud mürəkkəblikli ayrı-ayrı addımlara bölünür; hər bir addım bilavasitə icra olunur, yəni yaranmiş S vəziyyətindən $S^*=\Omega_Q(S)$ vəziyyətinə keçiddən ibarət olur.

3) İcra prosesi nəticəsiz dayanma və yaxud "həll alınma haqda siqnal"a qədər davam edir.

4) S -dən $S^* = \Omega_Q(S)$ -ə bilavasitə keçid ancaq əvvəlcədən məhdud "aktiv sahənin" malik olduğu informasiya əsasında baş verir."

Kolmoqorovun qeyd edilən bu fikrindən alqoritmik prosesin iterativliyi və hər bir addımın (mərhələnin) lokallığı kimi iki mühüm nəticə alınır.

Burada *alqoritmik prosesin iterativliyi* nisbətən sadə əməliyyatların (operatorların) çoxqat yerinə yetirilməsi vasitəsilə obyektlərin çevrilmələri yolu ilə aparılır. Yəni, obyekt bir vəziyyətdən digərinə nisbətən sadə əməliyyatların çoxqat icrası nəticəsində keçir.

Lokal əməl dedikdə emal olunan obyektin əvvəlcədən təyin edilmiş "hissəsinin" çıxarılıb, onun həmin hissədən asılı olan digər "hissə"si ilə əvəz olunması başa düşülür.

Bütün lokal informasiya çeviricili hesablama modelləri Kolmoqorov anlayışları ilə yazıla bilər. Post və Tyurinq modelləri bu mənada Kolmoqorov tiplidirlər.

Digər tərəfdən qeyri-lokal addımlı (məsələn, Markovun qeyri-formal alqoritmi) modellər qeyri-lokal (məhdud) addımların əvvəlcədən lokal addımlara bölünməsini tələb edir və deməli, Kolmoqorov tipli deyil.

Deməli, hər bir model özünün Kolmoqorov anlayışları ilə konkretləşməsini tələb edir. Belə konkretləşmənin ümumi sxeminə dəqiq alqoritm anlayışının adekvat formalaşması kimi baxmaq olar.

Qeyri-lokal informasiya çeviricili modellərlə işləyərkən qeyri-lokal addımları lokal addımlara bölmək lazımdır. Bu sxemlə təyin olunan hesablama modeli – Kolmoqorov maşınları adlandırılır.

Göründüyü kimi, ümumi alqoritm anlayışı bir sıra ilkin anlayışlara - ən əvvəl alqoritmik proses anlayışına və bilavasitə emal anlayışına asalanır; alqoritmik prosesin vəziyyəti - konstruktiv obyektlərin mahiyyəti, bilavasitə emal isə lokal əməliyyatlar yığımı ilə verilir.

Kolmoqorov mənada ixtiyari hesablama modeli üçün hesablama vəziyyəti bilavasitə konstruktiv obyekt ola bilər. Tyurinq maşını üçün, məsələn, onun hər bir zaman anındakı tam vəziyyəti özünun lentindəki yazı, başcığın vəziyyəti və daxili vəziyyət haqda məlumatları cəmləşdirir; Post maşını üçün lentdəki yazını, başcığın vəziyyətini, əmrin ünvanını və ya nömrəsini bilmək lazımdır.

Alqoritmlərin qiymətləndirilməsi metodları. Alqoritmlər nəzəriyyəsində "alqoritm" anlayışı, adətən, hesablama maşınının "riyazi modelinin" yazılması vasitəsilə dəqiqləşdirilir. Burada iki cür yanaşma var:

1) alqorimin mürəkkəbliyinin qiymətləndirilməsi;

2) alqoritmlə yerinə yetirilən hesablama prosesinin imkanlarının qiymətləndirilmələri.

X–Y - alqoritmləri. İstənilən alqoritmin yazılışına iki ansamblın: "*X* – mümkün ilk verilənlər" (və ya "mümkün girişlər") və "*Y* - mümkün nəticələr" (və ya "mümkün çıxışlar") ansamblının müəyyən olunması ilə başlanılır. *X* - girişlər, *Y* isə çıxışlar ansamblı adlanır. *X* girişlər ansambllı və *Y* çıxışlar ansambllı ixtiyari alqoritm qısaca olaraq *X-Y-alqoritmi* adlanır. Burada söhbət ondan gedir ki, *X-Y-alqoritmi*ni *X* -in hər bir elementinə tətbiq etməyə cəhd göstərilir və nə vaxt ki, nəticə mövcud olur, o Y-ə də aid edilir. Alqoritmin təyin olunma oblastı və ya tətbiq olunma oblastı dedikdə girişlər ansamblının altçoxluğu başa düşülür; bu altçoxluq alqoritmin nəticə verdiyi bütün girişlərdən ibarətdir. Hər bir alqoritm öz tətbiq oblastında təyin olunmuş funksiyanı verir: funksiyanın x arqumentinə

uyğun qiyməti alqoritmin həmin X girişinə görə verdiyi nəticəyə bərabərdir. Belə funksiya haqda deyirlər ki, o baxılan alqoritmlə hesablanılır.

Təyin oblastları və eyni zamanda bu oblastlardan olan hər bir giriş üçün uyğun nəticələri üst-üstə düşən iki alqoritm *ekvivalent* adlanır. Beləliklə, ekvivalent alqoritmlər eyni bir funksiyanı hesablayır.

Əgər U alqoritminin təyin olunma oblastı A çoxluğunun altçoxluğudursa və U-nun hər bir nəticəsi V çoxluğuna daxildirsə, onda U V-də A-dan olan alqoritm adlanır və belə yazılır:

$U{:}A \to V$.

X ilk verilənınə uyğun U alqoritminin tətbiqinin nəticəsi U(x) kimi işarə edək.

Beləliklə, U və V alqoritmlərinin ekvivalentliyini $U(x) \approx V(x)$ kimi yazmaq olar.

5.7. Alqoritmlərin xüsusi yazılış formaları

Alqoritmlər müəyyən obyektləri ("giriş") emal edir. Obyektlər konkret, məsələn, "iki müsbət onluq ədədin toplanılması" alqoritmi və yaxud abstrakt, məsələn, "natural ədədin sadə vuruqlara ayrılması" alqoritmi, ola bilər.

Nəzəri cəhətdən, əsasən, natural ədədlərlə (Heydel) və yaxud işarələr zənciri ilə işləyən (Markov) alqoritmlərlə məşğul olublar.

Praktik nöqteyi-nəzərdən isə belə məhdudiyyətlərin xeyri və ya onlara ehtiyac da yoxdur.

Prinsipcə, istənilən obyektlər çoxluğundan istifadə etmək olar, bu şərtlə ki, onların xassələri təyin edilə bilən olsun, yəni, obyektlər çoxluğuna {"doğru", "yalan"} məntiqi doğruluq qiymətləri çoxluğundan qiymət vermək mümkün olsun.

5.7.1. Markovun normal alqoritmləri

Diskret məlumatların emalının əməli qaydaları işarələr (simvollar) ardıcıllığı üzərindəki alqoritmdir.

İşarələr ardıcıllığı üzərində elementar əməllər dedikdə, yarımsözün sözlə əvəz olunması (mətni əvəzləmə) başa düşülür.

Ümumi işarə yığımlı U və U' söz çoxluqlarına baxaq. Ayrıca əvəzləmə əməlini $a \to b$ kimi yazaq və belə qəbul edək:

-əgər a verilmiş x sözünün yarımsözüdürsə, onda bu sözü b ilə əvəz etmək olar; a yarımsözünün x-də bir neçə dəfə yerləşdiyi halda b sözü ilə onlardan ən sol mövqedə olanı əvəz edilir;

-əgər belə əməllərin sonlu çoxluğu verilmişsə, onda mətni əvəzləmə ən birinci tətbiq olunan əməl vasitəsilə həyata keçirilməlidir və bu cür də təkrarən davam etdirilməlidir; bu təkrarlama qeyd olunan əməlin ("xüsusi dayandırıcı" əmri) tətbiqinə və ya mümkün olan sonluğa qədər baş verməlidir.

Bu üsulla qurulan alqoritmlərə Markov alqoritmləri deyirlər(1951). Markovun özü onları "normal alqorifm" adlandırıb. Markov alqoritmlərinə alqoritm anlayışının bir dəqiqləşməsi kimi baxmaq olar. Bu dəqiqləşmə xüsusi formalı yazılış hesabına əldə olunur.

Misal olaraq, Markovun aşağıdakı alqoritminə baxaq: "verilmiş ikiqat sözə görə törəmə ikiqat söz qurmalı".

Bu alqoritmdə köməkçi α, β işarələri istifadə olunur və aşağıdakı əməllər yerinə yetirilir:

$O\alpha \to \alpha O$
$\alpha L \to L\beta$
$\beta O \to L\alpha$
$\beta L \to O\beta$
$\alpha \to \cdot$
$\beta \to \cdot$
$\to \alpha$

Dayandırıcı əməllər nöqtə(·) simvolu ilə göstərilmişdir. Aşağıda həmin alqoritmin "OOLLOLLLOLOL" sözünə tətbiqi təsvir edilmişdir:

OOLLOLLLOLOL
αOOLLOLLLOLOL
OαOLLOLLLOLOL
OOαLLOLLLOLOL
OOLβLOLLLOLOL
OOLOβOLLLOLOL
OOLOLαLLLOLOL
OOLOLLβLLOLOL
OOLOLLOβLOLOL
OOLOLLOOβOLOL
OOLOLLOOLαLOL
OOLOLLOOLLβOL
OOLOLLOOLLLαL
OOLOLLOOLLLLβ
OOLOLLOOLLLL

Nəticədə "OOLOLLOOLLLL" sözü alınmışdır.

Normal alqoritmlərdə elementar kimi yerdəyişmə operatorundan iftifadə olunur. Məsələn, *abcabca* sözü üçün *bc*→*cb* yerdəyişmə operatorunun iki dəfə tətbiqi nəticəsində *acbacba* sözü alınır: *abcabca* → *acbabca* → *acbacba*.

5.7.2. Makkartinin rekursiv alqoritmləri

Alqoritmlərin yazılışı zamanı, ümumiyyətlə desək, Markov alqoritmlərində edildiyi kimi, mətni əvəzləmələrin sadə addımlarından ibarət emal qaydalarını yaratmaq məqsədəuyğun deyil.

Bu halda alqoritmlərin qurulması, həmçinin, qoyulan məqsədin həmin alqoritmlə yerinə yetirilib-yetirilmədiyini yoxlamaq çətinləşir. Hesablama maşınlarında bu məqsədlə istifadə zamanı istifadəçi mürəkkəb taktların emalının sadə şəkillə əvəz edilməsinə inanır. Lakin bu sadə taktların verdiyi məlumatların emalı prosesində mətni əvəzləmə müxtəlif kompyuterlərdə müxtəlif ola bilər. Odur ki, emalın bu hissəsini həyata keçirən alqoritmləri ayırıb, onu altalqoritm şəklində yazmaq lazımdır.

Alqoritmlərin qurulması üçün baza olaraq obyektlər ("verilənlər") və onlar üzərində əməllərdən (hesablama) istifadə olunmalıdır. Bu əməllər abstrakt yazılışa malik olmalıdır, yəni onların xassələri "aksiomatik" şəkildə göstərilməlidir. Bu iki yığım (obyektlər və onlara uyğun əməllər çoxluqları) sadə hesablama strukturları adlanır. Buna misal olaraq tam ədədlər və onlar üzərində hesab əməllərini göstərmək olar. 1962-ci ildə Makkarti alqoritm anlayışının klassik izahını bu aspektdə dəqiqləşdirməyə çalışmışdır.

Makkarti ilk dəfə proqramlaşdırma dilinin(LİSP) özünün-özü vasitəsi ilə emalını təklif edib.

N məlumatı *J* informasiyası ilə birlikdə obyekt adlanır. Məsələn, mövqeli say sistemində ərəb rəqəmləri ilə yazılan məlumatlar və onlarla əlaqədar olan informasiya ədədlərdir.

Deməli, obyekt $N \overset{\alpha}{\mapsto} J$ inikaslı *(N,J)* – cütüdür. Bu zaman *J* informasiyasına obyektin qiyməti, *N* məlumatına isə obyektin adlandırılması(işarə olunması) deyilir. Başqa sözlə, deyirlər ki, *N* işarələnməsi α şərhinə görə *J* qiymətinə malikdir.

5.8. Rekursiv funksiyalar

Tarixən ilk alqoritmik sistem konstruktiv təyin edilmiş hesabi (tam ədədli, natural ədədli) funksiyaların istifadəsinə əsaslanan sistem olmuşdur. Bu sistem sonralar xüsusi ad – rekursiv funksiya adını almışdır.

Rekursiv funksiyalar o ideyaya əsaslanırlar ki, istənilən məsələnin ilk verilənlərini və mümkün nəticələrini nömrələmək olar.

Rekursiya dedikdə funksiyanın elə verilməsi üsulu başa düşülür ki, arqumentin ixtiyari qiymətlərinə uyğun funksiyanın hesablanılacaq qiymətləri aşkar şəkildə arqumentin kiçik qiymətlərində təyin edilmiş funksiyanın qiymətləri vasitəsilə ifadə oluna bilsin - funksiya özü-özünü təyin etsin. Başqa sözlə desək, funksiya hesablanılması üçün səmərəli alqoritmə malik olsun.

Arqumentin verilmiş bir sıra qiymətlərinə görə onun digər qiymətlərini təyin edə bilən hər hansı alqoritmə məxsus olan ədədi funksiyalar hesablanıla bilən adlanır.

Hesablanılması üçün səmərəli prosedura(alqoritmə) malik olan funksiyaya rekursiv funksiya deyilir.

Alqoritmlər nəzəriyyəsində rekursiv funksiyaların tətbiqi istənilən əlifbadakı sözlərin natural ədədlər ardıcıllığı ilə nömrələnə bilməsi ideyasına əsaslanır. Belə nömrələməni sözləri uzunluqlarının artma sırası ilə düzməklə həyata keçirmək olar.

Nömrələnmədən sonra giriş-çıxış sözləri $y=f(x)$ funksiyasına çevrilir ($x,y \in N$).

Hissə-hissə təyin edilən tam ədədli(arqumentli) və tam qiymətli funksiyalara *hesabi funksiyalar* deyilir.

Rekursiv funksiyalar nəzəriyyəsində aşağıdakı üç əməl xüsusi yer tutur: superpozisiya, ibtidai (primitiv) rekursiya və ən kiçik kök (minimumlaşdırma əməli).

Funksiyaların *superpozisiya əməli* bir qrup hesabi funksiyaların digər hesabi funksiyaların arqumentləri ilə əvəz edilməsindən ibarətdir.

Tutaq ki, hər biri m dəyişənli n dənə $f_1,\dots,f_n$ və n dəyişənli $f(S^{n+1})$ funksiyaları verilmişdir. Onda $f_1,\dots,f_n$ funksiyalarının f ilə superpozisiyası aşağıdakı funksiyanı verir:

$$g(f)= f(f_1(x_1,...,x_m),...,f_n(x_1,...,x_m)).$$

Məsələn; $f(x)=0$ və $g(x)=x+1$ üçün $h(x)=g(f(x))=0+1=1$, $g(x)$-in $h(x)$-in özü ilə superpozisiyası isə $h_1(x)=g(h(x))=x+2$ olar.

Superpozisiya S^{n+1} ilə ifadə olunur. Burada $n+1$ funksiyaların sayıdır.

Superpozisiya istənilən sonlu arqumentə malik funksiyaya tətbiq oluna bilər.

İbtidai rekursiya əməli verilmiş iki n-yerli (n arqumentli) g və $(n+2)$-yerli h funksiyalarına görə $(n+1)$-yerli f funksiyasının qurulmasını təmin edir:

$$f(x_1,...,x_n,0)=g(x_1,...,x_n);$$

$$f(x_1,...,x_n,y+1)=h(x_1,...,x_n,y,f(x_1,...,x_n,y))$$

Superpozisiya və ibtidai (primitiv) rekursiya əməllərinin köməyi ilə elementar hesabi funksiyalardan düzəldilə bilən funksiyalara *ibtidai(primitiv) rekursiv funksiyalar* deyilir.

Ən kiçik kök əməli (və ya minimumlaşdırma əməli) əvvəlcədən qurulmuş $(n+1)$- dəyişənli $g(a_1,...,a_n,y)=0$ hesabi funksiyanın köməyilə n-dəyişənli yeni $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasını təyin etməyə imkan verir.

Dəyişənlərin istənilən $x_1=a_1,...,x_n=a_n$ qiymətləri yığımı üçün $f(a_1,...,a_n)$ funksiyası ilə tə'yin edilən $f(a_1,...,a_n)$ qiyməti kimi $g(a_1,...,a_n,y)=0$ tənliyinin ən kiçik tam mənfi olmayan $y=a$ kökü götürülür.

Belə kök mövcud olmadıqda $f(x_1,...,x_n)$ funksiyası verilmiş qiymətlər çoxluğuna görə təyin edilməmiş hesab olunur.

Superpozisiya, ibtidai (primitiv) rekursiya və ən kiçik kök əməllərinin köməyilə elementar hesabi funksiyalardan düzəldilən hesabi funksiyalara *hissə-hissə rekursiv funksiyalar* deyilir. Bu zaman funksiyalar hər yerdə təyin edilən olduqda, onlara *ümumi rekursiv funksiyalar* deyilir.

5.8.1. Hissə-hissə rekursiv funksiyalar

Hissə-hissə rekursiv funksiyalar konstruktiv təyin edilən hesabi funksiyaların daha ümumi sinfini təşkil edir.

Alqoritmlər nəzəriyyəsinin formallaşdırılmasına dair bu yanaşma Klini və Heydelə məxsusdur(1936-cı il).

Heydelin əsas ideyası ondan ibarət idi ki, sadə alqoritmik vasitələrlə bütün hesablanıla bilən funksiyaları kifayət qədər məhdud bazis funksiyalar çoxluğundan almaq olar.

Adi hesablanıla bilən funksiyanı məlum funksiyaların kompozisiyası vasitəsilə almaq üsulu da alqoritmikdir.

Hissə-hissə rekursiv funksiya anlayışı alqoritmlər nəzəriyyəsinin ən əsas anlayışlarından biridir. Onun əhəmiyyəti aşağıdakından ibarətdir.

1. Standart şəkildə verilmiş hər bir hissə-hissə rekursiv funksiya mexaniki xarakterli müəyyən proseduralar yolu ilə hesablanıla biləndir.

2. Ədədi funksiyalar hissə-hissə rekursivdirlər. Bu barədə Çerç tezisi belədir: alqoritmik hesablanıla bilən hissə-hissə rekursiv funksiyalar sinfi bütün hissə-hissə rekursiv funksiyalar sinfi ilə üst-üstə düşür.

Çerç tezisi dar mənada təsdiq edir ki, natural arqumentləri və qiymətləri ilə verilən istənilən hesablanıla bilən funksiya hissə-hissə rekursivdir.

Hissə-hissə rekursiv funksiyara aid misallara baxaq.

Misal 5.1. İki ədədin toplanması:

$$\text{sum}: \langle x,y\rangle \to x+y.$$

Bu funksiya ibtidai rekursiya əməlinə əsasən ümumrekursivdir. Belə ki,

$$\text{sum}(x,0) = \text{pr}1(x) = x,$$

$$\text{sum}(x,y+1) = s(\text{sum}(x,y)) = \text{sum}(x,y)+1.$$

Misal 5.2. İki ədədin vurulması:

$$\text{prod}: \langle x,y\rangle \to x\,y.$$

İbtidai rekursiya əməlindən istifadə etsək, alarıq:

prod(x,0) = 0(x) = 0,

prod(x,y+1) = sum(prod(x,y),x).

Misal 5.3. Fərqin modulu:

|x–y| = x–y, əgər x ≥y isə,

|x–y| = y–x, əgər x<y isə.

Bu funksiya ibtidai rekursiya əməlinə əsasən ümumrekursivdir. Belə ki,

|x–y| = (x÷y)+(y÷x).

Misal 5.4. Faktorial:

Doğrudan da, 0! = 1, (y+1)! = prod(y!,y+1).

Misal 5.5. min(x,y) –x və y ədədlərinin ən kiçiyi:

min(x,y) = x÷(x÷y).

Misal 5.6. Ədədin işarəsi:

sg(x) = 0, əgər x = 0,

sg(x) = 1, əgər x>1.

Rekursiya əməlindən istifadə etsək, alarıq:

sg(0) = 0, sg(y+1) = 1.

Misal 5.7. rm(x, y) –olduqda y-in x-ə bölünməsindən x ≠0 və x=0 olduqda alınan qalıq(rekursiya və superpozisiyaya əsasən):

rm(x,0) = 0, rm(x,y+1) = prod(s(rm(x,y)), sg(|x–s(rm(x,y))|)).

Hissə-hissə rekursivlikləri məlum olan funksiyalardan istifadə etməklə, yeni-yeni bütün hissə-hissə rekursiv funksiyalar alınır.

5.9. Klini və Post nömrələmələri

Tutaq ki, N natural ədədlər çoxluğudur. M çoxluğunun nömrələnməsi(və yaxud, daha dəqiq desək, ədədi nömrələnməsi) ixtiyari $E \subset N$ çoxluğunun M çoxluğuna α inikası adlanır; əgər bu zaman $\alpha(e)=m$ olarsa, onda $e \in E$ $m \in M$-in α nömrəsi və yaxud, sadəcə, nömrəsi adlanır.

E çoxluğuna α nömrələnməsinin nömrələmə çoxluğunda əsası deyilir.

$E=N$ olduğu halda nömrələnmə natural adlanır.

Hər element ancaq bir nömrələnməyə malik olduqda, nömrələmə təkrarsız və yaxud birqiymətli sayılır.

Daha geniş təbii anlamda nömrələmə əsasının nömrələnməsi istənilən ansamblın ixtiyari altçoxluğudur.

Natural sıra ilə nömrələnmə zamanı əsası bütün ansambl olan nömrələmədən istifadə edilir.

Bir nömrələmədən digərinə keçidi təmin edən aşağıdakı təbii əməllər mövcuddur: düz hasil, kortej genişləndirmə, faktorial daralma.

Tutaq ki, α və β nömrələmələri uyğun olaraq, A və B çoxluqlarının E və F əmsallı mahiyyətləridir; $e \in E$, $f \in F$. Onda, düz hasılı belə tərif etmək olar: α və β nömrələməsinin A və B çoxluğundakı düz hasili $A \times B$ çoxluğunun $E \times F$ əsasına malik $\gamma(e,f) = <\alpha(e),\beta(f)>$ nömrələməsinə deyilir.

Digər əməllər də analoji olaraq təyin edilir.

Kantorun nömrələyən funksiyası belə təyin edilir:

$$c(x,y) = \frac{(x+y)^2+3x+y}{2}.$$

Qeyd olunan $c(x,y)$ funksiyası N^2 və N çoxluqları arasında qarşılıqlı birqiymətli uyğunluğu həyata keçirir(natural ədədlər cütünü nömrələyir). Eyni zamanda qəbul edək ki: $l(x)$, $r(x)$ -rekursiv funksuyaları üçün $c(l(x),r(x))=0$ münasibəti ödənilir; $U(t,x)$ – bütün biryerli (arqumentli) hissə-hissə rekursiv funksiyalar üçün universal ikiyerli hissə-hissə rekursiv funksiyadır.

İndi isə Klini və Post nömrələmələrinin şərhinə keçək. K^2 ilə Klininin nömrələyən funksuyasını işarələyək.

Bunlardan əlavə aşağıdakı işarələmələri də qəbul edək:

[x,y]=c(l(x),c(r(x),y)),

$$[x]_{21} = c(l(x),l(r(x))),$$
$$[x]_{22} = r(r(x)),$$
$$[x_1, x_2, x_3, ..., x_n] = [[x_1, x_2], x_3, ..., x_n] \quad (n>2 \text{ üçün}),$$
$$[x]_{n1} = [[x]_{21}]_{n-11}, ..., [x]_{nn-1} = [[x]_{21}]_{n-1n-1}, [x]_{nn} = [x]_{22}$$
(n>2 üçün),
$$K^2(x_0, x_1) = U(l(x_0), c(r(x_0), x_1)),$$
$$K^{n+1}(x_0, x_1, ..., x_n) = K^n([x_0, x_1], x_2, x_3, ..., x_n) \quad (n>2 \text{ üçün}).$$

Əgər istənilən x üçün $f(x)=K^2(m,x)$ olarsa, onda m f funksiyasının Klini nömrəsi adlanır və $\chi_m = \chi m = f$ kimi işarə edilir.

Tytaq ki, H - bütün biryerli (arqumentli) hissə-hissə rekursiv funksiyalar sinfidir. Onda $\chi \quad : N \mapsto H$ inikası H sinfinin Klini nömrələnməsi adlanır.

Analoji olaraq, n-yerli hissə-hissə rekursiv funksiyaların Klini nömrələnməsi təyin edilir. Əgər rekursiv sadalanan A çoxluğu hər hansı n üçün K(n,x) funksiyasının qiymətləri toplusudursa, onda n ədədi A çoxluğunun Post nömrələməsi adlanır və aşağıdakı kimi işarə edilir: $A = \pi_n = \pi n$.

P - bütün rekursiv sadalanan çoxluqlar sinfi olduqda, $\pi : N \mapsto P$ - inikası P sinfinin Post nömrəsi adlanır.

Tutaq ki, $A, B \subset N$. Aşağıdakı şərti ödəyən $f(x)$ funksiyası A-nı B-yə m-yığan adlanır: $x \in A \Leftrightarrow f(x) \in B$. f funksiyası ümümi rekursiv funksiya olduqda, A çoxluğu B-yə yığılan adlanır və aşağıdakı kimi işarələnir: $A \leq_m B$.

Rekursiv sadalanılan A çoxluğu o vaxt m-universal adlanır ki, ona istənilən rekursiv sadalanılan funksiya yığılır. Rekursiv sadalanılan A çoxluğu o vaxt kreativ (və yaxud yaradıcı çoxluq) adlanır ki, $\forall x -$ ə görə aşağıdakı şərti ödəyən f_A ümumrekursiv funksiyası mövcud olsun:

$$f_A(x) \in (A \cap \pi_x) \cup (\neg A \cap \neg \pi_x).$$

Misal 5.8. İsbat edin ki, hər hansı hissə-hissə rekursiv $f(x)$ funksiyası sonsuz sayda Klini nömrəsinə malikdir.

Həlli:

Tutaq ki, $f(x)$ aşağıdakı kimi verilib:

$$f(x) = f(x) + 0 \cdot y = K^3(a,x,y) = K^2([a,y],x).$$

Onda alarıq ki, [a,y] ədədi y=0,1,2,... qiymətlərində Klini nömrələnməsi olacaqdır.

Misal 5.9. İsbat edin ki, $K^{n+1}(x_0, x_1, ..., x_n)$ bütün n-yerli hissə-hissə rekursiv funksiyalar üçün universaldır.

Həlli:

$$f(x_0, x_1, ..., x_n) = f(x_0, x_1, ..., x_n) + 0 \cdot y =$$
$$= U(a, y, x_0, x_1, ..., x_n) = K^{n+1}(c(a,y), x_0, x_1, ..., x_n).$$

5.10. Tyurinq maşınları

1936-37-ci illərdə amerika riyaziyyatçısı Emil Post və ingilis riyaziyyatçısı Allan Tyurinq bir-birindən xəbərsiz Çerç və Klinin işləri ilə təxminən eyni vaxtda aşağıdakı qənaətə gəlmişlər: alqoritmik prosesıər "maşın"ın yarada biləcəyi prosesdir. Bu maşınlarda riyazi şəkildə yazılan bütün alqoritmik prosesləri yerinə yetirmək mümkündür.

Tyurinq maşınları, qeyd etdiyimiz kimi, hesablanıla bilən funksiyaların tərifinin bir üsuludur.

Post və Tyurinq maşınları mahiyyətcə o qədər də fərqlənmədiklərindən, sonralar onlar Tyurinq maşınları adlandırıldı. Bu maşınlarla verilən alqortimik sistemlərə baxaq.

Post(əlifbası 2 simvola malik olub) və Tyurinq maşınları (TM -əlifbası istənilən sonlu sayda simvola malik olub) dedikdə aşağıdakı hissələrdəm ibarət olan təxmini, yəni fərziyəyə əsaslanan maşın başa düşülür:

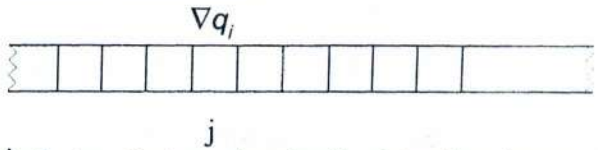
1) *İnformasiya lenti* (bu maşının qeyri-məhdud yaddaşını təşkil edir) olaraq ayrı-ayrı oyuqlara bölünmüş

sonsuz maqnit və ya kağız lenti göürmək olar. Bu zaman hər bir oyuqda ancaq bir simvol yerləşdirmək olar.

2) *Oxuyucu başcıq*. Bu, oyuqların məzmununu təhlil edən xüsusi həssas elementdir. Başcıq oyuqlar üzrə o yan bu yana hərəkət edir.

3) *İdarəedici qurğu*(İQ). İQ hər bir baxılan zaman ərzində müəyyən "vəziyyətdə" olur. Fərz olunur ki, İQ hər hansı sonlu sayda vəziyyətdə ola bilər. İQ-nun vəziyyətinə çox vaxt maşının daxili vəziyyəti deyirlər. Bunlardan biri tamamlayıcı adlanır və o maşının işini qurtarmağı idarə edir.

Maşının sxemi belədir:



İndi isə Postun alqoritmik sisteminə baxaq. Postun alqoritmik sistemində informasiya A={1,0} ikilik əlifbasında verilir. Beləliklə, informasiya lentinin hər bir oyuğunda ya "0" ya da "1" yerləşdirmək olar. Alqoritm - əmrlər adlanan sonlu sayda nizamlı qaydalar yığımı şəklində verilir. Alqortm işinə onun birinci əmrinə uyğun olan hər hansı oyuqdan başlayır. Alqoritmi təşkil edən əmrlər (Post maşınının idarəedici qurğusu ilə həyata keçirilən) aşağıdakılardır:

1) Baxılan oyuğa 1 yazmalı və *i*-ci əmrə keçməli;
2) Baxılan oyuğa 0 yazmalı və *j*-ci əmrə keçməli;
3) Lenti bir oyuq qədər sağa sürüşdürməli və *i*-ci əmrin icrasına başlamalı.
4) Lenti bir oyuq sola sürüşdürməli və *j*-ci əmrin icrasına keçməli.
5) Əgər baxılan oyuqda 1 yazılıbsa, onda *i*-ci əmrin icrasına keçməli; 0 yazıldıqda isə *j*-ci əmrin.
6) Alqoritmin işinin qurtarması, dayanma.

Beləliklə, qeyd olunan təlimatlar siyahısı bu təlimata uyğun keçid funksiyasını təyin edir.

İxtiyari sonlu sayda qaydalardan düzəldilmiş Post maşınının əmrləri ilə verilən alqoritmlərə Post alqoritmləri deyilir.

İsbat edilmişdir ki, Post alqoritmləri hissə-hissə rekursiv funksiyalar vasitəsilə yerinə yetirilən alqoritmlərə (və tərsinə) gətirilə bilər.

Post maşınlarından fərqli olaraq Tyurinq maşınlarında hər hansı əlifbanın sonlu simvollarından isifadə olunur. İdarəedici qurğu isə sonlu sayda vəziyyətdən birində ola bilər.

Başqa sözlə desək, ixtiyari sonlu əlifbada işləyən TM hər hansı sonlu sayda əmrləri icra edə bilər. Bu zaman TM, Post maşınlarında olduğu kimi, oyuğun məzmununu dəyişmədən lenti sağa və ya sola sürüşdürə və yaxud lent hərəkət etdirmədən yuvacığın məzmununu dəyişə bilər.

Bu əməliyyatlar siyahısını genişləndirmək olar.

Tyurinq maşınlarının yerinə yetirə biləcəyi bütün əmrlər çoxluğuna onun proqramı deyilir.

TM o vaxt verilmiş hesab edilir ki, onun daxili və xarici əlifbaları, proqramları, ilkin konstruksiyaları verilmiş olsun, hansı simvol ilə boş xananın işarə edilməsi və nəticəvi vəziyyət göstərilsin.

İstifadə olunan lentlərin sayından, onların təyinatlarından və idarəedici qurğunun vəziyyətləri sayından asılı olaraq, Tyurinq maşınlarının müxtəlif modifikasiyaları təyin edilir: iki çıxışlı TM, çox lentli TM, standart TM (STM), universal TM. Standart Tyurinq maşınlarına baxaq.

5.10.1. Standart Tyurinq maşınları

Lent sürüşərkən oyuğun qəbul edilən vəziyyəti əvvəlcədən dəyişdirilə bildikdə Tyurinq maşınları standart (STM) adlanır.

Tutaq ki, Tyurinq maşınlarının əlifbası $A = \{S_0, S_1, \ldots, S_n\}$ çoxluğu şəklindədir. Burada S_0 -boş oyuğa uyğundur. İdarəedici qurğunun vəziyyətləri sayı isə $Q=\{q_0,q_1,...,q_m\}$ çoxluğu şəklində verilir. Burada q_0-dayanma vəziyyətinə uyğundur.

Lentin bütün oyuqlarının və idarəedici qurğunun vəziyyətləri ardıcıllığının məcmusu maşının konfiqurasiyası adlanır. Konfiqurasiya maşının konkret vəziyyətini təsvir edən söz şəklində verilir. Tutaq ki , hər hansı vaxt anında TM aşağıdakı şəkildə göstərilən vəziyyətdədir:

∇q_i

S_o	S_j	S_j	S_j		S_j		S_j	S_j	S_o

1 2 3 . . . k . . . . r

Tyurinq maşınının bu verilən hala uyğun konfiqurasiyası aşağıakı söz şəklində təsvir olunur:

$$...S_o\, S_{j1}\, S_{j2}\, S_{j3} ... q_i\, S_{jk} .... S_{jr}\, S_o ...$$

burada S_o - boş oyuğu işarə edən simvol;

r - lentdəki dolu oyuqların sayını göstərən ədəd;

S_{j1} - soldan birinci boş olmayan oyuğun vəziyyəti;

$q_iS_k \rightarrow q_iS_m$ -verilən zaman anında baxılan oyuğun vəziyyəti;

q_i - idarəedici qurğunun vəziyyətidir.

Hər bir konfiqurasiya daxili əlifbada ancaq bir q_i simvoluna malik olur. Bu simvol sözdə ən solda ola bilər, ən sağda isə yox.

Əgər q_i vəziyyətində yerləşən və lentdəki S_k simvolunu qəbul edən standart Tyurinq maşını baxılan oyuqdakı simvolu S_m -lə əvəz edən və lenti sola bir oyuq sürüşdürən yeni vəziyyətinə keçirsə, onda maşının L əmri belə yazılır: $q_iS_k \rightarrow q_jS_m$.

Əgər simvol dəyişməsi baş vermirsə, onda S_m əmrdə buraxıla bilər.

Lentlə manipulyasiya zamanı aşaıdakı işarələrdən istifadə etmək olar:

L - lentin sola hərəkəti;

P - lentin sağa hərəkəti;

S - lentin hərəkətsizliyi (hərəkəti yoxdur).

Adətən, standart Tyurinq maşınının əmrləri beş simvol yığımı ilə verilir: $q_i\ S_k\ q_j\ S_m$ L.

İndi isə universal Tyurinq maşınlarını nəzərdən keçirək.

5.10.2. Universal Tyurinq maşınları

İndiyə qədər biz müxtəlif alqoritmlərin bir-birindən fərqli əmrlərlə, daxili və xarici əlifbalı Tyurinq maşınında yerinə yetirilməsi haqqında danışırdıq. Buna baxmayaraq, universal Tyurinq maşını (UTM) qurmaq olar ki, o da ixtiyari alqoritmi yerinə yetirə və ixtiyari TM-nın işini görə bilər.

UTM-da da informasiya lentdə yerləşən simvollarla təsvir olunur. Bu zaman UTM ancaq qeyd olunmuş xarici əlifbaya malik olur. O, eyni zamanda, idarəedici qurğunun bütün mümkün vəziyyətlərinə və ixtiyari sayda simvollu əlifbaya malik ilk verilənlərin qəbuluna hazır olmalıdır.

Bütün bunlar konfiqurasiyanın və ixtiyari verilmiş TM-nın giriş simvollu proqramlarının kodlaşdırılması yolu ilə əldə edilir. Kodlaşdırma aşağıdakı kimi aparılmalıdır:

1) Müxtəlif hərflər (simvollar) müxtəlif kod qrupları ilə əvəz olunmalıdır. Eyni bir hərf, harada rast gəlməsindən asıllı olmayaraq, eyni bir kod qrupu ilə əvəz olunmalıdır.

2) Kod sətrləri birqiymətli olaraq ayrı-ayrı kod qruplarına ayrılmalıdır.

3) Hansı kod qruplarının müxtəlif sürüşməyə malik olduğu bilinməlidir.

Belə kodlaşdırmaya aid misal olaraq $A=\{S_1,S_2,...,S_k\}$ xarici əlifbalı və $Q=\{q_1,q_2,...,q_m\}$ daxili əlifbalı TM-nı göstərə bilərik.

Əgər UTM-nın xarici əlifbası $A=\{0,1\}$ -sə, onda bu şərtlər aşağıdakı kodlaşdırma ilə aparılacaqdır:

1) Kod qrupları kimi $3+k+m$ sayda 100...01 şəklində söz götürülür. Burada k - xarici əlifbanın simvolları sayı, m - isə İQ-nun vəziyyətlərinin sayıdır. Onda sətrin ayrılması bu sıfırların sayının tapılması ilə müəyyənləşir.

2) Kod qruplarının uyğunlaşması (xarici və daxili əlifbalarının) aşağıdakı kimi kodlaşdırmaya əsasən aparılır.

Kod qrupu:

L	*101*
S	*1001*
P	*10001*

Xarici əlifba:

S_1	*100001*	*- 4 sayda sıfır*
S_2	*10000001*	*- 6 sayda sıfır*
	....	
S_n	*10 ... 01*	*- 2(k+1) sayda sıfır*

Sıfırların sayi 2-dən böyük cüt natural ədəddir

Daxili əlifba (vəziyyət):

q_1	*1000001*	*- 5 sayda sıfır*
q_2	*100000001*	*- 7 sayda sıfır*
	....	
q_m	*10 ... 01*	*- 2(m+1)+1 sayda sıfır*

Sıfırların sayi 3-dən böyük tək natural ədəddir

Beləki, məsələn, *bcadc* sözünü *bcdcc* sözünə çevirən TM üçün UTM-da giriş sözü verilmiş kodla hansı yığımla təsvir olunacağını araşdırmaqla prosesi dərk etmək mümkündür.

Əlifbanın sonlu simvolları maşının *xarici*, idarəedici qurğunun sonlu vəziyyətlərisə *daxili əlifbası* adlanır.

Maşının yerinə yetirə biləcəyi bütün əmrlər toplusuna proqram deyilir.

İsbat edilmişdir ki, bu maşınlarda hesablanılan funksiyalar sinfi ilə bütün hissə-hissə rekursiv funksiyalar sinfi tamamilə üst-üstə düşür.

Verilən məsələnin həllinin mövcud olub olmaması məsələsini lazımi xassələrə malik Tyurinq maşınlarının mövcud olub-olmaması kimi başa düşmək lazımdır.

Riyazi nöqteyi-nəzərdən Tyurinq maşınları, sadəcə olaraq, sözlərin emalı üçün müəyyən alqoritm deməkdir.

Bütün bunlara baxmayaraq, alqoritmik həll edilməyən problemlər də var.

5.11. Alqoritmik həll edilməyən problemlər

Problem o vaxt alqoritmik həll edilə bilməyən hesab olunur ki, onun həlli üçün alqoritm mövcud deyildir. Təbii ki, bu zaman alqoritm dedikdə Markovun normal alqoritmi, Tyurinq maşını və bu kimi dəqiq formal təriflər başa düşülür. Qeyd etdildiyi kimi, belə izahlardan biri predikatlar hesabı düsturlarının isbat edilə bilənliyinin tanınması problemidir. Aydın olduğu kimi, Tyurinq maşını o vaxt öz-özünə tətbiq olunan hesab edilir ki, o maşın əlifbasındakı söz şəklində yazılmış özünün proqramına tətbiq oluna bilən olsun.

Teorem 5.1. Öz-özünə tətbiq olunma prosesi alqoritmik həll edilə bilən deyil.

İsbatı. *P* proqramlı *A* - Tyurinq maşınının necəliyindən asılı olmayaraq, onun öz-özünə tətbiq edildiyi halda $P(A)=H$ münasibəti (burada, *H*- "hə" sözünün qısaldılmış yazılışıdır), əks təqdirdə isə $P(A)=Y$ (burada, *Y*- "yox" sözünün qısaldılmış yazılışıdır) münasibətinin doğruluğunun isbatı tələb olunur.

Fərz edək ki, belə maşın növcuddur. Ümumiliyələ, məhdudiyyət qoymadan hesab etmək olar ki, *H* nəticəsi ilə *A* - Tyurinq maşınının hər hansı *q* vəziyyəti üçün *qH* – a malik maşın sözündə dayanır. $qH \Rightarrow qH$ əmrilərini A - Tyurinq maşınının malik olduğu bütün vəziyyətləri ilə birləşdirən P proqramlı B - Tyurinq maşını quraq. B - Tyurinq maşını, A - Tyurinq maşınında olduğu kimi, öz-özünə tətbiq olunmayan maşinlar üçün proqramı Y-a çevirir. Eyni zamanda, özü-özünə tətbiq olunan maşinlar üçün həmin proqramlar tətbiq edilə bilməz. Bundan əlavə, B- Tyurinq maşını hər hansı maşının proqramına ancaq və ancaq o vaxt tətbiq oluna bilər ki, B həmin proqramı Y-a çevirsin. İndi isə B- Tyurinq maşınının özü-özünə tətbiq oluna bilən olduğunu aydınlaşdırmağa cəhd edək. Əgər B- Tyurinq maşınının özü-özünə tətbiq oluna biləndirsə, onda o, öz proqramını Y-a çevirir. Lakin Y-da(yəni, "yox" cavabında) o, proqramı ancaq özü-özünə tətbiq oluna bılməyən maşinlar üçün cevirir. Nəticədə, B - öz-özünə tətbiq oluna bılməyən maşin olur. Əgər B - öz-özünə tətbiq oluna bılməyən maşin olsa, onda o, öz proqramını Y-a çevirir və yenə də özü-özünə tətbiq oluna bılən maşin olur. Alınan ziddiyyət teoremin doğruluğunu təsdiqləyir.

Teoremdən aşağıdakı *nəticə* alınır: özü-özünə tətbiq olunma probleminin tanınması alqoritmik həll edilə bilən deyil.

Bu problemi belə də ifadə etmək olar: verilmiş istənilən T – Tyurinq maşını və R - ilk verilənləri üçün T-nin R –ə tətbiq olunub-olunmadığını bilmək lazımdır.

Teorem 5.1. -ə əsasən alqoritmik həll edilə bilməzliyi və bir sıra digər problemləri ümumi metodun tətbiqi ilə qərarlaşdırmaq olar.

Ümumi metod aşağıdakından ubarətdir: əgər bir problemin həlli digərinin həlli ilə əlaqələndirilirsə, (yəni, birinin həlli digərinin həllindən tapılırsa) onda onların ikisi də alqoritmik həll edilə bilən deyillər.

Misal. Aşağıdakı alqoritmik çevirmənin tanınması problemi həll edilə bilən deyil: verilmiş istənilən T – Tyurinq maşını, R və Q sözləri üçün T əlifbasında $T(R)=Q$ bərabərliyinin doğruluğu mümkün deyil.

Gerçəkdən də, T^* - Tyurinq maşınını quraq və hər bir maşın sözünü ona T – Tyurinq maşınını dayandıran hər hansı Q^* qeyd edilmiş sözünə çevirən əmrləri T proqramı ilə birləşdirək. Onda görərik ki, tətbiq oluna bilmənin tanınması problemi çevirmənin ancaq və ancaq T – nin R - ə tətbiqi halında tanına bilinməsinə gətirilir.

5.12. Alqoritmlər nəzəriyyəsinin tətbiqləri

Alqoritmlər nəzəriyyəsi riyaziyyatın alqoritmik proseslərin rast gəlindiyi bütün oblastlarında tətbiq olunur. Belə problemlər praktiki olaraq, riyaziyyatın bütün bölmələrində meydana çıxır. Riyazi məntiqdə hər bir nəzəriyyə üçün onun təklifləri çoxluğuna nəzərən bütün doğru və ya isbat edilə bilən təklifləri çoxluğunun həll edilə bilənlilik problemi formalaşır. Bu nəzəriyyələr iki yerə bölünür: həll edilə bilən və həll edilə bilməyən. Qeyd etdiyimiz kimi, 1936 –cı ildə Aloiz Çerç predikatlar məntiqinin bütün doğru təklifləri çoxluğu üçün həll oluna bilmə probleminin həll edilə bilməzliyini qeyd edib.

Riyaziyyatda həll edilə bilməyən alqoritmik problemlərə rast gəlinən oblastlar:

- cəbrdə(yarımqruplar – *altqruplar* – , o cümlədən, *gruplar üçün eynilik problemi*); altqruplara dair eynilik problemli ilk misallar 1947 –ci ildə E. Post və A.A.Markov, sonra isə 1952 –ci ildə P.S.Novikov tərəfindən tapılmışdır;
- topologiyada(*homomorfluq problemi*; bu problemin vacib hallar sinfi üçün həll edilməzliyi 1958 –ci ildə A.A.Markov tərəfindən isbat olunub);
- ədədlər nəzəriyyəsində(*diofant tənliklərin həll edilə bılməzliyi problemi*; bu problemin həll edilməzliyi 1970 –ci ildə Y.V.Matiyaseviç tərəfindən isbat edilib);
- riyaziyyatın digər bölmələrində.

Diofant tənlikləri. Tutaq ki, $p(x_1, x_2,...,x_n) - x_1, x_2,...,x_n$ dəyişənlərindən asılı çoxhədlidir. Onda, ancaq tam həllərini axtardığımız

$$p(x_1, x_2,...,x_n)=0$$

tənliyi diofant tənliyi adlanır. İlk diofant tənliyini bizim eradan əvvəl 3-cü əsrdə yunan alimi Diofant öyrənmiş və sistemləşdirmişdir.

N ə t i c ə. Bir qayda olaraq, çox saylı əlavələrdə riyaziyyatın tətbiqi müxtəlif alqoritmlərin istifadəsini tələb edir. Çox məsələlərin həlli üçün variatları tam seçimə köçürən kombinasiya edilmiş alqoritmləri fikirləşib, tapmaq çətin deyil.

Ancaq burada riyaziyyat ilə informatikanın müxtəlifliyi meydana çıxır: informatikada nəzəri cəhətdən hər hansı obyektin mövcudluğu haqqında təklif irəli sürmək, hətta bu faktın konstruktiv isbatını (yəni, alqoritmini) tapmaq kifayət deyil. Biz yaşadığımız dünyadakı məhdudiyyətləri nəzərə almalıyıq: yaddaş həcmi və vaxtdan istifadə edərək həm insan, həm də kompyuter tərəfindən qəbul edılə bilən həllin hesablanıla bilən olması zəruridir.

Qarşıya bir sira suallar çıxır:

- əgər məsələ verilibsə, onun həlli üçün effektiv alqoritm necə tapılmalıdır?

- bəs, əgər alqoritm tapılıbsa, onda həmin məsələni həll edən digər alqoritmlərlə onu necə müqayisə etmək lazımdır?

- həmin alqoritmin keyfiyyətini necə qiymətləndirməli?

Bu cür suallar həm proqramçıları, həm də hesablamaları nəzəri olaraq araşdırmaqla məşğul olan şəxsləri maraqlandırır.

Belə hallarda funksiyanın asimptotik olaraq qiymətləndirilməsindən istifadə etmək olar. Yəni, həll üçün alqoritmin zamana görə ən yaxşının tapılması – məsələnin mürəkkəbliyinin təyin edilməsi ilə məşğul olunmalıdır. Mürəkkəblik nəzəriyyəsinin əsas məsələsi belədir: verilmiş Q probleminə qədər müvəffəqiyyətlə və ya hansı şərtlərlə həll edilə bilər? Əlbəttə, biz Q probleminin heç bir konkret

alqoritmini söyləyə bilmərik. Bizim məqsədimiz ancaq bütün mümkün alqoritmlərə baxmaq və hesablama mürəkkəbliyi haqqında fikir yürütmək olmalıdır.

Riyaziyyatın alqoritmlər nəzəriyyəsi bölməsində isə verilmiş məsələnin həlli üçün alqoritm qurmağın mümkün olub-olmadığı araşdırılır.

Yoxlama tapşırıqları

5.1. İsbat edin ki, aşağıdakılar ibtidai rekursiv funksiyalardır:

a) f(x)=x+n;

b) f(x)=n;

c) f(x,y)=x+y;

ç) f(x,y)=x*y;

d) $f(x,y)=x^y$, burada $0^0=1$;

e) f(x)=x!, burada 0!=1.

5.2. İsbat edin ki, hər bir kreativ çoxluq *m*-universaldır.

5.3. İki çoxluğun kəsişməsi əməlini reallaşdıran alqoritmi təsvir etməli.

5.4. İxtiyari iki çoxluğun fərqi əməlini yerinə yetirən alqoritm qurmalı.

5.5. Toplama, vurma, və qüvvətə yüksəltmə əməllərini yerinə yetirən alqoritm qurmalı və rekursiv funksiyalardan istifadə etməklə mərhələlər ardıcıllığı şəklində həmin alqoritmi təsvir etməli:

a) ikiyerli funksiya üçün;

b) üçyerli funksiya üçün;

c) n- yerli funksiya üçün.

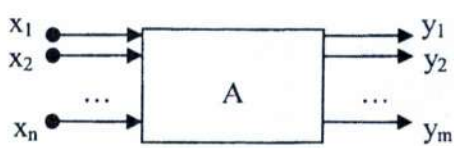
FƏSİL 6. SONLU AVTOMATLAR NƏZƏRİYYƏSİ

6.1. Əsas anlayışlar

Sonlu avtomatlar nəzəriyyəsi sistemlərin ümumi riyazi nəzəriyyəsinin xüsusi haldır. O, real fiziki qurğuları və hadisələri deyil, mücərrəd riyazi modelləri və onların ümumi xassələrini öyrənir. Lakin sonlu avtomatlara bir cox real qurğuların və hadisələrin ideallaşdırılmış modelləri kimi baxmaq olar. Sonlu avtomatlar nəzəriyyəsində baxılan ideyalar və metodlar elmin və texnikanın müxtəlif sahələrində modellər sinfi kimi tətbiq edilir.

Modellər sinfi kimi sonlu avtomatlara müəyyən məhdudiyyətlər qoyulur. Nəzərə alınır ki, sonlu avtomat sonlu sayda girişə və çıxışa malikdir. Hər hansı t vaxt momentində sonlu avtomatın hər bir girişinə siqnal daxil olur və həmin siqnallara reaksiya olaraq hər bir çıxışda siqnal alınır. Hesab edilir ki, siqnallara dəyişilməsi $t_0,t_1,$...diskret vaxt momentlərində baş verir və onları tam müsbət ədədlərə uyğun götürürlər. Bu cür modellər sinfində siqnalların fiziki təbiətinə baxılmır. Nəzərə alınır ki, t vaxt momentində hər bir girişə yalnız bir siqnal verilir və hər bir çıxışda bir siqnal alınır. Giriş və çıxış siqnallarının sayı sonludur.

Tutaq ki, sonlu avtomatların girişləri $x_1,x_2,\ldots,x_n$, çıxışları isə $y_1,y_2,\ldots,y_m$ dəyişənləridir. Onda sonlu avtomatı sxematik olaraq şəkil 6.1-dəki kimi göstərmək olar.



Şəkil 6.1.

Girişə verilən x_i siqnallarını giriş əlifbasının $X_i(i=1,2,\ldots,n)$ hərifləri ilə, çıxışda alınan y_j siqnallarını isə çıxış əlifbasının $Y_j(j=1,2,\ldots,m)$ hərfləri ilə işarə edək. Giriş və çıxış siqnalları çoxluğu sonlu olduğundan, $X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_m$ əlifbaları da sonludular. Əgər A sonlu avtomat n sayda $X_1,\ldots,X_n$ girişə malikdirsə və həmin girişlərə $X_1,\ldots,X_n$ əlifbasının giriş siqnalları verilirsə, onda ümumiliyi itirmədən ona bir x girişi olan və həmin girişə $X_1,\ldots,X_n$ əlifbasının siqnalları verilən avtomat kimi baxmaq olar. Analoji olaraq bunu çıxış haqqında da demək olar.

Tələbdən asılı olaraq sonlu avtomatı bir və ya bir neçə girişli, bir və ya bir neçə çıxışlı qurmaq olar. Sonrakı mülahizələrimizdə biz «sonlu avtomat» termini yerində qısa olaraq «avtomat» terminindən istifadə edəcəyik və bütün hallarda söhbətin sonlu avtomatdan getdiyi nəzərə alınacaq.

Avtomatın *davrvnışı* onun giriş əlifbasının həriflərini çıxış əlifbasının hərfinə çevirmə bacarığına deyilir. Fərz edək ki,avtomat bir girişə və bir çıxışa malikdir. Əgər t vaxt momentində çıxış siqnalının giriş siqnalından funksional asılılığı verilibsə, avtomatın davranışı təsvir edilmiş hesab olunur.t vaxt momentində çıxış təkcə girişlə deyil, həm də avtomatın bütün əvvəlki işi ilə və ya əvvəlki iş haqqında yaddaşla təyin olunur. Belə demək olar ki,t momentində çıxışın asılı olduğu müəyyən daxili dəyişənlər mövcüddur.

Vəziyyət adlanan müəyyən kəmiyyətlə giriş siqnalına və daxili dəyişənlərin yekun təsirlərinə görə çıxış siqnalının qiymətini birmənalı təyin etmək olar. Sonlu avtomatlara qoyulan məhdudluqlardan biri də avtomatın vəziyyətlərinin sayının sonlu olmasıdır. İndii isə sonlu avtomatın dəqiq riyazi tərifini verək.

Sonlu avtomat aşağıdakı beş komponentin toplusuna deyilir:

1) avtomatın *giriş əlifbası* adlanan, boş olmayan sonlu $X=\{a_1,\dots,a_r\}$ çoxluğu. Onun elementlərinə giriş simvolları-hərfləri deyilir;

2) avtomatın *çıxış əlifbası* adlanan və boş olmayan sonlu $Y=\{b_1,\dots,b_t\}$ çoxluğu. Onun elementlərinə çıxış simvolları-hərfləri deyilir;

3) avtomatın *vəziyyətlər çoxluğu* adlanan boş olmayan sonlu $Z=\{q_1,\dots,q_s\}$ çoxluğu. Onun elementlərinə avtomatın vəziyyətləri deyilir;

4) bütün nizamlı (a_j,b_i) cütlüklər çoxluğunu Z çoxluğunda inikas etdirən *vəziyyətlərin keçid funksiyası –f;*

5) bütün nizamlı (a_j,b_i) cütlüklər çoxluğunu Y çoxluğunda inikas etdirən *çıxış funksiyası*-g.

Beləliklə, sonlu avtomat <X, Y,Z,f,g> beşliyidir. Hər bir t momentində avomatın girişinə X əlifbasının x(t) hərfi daxil olur, bu zaman eyni vaxt momentində çıxışda Y əlifbasının y(t) hərfi hasil edilir və avtomatın z(t) vəziyyəti dəyişir.

Sonlu avtomata verilmiş tərifin 4-cü və 5-ci bəndlərindən aşağıdakı münasibəti alırıq:

$$z(t+1)=f(x(t),z(t)),$$
$$y(t)=g(x(t),z(t)), \qquad (6.1)$$

burada, $z(t)\in Z, z(t+1)\in Z, x(t)\in X, y(t)\in Y$.

Əgər A avtomatının ilkin vəziyyəti t(0) verilibsə, onda ℓ sayda giriş hərflərinin ardıcıllığı, yaxud, ℓ uzunluqlu giriş sözü (6.1) münasibəti əsasında avtomatın vəziyyətləri ardıcıllığını və həmin uzunluqlu çıxış sözlərini birmənalı təyin edir. İlkin vəziyyəti t(0) verilmiş A avtomatına *inisial avtomat* deyilir.

Misal 6.1*. Tutaq ki, iki girişli ardıcıl ikilik cəmləyiciyə baxılır. Həmin qurğunun girişinə ikilik rəqəmlərin iki ardıcıllığı daxil edilir və hər ardıcıllıq ikilik ədəddir. Cıxışda alınan ardıcıllıq girişə verilən ədədlərin cəmidir. Bu qurğuya sonlu avtomat kimi baxmağın mümkünlüyünü göstərməli.*

Həlli:

t vaxt momentində qurğunun hər bir girişinə 0 və 1-ə uyğun olan siqnallar daxil olur. Beləliklə, x={00,01,10,11} çoxluğu giriş əlifbasıdır. Cıxışda isə 0 və ya 1-ə uyğun olan siqnal alınır, yəni Y={0,1} çoxluğu qurğunun çıxış əlifbasıdır. Cıxış siqnalı giriş siqnalı və köçürmə ilə təyin olunur. Odur ki, z={q₀-köçürmə yoxdur, q₁-köçürmə var}-vəziyyətlər çoxluğu, çıxış funksiyası g(x(t), z(t)) və keçid f(x(t), z(t)) aşağıdakı kimi təyin edilir.

$$f(00,q_0)=q_0;\ f(01,q_0)=q_0;\ \ f(10,q_0)=q_0;\ \ f(11,q_0)=q_1;$$
$$f(00,q_1)=q_0;\ f(01,q_1)=q_1;\ \ f(10,q_1)=q_1;\ \ f(11,q_1)=q_1;$$
$$g(00,q_0)=0;\ g(01,q_0)=1;\ \ g(10,q_0)=1;\ \ g(11,q_0)=0;$$
$$g(00,q_1)=1;\ g(01,q_1)=0;\ \ g(10,q_1)=0;\ \ g(11,q_1)=1;$$

Aşağıdakı şərtləri yerinə yetirən $A_1=<X_1,Y_1,Z_1,f_1,g_1>$ və $A_2=<X_2, Y_2, Z_2, f_2, g_2>$ avtomatları izomorf adlandırılır:

1) $X_1=X_2=X$;

2) Z_1 və Z_2 arasında qarşılıqlı birmənalı uyğunluq yaratmaq mümkündür, belə ki, əgər $q_1\in Z_1$ və $q_2\in Z_2$ bir-birinə uyğundursa, onda $\forall a_i(a_i\in X) f_1(a_i,q_1)$ və $f_2(a_i,q_2)$ arasında uyğunluq var və $g_1(a_i,q_1)=g_2(a_i,q_2)$. Bu halda A_1 və A_2 avtomatları yalnız vəziyyətlər nişanları ilə bir-birindən fərqlənir.

6.2. Sonlu avtomatların təsnifatı

X,Y,Z çoxluqlarının gücündən və f,g funksiyalarının tipindən asılı olaraq avtomatları aşağıdakı növlərə ayırırlar.

1.*Yaddaşsız avtomat (kombinasiyalı sxem).*

Bu halda Z çoxluğu bir elemntdən ibarət olur və avtomat <X,Y,g> üçlüyü ilə təyin olunur. Bu cür avtomat üçün (6.1) rekurrent münasibəti sadələşir və belə yazılır:

$$y(t)=g(x(t)).$$

2.Avtonom avtomat.

X çoxluğu bir elementdən ibarət olur, yəni A avtomatı <Y,Z,f,g> dördlüyü ilə təyin olunur. Bu halda (6.1) rekurrent münasibəti belə yazılır:

$$z(t+1) = f(z(t)),$$
$$y(t) = g(z(t)).$$

3.Cıxışsız avtomat.

Y çoxluğu bir elementdən ibarətdir, yəni A avtomatı <X,Y,f> üçlüyündən ibarət olur. Bu halda (6.1) rekurrent münasibəti belə ifadə olunur:

$$z(t+1) = f(x(t), z(t)).$$

4.Gecikmə ilə işləyən avtomat.

Bu halda g funksiyası yalnız z(t) vəziyyətindən asılı olur və (6.1) münasibəti belə təyin olunur:

$$z(t+1) = f(x(t), z(t)),$$
$$y(t) = g(z(t)).$$

5.Mur avtomatı.

Burada g funksiyası z(t+1) vəziyyətindən asılı olur və (6.1) münasibəti belə ifadə olunur:

$$z(t+1) = f(x(t), z(t)),\ y(t) = g(z(t+1)).$$

6.3. Sonlu avtomatların cədvəllərlə və qraflarla verilməsi

Keçid funksiyasının(f) və çıxış funksiyasının (g) təyin olunma və dəyişmə oblastları sonlu olduğundan, onlar cədvəl şəklində verilə bilər. Onlara uyğun olaraq, *keçidlər cədvəli və çıxışlar cədvəli* deyilir. Keçidlər və çıxışlar cədvəlləri cədvəl 6.1 və cədvəl 6.2-də göstərilib.

Cədvəl 6.1.
Keçidlər cədvəli

X(t) \ Z(t)	Z(t+1)			
	a_1	a_2	…	a_p
q_1				
q_2				
⋮				
q_s				

Cədvəl 6.2.
Çıxışlar cədvəli

X(t) \ Z(t)	y(t)			
	a_1	a_2	…	a_p
Q_1				
Q_2				
⋮				
q_s				

Cədvəllərin sətirləri vəziyyətlərə, sütunları isə giriş simvollarına uyğun götürülüb. Keçidlər cədvəlində q_i sətri ilə a_j sütununun kəsişməsində $f(a_j, q_i)$,çıxışlar cədvəlində isə q_i sətri ilə a_j sütununun kısişməsində $g(a_j, q_i)$ durur.

Misal 6.2. *Ardıcıl ikilik cəmləyici üçün (misal 6.1) keçidlər və çıxışlar cədvəlləri 6.3 və 6.4 cədvəllərində göstərilmişdir.*

Cədvəl 6.3.
Keçidlər cədvəli

x(t) \ z(t)	z(t+1)			
	00	01	10	11
q_0	q_0	q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_1	q_1	q_1

Cədvəl 6.4.
Çıxışlar cədvəli

x(t) \ z(t)	y(t)			
	00	01	10	11
q_0	0	1	1	0
q_1	1	0	0	1

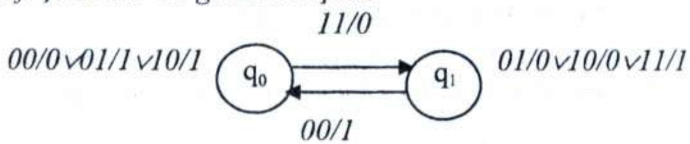
Sonlu avtomatların cədvəllə verilməsi qiymətlən-dirməni gücə görə apardıqda əlverişli olur. Əgər x,y əlifbaları və z çoxluğu müəyyən edilsə, onda keçidlər cədvəli s^{ps} sayda, çıxışlar cədvəli isə t^{ps} sayda üsulla doldurula bilər. Verilmiş əlifbalara görə avtomatların ümumi sayı$(st)^{ps}$ olar.

Sonlu avtomatların təsvirinin digər üsulu istiqamətlənmiş qrafdır. Ona *keçidlər qrafı* deyilir. A avtomatının keçidlər qrafı S təpələrindən ibarətdir. Həmin təpələrlə A avtomatının vəziyyətləri uyğunlaşdırılır.

Əgər $\{a_{i1},\dots,a_{ir}\}$ giriş simvollarının çoxluğudursa, $f(a_{iv},q_i)=q_j$ və $f(a_{iv},q_i)=b_{iv}$ $(v=1,\dots,r)$, onda q_i-dən q_j-yə gedən vətər mövcuddur və həmin vətərə $a_{i1}/b_{i1} \vee \dots \vee a_{ir}/b_{ir}$ ifadəsi uyğun gəlir. Əgər $\{a_{i1},\dots,a_{ir}\}$ çoxluğu boşdursa, onda bu cür vətərlər olmur.

Sonlu avtomatın qrafla verilməsi daha əyanidir.

Misal 6.3 *Ardıcıl ikilik cəmləyici üçün (misal 6.1) keçidlər qrafı şəkil 6.1- də göstərilmişdir.*



Şəkil 6.1. *Ardıcıl ikilik cəmləyici üçün keçidlər qrafı*

6.4. Sonlu avtomatların avstrakt sintezi

Sonlu avtomatların təsviri üçün mövcud olan dilləri 2 qrupa ayırmaq olar:

1) daxili vəziyyəti təyin edən dəyişəndən istifadə edən dillər;

2) yalnız giriş–çıxış anlayışları ilə əməliyyat aparan dillər.

1-ci qrupa avtomatın cədvəllər və keçid qrafları ilə təsviri, 2-ci qrupa isə müntəzəm düsturlar dilinin və predikat

dilinin müxtəlif variantları aiddir. 2-ci qrup dillər sifarişçi ilə icraçı arasında ünsiyyət üçün daha əlverişlidir. Odur ki, avtomatların 2-ci qrup dillərdəki təsairindən 1-ci qrup dillərdəki təsvirinə keçid mümkün olmalıdır. Bu cür keçidə sonlu *avtomatın abstrakt sintezi* deyilir.Bu məqsədlə müntəzəm ifadə anlayışından istifadə edilir.

Tutaq ki:

1)$X=\{a_1,\dots,a_p\}$ əlifbadır;

2)$\wedge$-boş (uzunluğu sıfır olan) sözdür;

3)ϕ-boş çoxluqdur;

4)(E_1+E_2)-E_1 və E_2 söz çoxluqlarının birləşməsidir;

5)(E_1+E_2)-e_1e_2 kimi bütün sözlərin çoxluğudur, burada e_1 sözü E_1-dən, e_2 sözü E_2-dən götürülür, "·" işarəsi vurmanı göstərir;

6)(E_1^*)-çoxluqdur və belə təyin olunur:

$$\wedge + E_1 + (E_1 \cdot E_1) + ((E_1 \cdot E_1) \cdot E_1) + \dots$$

burada * işarəsi iterasiya adlanır.

Müntəzəm ifadə aşağıdakılardan ibarətdir:

1) X əlifbasının istənilən hərfi və $\wedge$, ϕ işarələri:

2) (E_1+E_2), $(E_1 \cdot E_2)$, (E_1^*) ifadələri, əgər E_1 və E_2 müntəzəm ifadələrdirsə.

Müntəzəm ifadələrdən X əlifbasında sözlər çoxluğunu təsvir etmək üçün istifadə edilir.

Müntəzəm ifadələrin əsas xassələrinə aşağıdakılar aiddir:

1)$E_1+E_2=E_2+E_1$,

2)$E_1+(E_2+E_3)=(E_1+E_2)+E_3$,

3)$E_1 \cdot (E_2 \cdot E_3)=(E_1 \cdot E_2) \cdot E_3$,

4)$E_1 \cdot (E_2+E_3)=(E_1 \cdot E_2)+(E_1 \cdot E_2)+(E_1 \cdot E_2)$,

5)$(E_1+E_2) \cdot E_3=(E_1 \cdot E_3)+(E_2 \cdot E_3)$,

6)$E_1+\phi=\phi+E_1=E_1$,

7)$E_1 \cdot \phi=\phi \cdot E_1=\phi$,

8)$E_1 \cdot \wedge=\wedge \cdot E_1=E_1$,

9)$E_1+E_1=E_1$,

10)$E_1^*=\wedge+E_1\cdot(E_1^*)$,
11)$E_1\cdot(E_1^*)=(E_1^*)\cdot E_1$,
12)$(E_1^*)\cdot(E_1^*)=E_1^*$,
13)$(E_1+E_2)^*=((E_1^*)+(E_2^*))^*$,
14)$\wedge^*=\wedge$,
15)$\phi^*=\wedge$.

Giriş sözlərinin çoxluğuna hadisə deyilir. Əgər A inisial avtomatına daxil edilən hadisələr zamanı çıxış sözləri bi simvolu ilə qurtarırsa, onda deyirlər ki, hadisə A avtomatında bi çıxış hərfi ilə təsvir olunandır. Əgər hadisə Y' çoxluğunun bütün elementlərində təsvir olunan hadisələrin birləşməsidirsə, onda həmin hadisə A inisial avtomatında $y' \subseteq y$ çıxış hərflərinin çoxluğu ilə təsvir oluna bilər.

Başlanğıc vəziyyəti q_1 olan A avtomatına baxaq. Bu avtomatın davranışını bütövlükdə $E_{b1},\ldots,E_{bt}$ hadisələr toplusu vasitəsilə vermək olar. Burada E_{bi}-sonu bi hərfi ilə qurtaran çıxış sözlərinə çevrilən giriş sözlərinin çoxluğu, $b_1,\ldots,$bi çıxış əlifbasıdır.

Məsələn, əgər $a_{i1},\ldots,a_{ie}$ giriş sözü verilibsə və $E_{b1},\ldots,E_{bt}$ hadisələri məlumdursa, onda həmin sözün hansı çıxış sözünə çeviriləcəyini təyin etmək olar. S.K.Klini isbat etmişdir ki, avtomatda reallaşdırıla bilən istənilən hadisə müntəzəm ifadə ilə təsvir oluna bilər və əksinə-müntəzəm ifadə ilə təsvir oluna bilən istənilən hadisə avtomatda reallaşdırıla bilər. Həmin teoremin davamı olaraq Klini isbat edir ki, istənilən müntəzəm hadisə sonlu avtomatda reallaşdırıla bilər [16].

6.5. Struktur sintezi

Yuxarıda avtomata funksional yanaşma ilə, yəni tam şəkildə baxılırdı. Əslində isə avtomat bir-birilə əlaqələndirilmiş elementlərdən ibarət olur. Avtomatın funksional modeli ilə struktur modeli arasında əlaqə, yəni funksional modelə görə struktur modelin və əksinə-struktur modelə görə funksional

modelin təyin edilməsi vacib əhəmiyyət kəsb edir. 1-ci məsələ *struktur sintez*, 2-ci məsələ isə *struktur analiz* adlanır.

Sintez məsələsinin qoyuluşu belədir.

Verilir: 1)İnisaial sonlu avtomat (onun cədvəli, tənliklər sistemi, qrafı); 2)sintez bazisi-«elementar» avtomatlar siyahısı; 3)elementar avtomatların birləşmə qaydaları.

Tələb olunur: funksional modeli verilən avtomatın struktur sxemini qurmaq, yəni «elementar» avtomatları göstərilən qaydalarla elə birləşdirmək lazımdır ki, alınan avtomatın funksional modeli verilmiş avtomatın funksional modeli ilə eyni olsun. «Elementar» avtomat dedikdə struktur modeli təşkil edən və bölünməz blok kimi baxılan istənilən avtomat başa düşülür.

Elementar avtomatların birləşmə üsullarına baxaq. Nəzərə alırıq ki, hər bir avtomat ixtiyari sonlu sayda girişə və çıxışa malik ola bilər. Avtomatların birləşdirilməsi girişlərin və çıxışların (və ya giriş və çıxış qütblərinin) eyniləşdirilməsi deməkdir. Qütblərin ixtiyari qaydada eyniləşdirilməsi bəzən düzgün olmaya bilər. Məsələn, bir girişə bir neçə çıxışın qoşulması və ya struktur sxemində düyünün yaranması halında qeyri-dəqiqilik baş verə bilər. Elementar avtomatların birləşmə üsullarına məhdudluq qoymaqla qeyri-dəqiqilikliyi aradan qaldırmaq olar.

6.5.1. Avtomatlar üzərində əməliyyatlar

1. Avtomatların birləşdirilməsi.

Tutaq ki, hər biri uyğun olaraq n_1 və n_2 sayda girişə, m_1 və m_2 sayda çıxışa malik olan iki A_1 və A_2 avtomatı verilib.

A_1 avtomatı aşağıdakı tənliklər sistemi ilə

$$y_{11}(t)=g_{11}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1},z_1(t)),$$
.....
$$y_{1m1}(t)=g_{1m1}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t), z_1(t)), \qquad (6.2)$$
$$z_1(t+1)=f_1(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$$

$z_1(0)=q_{11}$,

A_2 avtomatı isə

$y_{21}(t)=g_{21}(x_{21}(t),\ldots,x_{2n2}(t), z_2(t))$,

.....

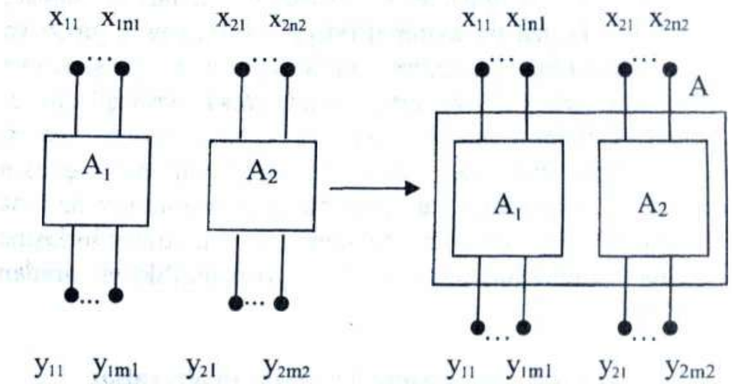
$y_{2m2}(t)=g_{2m2}(x_{21}(t),\ldots,x_{2n2}(t), z_2(t))$, (6.3)

$z_2(t+1)=f_2(x_{21}(t),\ldots,x_{2n2}(t), z_2(t))$,

$z_2(0)=g_{21}$

tənliklər sistemi ilə təsvir edilib.

A_1 və A_2 avtomatlarının birləşməsi (n_1+n_2) sayda girişə, (m_1+m_2) sayda çıxışa malik olan və (6.2), (6.3) sistem tənliklərinin birləşməsi ilə təsvir olunan A avtomatına deyilir. A_1 və A_2 avtomatlarının birləşdirilməsi sxematik olaraq şəkil 6.2-də göstərilmişdir.



Şəkil 6.2. A_1 və A_2 avtomatlarının birləşdirilməsi sxemi

2. Avtomatların kompozisiyası.

Tutaq ki, (6.2) və (6.3) sistemləri ilə təsvir olunan A_1 və A_2 avtomatı verilmişdir. A_1 avtomatının $y_{1i1},\ldots,y_{1ik}$ çıxışlarının A_2 avtomatının $x_{2j1},\ldots,x_{2jk}$ girişləri ilə eyniləşdirilməsindən alınan A avtomatına A_1 və A_2-nin *kompozisiyası* deyilir. Belə avtomat aşağıdakı sistemlə təsvir olunur:

$y_{11}(t)=g_{11}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t), z_1(t))$,

$y_1(i_1-1(t)=g_{1(i1-1)}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t), z_1(t))$,

$y_{1(i1+1)}(t)=g_{1(i1+1)}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}, z_1(t))$,

$y_{1(ik-1)}(t)=g_{1(ik-1)}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t), z_1(t))$,

$y_{1(ik+1)}(t)=g_{1(ik+1)}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t), z_1(t))$,

....

$y_{1m1)}(t)=g_{1m1)}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t), z_1(t))$,

$z_1(t+1)=f_1(x_{11}(t),\ldots,x_{1n}(t), z_1(t))$,

$z_1(0)=q_{11}$,

$y_{21}(t)=g_{21}(\ldots,x_{2(j1-1)}(t),y_{1i}(t),\ldots, x_{2(jk-1)}(t), y_{1ik}(t),\ldots)$,

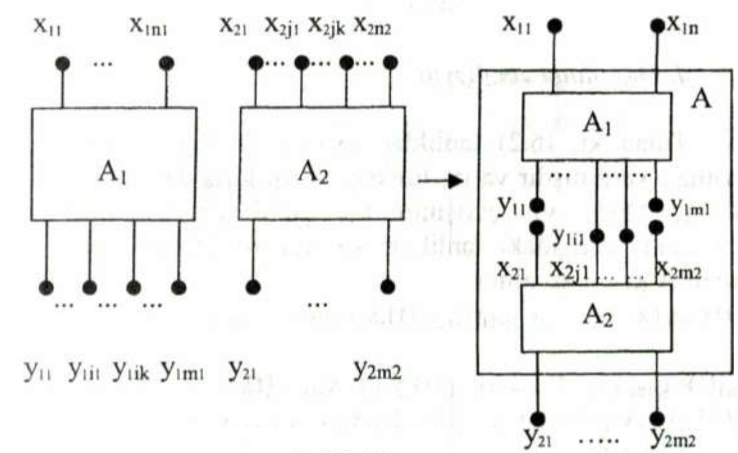
....

$y_{2m2}(t)=g_{2m2}(\ldots,x_{2(j1-1)}(t),y_{1i}(t),\ldots,x_{2(jk-1)}(t), {}_{1ik}(t),\ldots)$,

$z_2(t+1)=f_2(\ldots,x_{2(i1-1)}(t),y_{1i1}(t),\ldots,x_{2(jk-1)}(t),y_{1ik}(t),\ldots)$,

$z_2(0)=q_{21}$.

Bu əməliyyatın sxematik təsviri şəkil 6.3-də göstərilmişdir. Baxılan təyinata uyğun olaraq bir giriş qütbünü bir çıxış ilə eyniləşdirmək (birləşdirmək) olar.



Şəkil 6.3.

3. *Girişlərin eyniləşdirilməsi.*

Tutaq ki, A_1 avtomatı (6.2) tənliklər sistemi ilə verilmişdir. Bu halda x_{1i} və x_{1j} girişlərinin eyniləşdiril-məsindən alınan A avtomatı aşağıdakı tənliklər sistemi ilə təsvir olunur:

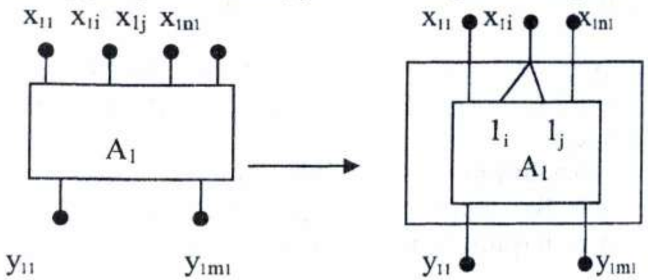
$y_{1m1}(t)=g_{11}(x_{11}(t),\ldots,x_{1i}(t),\ldots,x_{1(j1)}(t),x_{1i}(t),\ldots,x_{1m1}(t),z_1(t)),$

$y_{1m1}(t)=g_{1m1}(x_{11}(t),\ldots,x_{1i}(t),\ldots,x_{1(j-1)}(t),x_{1i}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$

$z_1(t+1)=f_1(x_{11}(t),\ldots,x_{1i}(t),\ldots,x_{1(j-1}(t),x_{1i}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$

$z_1(0)=q_{11}.$

Bu əməliyyat qrafik olaraq şəkil 6.4-də göstərilmişdir.



Şəkil 6.4.

4. *Əks əlaqə əməliyyatı.*

Tutaq ki, (6.2) tənliklər sistemi ilə təsvir olunan A_1 avtomatı verilmişdir və g_{1j} funksiyası x_{1i} giriş dəyişənindən az asılıdır. Onda y_{1j} çıxışının x_{1i} girişi ilə birləşdirilməsi nəticəsində aşağıdakı tənliklər sistemi ilə ifadə olunan əks əlaqəli A avtomatı alınır:

$y_{11}(t)=g_{n}(x_{11}(t),\ldots,x_{1(i-1)}(t),y_{1j}(t),x_{1(i+1)}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$

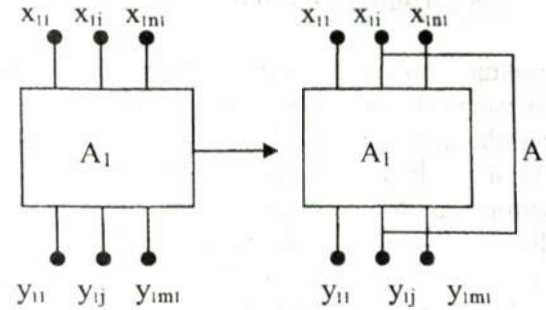
....

$y_{1m1}(t)=g_{1m1}(x_{11}(t),\ldots,x_{1(i-1)}(t),y_{1j}(t),x_{1(i+1)}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$

$z_1(t+1)=f_1(x_{11}(t),\ldots,x_{1(i-1)}(t),y_{1j}(t),x_{1(i+1}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$

$z_1(0)=q_{11}.$

Bu əməliyyatın qrafik təsviri şəkil 6.5-də göstərilmişdir.



Şəkil 6.5.

5. *Çıxışların ayrılması.*

Tutaq ki, (6.2) sistemi ilə ifadə olunan A_1 avtomatı verilmişdir. Onda $y_{1i1},\ldots,y_{1ik}$ çıxışlarını ayırmaqla alınan A avtomatını belə təsvir etmək olar:

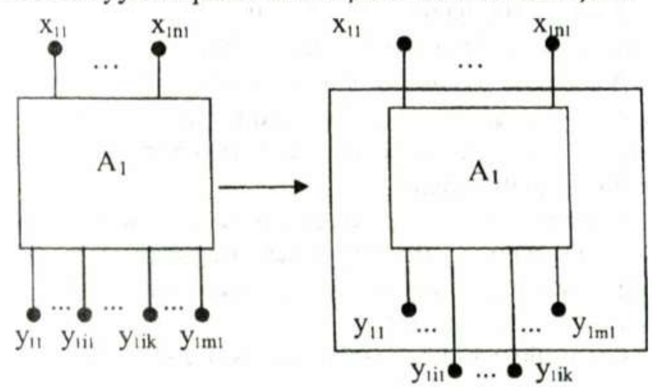
$y_{1i1}=g_{1i1}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$

....

$y_{1ik}=g_{1ik}(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),$

$z_1(t+1)=f_1(x_{11}(t),\ldots,x_{1n1}(t),z_1(t)),\ z_1(0)=q_{11}.$

Bu əməliyyatın qrafik təsviri şəkil 6.6-da verilmişdir.



Şəkil 6.6.

6.5.2. Yaddaşsız avtomatların struktur sintezi

Struktur sintezdə bazisin-elementar avtomatlar dəstinin-seçilməsi vacib əhəmiyyət kəsb edir. Sintezin əvvəl verilmiş funksional davranışa malik olan avtomatın mövcud elementar avtomatlar dəsti ilə qurulmasının mümkünlüyünü, yəni bazisin tamlıq şərtini ödəyib-ödəməməsini təyin etmək lazım gəlir.

Müəyyən avtomatlar sinfinə görə bazis o vaxt tam hesab olunur ki, onun köməyilə həmin sinfə aid olan istənilən avtomatı sintez etmək mümkün olsun.

Yaddaşsız avtomatda $|Z|=1$ olur və tənliklər sistemi belə ifadə edilir:

$$y_1(t)=g_1(x_1(t),\ldots,x_n(t)),$$
$$\ldots\ldots$$
$$y_m(t)=g_m(x_1(t),\ldots,x_n(t)). \qquad (6.4)$$

Sintez məsələsinin həlli avtomatın girişvə çıxış əlifbasının o və 1 işarələrindən ibarət olan halı üçün həm nəzəri, həm də praktiki baxımdan daha əhəmiyyətlidir. Bu halda avtomatın çıxış funksiyası Bull funksiyası olur. Yaddaşsız avtomatlar üçün sintez məsələsinə baxılanda əks əlaqədən imtina etmək lazımdır, çünki bu halda qeyri-dəqiqlik yarana bilər. Bu halda tam bazisin seçilməsi məsələsi Bull funksiyalar sisteminin tamlığının araşdırılması ilə həll olunur.

Yaddaşsız avtomatın sintezi məsələsi belə qoyula bilər: (6.4) tənliklər sistemi və bull funksiyalarının tam sistemi verilir; $g_1,\ldots,g_m$ funksiyalarını tam sistemin funksiyaları ilə ifadə etmək tələb olunur.

Adətən yaddaşsız avtomatın sintezi məsələsinə konkret bazis üçün baxılır. Bu məsələdə aşağıdakı tam bazislərə üstünlük verilir: kanyuksiya, dizyunksiya, inkar, şeffer funksiyası və Pirs funksiyası.

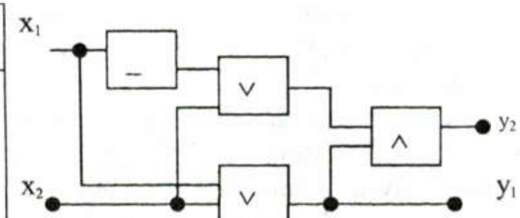
Konyunksiya, dizyunksiya və inkar elementləri bazisində yaddaşsız avtomatın reallaşdırılmasına baxaq. Məlumdur ki,

hər bir Bull funksiyasını dizyunktiv və ya konyunktiv normal formalar kimi təsvir etmək olar. Bu formalara çıxış funksiyaları konyunksiya, dizyunksiya və inkar olan elementar avtomatların superpozisiyası kimi baxmaq olar.

Misal 6.4. Tutaq ki, çıxış funksiyası cədvəl 6.5-də təsvir olunan avtomat verilmişdir. Onu reallaşdıran sxemi tərtib etməli. Avtomatın y_1 və y_2 çıxış funksiyalarının kanyunktiv normal formalarını yazaq: $y_1=x_1\vee x_2$, $y_2=(x_1\vee x_2)\wedge(\bar{x}_1\vee x_2)$. Bu düsturlar y_1 və y_2 funksiyalarının qiymətlərinə uyğun bazis avtomatlarının superpozisiyasını ifadə edirlər. Avtomatın qrafik sxemi şəkil 6.7-də göstərilmişdir.

Cədvəl 6.5.

x_1	x_2	y_1	y_2
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1



Şəkil 6.7.

Minimal dizyunktiv və konyunktiv normal formaların alınması metodlarından istifadə etməklə, elementar avtomatların sayını azaltmaq və sxemi sadələşdirmək olar.

Aydındır ki, struktur sintez məsələsi birmənalı həll alınmır, odur ki, avtomatı reallaşdıran sxemin mürəkkəbliyini göstərən $(\sum A)$ anlayışından və funksional adlanan $L(\sum A)$ kəmiyyətindən istifadə olunur. Bu halda sintez məsələsinin elə həlli tələb olunur ki, funksional optimal olsun.

Müxtəlif misallarda funksional, simvolların avtomatın çıxış funksiyasını təsvir edən dizyunktiv normal formaya daxil olmalarının sayı ilə təyin edilir. Digər hallarda $L(\Sigma A)$ sxemin etibarlığını, işləmə vaxtını və s. Xarakterizə edir. Odur ki, sintez məsələsini belə dəqiqləşdirmək olar: istənilən $g_1,\dots,g_m$ Bull funk-iyaları sistemi üçün onu reallaşdıran elə Σ sxem tapmalı ki, onun üçün $L(\Sigma A)$ ekstremal olsun.

Sintez məsələsinə digər yanaşma müəyyən funksional sinfində ekstremal olan sintez alqoritminin axtarışından ibarətdir. Bu yanaşmaya qısaca baxaq.

Funksiyalar sinfi kimi, n dəyişəndən asılı olan Bull funksiyaları götürülür. $L(n)$ funksiyası belə təyin olunur:

$$L(n)=\max_{\substack{\text{n dəyişənli}\\ \text{bütün funksiyalar}\\ \text{üzrə}}}\ \min_{\substack{f(x_1,\dots,x_n)\text{ funksiyanı}\\ \text{reallaşdıran}\\ \text{bütün sxemlər üzrə}}} L(\Sigma_f),$$

burada $L(\Sigma_f)$-f funksiyasını reallaşdıran Σ_f sxeminin mürəkkəbliyidir.

$L(n)$ funksionalına Şennon funksiyası deyilir. Aydındır ki, n dəyişənli istənilən funksiyanı mürəkkəbliyi $L(n)$-dən böyük olmayan sxemlə reallaşdırmaq olar.

Tutaq ki, bazis kimi konyunksiyanı, dizyunksiyanı və inkarı reallaşdıran avtomatlardan istifadə edilir. Bu halda $L(\Sigma_f)$ funksiyasını belə təyin etmək olar:

$$L(\Sigma_f)=n_1L_\wedge+n_2L_\wedge+n_3L_\neg,$$

burada n_1-konyunksiya elementlərinin sayı, n_2-dizyunksiya elementlərinin sayı, n_3 inkaretmə elementlərinin sayı, $L_\wedge$, $L_\vee$, $L_\neg$ uyğun olaraq konyunksiya, dizyunksiya və inkaretmə elementərinin mürəkkəbliyidir. Bu halda elə sintez metodu qurmaq olar ki, onun üçün

$$L(n)\le\frac{2^n}{n}[1+0(1)]L_\vee$$

olsun. Bu metod ən yaxşıdır, çünki

$$L(n)\cong\frac{2^n}{n}L_\vee.$$

6.5.3.Yaddaşlı avtomatların struktur sintezi

Yaddaşsız avtomatlarda olduğu kimi, yaddaşlı avtomatlarda da giriş və çıxış əlifbalarının o və 1 simvollarından ibarət olduğunu qəbul edirik. Bu halda avtomatın çıxış funksiyası bull funksiyası olacaq. Bütövlükdə bull funksiyalı tənliklər sisteminə keçmək üçün avtomatın $q_1,\dots,q_s$ vəziyyətlərini "o" -sıfır və "1"-dən ibarət $L=\log_2 S$ uzunluqlu ardıcıllıqlar kimi kodlaşdıraq. Aydındır ki, vəziyyətlərin müxtəlif üsullarla kodlaşdırılması zamanı çıxış və keçid funksiyalarının müxtəlif variantları alınır. Sxemin mürəkkəbliyi giriş və keçid funksiyalarından asılı olduğu üçün, kodlaşdırma ekstremal olmalıdır. Əgər kodlaşdırma məsələsi həll olunubsa, onda yaddaşlı avtomatın sintezi məsələsini yaddaşsız avtomatın sintezinə gətirməklə həll etmək olar.

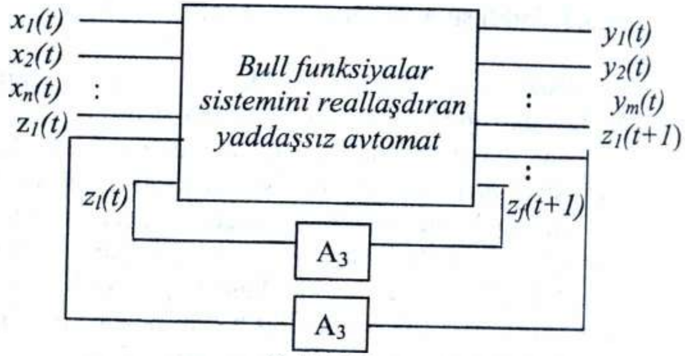
İlkin bazis kimi çıxış funksiyası konyunksiya, dizyunksiya və inkaretmə olan üç avtomatdan və

$$y(t)=z(t),$$
$$z(t+1)=x(t),$$
$$z(0)=0$$

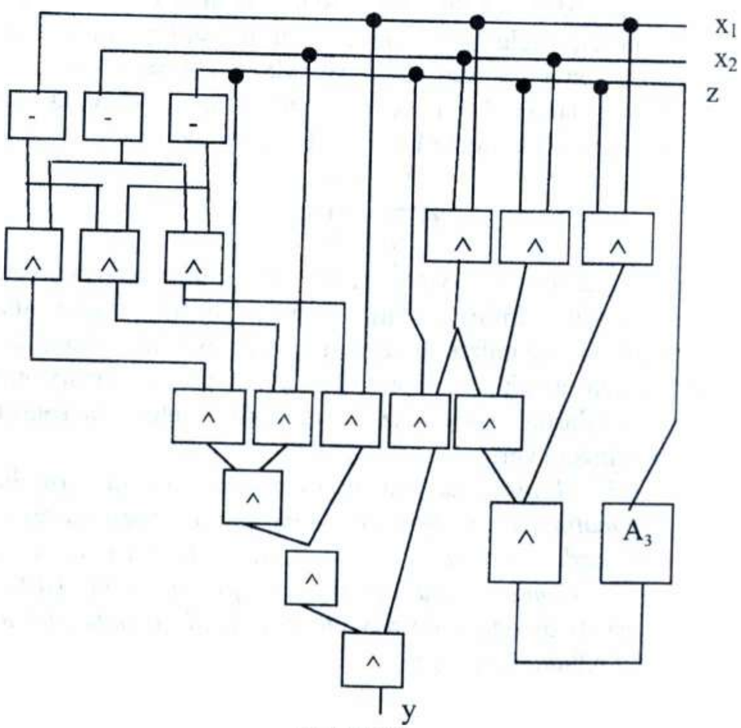
sistemi ilə verilmiş A_3 avtomatından ibarət olan bazisə baxaq. Bu cür bazis tamlıq şərtini yerinə yetirir. Vəziyyətləri kodlaşdırılmış istənilən avtomatı şəkil 6.8-də göstərilmiş sxemlə təsvir etmək olar. Sonlu avtomatın bu cür təsviri onun sintez məsələsini yaddaşsız avtomatın sintez məsələsini gətirməyə imkan verir.

Misal 6.5. *6.1 misalında baxılan avtomatın sxemini qurmalı.*

Avtomatın iki vəziyyəti var, odur ki, bu vəziyyətləri iki üsulla kodlaşdırmaq olar: ya q_0 - 0, q_1 - 1 kimi və ya əksinə. Yaddaşsız avtomatın reallaşdırılması prinsipindən istifadə etməklə və A_3 avtomatı ilə əks əlaqəni daxil etməklə qurulan sxem şəkil 6.9-da verilmişdir.



Şəkil 6.8.



Şəkil 6.9.

FƏSİL 7. İNFORMASİYA NƏZƏRİYYƏSİNİN ELEMENTLƏRİ

7.1. İnformasiya və məlumat

"İnformasiya" anlayışı, ümumiyyətlə, müasir elmlərdə fundamental və informatikada isə baza terminlərindən biridir.

Rabitə texnikası üzrə alman mütəxəssisi A.Melisə görə: məlumat - informasiya üçün mənasını öyrənmək lazım gələn işarələrdir.

Bu iki anlayışı ("informasiya" və "məlumat"ı) hüdudlandırmaq məqsədi ilə aşağıdakı danışıq tərzinə fikir verək: "Bu məlumat mənə heç bir informasiya vermir". Buradan aşkar görünür ki, informasiya faydalı məlumatdır.

Məlumat və informasiya arasındakı uyğunluq biyeksiya (qarşılıqlı birqiymətli) deyil. Eyni bir informasiya üçün müxtəlif verilmə vasitəsi mövcud ola bilər: məsələn, müxtəlif dillərdəki məlumatlar və yaxud heç bir əlavə informasiya daşımayan lüzumsüz əlavələr edilmiş məlumat.

Eyni bir informasiya verən məlumatlar ekvivalent məlumatlar hesab oluna bilər. İnformasiya hərənin öz maraq və dünyagörüşünə görə qavranılır.

Beləliklə, müxtəlif cür şərh olunan eyni bir məlumat müxtəlif informasiya verə bilər. Deməli, məlumat (*M*) və informasiya (*İ*) arasında əlaqədə həlledici şərt məlumatın necə şərh (interpretasiya) olunmasıdır(α):

$$M \overset{\alpha}{\mapsto} \text{İ}.$$

"α" şərh qaydası verilmiş məlumata görə ümumi qaydalardan xüsusi hal kimi alına bilər. Bəzi şərh qaydaları isə ancaq müəyyən məhdud şəxslərə aid olur (məsələn, jarqon və b. k.).

İnformasiya müxtəlif cür qiymətləndirilə bilər. Bu qiymətləndirmə informasiyanı qəbul edən şəxsin dünyagörüşü, marağı, meylliyi və s. ilə əlaqədardır.

İnformasiya kodlaşdırma vasitəsilə məxfiləşdirilə bilər.

Məlumat orfoqrafiyaya görə də müxtəlif informasiya daşıya bilər, müxtəlif məna kəsb edər.

Dil məlumatları. Müxtəlif millətlərin danışıq dilləri (şifahi və yazılı), incəsənət dilləri, riyazi düsturlar dili, proqramlaşdırma dilləri və s. var.

İnformasiyanın saxlanılması üçün informasiya daşıyıcılarından istifadə edilir. İnformasiya daşıyıcısı kimi kağızdan və elektron tipli daşıyıcılardan (maqnit lenti, maqnit diski, yığcam disk, rəqəmsal-video disk, fləş yaddaş və s.) istifadə edilir.

7.2. Hissetmə orqanları və onların işi

Hissetmə orqanları məlumatların verilməsi və qəbul edilməsi üçündür. Hissetmə orqanları iki cür olur: *effektor* (ötürücü-verici orqan) və *reseptor* (qəbuledici orqan). Məlumatın fiziki daşıyıcısı kimi səs siqnallarından, işıq dalğalarından, təzyiqdən, temperaturdan, qaz və maye molekullarının konsentrasiyasından, təcildən və s. istifadə olunur. Məlumatın qəbuledilmə vasitələri kimi isə hiss orqanları, eşitmə, görmə (optik) və taktil(korların dili) istifadə edilir.

Bilavasitə danışıq diliylə ünsiyyətdən savayı alətlərdən istifadə edilən dillər də var. Məsələn, həyəcan siqnalı, fit səsi, tonqal yandırmaq və s.

Hissetmə orqanlarının funksional qabiliyyətinin müəyyən sərhəddi var. Məsələn: insanın akustik (səs impulsu) və optik (lampanın yanması) siqnalına qarşı reaksiya vaxtı 140-250 msan-dir, göstərilən sözü oxuma 350-550 msan, ev əşyasının adını demə 600-800 msan-dir. Buradan görünür ki, qavrama prosesi heç də ancaq reseptorların funksiyası deyil. Buraya, həmçinin, əsəb yolları ilə oyanmanın baş verməsi, onun beyində emalı və cavabın effektora verilməsi də aiddir.

Sözü gedən proses qəbuledici orqan kimi gözə 40 msan, qola 50 msan-yə gəlir.

Beyində qıcıqlanmaların emalı. Effektor və reseptorların funksiyaları hissetmə orqanlarının psixologiyası ilə daha dərindən öyrənilir, əsəb yolları ilə həyacanların oyanması neyrofiziologiya və neyroanatomiya elm sahələrində öyrənilir. Həyəcanların cavablanması isə beyində baş verir.

Rabitə qurğuları. Xarici quruluşuna görə, rabitə qurğuları (RQ) qəbuledici və ötürücüdən ibarətdir. Daxili quruluşa görə isə RQ heç bir ümumi mülahizəyə uyğun gəlmir.

Məlumatı giriş və çıxışda gücləndirmək və ya reqenerasiya etmək olar (bunlar çeviricilər vasitəsi ilə aparılır).

Ötürücüdən qəbulediciyə məlumat verilərkən istifadə olunan daşıyıcı *kanal* adlanır.

Kibernetikada məlumatın verilməsi və emalı baxımından məhz insan və texniki qurğulara ümumilikdə xas olan aspektlər öyrənilir.

7.3. Siqnallar və siqnalların parametrləri

Məlumatların verilməsində prinsipial cəhət ondan ibarətdir ki, o zamana görə baş verir. Odur ki, məlumat daşıyıcısı kimi zamana görə dəyişən fiziki kəmiyyətlərdən istifadə edilir.

Məlumatı - informasiyanı ötürməyi təmin edən hər hansı fiziki kəmiyyətin zamana görə dəyişməsi *siqnal* adlanır. Bu vaxt məlumatın canlanması üçün siqnalın müxtəlif xassələrindən istifadə olunur. Siqnalın məlumatı təqdim etmə xassəsinə *siqnal parametri* deyilir (məsələn, amplituda, tezlik və s.).

İnformasiya parametrlərinin strukturundan asılı olaraq siqnallar diskret, kəsilməz və diskret-kəsilməz ola bilərlər.

Siqnal verilən parametrə nəzərən o vaxt *diskret* (kəsilən) hesab olunur ki, bu parametrin ala biləcəyi qiymətlər sayı sonlu və ya hesabi olsun.

Parametrin ala biləcəyi bütün mümkün qiymətlər sayı kontinuum olduqda isə, siqnal həmin parametrə nəzərən *kəsilməz* adlanır.

Verilmiş bir parametrə nəzərən diskret, digər parametrə nəzərən kəsilməz olan siqnala *diskret-kəsilməz* siqnal deyilir.

Kəsilməz məlumat hər hansı [a,b] parçasında verilmiş $f(x)$ kəsilməz funksiyası vasitəsi ilə təqdim oluna bilər. Kəsilməz məlumatı diskretə çevirmək olar (bu prosedur *diskretləşdirmə* adlanır). Bunun üçün siqnal parametri adlanan funksiyanın sonsuz qiymətləri çoxluğundan onun qiymətlərini xarakterizə edən müəyyən qismi seçilir. Bu seçmə üsullarından birinin məğzi aşağıdakından ibarətdir.

Funksiyanın təyin olunma oblastı $t_1, t_2, ..., t_n$ nöqtələri vasitəsi ilə Δt bərabəruzunluqlu aralıqlara bölünür və kəsilməz funksiya diskret formaya çevrilir. Qeyd etdiyimiz yolla alınan impulslu funksiya kəsilməz funksiyanın diskret təsvirini verir. Həmin funksiyanın da dəqiqliyi Δt uzunluqlarını qısaltmaqla təmin edilə bilər.

Beləliklə, istənilən məlumat hər hansı əlifbanın simvollarının yığımı vasitəsi ilə diskret şəkildə təsvir oluna bilər. Həmin məsələnin həllinin nəzəri bazası V.A.Kotelnikova məxsusdur.

Kotelnikov teoremi. Əgər kəsilməz siqnal yuxarıdan $f_{\max}$ tezliyi ilə məhdudlanan spektrə malikdirsə, onda həmin siqnal

$$\Delta t = \frac{1}{2f_{\max}}$$

intervalı qədər zaman anlarındakı qiymətləri ardıcıllığı ilə tamamilə təyin edilir.

Kəsilməz siqnalın onun diskret obrazına nəzərən bərpası sıranın cəmlənməsi ilə həyata keçirilir:

$$y(t)=\frac{1}{4\pi f_{\max}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n\Delta t) \frac{\sin(2\ f_{\max}(1-n\,\Delta t))}{2\pi f_{\max}(1-n\,\Delta t)}.$$

Beləliklə, əgər informasiya diskretdirsə, onda "istifadədən əvvəl" onu kəsilməz şəkilə çevirmək olar.

7.4. İnformasiyanın kəmiyyət qiyməti

İnformasiyanın alınması faktı həmişə müxtəlifliyin azalması və ya qeyri-müəyyənliklə əlaqədardır.

İnformasiya mənbəyi diskret olduqda (yəni, hər bir zaman anında hesabi qiymət aldıqda) müxtəlif vəziyyətlər onların mənbədən seçilməsinin nəticəsi olur.

Mənbənin hər bir U vəziyyətinə verilən mənbənin hər hansı bir U_i, $i=\overline{1,N}$ elementi uyğun gəlir. Bu zaman bütün vəziyyətlərin alınması ehtimallarının cəmi 1-ə bərabər olur:

$$\sum_{i=1}^{N} P(U_i) = 1.$$

Qeyd edək ki, təsadüfi hadisənin(A) ehtimalı(P(A)) hadisə üçün əlverişli olan hallar sayının(n) bütün mümkün halların sayına(m) nisbəti ilə təyin edilir: P(A)=n /m.

Bəzi vəziyyətlər tez-tez, bəziləri isə nadir hallarda seçilə bilər. Bu seçmə U ansamblı ilə müəyyən edilir.

U ansamblından olan vəziyyətlərin diskret mənbəyinin qeyri-müəyyənliyinin ölçüsü amerikalı riyaziyyatçı Klod Elvud Şennon (1916-2001) tərifindən təklif olunub. O, informasiyanın diskret mənbəyinin entropiyası (və ya sonlu U ansamblının entropiyası) adlanır:

$$H(U) = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log P_i,$$

Qeyri-müəyyənliyi ikilik vahidlə ölçdükdə isə H(U) belə təyin olunur:

$$H(U) = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i = \sum_{i=1}^{N} P_i Log_2\left(\frac{1}{P_i}\right).$$

Entropiya informasiyanın statik xassələrini nəzərə almağa imkan verir.

Diskret məlumatlar. Diskret məlumatlar diskret siqnallar vasitəsilə ötürülən məlumatlardır. Siqnal parametri sonlu və ya hesabi qiymətlər aldıqda və ancaq sonlu sayda zaman anlarında mövcud olduqda siqnal diskret adlanır.

Işarə, simvol, əlifba. İşarə - bir-birindən fərqlənən hər-hansı sonlu çoxluğun elementidir.

İsarə kəsb etdiyi məna ilə birlikdə *simvol* adlanır.

Simvolların müəyyən sonlu düzülüşü ilə təyin edilən yığım *əlifba* adlanır.

Hesablama texnikasında ikilik yığım xüsusi əhəmiyyətə malikdir: {L,O}, L↔1 ("hə"), O↔0 ("yox"). İkilik işarə bit adlanır.

7.5. Kodlar və kodlaşdırma

Əgər *N* hər hansı təbii dildə cümlədirsə, onda N-ə heç olmasa üç müxtəlif üsulla yığılmış işarələr ardıcıllığı kimi baxmaq olar.

Birincisi: *N* hərf, rəqəm, durğu işarələri və s. ardıcıllığıdır.

İkincisi: sözə işarə kimi baxsaq, *N* sözlər ardıcıllığıdır.

Üçüncüsü: bütün cümləyə bir işarə kimi baxsaq, *N* bir işarədir.

Birinci cür anlam informasiyanı kompyuterə köçürərkən, ikinci – stenoqrafik ixtisarlar zamanı, üçüncü isə bir təbii dildən digərinə atalar sözünü çevirərkən (bu zaman mənalar eyniləşir, tərcümələr isə yox) istifadə olunur. Diskret məlumat (sonlu və ya sonsuz) işarələr ardıcıllığıdır.

Hissetmə üzvləri ilə bağlı və yaxud bu baxımdan diskret məlumatın işarələrini sonlu ardıcıllıqlara bölürlər və onlara sözlər deyirlər. İşarələr yığımını sözlərin daha az işarəylə düzəldilməsi vasitəsilə əldə etmək olar. Məsələn, ikilik işarələr yığımı: {L,O}.

İkilik işarələr yığımından alınan sözlərə ikilik sözlər deyəcəyik. Bu sözlərin eyni uzunluqda olması məcburi deyil. Belə olmağına baxmayaraq, n tərtibli (dərəcəli) ikilik işarə, n tərtibli ikilik kod (məsələn, 7 tərtibli İSO ikilik kodu) mövcudur.

Bəs kod nədir ? *Kod* bir işarələr (və ya sözlər) yığımından digərinə inikası təmin edən qaydadır. Başqa tərzdə desək, kod belə inikas zamanı aınan surətlər (obrazlar) çoxluğudur. Bu prossesin özü isə *kodlaşdırma* adlanır.

Kodlaşdırma zamanı hər bir obraz ayrıca işarə təşkil edirsə, onda belə inikas *şifrləşdirmə*, obrazlar isə *şifr* adlanır. Bu inikas birqiymətli olduqda ona müraciət *kodaçma* və ya *şifraçma* adlanır.

Kodlara aid misallar:

1. Morze əlifbası.

2. Trisime kodu (latın əlifbasının simvollarına-hərflərinə 1,2,3 ərəb rəqəmlərinin uyğun kombinasiyalarını qarşı qoyur):

A↔111, B↔112, C↔113, D↔121, E↔122, F↔123,
G↔131, H↔132, İ↔133, J↔211, K↔212, L↔213,
M↔221, N↔222, O↔223, P↔231, Q↔232, R↔233,
S↔311, T↔312, U↔313, V↔321, W↔322, X↔323,
Y↔331, Z↔332, . ↔333

3. Onluq say sisteminin əlifbası on ərəb rəqəmindən ibarətdir: {0,1,2,3,4,5,6,7, 8,9}.

4. Roma say sisteminin əlifbası: {I, V, X, L, C, D, M}. Bu simvollar onluq say sistemində aşağıdakı kəmiyyətlərə uyğundur: I(1), V(5), X(10), L(50), C(100), D(500), M(1000).

5. İBM firmasının informasiya mübadiləsi üçün istifadə etdiyi standart kodlar(ASCII, Unicode).

Trisime kodu bərabərğüçlüdür. Beləki, hər bir kod kombinasiyası üç simvola malikdir. Morze əlifbası isə qeyri-bərabərğüçlüdür.

Son vaxtlar {L,O} ikilik işarələrı {1,0} ikilik rəqəmləri ilə əvəz olunur. İkilik say sistemində yazılmış ədəd, ikilik ədəd, dedikdə ikilik rəqəmlərdən düzəldilmiş söz başa düşəcəyik.

Rəqəmlər, təbii ki, say sisteminin əlifbasını təşkil edir.

Ardıcıl və paralel ötürmə. Sabit uzunluqlu ikilik kodlarda sözlər bilavasitə bir- birinin ardınca qələ bilər. Yəni ikilik işarələrin vahid ardıcıllığı alınar. Belə olan surətdə kodaçma birqiymətli olur.

Müxtəlif uzunluqlu kod sözlərinin açılması isə, ümumiyyətlə desək, mümkün deyil. Ancaq, müəyyən şərtlər daxilində müxtəlif uzunluqlu kod sözlərinin açılması mümkündür.

Fano şərti ("önşəkilçilik xassəsi"). Heç bir kod sözü digər kod sözünün başlanğıcı ola bilməz. Bu isə sözlər arasında ayırıcı olduqda mümkündür.

Paralel ötürmədə ancaq eyni uzunluqlu sözlərdən isitifadə olunur.

Simvollar. İşarə və onun mənasını ayırd etmək laımdır. Məsələn, " . " riyaziyyatda vurma əməlinin işarəsini, digər tərəfdən proqramlaşdırmada ayırıcı (onluq nöqtə - tam və kəsr hissəni ayıran), təbii dildə nəqli cümlənin sonunu və s. bildirir. Qeyd etdiyimiz kimi, işarə öz mənası ilə birlikdə simvol adlanır. Hər bir məlumatın mənası var. Odur ki, məlumata simvol kimi baxmaq olar. Bu simvol, məlumata onunla verilən informasiyanın birləşməsi nəticəsində alınır.

Bəzən müxtəlif işarələr eyni məna verir (məsələn, "·", "*", "x"–simvolları riyaziyyatda vurma əməlinə aiddir) və yaxud tərsinə - eyni işarə müxtəlif mənalar bildirir (əvvəldəki misalda qeyd etdiyimiz kimi). Zənnimizcə, bu da düzgün

deyildir. Beləki, eyni bir strukturda(konstruksiyada, şərhdə, qurmada, elmdə, dildə, mədəniyyətdə və b.k.) bir simvol bir və ancaq bir məna kəsb edən işarə kimi qəbul edilməlidir.

7.5.1. Beynəlxalq bayt kodlaşdırma sistemləri

İnformatika və onun tətbiqləri beynəlmiləldir.

Kompyuter informasiyanın universal çeviricisi sayılır.

Kompyuterdə informasiyanın daxili təsvirində, sözsüz ki, ikilik say sistemi üstünlük təşkil edir. Bu zaman istər texniki, istərsə də kodlaşdırma-kodaçma baxımından eyni kodlardan, yəni bərabəruzunluqlu ikilik kombinasiyalardan istifadə olunur. Kombinasiyalardakı (ikilik yığimlardakı) kafi minimal qiymət (N) bu halda 8-ə bərabərdir. Bildiyimiz kimi, 8 dənə 2-lik simvol 1 bayt təşkil edir.

Ən çox yayılmış "bayt" kodlaşdırma sistemlərindən ikisi aşağıdakılardır: EBCDIC (Expend Binary Coded Decimal Interchange Code) və ASCII (American Standard Code for Information Interchange). EBCDIC tarixən "böyük", ASCII isə mini- və mikro- EHM-lərdə istifadə olunur. İkinci ilə tanış olaq.

ASCII 1963-cü ildə yaradılıb. Özünün başlanğıc versiyasında bu yeddibitli kodlaşdırma sistemi olaraq, aşağıdakı simvollarla məhdudlaşıb: təkcə bir təbii dilin (ingilis) əlifbası; rəqəm və digər müxtəlif simvollar yığımı (buraya yazı makinasının simvolları - ənənəvi durğu işarələri, riyazi əməliərin işarələri və s. aiddir), "idarəedici simvollar". İdarəedici simvolların nümunələrinə kompyuterin klaviaturasında da rast gəlinir: məsələn, DELETE – silinmə.

Növbəti versiyada İBM firması genişləndirilmiş 8-bitli kodlaşdırmaya keçdi. Həmin variantdakı ilk 128 simvol başlanğıc versiya ilə üst-üstə düşür və sıfra bərabər olan böyük bitə uyğunlaşdırılmış kodla bərabər aşağıdakıların da kodlaşdırılmasını əhatə edir: latın, yunan əlifbaları hərflərinin; riyazi işarələrin (məsələn, kvadrat kök işarəsi) psevdoqrafika simvollarının. Psevdoqrafika simvollarının vasitəsilə cədvəl, mürəkkəb olmayan sxemlər və s. qurmaq olar.

Kiril qrafikalı əlifbaların (məsələn, rus və, həmçinin, azərbaycan dillərinin) hərflərini təsvir etmək üçün ASCII çərçivəsində bir sıra versiyalar təqdim olunmuşdu:ilk dəfə KOİ-7 adlı standart hazırlandı, lakin çox müvəffəqiyyətsiz oldu. İndi həmin versiyadan praktiki olaraq etmir.

Qeyd edək ki, 8-bitli kodlaşdırma da milli əlifbaları əks etdirməyə kifayət deyildir. Bu çatışmazlıq 65536 kod kombinasiyasına malik olan 16-bitli kodlaşdırmaya (Unicode) keçməklə aradan qaldırılıb.

7.5.2. Şennon teoremləri

Məlum olduğu kimi, rabitə kanalı vasitəsilə informasiyanın ötürülməsi zamanı maneələr baş verə bilər. İnformasiyanın ötürülməsində maneələrin olması tamamilə adi haldır. Aydındır ki, təbii dillərdə eyni simvol(hərf) çoxlu sayda artıqlığa malik ola bilər (məsələn, çooooox göööööööööözəl). Bu onunla izah olunur ki, təbii dillərin əlifbalarının simvollarından tərtib edilən məlumatlar möhkəm maneədayanıqlılığına malikdirlər.

Simvol artıqlığı isə texniki sistemlərdə kodlaşdırılmış məlumatların ötürülməsi zamanı istifadə edilə bilər. Məsələn, mətnin hər bir fraqmenti üç dəfə verilir və onlardan üst-üstə düşən cütlük doğru hesab olunur. Lakin böyük artıqlıq vaxt itkisinə səbəb olur və informasiyanın saxlanması zamanı çox yaddaş tutumu tələb edir. Qeyd etdiyimiz kimi, effektiv kodlaşdlrmanı ilk olaraq araşdıran kibernetika üzrə ilk alimlərdən sayılan amerikalı riyaziyyatçı (kibernetikanın banilərindən biri) K.E. Şennon olmuşdur.

Şennonun birinci teoremi maneələr olmadıqda diskret məlumatların ikilik simvollarının orta sayı bir məlumat simvolu qədər məlumatın mənbəyinin entropiyasına yaxınlaşan effektiv

kodlaşdlrma siisteminin yaradilmasının mümkünlüyünü deklarasiya edir.

Effektiv kodlaşdırma məsələsi aşağıdakı triada ilə təsvir olunur:

$$\langle X=\{x_i\}\rangle \;\text{--}\; \langle \text{kodlaşdlrıcı qurğu}\rangle \;\text{--}\; \langle B\rangle.$$

burada X,B – uyğun olaraq giriş, çıxış əlifbası; x_i - elementi istənilən işarələr (hərflər, sözlər, cümlələr); B - işarələri ədədlərlə kodlaşdırma halında elementlərinin miqdarı say sisteminin əsası ilə təyin olunan çoxluqdur. Kodlaşdırıcı qurğu B çoxluğunun n_i simvolundan təşkil olunmuş kod kombinasiyasını X –dən olan hər bir x_i məlumatına qarşı qoyur. Bu məsələnin məhdudiyyəti maneənin olmamasıdır. Tələb olunur ki, kod kombinasiyasının orta uzunluğunun minimumu qiymətləndirilsin.

Məsələnin həlli üçün B əlifbasından müəyən miqdarda n_i simvoluna uyğun olan x_i məlumatının meydana gəlməsinin P_i ehtimalı məlum olmalıdır. Onda B çoxluğuna daxil olan simvolların miqdarının riyazi gözləməsi aşağıdakı kimi təyin edilir:

$$n_{orta} = n_i\, P_i.$$

B əlifbasının simvollarının n_{orta} orta ədədinə aşağıdakı düstur ilə təyin edilən H_{max} maksimal entropiyası uyğun gəlir:

$$H_{max} = n_{orta} \log m,$$

burada m- 2-ci əlifbanı təşkil edən keyfiyyət əlamətlərindəki simvolların sayıdır.

Aşkardır ki, informasiyanın miqdarı informasiya mənbəyini xarakterizə edən ilkin əlifbanın *n* simvolları ilə təyin olunur. Bu simvollar *m* simvollarından təşkil olunmuş ikinci əlifbanın köməyi ilə "koda" çevrilirlər, yəni transformasiya olunurlar.

B –dən kod kombinasiyalı X məlumatlarındakı informasiyanın ötürülməsinin təmin edilməsi üçün $H_{max} \geq H(x)$ və yaxud $n_{orta} \log m \geq - P_i \log P_i$ şərti ödənilməlidir. Bu halda kodlaşdırılmış məlumat aşağıdakı artiqlığa malik olur:

$$n_{orta} \geq H(x)/ \log m\ ,\ n_{min} = H(x)/ \log m.$$

Artım əmsalı(K_{art}) isə belə təyin olunur:

$$K_{art} = (H_{max} - H(x))/ H_{max} = (n_{orta} - n_{min})/ n_{orta}.$$

Şennonun ikinci teoremi. Kanalda maneələrin mövcudluğu şəraitində həmişə elə kodlaşdırma sistemi tapmaq olar ki, o, informasiyanın verilmiş dəqiqliklə öturulə bilməsini mümkünlü edir. Məhdudiyyətlər daxilində kanalın ötürmə qabiliyyıti məlumatların mənbə gücünü aşmalıdır.

Beləliklə, Şennonun ikinci teoremi kodlaşdırmanın maneədayanıqlılığı prinsipini yaradır. Maneəli diskret kanal üçün bu teorem təsdiqləyir ki, əgər məlumatların yaradılması sürəti kanalın ötürmə qabiliyyıtindən kiçikdirsə və ya ona bərabərdirsə, onda kifayət qədər az texniki səhvlərin ötürülməsini təmin edən kanal mövcuddur. Sözü gedən teorem kodun yaradılmasının konkret metodunu verməsə də, maneədayanıqlı kodun yaradılmasının mümkünlüyünü ehtiva edir.

7.6. Məlumatların emalı

Məlumatların emalının hər cür qaydasını v inikası (funksiya) kimi başa düşmək olar. Bunu aşağıdakı yazılışlardan biri kimi işarələmək olar:

$$W \xrightarrow{\nu} W'$$

və yaxud

$$v : W \mapsto W'.$$

Beləki, ν funksiyası vasitəsilə hər hansı W məlumatlar çoxluğundan olan N məlumatına uyğun olaraq W' məlumatlar çoxluğundan olan təzə N' məlumatı qarşı qoyulur. Burada N və N'-in hər biri işarələr ardıcıllığıdır.

Məlumatı işarələr ardıcıllığı kimi, kodlaşdırmanı isə bir işarələr yığımından digər işarələr yığımına keçid prossesi kimi təyin etdiyimizə görə aşağıdakı məntiqi nəticəni söyləyə bilərik:

Məlumatların hər cür emalına kodlaşdırma kimi baxmaq olar.

ν qaydası $N' = \nu(N) \in W'$ məlumatının qurulması üsulunu müəyyən etməlidir. W çoxluğu sonsuz olduqda sonlu əməliyyatlar çoxluğu müəyyən edilməlidir. Bu əməliyyatları elementar addımlar və ya taktlar adlandıracağıq. Beləki, N-dən N'-ə keçid müəyyən sonlu elementar taktlarla həyata keçirilə bilsin. Bundan əlavə, emaletmənin əməliyyat qaydası da verilməlidir.

Kodlaşdırma texniki olaraq, həmişə məlumatların verilməsi ilə əlaqədar olduğundan o, zamana görə baş verir. Ani olaraq kodlaşdırma heç vaxt məlumatların emalı ilə eyni zamanda baş vermir, yəni bunun üçün müəyyən zaman tələb olunur. Odur ki, emaletmə qaydasının səmərəli seçilməsi xüsusi əhəmiyyət kəsb edir.

Eyni zamanda bu seçmə elə edilməlidir ki, emaletmə qaydası informasiyanı saxlasın. Yəni, ν uyğunluğu inikas olsun.

7.7. Məlumatların emalının şərhi

W –dan olan N məlumatlar çoxluğu ancaq o zaman maraq kəsb edir ki, ona hər hansı qaydalar (heç olmazsa, bir qayda) vasitəsilə (α) $F - \dot{I}$ biliklər çoxluğu qarşı qoyulsun:

$$W \xrightarrow{\alpha} F$$

Eyni zamanda $W' \xrightarrow{\alpha'} F'$ olduqda $W \xrightarrow{\nu} W'$ emal qaydası aşağıdakı diaqramı verir:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu"'] & F \arrow[d, dotted, "\delta"] \\ W' \arrow[r, "\alpha'"] & F' \end{tikzcd}$$

Bəs F və F′ öz aralarında hansı münasibətdə olur?

Aşkardır ki, hər bir $N\in W$ məlumatına bir $(\dot{I}, \dot{I}')$ cütü qarşı qoyulur. Burada, $\dot{I} = \alpha(N)$, $\dot{I}' = \alpha'(\nu(N))$. Eyni zamanda $F \xrightarrow{\delta} F'$ uyğunluğu var.

Əgər a inyektiv inikasdırsa (yəni, iki N_1 və N_2 məlumatı mövcuddur ki, eyni bir $\dot{I}$ informasiyasını verir), onda δ uyğunluğu inikas olmaya da bilər, belə ki $\nu(N_1)$ və $\nu(N_2)$ emaledilən məlumatları müxtəlif informasiya daşıya bilər:

$$I_1' = \alpha'(\nu(N_1)), \quad I_2' = \alpha'(\nu(N_2))$$

Deməli, ν emaletmə qaydası o zaman informasiyanı saxlayır ki, δ uyğunluğu inikas olsun.

Onda aşağıdakı diaqramı alarıq:

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "v"'] & F \arrow[d, "\delta"] \\ W' \arrow[r, "\alpha'"] & F' \end{tikzcd}$$

Burada, α və δ inikaslarının kompozisiyası ν və α' inikaslarının kompozisiyaları ilə üst üstə düşür: $\delta\alpha=\alpha'\nu$.

Bu halda sonuncu diaqram kommutativ, δ inikası isə informasiya emalı qaydası adlanır.

Adətən, məlumat informasiyanın alınması üçün emal olunur. Faktiki olaraq, müəyyən δ qaydasına görə sonuncu diaqramdakı vəziyyəti almaq üçün ν,α və α' inikaslarını təyin etməyə cəhd göstərilir. Ona görə də fərz olunur ki, ν informasiyanı saxlayır. Beləki, ν, α və α′ inikasları hər hansı δ informasiya emalı qaydasını təyin edirlər.

δ inyektiv inikas olub-olmadığından asılı olaraq, aşağıdakı halları fərqləndirmək lazımdır:

1. Əgər δ inyektiv inikasdırsa, yəni informasiya emal vaxtı itmirsə, onda uyğun məlumat emalı şifri dəyişdirilmiş (yenidən şifrələnmiş) adlanır.

1.1 Əgər ν də inyeksiyadırsa, onda o yenidən şifrələmənin sadə halı adlanır: $N'=\nu$, α və $\alpha(N)$ məlumatına əsasən ancaq ilk informasiyanı deyil, ilk N məlumatını da canlandırmaq (bərpa etmək) olar. Çox vaxt F=F′, δ- inyektiv inikas olan xüsusi hala rast gəlinir. Ideal olaraq, hər bir məlumatın ötürülməsi də elə bu şəkildə olmalıdır.

1.2 Əgər δ- inyeksiyadırsa, v isə yox, onda bir neçə $N\in æ$ məlumatı eyni bir $N'\in æ'$ məlumatı ilə kodlaşdırılır. Lakin bu zaman heç bir informasiya itmədiyindən, giriş məlumatlar æ çoxluğu artıqlaması ilə olur: æ-da eyni informasiya daşıyan bir neçə məlumat olur. Ümumiyyətlə isə, belə xassəyə malik məlumatların sayı æ′-də æ-ə nisbətən az olur. Bu cür v şifr dəyişməsi sıxılmış (qısaldılmış) adlanır. Əgər burada α′ inyektiv inikasıdırsa, onda v tamamilə qısaldılmış adlanır.

2. Əgər α inyektiv inikasdırsa, onda məlumatların uyğun v emalı seçilmiş adlanır. Xüsusən çox vaxt F ′- altçoxluğu və ona daxil olan δ məlumatlarının eyniliklə inikası halına rast gəlinir. Bu halda δ mahiyyət etibarı ilə verilən çoxluqdan bilik seçir. Seçmə qabaqcadan təyin edilə bilər. Buna baxmayaraq, məlumatların ν emalı tamamilə inyektiv ola bilər. Bu halda seçmə "birtərəfli" olar (α′ mənada). Məsələn: qəzet oxunmasının adi qaydası seçmə ilədir; eyni bir hadisəni şərh edən müxtəlif qəzet məqalələrinin oxunması sıxılmadır.

FƏSİL 8. QRAFLAR

8.1. Əsas anlayışlar

Qraflar elmin və praktikanın müxtəlif sahələrində riyazi modellərin əhəmiyyətli elementi, diskret riyaziyyatın bir bölməsidir. Onlar mürəkkəb sistemlərdə obyektlər və hadisələr arasındakı qarşılıqlı münasibətləri əyani təsvir etməyə kömək edirlər.

Qraf termini mövcud ədəbiyyatlarda birqiymətli olaraq təyin edilmir. Lakin müxtəlif ədəbiyyatlardakı təriflərdə müəyyən ümumilik var. İstənilən halda qraf iki çoxluqdan ibarətdir: təpələr və tillər çoxluqları. Hər bir til üçün bir cüt təpə göstərilir. Til iki təpə nöqtəsini birləşdirir. Təpələr və tillər *qrafın elementləri* adlanır.

Deməli, qraflar nəzəriyyəsində məsələlərin predmetini ilkin olaraq, nöqtələr və onları birləşdirən xətlərin konfiqurasiyaları(tillər) təşkil edir. Bu baxımdan nəzərə alınmır ki, xətlər düz və ya əyridir, kəsilməz əyrixətlidir, uzun və ya qısa qövsdür və s. Yalnız o bilinir ki, xətlər verilmiş iki nöqtə cütlərini birləşdirirlər.

Yuxarıda deyilənlər qrafa abstrakt riyazi anlayış kimi tərif verməyə imkan yaradır.

Hər hansı qayda ilə birləşdirilən V nöqtələri çoxluğuna baxaq. V-ni təpələr çoxluğu, $v \in V$-ni isə təpə adlandıraq.

V təpəli

$$G=G(V) \qquad (8.1)$$

qrafı birləşdirilmiş təpələri göstərən

$$E=(a,b);\ a,b \in V \qquad (8.2)$$

cütləri yığımıdır.

Qrafın həndəsi təsvirinə uyğun, hər bir konkret cütlük til, a, b təpələri isə, E tilinin uc nöqtələri və ya sərhədləri adlanır.

Qrafın tərifini aşağıdakı başqa yanaşmadan istifadə etməklə də vermək olar.

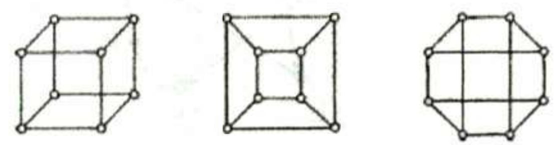
Əgər V_1 və V_2 kimi iki çoxluq verilibsə, onda bütün (v_1,v_2); $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ cütlər çoxluğunu təşkil etmək olar. Bu cütlər çoxluğu hasil adlanır və $V_1 \times V_2$ kimi işarə edilir. Göstərilən halda (a,b) təpələr çoxluğu $V_1 \times V_2$ hasilinin elementləridir.

Beləliklə, qrafa aşağıdakı tərifi vermək olar.

Tərif 8.1. $G = G(V)$ -dən olan $E=(a,b);\ a,b \in V$ tillərilə verilmiş G qrafı $V_1 \times V_2$ hasilinin hər hansı alt çoxluğudur.

Qrafın bu tərifi vacib bir münasibətlə tamamlanmalıdır. Qrafın tilinin tərifində onun iki uc nöqtəsinin yerləşmə ardıcıllığı sırasına fikir vermək də olar, verməmək də. Belə sıra mövcud olmadıqda, yəni, əgər $E=(a,b)=(b,a)$ isə, onda E *istiqamətlənməmiş til* adlanır; əgər bu sıra əhəmiyyətlidirsə, onda E *istiqamətlənmiş til* (və yaxud *qövs*) adlanır. Sonuncu halda a qrafın E tilinin başlanğıc nöqtəsi, b isə son nöqtəsi adlanır. Eyni zamanda belə də demək olar ki, E tili a təpəsindən çıxan (a təpəsindən başlayan) və b təpəsinə daxil olan (b təpəsində qurtaran) tildir. İstər istiqamətlənmiş, istərsə də istiqamətlənməmiş til haqda deyirlər ki, E tili (8.2) münasibətinə görə a və b təpələrinə, həmçinin, a və b təpələri E tilinə insidentdirlər.

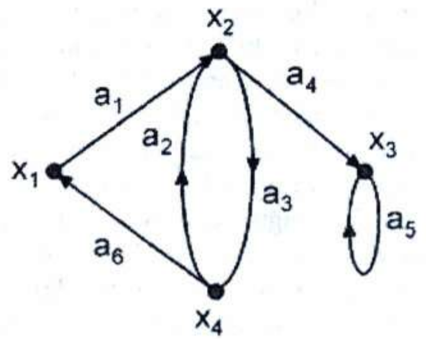
Eyni bir qrafı müxtəlif üsullarla təsvir etmək olar. Məsələn, şəkil 8.1 –də kubun qrafla təsvirinin 3 variantı göstərilir.



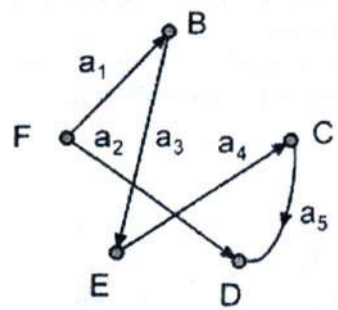
Şəkil 8.1

Qraf tətbiqlərdə, adətən, şəbəkə kimi interpretasiya olunur və bu zaman G təpələri düyünlər adlandırılır. İki a və b düyün nöqtəsi ancaq və ancaq (8.2) cütü olduqda kəsilməz əyri xətlə (xüsusi halda, düz xətlə) birləşdirilir. Şəkillərdə düyünlər, adətən, kiçik dairəciklərlə, tillərin (qövs, vətər də demək mümkündür) istiqamətləri isə, lazım gəldikdə, oxlarla işarə edilir.

Qrafın bütün tilləri istiqamətlənməmiş olduqda, o *istiqamətlənməmiş qraf* və bütün tilləri istiqamətlənmiş olduqda isə, *istiqamətlənmiş qraf*(şəkil 8.3a, b) adlanır.



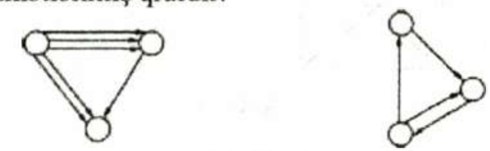
a)



b)

Şəkil 8.3

Müxtəlif tilləri eyni başlanğıc və son nöqtələrinə malik olan qraf tərtibli tillərə imkan verir. Belə qraf *multiqraf* adlanır. Məsələn, şəkil 8.2 – də təsvir olunan 2 qrafdan soldakı istiqamətlənmiş multiqraf qraf, sağdakı isə tərtibli tillərə malik olmayan istiqamətlənmiş qrafdır.



Şəkil 8.2

Bir sıra hallarda, təbii olaraq, qarışıq qraflara da baxılır, beləki, o həm istiqamətlənməmiş, həm də istiqamətlənmiş tillərə malik olur. Məsələn, şəhərin planına küçələri tillər, küçələrin kəsişmə nöqtələrini isə, təpələr qəbul etməklə qraf kimi baxmaq olar; bu zaman birtərəfli yollar istiqamətlənmiş, 2-tərəfli yollar isə, istiqamətlənməmiş tillərtək qiymətləndirilir.

Eyni bir qraf tamamilə müxtəlif cizgilərlə təsvir oluna bilər. İki G və G' qrafı ancaq o halda *izomorf* adlanır ki, onlara uyğun V və V' təpələr çoxluğu arasında, bir qrafın təpə nöqtələrinin tillərlə birləşməsi digərindəki birləşmələrə uyğun olmaqla, qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq mövcud olsun; bu zaman, əgər tillər istiqamətlənmiş olarlarsa, onda onların istiqamətləri də bir-birinə uyğun olmalıdır.

İzomorf qraflar eyni xassələrə malik olduqlarından, qrafın hansı təsvirinin seçilməsi əhəmiyyət kəsb etmir.

Heç bir tilə insident olmayan təpə *təcrid edilmiş* adlanır.

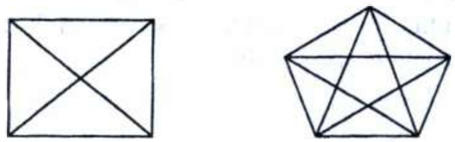
Ancaq təcrid edilmiş təpələrdən ibarət olan qraf *sıfır-qraf* adlanır.

Tilləri V-dən olan 2 müxtəlif a və b təpələri üçün bütün mümkün (8.2) cütlərindən ibarət olan

$$U=U(V) \qquad (8.3)$$

qrafı *tam qraf* adlanır. Yəni, tam qrafda istənilən iki təpə heç olmasa bir tili müəyyən edir.

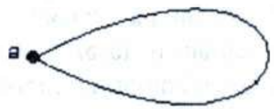
Şəkil 8.4 -də 4 və 5 təpə elementli çoxluqlar üçün tam qrafların sxemləri təsvir olunur.



Şəkil 8.4

Uc nöqtələri üst-üstə düşən til(L) *ilgək* adlanır(şəkil 8.5):

L=(a,a) .



Şəkil 8.5

İlgək, adətən, istiqamətlənməmiş hesab olunur.

Praktikada ən çox istifadə edilən ilgəksiz və tərtibli tilləri olmayan istiqamətlənməmiş qraflardır. Belə qraflar *adi qraflar* adlanırlar.

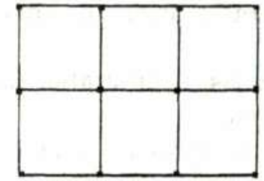
Adi qrafda tillər müxtəlif olur.

Verilmiş qrafdan (G) tillərin istiqamətlərini dəyişməklə alınan qraf (G^{*}) *tərs qraf* adlanır.

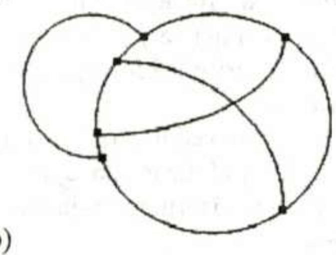
Uyğunlaşdırılmış qraf da var; bu zaman tillərin istiqamətləri ləğv edilir.

Hamar qraf dedikdə müstəvi üzərində bütün kəsişmələri təpə nöqtələri olan qraf başa düşülür(şəkil 8.6a).

Müstəvi üzərində tillərin heç olmasa bir kəsişməsi til olmayan qraf *qeyri-hamar* adlanır(şəkil 8.6b).



a) *hamar qraf*

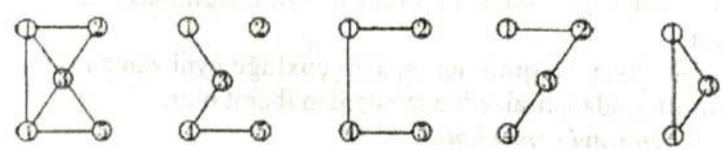


b) *qeyri-hamar qraf*

Şəkil 8.6

Tillərinin sayı sonlu olan qraf *sonlu*, əks halda *sonsuz* adlanır.

P qrafi *G* qrafının hissəsi (altqrafı) adlanır o vaxt ki ($P \subset G$), onun *V(P)* təpə nöqtələri çoxluğu *G* qrafının *V(G)* təpə nöqtələri çoxluğunun altçoxluğu olsun və bütün *P* tilləri də *G* tillərindən olsun. Hər bir altqraf qrafdan bir neçə təpə və tilin ləğvi ilə alına bilər. Şəkil 8.7 –də G qrafı və onun G_1,G_2,G_3,G_4 altqrafl təsvir edilir.



Sıfır qraf istənilən qrafın altqrafıdır. Qrafın istənilən tılı onun hissəsidir.

8.2. Qraflar üzərində əməllər

Yeni qrafların alınması üçün qraflar üzərində müxtəlif əməliyyatlardan istifadə olunur.

Qraflar üzərindəki əməliyyatları iki sinfə ayırırlar: lokal və cəbri.

*Lokal əməliyyatlar*da qrafın ayrı-ayrı elementləri(til və təpə) əvəz edilir, ləğv edilir(silinir) və ya əlavə edilir.

*Cəbri əməliyyatlar*da verilmiş bir neçə qrafdan müəyyən qaydalarla yeni qraf qurulur.

Qraflar üzərində əsasən yeddi əmələ baxılır. Onlardan üçü cəbri (yəni, binar - iki qraf üzərində aparılır), dördü isə lokaldır (yəni, unardır - bir qraf üzərində təyin edilir).

1. ***Birləşmə əməli.***

G_1 və G_2 qraflarının birləşməsi, $G_1 \cup G_2$ kimi işarə olunur, elə $G_3 = (X_1 \cup X_2,\ A_1 \cup A_2)$ qrafını təqdim edir ki, onun təpələri $X_1 \cup X_2$ çoxluğu, tilləri isə $A_1 \cup A_2$ çoxluğu ilə təyin edilir.

G_3 –ün əlaqəlilik matrisi G_1 və G_2 qraflarının əlaqəlilik matrislərinin uyğun elementlərinin məntiqi cəmlənməsi yolu ilə alınır.

2. ***Kəsişmə əməli.***

G_1 və G_2 qraflarının kəsişməsi, $G_1 \cap G_2$ kimi işarə olunur, elə $G_3 = (X_1 \cap X_2,\ A_1 \cap A_2)$ qrafını təqdim edir ki, onun təpələri $X_1 \cap X_2$ çoxluğu, tilləri isə $A_1 \cap A_2$ çoxluğu ilə təyin edilir. G_3 –ün əlaqəlilik matrisi G_1 və G_2 qraflarının əlaqəlilik matrislərinin uyğun elementlərinin məntiqi vurulması vasitəsi ilə alınır.

Beləliklə, G_3 qraflının təpələri çoxluğu eyni zamanda G_1 və G_2 qraflarında iştirak edən təpələrdən ibarət olur.

3. ***Dairəvi cəm əməli.***

G_1 və G_2 qraflarının dairəvi cəmi, $G_1 \oplus G_2$ kimi işarə olunur, $G_3 = A_1 \oplus A_2$ tillər çoxluğunda yaradılır. Başqa sözlə desək, G_3 qrafı ancaq G_1 qrafına və yaxud ancaq G_2 qrafına aid

olan tillərdən(eyni zamanda hər ikisinə aid ola bilməz) təşkil olunur.

4. ***Təpənin çıxarılması(silinməsi) əməli.***

Əgər x_i - $G = (X,A)$ qrafının təpəsidirsə, onda $G - x_i$ qrafı G qrafından $X\text{-}x_i$ təpələr çoxluğunda törənən altqrafdır. Yəni, $G - x_i$ qrafı G qrafından x_i təpəsini və bu təpəyə insident olan bütün tilləri çixarmaqla alınır.

5. ***Tilin və ya qövsün çıxarılması(silinməsi) əməli.***

Əgər a_i - $G = (X,A)$ qrafının tilidirsə, onda G - a_i qrafı G qrafından a_i tillərinin çıxarılmasından sonra alınan altqrafdır. Qeyd edək ki, bu zaman a_i -nin təpələri çıxarılmır. Qrafdan təpə və ya tillər çoxluqlarının çıxarılması müəyyən təpə və ya til üçün ardıcıllıq kimi təyin edilir.

6. ***Qapama və ya eyniləşmə əməli.***

G qrafında verilmiş x_i və x_j təpələri cütü qapanır(eyniləşir) deyirlər o vaxt ki, onlar G qrafındakı bütün x_i və x_j təpələrinə insident olan yeni təpələrlə əvəz edildikdə yeni təpəyə də insident olsunlar.

7. ***Birləşdirmə əməli.***

Birləşdirmə dedikdə til və ya qövsün çıxarılması əməli və onun uc təpələrinin eyniləşdirilməsi başa düşülür.

8.3. Marşrutlar, zəncirlər və sadə zəncirlər

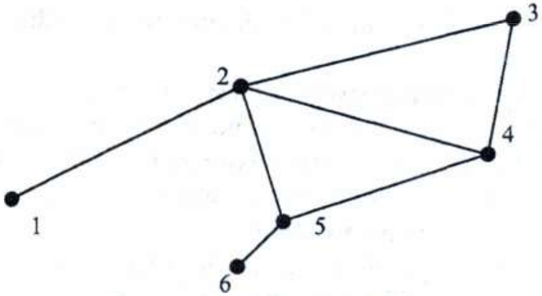
Tutaq ki, G –istənilən istiqamətlənməmiş qrafdır. G –də *marşrut* dedikdə elə

$$S = (\ldots, E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots) \tag{8.5}$$

sonlu və ya sonsuz tillər ardıcıllığı başa düşülür ki, onun hər bir iki qonşu E_{i-1} və E_i tilləri ümumi uc nöqtəyə malik olsun. Beləliklə, yazmaq olar:

$$\ldots, E_0 = (a_0, a_1),\ E_1 = (a_1, a_2), \ldots, E_n = (a_n, a_{n+1}), \ldots \tag{8.6}$$

Qeyd edək ki, eyni bir E tili marşrutda bir neçə dəfə rast gələ bilər(şəkil 8.8).



Şəkil 8.8

G təpələr sayını |v|, tillər sayını |E| ilə işarə edək.

Tərif 8.2. G=(v,E), |v|=n, qrafının *qonşu* matrisi $A \in M(n,B)$ aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ əgər } \quad |v_{ij} v_j| \in E \text{ isə}, \\ 0 \quad, \text{ əks } \quad \text{təqdirdə}. \end{cases}$$

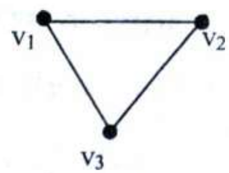
$A_{ij}=1$ olduqda v_i və v_j təpələri qonşu adlanır. Aşkardır ki, $A_{ij}=0$ (i=1,...,n) və $A=A^T$.

Misal 8.1. Tutaq ki, $v=\{v_1, v_2, v_3\}$. Onda $E=\{[v_1, v_2],[v_2, v_3],[v_1, v_3]\}$, $|v|=3, |E|=3$.

Bu qraf şəkil 8.9-də təsvir olunur.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

əlaqəlilik matrisi



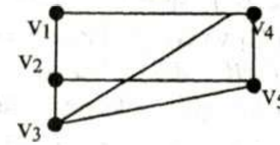
qrafın təsviri

Şəkil 8.9

Misal 8.2. Tutaq ki, $v=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$. Onda $E=\{[v_1, v_2],[v_1, v_5],[v_2, v_3], [v_2, v_4], [v_3, v_5], [v_3, v_4], [v_4, v_5]\}$, $|v|=5, |E|=7$.

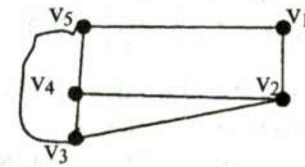
Bu qraf şəkil 8.10-də təsvir olunur.

a)



yaxud

b)



c)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

əlaqəlik matris

Şəkil 8.10

Tərif 8.3. $V_1 \subseteq V$ və $E_1 \subseteq E$ olduqda, $H=(V_1, E_1)$ qrafı $G=(V,E)$ qrafının *altqrafı* adlanır. Əgər V_1=V olarsa, onda H-G qrafının *bünövrə altqrafı* adlanır. Əgər V_1-(V,E) qrafının təpələrinin boş olmayan altçoxluğudursa, onda V_1-dən törəmə (V_1,E) altqrafı aşağıdakı kimi təyin olunur:

$$[v,w] \in E_1 \Leftrightarrow v,w \in v_1 \text{ və } [v,w] \in E.$$

Tərif 8.4. Tutaq ki, $G_1 = (V_1, E_1)$ və $G_2 = (V_2, E_2)$ – qrafdır. Onda $f : V_1 \to V_2$ biyeksiyası mövcud olduqda G_1 və G_2 qrafları *ekvivalent* adlanırş

Tərif 8.5. Tutaq ki,G=(V,E) ixtiyari qrafdır. $\delta : V \to N \cup \{0\}$ inikasını aşağıdakı kimi təyin edək: $\delta(v)$ kəmiyyəti $x \in V$ təpəsini özündə saxlayan tillərin sayına bərabərdir. $\delta(v)$ v təpə nöqtəsinin *tərtibi* adlanır.

Qrafın xassələrinə dair aşağıdakıları qəbul edək.

Təklif 1. $\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|$.

Təklif 2. İstənilən qrafda tək tərtibli təpələr sayı cütdür.

Tərif 8.6. Tutaq ki, S_v və S_E - nişanlar çoxluğudur. G=(V,E) qrafının nişanlarının paylanması (və ya nişanlanması) aşağıdakı funksiyalar cütünə deyilir:

$f : V \to S_v$ - təpələrin nişanlarının paylanması;

$g : E \to S_E$ - tillərin nişanlarının paylanması.

Tərif 8.7. Tutaq ki, G=(V,E) qrafı f və g, $G_1=(V_1,E_1)$ qrafı isə f_1 və g_1 funksiyalarının köməyilə nişanlanıb. Aşağıdakıları ödəyən $h : V \to V_1$ biyeksiyası mövcud olduqda G və G_1 qrafları *ekvivalent nişanlanmış* adlanırlar:

a) G və G_1 nişanlanmış qraflar kimi ekvivalentlər;

b) $f(v)=f_1(h(v)$, $\forall v \in V$ olduğundan, uyğun tillər eyni nişana malikdirlər;

c) $g([v,w]) = g_1([h(v),h(w)])$, $\forall v, w \in V$, yəni uyğun təpələr eyni nişana malikdir.

Çox vaxt ancaq tillər və ya ancaq təpələr nişanlanırlar.

Tərif 8.8. İstənilən $(\forall)\, v_1, v_2 \in V$ üçün $[v_1, v_2] \in E$ olarsa, G=(V,E) qrafı tam adlanır. n təpəli tam qraf K_n ilə işarə olunur.

Tərif 8.9. G=(V,E) qrafı V_1 və V_2-dən qonşu olmayan təpələr üçün $V = \{V_1, V_2\}$ ayrılışı mövcud olduqda ikibölgülü (ikihissəli) adlanır. Əgər isnənilən $v_1 \in V_1$ və $v_2 \in V_2$ cütü üçün $[v_1, v_2] \in E$ olarsa, onda ikibölgülü qraf tam adlanır. Əgər $|V_1| = m$ və $|V_2| = n$ olarsa, onda tam ikibölgülü (V_1E) qrafı $K_{m,n}$ ilə işarə edilir.

8.4. Marşrutlar, dövrlər və əlaqəlilik

Qraflar nəzəriyyəsinin mühüm hissəsi, onun tətbiqləri, marşrutun mövcudluğu və xassələri məsələlərini aşağıdakı kimi şərh edək.

Tərif 8.10. Tutaq ki, G=(V,E)-qrafdır. G qrafında v-dən w-yə k uzunluqlu marşrut elə $v_i \in V$ $- < v_0, v_1, ..., v_k >$ təpə nöqtələri (hökm deyil ki, müxtəlif) ardıcıllığıdır ki, $v_0=v$, $v_k=w$ olsun, bütün $i=1,...,k$ üçün isə $[v_{i-1}, v_i] \in E$. $v_0=v_k$ olduqda *marşrut qapalı* adlanır.

Bütün təpələri müxtəlif olan marşruta *zəncir* deyilir. Qapalı zəncir *dövr* adlanır. Ancaq $v_0=v_k$, qalan digər v_i-ləri müxtəlif olan dövr sadə adlanır.

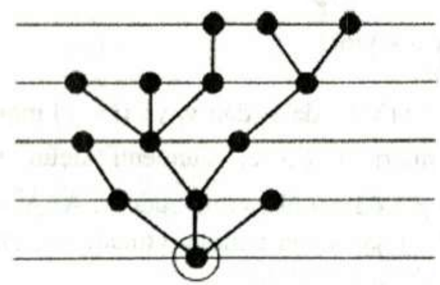
Tərif 8.11. v-də w,v, $w \in V$ marşrutu mövcud olduqda w v-dən əlçatan adlanır.

Tərif 8.12. Dövrlərsiz qraf *asiklik* adlanır.

Qapalılıq anlayışı, mahiyyətcə, öz adına uyğundur.

Tərif 8.13. Hər bir müxtəlif təpələr cütü marşrutca əlaqələndirilən G=(V,E) qrafı *əlaqəli* adlanır.

Tərif 8.14. Əlaqəli asiklik qraf *ağac* adlanır(şəkil 8.11).



Şəkil 8.11

Tərif 8.15. Kök adlanan ayrılmış təpəli ağac köklü adlanır.

Tərif 8.16. G=(V,E) üçün ağac şaxəli qrafın altqrafı adlanır.

Qeyd etdiyimiz kimi, əlaqəli matrislə hesablama qrafın təbiəti haqda vacib informasiya əldə edilir. Növbəti nəticələr daxili əlaqələr və qraflar nəzəriyyəsindəki məsələlərdir.

Teorem. Tutaq ki, A - G(V,E) qrafının qonşu matrisidir və $|V| = n$. Onda $(A^k)_{ij}$ v_i və v_j-dən asılı matrislərin k uzunluğu ədədidir.

İsbatı. K üzrə induksiyadan istifadə edək. K=1 üçün q uzunluqlu marşrut G tilidir. Deməli, teoremin k=1 halı üçün doğruluğu A-nın təyinindən alınır. Fərz edək ki, $(A^{k-1})_{ij}=a_{ij}$ və $A_{ij}=a_{ij}$, onda $\left(A^k\right)_{ij} = \left(A^{k-1}A\right)_{ij} = \sum_{q=1}^{n} \alpha_{ij} a_{qj}$.

Tutaq ki, nəticə k=1 üçün doğrudur. Bu halda, əgər $\alpha_{iq} \in A^{k-1}$, onda a_{iq} –v_i -də v_q-yə (k=1) uzunluqlu marşrutların sayı; tərifə əsasən a_{qj}- v_q-dən v_j-yə 1 uzunluqlu marşrutların sayıdır. Buradan alınır ki, $a_{iq}a_{qj}$ - v_i-dən v_j-yə k uzunluqlu marşrutudur (burada v_q marşrutun sonuncudan əvvəlki variantıdır).

Deməli, $\sum_{q=1}^{n} \alpha_{iq} a_{qj} - v_i$ -dən v_j-yə olan k uzunluqlu marşrutların sayıdır.

Nəticə.

a) G=(V,E)-də v_i-dən v_j-yə $(i \neq j)$ marşrut (nxn)-tərtibli $(n = |V|)$ matrisin (i,j)-ci elementi üçün ancaq və ancaq aşağıdakı şərt ödənildikdə mövcuddur: $A+A^2+...+A^{n-1} \neq 0$.

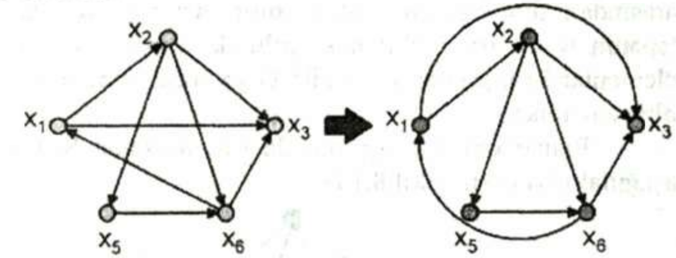
b) i≠j şərtindən istifadə etmədikdə, tələb olunan matris $A+A^2+...+A^n$ şəklində olur.

Hər bir əlaqəli komponenti ağac olan qraf *meşə* adlanır.

8.5. Planar qraflar

Qraflar nəzəriyyəsinə dair çox işlərdə qrafların R^2 müstəvisində təsvir olunan xüsusi sinfinə baxılır.

Tərif 8.17. Müstəvidə təsvir zamanı tilləri kəsişməyən G qrafına *planar*(planlı) *qraf* deyilir(şəkil 8.12). Belə təsvir G-nin xəritəsi adlanır.



Şəkil 8.12

Tərif 8.18. G qrafı əlaqəli olduqda G xəritəsi də əlaqəli sayılır.

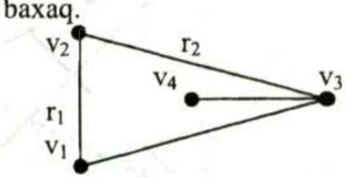
Verilmiş xəritənin oblastlar çoxluğunu $\Re$ ilə işarə edək. Aşağıdakı teoremi isbatsız verək.

Eyler teoremi. İstənilən əlaqəli xəritə üçün

$$|V| - |E| + |\Re| = 2.$$

Tutaq ki, G=(V,E) -planar qrafdır. G xəritəsi üçün r oblastının Δ_2 dərəcəsi r-lə məhdud olan qapalı marşrut uzunluğu kimi təyin edilir.

Misal 8.3. Aşağıdakı cizgiyə baxaq.



Bu cizgidə r_1 üçün <v_1,v_3,v_4,v_3,v_2,v_1>, r_2 üçün isə <v_1,v_3,v_2,v_1> *-sərhəd qapalı marşrutudur.*

Deməli, $\Delta r_1=5$, $\Delta r_2=3$.

İsbatsız olaraq, aşağıdakı təklifi verək.

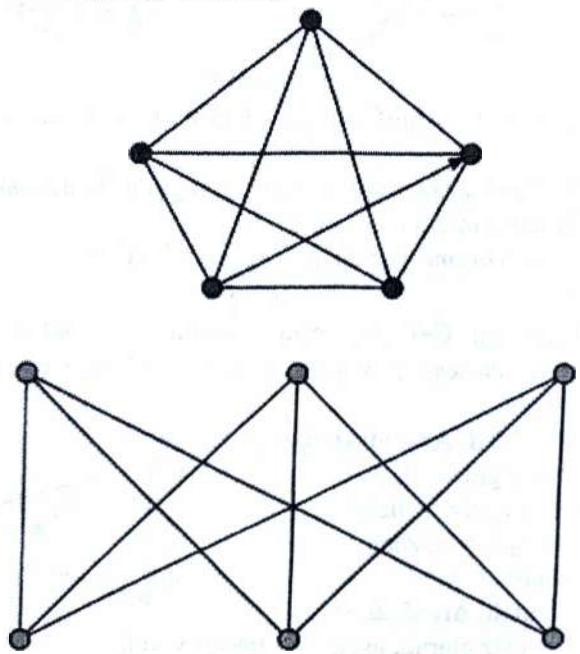
Təklif 3. Tutaq ki, G=(V,E) - planar qrafdır. Onda

a) $\sum_{r \in R} \Delta_r = 2|E|$, G-nin istənilən cizgisi üçün;

b) əgər $|V| \geq 3$ isə, onda $|E| \leq 3|V| - 6$.

Tutaq ki, G=(V,E) -qrafdır. G elementar yığımı E-dən $[V_i, V_j]$ tilinin silinməsi, E-də hər bir v_i və v_j-nin silinməsi və w-nin V-yə əlavə edilməsi yolu ilə təşkil olunur. Qrafiki olaraq, G-nin elementar yığımı (birləşməsi) iki qonşu təpənin onlar arasındakı tilin ləğv edilməsi ilə birləşdirilməsi və "yaradılmış" təpənin w ilə işarə olunması yolu ilə alınır. Əğər G′ ardıcıl elementar birləşmələr vasitəsilə G-yə birləşirsə, onda G G′-ə birləşən adlanır.

Planar olmayan qraflar da var, məsələn Kuratovskinin aşağıdakı iki qrafı(şəkil 8.13).



Şəkil 8.13

FƏSİL 9. KOMPYUTER ELMİNİN KİBERNETİK ASPEKTLƏRİ

9.1. Kibernetikanın predmeti

«Kibernetika» (kybernetike) yunan sözü olub, tərcümədə «idarəetmə ustalığı» mənasını verir. Onun müasir mənası isə elmi sahə ilə əlaqədardır. Kibernetika elminin başlanğıcı amerikalı alim Norbert Vinerin 1948-ci ildə çap edilmiş «Kibernetika və ya canlı orqanizmlərdə və maşında idarəetmə və əlaqə» adlı kitabında qoyulub. Bu yeni elm sahəsinin predmeti çox keçmədən nəinki bioloji və texniki sistemləri, həmçinin, informasiyanı qəbul edən, saxlayan, emal edən, ondan idarəetmədə, tənzimləmədə istifadə edən istənilən təbiətli sistemləri əhatə edir. 1947-ci ildə nəşr olunmuş «Kibernetik ensiklopediya» kitabında yazılır: «Kibernetika - mürəkkəb idarəetmə sistemlərində informasiyanın alınması, saxlanılması, ötürülməsi və çevrilməsinin ümumi qanunları haqqında elmdir; bu zaman idarəetmə sistemləri dedikdə nəinki texniki, həmçinin də, istənilən bioloji, administrativ və sosial sistemlər başa düşülür».

Beləliklə, kibernetika və kompyuter elmi hər şeydən öncə vahid elmdir. Bu gün kibernetikanı hamı çox zaman kompyuter elminin hissəsi -onun «ali» bölməsi hesab edirlər. Müəyyən dərəcədə bu analogiyanı «ali riyaziyyat»la bütün riyaziyyatın nisbəti kimi aparmaq olar. Təxminən «süni intellekt» elmi də kompyuter elminə nisbətdə belə vəziyyətdədir. Bütövlükdə kompyuter elmi kibernetikadan genişdir. Beləki, kompyuter elmində kibernetikaya bilavasitə aid edilə bilməyən kompyuterin arxitekturası və proqramlaşdırılması ilə bağlı olan aspektlər vardır.

Kompyuter elminin kibernetik bölmələri müxtəlif sistemlərin araşdırılmasındakı yanaşma və modellərlə zəngindir, onun riyazi aparat vasitəsi kimi fundamental və tətbiqi riyaziyyatın çoxlu bölmələrindən istifadə edilir.

Əməliyyatların tədqiqi kibernetikanın klassik və aşkar dərəcədə sərbəst bölməsi hesab olunur.

Əməliyyatların tədqiqi dedikdə insan fəaliyyətinin müxtəlif sahələrində məqsədyönlü qərarların əsaslandırılması üçün riyazi metodlardan istifadə başa düşülür.

«Qərar» terminini açıqlayaq. Tutaq ki, hər hansı sahədə müəyyən məqsədə çatmağa yönəldilən tədbirin görülməsi qəbul edilir (qərarlaşdırılır). Bu tədbir «əməliyyat» adlanır. Həmin tədbiri həyata keçirməyə cavabdeh şəxsdə (və ya şəxslər qrupunda) onu necə reallaşdırmaq üçün seçim imkanı var. *«Əməliyyat»*- idarə edilə bilən tədbirdir.

Qərar (həll) cavabdeh şəxsdə olan bir neçə mövcud imkanlardan birinin seçilməsidir. Qərarlar uğurlu və ya uğursuz ola bilərlər. Bu və ya başqa səbəblərə görə digərlərindən daha qənaətbəxş sayılan həll *optimal* adlanır. Əməliyyatların tədqiqinin məqsədi-optimal həllərin riyazi (kəmiyyətcə) əsaslandırılmasıdır.

Əməliyyatların tədqiqi özündə aşağıdakı bölmələri cəmləşdirir:

1) riyazi proqramlaşdırma (xətti, qeyri-xətti, dinamik);

2) kütləvi xidmət nəzəriyyəsi (təsadüfi proseslər nəzəriyyəsinə əsaslanan);

3) oyunlar nəzəriyyəsi (natamam informasiya şəraitində qəbul edilən qərarların əsaslandırılmasını təmin edən).

Qeyd edək ki, bu bölmələr kompyuter və texniki sistemlərlə bilavasitə əlaqəli deyillər. Kibernetikanın 1970-1980-ci illərdə tez inkişaf etmiş başqa bölməsi avtomatik (avtomatlaşdırılmış) tənzimləmə sistemləri olmuşdur. Bu bölmə qapalı, avtonom xarakter daşıyır, tarixən sərbəst qərarlaşıb.

Kibernetikanın daha bir klassik bölməsi *obrazların tanınmasıdır*. O, insan tərəfindən işarələrin, predmetlərin, nitqlərin texniki sistemlərlə qavranılması, həmçinin, insanda anlayışların formalaşdırılmasının modelləşdirilməsi

məsələlərindən törəyir. Bu bölmə əhəmiyyətli dərəcədə robototexnikanın texniki tələbatından yaranıb.

Kibernetikanın zirvəzi süni intellekt problemlərinə həsr edilmiş bölməsidir. Əksər müasir idarəetmə sistemləri qərarlar qəbulu xassəsinə-intellektliliyə malikdir. Yəni, müasir idarəetmə sistemlərində qərarlar qəbulu zamanı insanın intellektual fəaliyyəti modelləşdirilir.

9.2. İdarəediləbilən sistemlər

Kibernetikada həll edilən məsələlərin rəngarəngliyinə, modellələrin, yanaşmaların, metodların müxtəlifliyinə baxmayaraq, kibernetika sistemlər nəzəriyyəsi və sistemli təhlil nəzəriyyəsinə əsaslanaraq, ümumi metodologiyadan istifadə nəticəsində vahid elm olaraq qalır.

Sistem - sərhədcə geniş, ilkin, ciddi təyin olunmayan anlayışdır. Fərz edilir ki, sistem struktura malikdir, yəni nisbətən xüsusiləşmiş, bir-biri ilə qarşılıqlı əlaqə və təsirdə olan hissələrdən (elementlərdən) təşkil olunur. Qarşılıqlı təsirin əhəmiyyəti bundan ibarətdir ki, onun sayəsində sistemin elementləri heç bir elementin ayrılıqda malik olmadığı hər hansı funksiyanı, yeni xassəni birlikdə əldə edir.

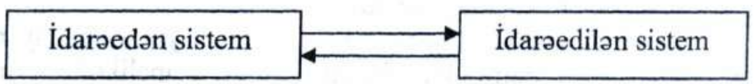
Sistemin şəbəkədən fərqi də elə bundadır. Məsələn, müəssisənin sexləri sistem təşkil edirlər, bütün sexlər birlikdə son məhsul buraxmaq qabiliyyətinə malik olurlar(onların heç birisi isə təklikdə bu məsələnin həlli ilə bacara bilmir). Mağazalar şəbəkəsində isə hər bir mağaza ayrılıqda işləyə bilər.

Kibernetika idarəetmə haqqında elm kimi, ümumiyyətlə, bütün sistemləri deyil, ancaq idarə ediləbilən sistemləri öyrənir. Lakin kibernetikanın maraq və tətbiq dairəsi ən müxtəlif bioloji, iqtisadi, sosial sistemlərdə genişlənir.

İdarəedilənbilən sistemin xarakterik cəhətlərindən biri onun idarəedici təsirlər altında müxtəlif vəziyyətlərə keçməsi imkanıdır. Hər zaman sistemin elə vəziyyətlər çoxluğu mövcud olur ki, onlardan optimal hal hasil edilir.

Ayrı-ayrı kibernetik sistemlərin xarakterik xüsusiyyətlərindən yayınaraq və bir sıra sistemlər üçün onların müxtəlif təsirlər zamanı vəziyyətlərinin dəyişməsini təsvir edən ümumi qanunauyğunluqları ayırd edərək, «abstrakt kibernetik sistem» anlayışına gəlirik. Onun tərkibi konkret predmetlər deyil, geniş obyektlər sinfi üçün müəyyən ümumi xassələrlə xarakterizə olunan abstrakt elementlərdir.

Kibernetik sistemlər idarəediləbilən sistemlər kimi qavranıldığından, onlarda idarəetmə funksiyasını yerinə yetirən mexanizmin olması vacibdir. Çox vaxt bu mexanizm xüsusi olaraq, idarəetmə üçün nəzərdə tutulmuş orqanlar şəklində reallaşdırılır (şəkil 9.1.).



Şəkil 9.1. Kibernetik sistemin idarəedən və idarəedilən hissələrin toplusu şəklində semantik təsviri

Şəkildə oxlarla sistemin hissələrinin qarşılıqlı təsirləri işarə olunub. Sistemin idarəedən hissəsindən idarəedilən hissəsinə yönəldilən oxla idarəetmə siqnalı göstərilib. Sistemin idarəetmə siqnalı hasil olunan idarəedən hissəsi idarəedici qurğu adlanır. İdarəedici qurğu həyacanlandırıcı təsirləri tələb olunan hala çatdırmaq məqsədilə idarəedilən sistemin vəziyyəti haqqında informasiya əsasında idarəetmə siqnalları hasil edir.

İdarəedilən hissədən idarəedən hissəyə gələn oxla idarəedilən hissənin vəziyyəti haqqında informasiya axını göstərilib.

İdarəediçi qurğuya daxil olan informasiyanın idarəetmə siqnalına çevrilməsi üçün emal qaydaları yığımına *idarəetmə alqoritmi* deyilir.

İndi artıq daxil etdiyimiz anlayışlar əsasında «idarəetmə» anlayışına tərif vermək olar:

İdarəetmə - verilən obyektə onun fəaliyyətini və ya inkişaf etməsini yaxşılaşdırmaq üçün mövcud informasiya əsasında mümkün təsirlər çoxluğundan seçilmiş təsirdir.

İdarəetmə sistemlərində idarəetmənin 4 əsas məsələsi həll olunur:

1. Tənzimləmə (stabilləşdirmə).
2. Proqramın yerinə yetirilməsi.
3. İzləmə.
4. Optimallaşdırma.

Tənzimləmə məsələsi sistemin parametrlərinin-idarəedilən kəmiyyətlərin -$\{x\}$ –in ona M həyəcanlarının təsirinə baxmayaraq, bir sıra dəyişməyən qiymətlərinə yaxın ətrafında saxlamaqdan ibarətdir. Burada həyəcanlandırıcı təsirdən müdafiənin passiv üsulundan prinsipial olaraq fərqlənən aktiv müdafiə üsulu başa düşülür.

Aktiv müdafiə idarəedən sistemlərdə həyəcanlandırıcı təsirlərə əks təsir edən idarəedici təsirlərin hasil olunmasına əsaslanır. Məsələn, sistemdə zəruri temperaturun saxlanılması məsələsi idarəedilən qızdırma və ya soyutma vasitəsilə həll oluna bilər.

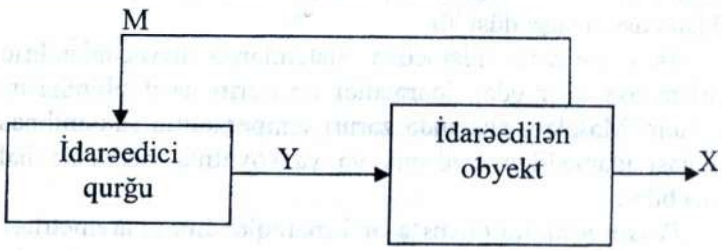
Passiv müdafiə obyektə bizi maraqlandıran parametrlərin xarici həyəcanlardan asılılığının minimum olmasını təmin edən xassələrin verilməsindən ibarətdir. Misal kimi, sistemin verilən temperaturunun saxlanılması üçün istilik qoruyucusunu (izolyasiya), maşın hissələrinin çürüməyə qarşı örtüyünü göstərə bilərik.

Proqramın yerinə yetirilməsi idarəedilən $\{x\}$ kəmiyyətlərinin verilmiş qiymətlərinin məlum tərzdə zamana görə dəyişdiyi hallarda baş verir. Məsələn, istehsalatda işlərin yerinə yetirilməsi əvvəlcədən nəzərdə tutulmuş qrafikə əsasən aparılır.

İzləmə məsələsi - sistemin əvvəlcədən məlum olmayan səbəblərdən dəyişə bilən cari vəziyyətinin idarəedilən bir sıra $X_0(t)$ parametrinin mümkün qədər dəsdəklənməsindən ibarətdir. İzləməyə zərurət, məsələn, tələbatın dəyişməsi şəraitində əmtəələrin istehsalının idarə edilməsi zamanı, meydana çıxır.

Optimallaşdırma məsələsi - idarəedilən obyektin iş rejiminin və ya vəziyyətinin müəyyən mənada yaxşılaşdırılmasından ibarətdir. Buna isə tez-tez rast gəlinir. Məsələn, xammal itkisinin minimumlaşdırılması məqsədilə texnoloji prosesin idarə olunması və s.

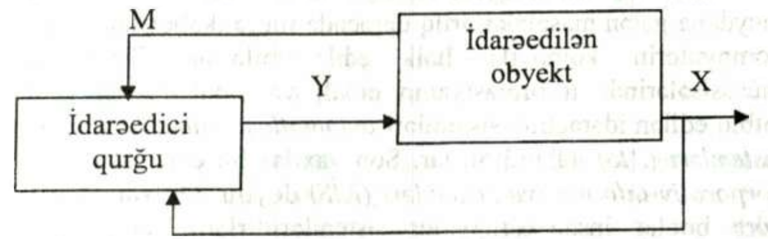
İdarəetmə sistemləri açıq və qapalı olur. İdarəedilən kəmiyyətlərin qiymətlərini idarəetmə prosesində alan, idarəedici təsirlərin formalaşdırılması üçün biliklər haqqında informasiyadan istifadə edilməyən sistemlər *açıq idarəetmə sistemləri* (AİES) adlanır. Belə sistemin strukturu şəkil 9.2-də təsvir olunur.



Şəkil 9.2. Açıq idarəetmə sistemi

AİES-in idarəetmə alqoritmi idarəediçi qurğu vasitəsilə realizə olunur. İdarəediçi qurğu (İQ) M həyəcanını izləyir və idarəedilən X kəmiyyətindən istifadə etmədən bu həyəcanın konpensasiyasını təmin edir.

Tərsinə, *qapalı idarəetmə sistemlərində* (QİES) idarəedici təsirlərin formalaşdırılması üçün idarəedilən kəmiyyətlərin qiymətləri haqqında informasiyadan istifadə olunur. QİES-nin struktur sxemi şəkil 9.3-də təsvir edilir.



Şəkil 9.3. Qapalı idarəetmə sistemi

İdarəedilən obyektin eyni bir elementinin X çıxış və Y giriş parametrləri arasındakı əlaqə *əks əlaqə* adlanır.

Əks əlaqə kibernetikanın əsas anlayışlarından (daha doğrusu, prinsiplərindən) biridir. O, müxtəlif təbiətli idarəedilən sistemlərdə baş verən çoxlu müxtəlif təzahürləri qavramağa kömək edir. Əks əlaqə canlı orqanizmlərdə gedən proseslərin öyrənilməsində, iqtisadi strukturlarda, avtomatik tənzimləmədə və s. geniş tətbiq edilir.

Əgər əks əlaqə sistemin idarəedilən parametrlərinə giriş həyəcanlarının təsirini artırırsa - *müsbət*, azaldırsa - *mənfi* adlanır.

Müsbət əks əlaqə çoxlu texniki qurğularda giriş həyəcanlandırıcı təsirlərin qiymətlərinin artırılması, gücləndirilməsində istifadə olunur. Mənfi əks əlaqə sistemdə xarici həyəcanın təsiri nəticəsində baş verən pozuntunun aradan qaldırılması ilə onun tarazlığının bərpasında istifadə olunur.

9.3. İdarəetmə sistemlərində insanın və kompyuterin funksiyaları

Kibernetik metodların yaxşı öyrənilmiş tətbiq sahəsi texnoloji və istehsal sahələri, o cümlədən, istehsal müəssisənin idarə edilməsidir.

Orta və iri miqyaslı müəssisənin idarə edilməsində meydana gələn məsələlər artıq dərəcədə mürəkkəbdirlər, ancaq kompyuterin köməyilə həll edilə bilərlər. Təsərrüfat müəssisələrində informasiyanın emalı və saxlanılması üçün tətbiq edilən idarəetmə sistemləri *avtomatlaşdırılmış idarəetmə sistemləri (AİS)* adlandırılırlar. Son vaxtlar bu cür sistemlərə *korporativ informasiya sistemləri (KİS)* deyilir. Öz xarakterinə görə bunlar insan-kompyuter sistemləridirlər. Yəni, güclü kompyuterlərin istifadəsiylə yanaşı burada insanın da öz intellekti ilə mövcudluğu nəzərdə tutulur.

İnsan-kompyuter sistemlərində insan və kompyuter arasında aşağıdakı funksiyalar bölgüsü nəzərdə tutulur: kompyuter böyük informasiya massivlərini yadda saxlayır və emal edir, qərar qəbul etmənin informasiya təminatını həyata keçirir; insan idarəedici qərarları verir.

Çox zaman insan-kompyuter sistemlərində kompyuterlər yorucu, böyük əməktutumlu və yaradıcı iş sayılmayan, «qul» işini yerinə yetirirlər. Buna baxmayaraq, idarəetmədə kompyuter texnologiyalarından istifadə etməkdə məqsəd insanı qismən və ya tamamilə yaradıcı fəaliyyət üçün vaxtdan azad edən fəaliyyətin tam avtomatlaşdırılmasıdır.

Bu ancaq insanı həmin fəaliyyətdən azad etməyə cəhdlə deyil, həmçinin də texnika, texnologiyaların inkişafı ilə əlaqədar olaraq, insana xas olan fizioloji və psixoloji məhdudiyyətlərə görə real vaxt miqyasında qərar qəbul edə bilmədiyi qəza törənməsiylə hədələyən amil ilə əlaqədardır.

Məsələn, nüvə reaktorunun, kosmik aparatların işə buraxılması zamanı baş verə biləcək qəzadan müdafiə üçün qurulan sistemlər.

İnsanı əvəz edən sistem müəyyən mənada insana oxşar intellektə - süni intellektə malik olmalıdır.

Süni intellekt sahəsindəki araşdırmaların istiqamətləri də, həmçinin, kibernetikaya aiddir.

FƏSİL 10. KOMPYUTERİN HESABİ ƏSASLARI

10.1. Say sistemləri

10.1.1. Əsas anlayışlar

Say sistemləri riyaziyyatın bölmələrindən biri olan ədədlər nəzəriyyəsində öyrənilir. Bu bölmə kompyuter elminin nəzəri hissəinin əsas təşkiledicilərindəndır. Belə ki, ədədlər kompyuterin yaddaşında ikilik say sistemində təsvir olunurlar.

Say sistemi (və ya nömrələmə) dedikdə hər hansı simvollardan ibarət olan əlifbanın köməyilə istənilən ədədin adlandırılması, deyilməsi, təsviri vasitəsi ilə təqdimatı və onlar üzərində əməllərin icrası qaydaları başa düşülür. Həmin simvollar rəqəmlər də adlandırılır.

Bütün say sistemləri üç sinfə(qrupa) bölünür: *mövqeli, mövqesiz* və *simvollu.*

Qeyd edək ki, bir çox ədəbiyyatda bu təsnifat iki qrup üzrə aparılır: *mövqeli* və *mövqesiz.*

Mövqesiz say sistemlərində hər bir simvol ədədin təsvirindəki yerindən asılı olmadan öz qiymətini saxlayır. Mövqesiz say sistemləri misirlilər, romalılar və yunanlar tərəfindən yaradılmlşdır.

Misal: mövqesiz say sistemi – qədim *Roma sistemində* ədədlərin {I (1), V (5), X (10), L (50), S (100), D (500), M (1000)}əlifbası ilə yazılışı. Burada dairəvi mötərizələrin içərilərində mövqedən asılı olmadan əlifbanın simvollarının çəkiləri, yəni adi onluq ekvivalentləri göstərilib. Məsələn : III (3), IV (4), V (5), VI (6), IX (9), XI (11), DCL (650). Bu say sistemində ədədlərin yazılışı iki yolla – konkatenasiya ilə - aparılır: sağ və sol. Belə ki, simvolların birləşdirilməsi sağ konkatenasiyada əlavə etməklə(məsələn, VI (6) = V (5)+ I (1)), sol konkatenasiyada isə çıxmala aparılır(məsələn, IV (4) = V (5)- I (1)). Ədədlər üzərində hesab əməllərinin aparılmasında ciddi qaydalar olmadığına görə mövqesiz say sistemlərindən kompyuter texnikasında istifadə olunmur.

Simvollu sistemlərdə hər bir ədədə uyğun olaraq, özünün simvolu qarşı qoyulur.

Misirlilər təxminən dörd min il bundan əvvəl ədədlərin yazılışında aşağıdakı heroqliflərdən(simvollardan) istifadə etmişlər:

Simvollar	I	∩	C
Uyğun gəldiyi ədədlər	1	10	100

Qədim yunanlar isə aşağıdakı simvollardan istifadə etmişlər:

Simvollar	Uyğun gəldiyi ədədlər
α	1
β	2
γ	3
δ	4
ε	5
ι	10
χ	20
λ	30
μ	40
ν	50
ρ	100
τ	200
ξ	300
θ	400
η	500

Ədədlərin bu cür simvollar vasitəsi ilə təsviri özündən əvvəlki üsullara nisbətən əlverişli olsa da, ədədlər üzərində əməllərin yerinə yetirilməsi üçün o qədər də səmərəli deyildi.

Simvollu say sistemləri ədədlərin təsviri üçün sonsuz sayda simvol tələbinə görə geniş tətbiq tapmayıb.

Bundan sonra bizim təsnifatdakı sonuncu iki sistemə (mövqesiz və simvollu) daha baxmayacağıq və say sistemi dedikdə ancaq mövqeli say sistemi başa duşacəyik.

Mövqeli say sistemlərinin yaradılması riyaziyyatın inkişafında mühüm mərhələ olmuşdur.

Mövqeli say sistemlərində eyni bir simvol ədədin təsvirindəki yerindən asılı olaraq, muxtəlif qiymətlər alır. Yəni, ədədin təsvirində bir neçə dəfə iştirak edən eyni bir rəqəm tutduğu mövqedən asılı olaraq, hər bir mərtəbəyə uyğun fərqli qiymətlərə malik olur. Başqa tərzdə desək, mövqeli say sistemində ədədi əmələ gətirən eyni simvollar(rəqəmlər) yerindən asılı olaraq müxtəlif ədədi qiymətlərə malik olurlar.

Yunan alimi Arximedin əsərlərində şərh edilən və indi geniş istifadə olunan mövqeli onluq say sistemi eramızın VI əsrində Hindistanda daha da mükəmməlləşdirilmişdir. Hind alimləri bu sistemə sıfırı daxil etmişlər, ərəblər təkmilləşdirmişlər və indiki vəziyyətə gətirmişlər. Odur ki, indi istifadə edilən simvollar, yəni { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 }ərəb rəqəmləri adlanırlar.

Mövqeli say sisteminə aid, insanların gündəlik həyatda ən çox işlətdikləri onluq say sistemindən əlavə, 2-lik, 8-lik, 16-lıq, 60-lıq və s. say sistemlərini qeyd etmək olar. Belə bir fərziyyə söylənilir ki, ilkin olaraq altmışlıq mövqeli say sistemindən, 60 simvolun köməyi ilə nömrələmədən qədim Vavilionda istifadə etmişlər və bu gün də onun qalıqlarından istifadə olunur(məsələn, 1 saat = 60 dəqiqə, 1 dəqiqə = 60 saniyə və s.).

Say sistemində istifadə olunan müxtəlif rəqəmlərin p miqdarı say sisteminin adını təyin edir və *say sisteminin əsası* adlanır.

Onluq say sistemində on rəqəm istifadə olunur: {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}; bu sistemin əsası 10 ədədidir(p=10).

İstənilən say sistemində p əsaslı N ədədi aşağıdakı çoxhədli şəklində göstərilə bilər:

$$N = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 p^0 + a_{-1} p^{-1} + \\ + a_{-1} p^{-2} + ... + a_{-m} p^{-m} \qquad (10.1)$$

burada N - ədəd,

a_j - ədədin rəqəmləri(əmsallar),

p - say sisteminin əsasıdır ($p>1$).

Ədədləri rəqəmlər ardıcıllığı kimi təsvir etmək qəbul edilmişdir:

$$N = a_n a_{n-1} ... a_1 a_0 \,.\, a_{-1} a_{-2} ... , \qquad (10.2)$$

Bu ardıcıllıqda tək nöqtə (".") ədədin tam və kəsr hissələrini bir-birindən ayırır. Kəsr hissə olmadıqda, yəni ədəd tam olduqda, həmin nöqtə işarəsi buraxılır.

Kompyuterdə, məlum olduğu kimi, onluq deyil, ikilik, səkkizlik, onaltılıq say sistemi tətbiq edilir.

Kompyuterin aparat hissəsinin əsasını ancaq iki vəziyyətdə ola bilən(onlardan biri "0", digəri isə "1" ilə işarə olunur) ikimövqeli elementlər təşkil etdiyindən, kompyuterdə, əsasən, ikilik say sistemi istifadə edilir.

İkilik say sisteminin əlifbası {0, 1} çoxluğudur.

2-lik say sistemində istənilən ədəd aşağıdakı kimi təsvir edilə bılər:

$$N = b_n b_{n-1} ... b_1 b_0 \,.\, b_{-1} b_{-2} ...$$

burada b_j ya "0", ya da "1" -dir.

Səkkizlik say sisteminin əlifbası {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} çoxluğudur. Bu sistem informasiyanım qısaldılmış şəkildə təsviri üçün istifadə olunur. Aydındır ki, burada (10.2) şəklində ədədin təsvirindəki a_i simvolları 8-lik say sisteminin əlifbasından olacaqdır.

Onaltılıq say sistęminin əlifbası {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F} çoxluğudur. Bu da, səkkizlik say sistemi kimi, informasiyanım qısaldılmış şəkildə təsviri üçün istifadə

edilir. Əlbəttə, burada (10.2) şəklində ədədin təsvirindəki a_i simvolları 16-lıq say sisteminin əlifbasından olacaq.

Qeyd edək ki, bəzi ədəbiyyatlarda A, B, C, D, E, F simvollarının əvəzinə uyğun olaraq $\bar{0}$, $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$ simvollarından istifadə edirlər.

2-lik, 8-lik, 16-lıq, 10-luq say sistemləri arasında əlaqə cədvəl 10.1-də verilmişdir.

Cədvəl 10.1

2-lik, 8-lik, 16-lıq, 10-luq say sistemləri arasında əlaqə

Say sistemləri					
2-lik	8-lik		10-luq	16-lıq	
simvollar	simvollar	triadalar	simvollar	simvollar	tetradalar
0	0	000	0	0	0000
1	1	001	1	1	0001
	2	010	2	2	0010
	3	011	3	3	0011
	4	100	4	4	0100
	5	101	5	5	0101
	6	110	6	6	0110
	7	111	7	7	0111
			8	8	1000
			9	9	1001
				A	1010
				B	1011
				C	1100
				D	1101
				E	1110
				F	1111

10.1.2. Ədədlərin bir say sistemindən digərinə çevrilməsi

İndi isə ədədlərin bir say sistemindən digərinə çevrilməsi qaydalarına baxaq.

Ədədlərin onluq say sisteminə çevirilməsi qaydası. Ədədləri onluq say sisteminə çevirmək üçün (10.1) qüvvət sırası verilən say sisteminin əsasına nəzərən tərtib olunur, sonra isə qurulmuş həmin çoxhədlinin cəmi hesablanılır.

Yəni, (10.1) yazılışı vasitəsi ilə istənilən say sistemində verilmiş ədəd açıq şəkildə onluq say sistemində təsvir edilir, sonra isə alınan cəm hesablanır.

Ədədləri bir-birlərindən fərqləndirmək məqsədi ilə bundan sonra aşağı indekslərdə onların təsvir olunduqları say sistemlərinin əsaslarını göstərəcəyik.

Misal 10.1. Aşağıdakı ədədləri onluq say sisteminə çevirməlı:

a) 10101101.101_2 ;

b) 703.04_8 ;

c) $B2E.4_{16}$.

Həlli:

a) $10101101.101_2 = 1*2^7+0*2^6+1*2^5+0*2^4+1*2^3+$
$+1*2^2+0*2^1+1*2^0+1*2^{-1}+0*2^{-2}+1*2^{-3} = 173.625_{10}$;

b) $703.04_8 = 7*8^2+0*8^1+3*8^0+0*8^{-1}+4*8^{-2}$
$= \; = 451.0625_{10}$;

c) $B2E.4_{16} = 11*16^2+2*16^1+14*16^0+4*16^{-1} = 2862.25_{10}$

Tam onluq ədədlərin onluq olmayan say sisteminə çevirilməsi qaydası. Tam onluq ədədlərin onluq olmayan say sisteminə çevirilməsi verilmiş ədədin ardıcıl olaraq, qalıqda ədədin keçiriləcəyi say sisteminin əsasından kiçik ədəd alınana qədər həmin əsası göstərən ədədə bölünməsi yolu ilə aparılır. Yeni say sistemində ədəd axırıncı bölmədən alınan qismət və sonuncudan başlayaraq, bütün qalıqların ardıcıl düzülüşü vasitəsi ilə təsvir edilir.

Misal 10.2. Aşağıdakı onluq ədədlərin müvafiq ekvivalentlərini tapmalı:

a) 181_{10} ədədini 8-lik say sisteminə çevirməlı;

b) 622_{10} ədədini 16-lıq say sisteminə çevirməlı;

c) 1211_{10} ədədini 8-lik say sisteminə çevirməlı.

Həlli:

a)

```
_181 | 8
 176 | 22   | 8
   5 _16    | 2
       6
```

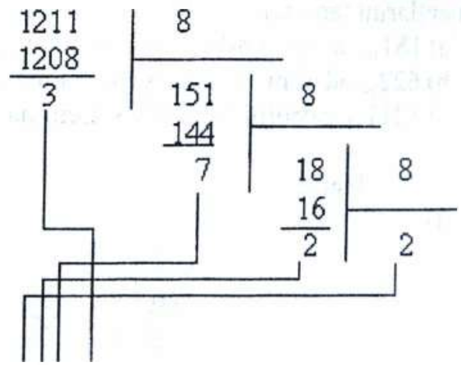
Nəticə belədir: $181_{10} = 265_8$

b)

```
_622 | 16
  48 | 38 | 16
 _142  _32 | 2
  128    6
   14
```

Nəticə: $622_{10} = 26E_{16}$

c)



$1211_{10} = 2\,2\,7\,3_8$

Düzgün onluq kəsrlərin onluq olmayan say sisteminə çevrilməsi qaydası. Düzgün onluq kəsri onluq olmayan say sisteminə çevirmək üçün həmin kəsri ardıcıl olaraq, ədədin keçiriləcəyi say sisteminin əsasına vurmaq lazımdır. Bu zaman ancaq kəsr hissələr vurulur. Yeni say sistemində ədəd birincidən başlayaraq bütün vurmalardan alınan hasillərin tam hissələrinin ardıcıl düzülüşü vasitəsi ilə təsvir edilir.

Dəqiq çevirmə hasilin tam hissəsində sıfırlar alındıqda mümkündür.

Misal 10.3. 0.3125_{10} ədədini 8-lik say sisteminə çevirməlı.

Həlli:

0	3125 × 8
2	5000 × 8
4	0000

Nəticə belədir: $0.3125_{10} = 0.24_8$

Qeyd. Düzgün onluq kəsrə onluq olmayan say sistemində sonsuz (bəzən dövrü) kəsr uyğun gələ bilər. Belə halda yeni say sistemində təsvir zamanı simvolların sayı

verilmiş dəqiqliyə əsasən təyin edilir və yaxud da (yəni, dəqiqlik verilmədikdə) tam hissədə ilk qiymətli rəqəmə qədər götürülür.

Misal 10.4. 0.65_{10} ədədini 6 simvol dəqiqliyi ilə 2-lik say sisteminə çevirməlı.

Həlli:

0	65× 2
1	3 × 2
0	6 × 2
1	2 × 2
0	4 × 2
0	8 × 2
1	6 × 2

. . .

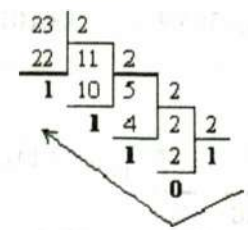
Nəticə belə olacaq: $0.65_{10} \approx 0.101001_2$

Düzgün olmayan onluq kəsr ədədlərin onluq olmayan say sisteminə çevirilməsi qaydası. Düzgün olmayan onluq kəsri (yəni, qarışıq kəsri)onluq olmayan say sisteminə çevirmək üçün həmin ədədin tam və kəsr(düzgün) hissələrini ayrı-ayrılıqda yuxarıda şərh etdiyimiz müvafiq qaydalara əsasən çevirib, nəticələri onluq nöqtə ilə birləşdirmək lazımdır.

Misal 10.5. 23.125_{10} ədədini 2-lik say sisteminə çevirməlı.

Həlli:

Tam hissənin çevrilməsi:



Kəsr hissənin çevrilməsi:

$$\begin{array}{c|l} \mathbf{0} & 125 \times 2 \\ \hline \mathbf{0} & 25 \ \ \times 2 \\ \mathbf{0} & 5 \ \ \ \ \times 2 \\ \mathbf{1} & 0 \end{array}$$

Beləliklə, alırıq: $23_{10} = 10111_2$; $0.125_{10} = 0.001_2$.

Nəticə: $23.125_{10} = 10111.001_2$.

Qeyd etmək lazımdır ki, istənilən say sistemində tam ədədlər tam kimi, düzgün olmayan kəsrlər isə kəsr kimi qalırlar.

Səkkizlik və onaltılıq ədədlərin ikilik say sisteminə çevirilməsi qaydası. Səkkizlik və onaltılıq ədədləri ikilik say sisteminə çevirmək üçün verilmiş ədədin hər bir rəqəmini uyğun üçtərtibli ikilik ədədlə(triada ilə) və ya dördtərtibli ikilik ədədlə(tetrada ilə) (bax cədvəl 10.1) əvəz etmək kifayətdir; bu zaman böyük və kiçik tərtiblərdəki sıfırlar atılır.

Misal 10.6. Aşağıdakı ədədləri 2-lik say sisteminə çevirməlı.

a) 305.4_8 ; b) $7B2.E_{16}$.

Həlli:

a)

$$\underbrace{3}_{011}\ \underbrace{0}_{000}\ \underbrace{5}_{101}\ .\ \underbrace{4}_{100}\,{}_8 = 11000101.1_2$$

Nəticədə alırıq: $305.4_8 = 11000101.1_2$

b)

$$\underbrace{7}_{0111}\ \underbrace{B}_{1011}\ \underbrace{2}_{0010}\ .\ \underbrace{E}_{1110}\,{}_{16} = 11110110010.111_2$$

Nəticədə alınır: $7B2.E_{16} = 11110110010.111_2$

İkilik say sistemindən 8-lik (16-lıq) say sisteminə çevirmə qaydası. İkilik say sistemində verilmiş ədədi 8-lik (16-lıq) say sisteminə çevirmək üçün onluq nöqtədən başlayıb ikilik ədədi üç-üç (dörd-dörd) tərtibli qruplara bölürük; bu zaman zərurət olduqda sağ və sol kənar qruplara lazımi sayda sıfırlar əlavə edirik(tam hissənin önünə, kəsr hissənin isə - sonuna); sonra triadanı (tetradanı) uyğun 8-lik (16-lıq) simvolla əvəzləyirik.

Misal 10.7. Aşağıdakı ikilik ədədlərin müvafiq ekvivalentlərini tapmalı:

a) 1101111001.1101_2 ədədini 8-lik say sisteminə çevirməli;

b) 11111111011.100111_2 ədədini 16-lıq say sisteminə çevirməli.

Həlli:

a)

$$\underbrace{001}_{1}\underbrace{101}_{5}\underbrace{111}_{7}\underbrace{001}_{1}.\underbrace{110}_{6}\underbrace{100}_{4} = 1571.64_8$$

Nəticədə alırıq: $1101111001.1101_2 = 1571.64_8$

b)

$$\underbrace{0111}_{7}\underbrace{1111}_{F}\underbrace{1011}_{B}.\underbrace{1001}_{9}\underbrace{1100}_{C} = 7FB.9C_{16}$$

Nəticə belə olacaq: $11111111011.100111_2 = 7FB.9C_{16}$

Misal 10.7. 1001101_2 ədədini 16-lıq və 8-lik say sisteminə çevirməlı.

Həlli:

$$'0100'1101_2 = 4D_{16}$$

4 D

$$001'\,001'101_2 = 115_8$$

1 1 5

Deməli, $1001101_2 = 115_8$ və $1001101_2 = 4D_{16}$.

8-likdən 16-lıq say sisteminə və tərsinə - onaltılıqdan 8-lik say sisteminə çevirmə qaydası. Ədədi 8-likdən 16-lıq say sisteminə və tərsinə - onaltılıqdan 8-lik say sisteminə çevirmə triada və tetradaların köməyilə ikilik sistem vasitəsi ilə həyata çevrilir. Yəni, əvvəlcə ədəd 2-lik, sonra isə ikilikdən digərinə keçirilir.

Misal 10.8. 175.24_8 ədədini 16-lıq say sisteminə çevirməli.

Həlli:

$$\underbrace{1}_{001}\,\underbrace{7}_{111}\,\underbrace{5}_{101}\,.\,\underbrace{2}_{010}\,\underbrace{4}_{100}\,{}_8 = 1111101.0101_2 = \underbrace{0111}_{7}\,\underbrace{1101}_{D}\,.\,\underbrace{0101}_{5}\,{}_2 = 7D.5_{16}$$

Deməli: $175.24_8 = 7D.5_{16}$.

10.1.3. İkilik hesablama sistemi

İkilik ədədlər üzərində hesab əməlləri toplama, çıxma vurma və bölmə cədvəlləri vasitəsi ilə (cədvəl 10.2) təyin edilir.

Cədvəl 10.2

İkilik ədədlər üzərində hesab əməlləri

İkilik toplama cədvəli	İkilik çıxma cədvəli	İkilik vurma cədvəli	İkilik bölmə cədvəli
0+0=0	0-0=0	$0\times0=0$	0:0=0
0+1=1	1-0=1	$0\times1=0$	0:1=0
1+0=1	1-1=0	$1\times0=0$	1:1=1
1+1=10	10-1=1	$1\times1=1$	1:0=(?)

Sual işarəsi ("?") əməlin təyin olunmadığını bildirir.

Misal 10.9. Aşağıda verilmiş ikilik X , Y ədədlərinə əsasən X+Y–i hesablamalı: X=1101, Y=101.

Həlli:

```
 1101
+
  101
-----------
10010
```

Nəticə belədir: 1101+101=10010.

Misal 10.10. Verilmiş X=1101, Y=101 və Z=111 ikilik ədədlərinin cəmini tapmalı.

Həlli:

```
 1101
+
  101
+
  111
----------
11001
```

Nəticədə alırıq: 1101+101+111=11001.

Çıxma əməlinin icrası zamanı lazım olduqda yuxarı mərtəbədən 1 götürülür. Həmin 1 baxılan mərtəbədə iki dənə 1-ə (yəni 10-a) bərabərdir.

Misal 10.11. Verilmiş X=10010 və Y=101 ikilik ədədlərinin fərqini tapmalı.

Həlli:

$$\begin{array}{r} 10010 \\ -101 \\ \hline 01101 \end{array}$$

Nəticədə 10010 - 101=1101 alınır.

Misal 10.12. $1001_2 \times 101_2 = ?$

Həlli:

$$\begin{array}{r} \times \begin{array}{r} 1001 \\ 101 \end{array} \\ \hline 1001 \\ 1001 \\ \hline 101101 \end{array}$$

Nəticə belə olur: $1001 \times 101 = 101101$.

Misal 10.13. $1100.011_2 : 10.01_2 = ?$

Həlli:

$$\begin{array}{l|l} -110001.1 & 1001 \\ \cline{2-2} \underline{1001} & 101.1 \\ \quad -1101 & \\ \quad \underline{1001} & \\ \qquad -1001 & \\ \qquad \underline{1001} & \\ \qquad\quad 0 & \end{array}$$

Nəticədə 1100.011 : 10.01=101.1 alınır.

10.1.4. Səkkizlik hesablama sistemi

Səkkizlik ədədlər üzərində hesab əməlləri - toplama, çıxma və vurma - cədvəl 10.3 vasitəsi ilə təyin edilir.

Cədvəl 10.3

Səkkizlik ədədlər üzərində hesab əməlləri

	0			1			2			3		
	+	-	×	+	-	×	+	-	×	+	-	×
0	0	0	0	1		0	2		0	3		0
1	1	1	0	2	0	1	3		2	4		3
2	2	2	0	3	1	2	4	0	4	5		6
3	3	3	0	4	2	3	5	1	6	6	0	11
4	4	4	0	5	3	4	6	2	10	7	1	14
5	5	5	0	6	4	5	7	3	12	10	2	17
6	6	6	0	7	5	6	10	4	14	11	3	22
7	7	7	0	10	6	7	11	5	16	12	4	25

Cədvəl 10.3 -ün davamı

	4			5			6			7		
	+	-	×	+	-	×	+	-	×	+	-	×
0	4		0	5		0	6		0	7		0
1	5		4	6		5	7		6	10		7
2	6		10	7		12	10		14	11		16
3	7		14	10		17	11		22	12		25
4	10	0	20	11		24	12		30	13		34
5	11	1	24	12		31	13		36	14		43
6	12	2	30	13	1	36	14	0	44	15		52
7	13	3	34	14	2	43	15	1	52	16	0	61

Cədvəl 10.3-dəki rənglə doldurulmuş boş xanalar uyğun çıxma əməlinin təyin olunmadığını bildirir. Praktikada belə olan halda çıxma əməli onluq say sistemində olduğu kimi yerinə yetirilir, yəni qonşu böyük mərtəbədən vahid götürülür.

Əgər ədədin verilən bu tərtibinə nəzərən heç bir böyük mərtəbəsi yoxdursa, onda nəticə mənfi alınır.

Misal 10.14.

a) 234.15+101.73=336.1

Həlli:

$$\begin{array}{r} 234.15 \\ + \\ \underline{101.73} \\ 336.10 \end{array}$$

b) 351.7-23.1=326.6

Həlli:

$$\begin{array}{r} 351.7 \\ - \\ \underline{23.1} \\ 326.6 \end{array}$$

c) 127.12×32.5=4420.422

Həlli:

$$\begin{array}{r} 127.12 \\ \times \\ \underline{32.5} \\ 66362 \\ 25624 \\ 40536 \\ \text{------------} \\ 4420.422 \end{array}$$

Misal 10.15. Səkkizlik və onluq təsvirləri ekvivalent olan ədədlər üzərində (müqayisəli təhlil aparın) aşağıdakı əməlləri yerinə yetirək.

a) cəmin tapılması:

1) $47_8 + 60_8 = 127_8$; 2) $12.8_8 + 7.5_8 = 22.1_8$;

$39_{10} + 48_{10} = 87_{10}$. $10.5_{10} + 7.625_{10} = 1.125_{10}$.

b) fərqin tapılması:

1) $60_8 - 47_8 = 11_8$; 2) $12.4_8 - 7.5_8 = 2.7_8$;

$48_{10} - 39_{10} = 9_{10}$. $10.5_{10} - 7.625_{10} = 2.875_{10}$;

c) hasilin tapılması:

1) $14_8 \times 13_8 = 204_8$; 2) $12.4_8 \times 7.5_8 = 120.04_8$;

$12_{10} \times 11_{10} = 132_{10}$ $12.4_8 \times 7.5_8 = 80.0625_{10}$.

d) qismətin tapılması:

1) $120.04_8 : 12.4_8 = 7.5_8$; 2) $204_8 : 14_8 = 13_8$;

$80.0625_{10} : 10.5_{10} = 7.625_{10}$. $132_{10} : 12_{10} = 11_{10}$.

10.1.5. Onaltılıq hesablama sistemi

Onaltılıq ədədlər üzərində hesab əməlləri – toplama, vurma – cədvəl 10.4 və cədvəl 10.5 vasitəsi ilə təyin edilir.

Qeyd edək ki, çıxma və bölmə əməlləri toplama və vurma əməllərinə uyğun tərs əməl kimi aparılır.

Cədvəl 10.4

Onaltılıq ədədlər üzərində toplama əməli

TOPLAMA(+)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	5	6	7	8	9
3	3	4	5	6	7	8	9	A
4	4	5	6	7	8	9	A	B
5	5	6	7	8	9	A	B	C
6	6	7	8	9	A	B	C	D
7	7	8	9	A	B	C	D	E
8	8	9	A	B	C	D	E	F
9	9	A	B	C	D	E	F	10
A	A	B	C	D	E	F	10	11
B	B	C	D	E	F	10	11	12
C	C	D	E	F	10	11	12	13
D	D	E	F	10	11	12	13	14
E	E	F	10	11	12	13	14	15
F	F	10	11	12	13	14	15	16

Cədvəl 10.4 –ün davamı

TOPLAMA(+)	8	9	A	B	C	D	E	F
0	8	9	A	B	C	D	E	F
1	9	A	B	C	D	E	F	10
2	A	B	C	D	E	F	10	11
3	B	C	D	E	F	10	11	12
4	C	D	E	F	10	11	12	13
5	D	E	F	10	11	12	13	14
6	E	F	10	11	12	13	14	15
7	F	10	11	12	13	14	15	16
8	10	11	12	13	14	15	16	17
9	11	12	13	14	15	16	17	18
A	12	13	14	15	16	17	18	19
B	13	14	15	16	17	18	19	1A
C	14	15	16	17	18	19	1A	1B
D	15	16	17	18	19	1A	1B	1C
E	16	17	18	19	1A	1B	1C	1D
F	17	18	19	1A	1B	1C	1D	1E

Məsələn, E-A = 4 belə hesablanılır: cədvəl 10.4-ün A (çıxılan) sətrində E azalanı tapılır və cədvəlin birinci sətrindən 4 (fərq) müəyyənləşdirilir. Belə ki, əməllər həmişə bir qayda olaraq, birinci sətirlə 1-ci sütunda yerləşən operandlar üzərində aparılır.

Misal 10.16.

a) 0.F47 + 0.D98 = 1.CDF

Həlli:

```
  0.F47
+
  0.D98
  -----
  1.CDF
```

b) 0.F72 – 63 = -62.08E

Həlli:

```
    63
-
 0.F72
 -----
62.08E
```

c) 0.02 × A.7 = 0.14E

Cədvəl 10.5

Onaltılıq ədədlər üzərində vurma əməli

VURMA(×)	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	8	A	E	10
3	0	3	6	9	C	F	12	15
4	0	4	8	C	10	14	18	1C
5	0	5	A	F	14	19	1E	23
6	0	6	C	12	18	1E	24	2A
7	0	7	E	15	1C	23	2A	31
8	0	8	10	18	20	28	30	38
9	0	9	12	1B	24	2D	36	3F
A	0	A	14	1E	28	32	3C	46
B	0	B	16	21	2C	37	42	4D
C	0	C	18	24	30	3C	48	54
D	0	D	1A	27	34	41	4E	5B
E	0	E	1C	2A	38	46	54	62
F	0	F	1E	2D	3C	4B	5A	69

Cədvəl 10.5 -ün davamı

VURMA(×)	8	9	A	B	C	D	E	F
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	8	9	A	B	C	D	E	F
2	10	12	14	16	18	1A	1C	1E
3	18	1B	1E	21	24	27	2A	2D
4	20	24	28	2C	30	34	38	3C
5	28	2D	32	27	3C	41	46	4B
6	30	36	3C	42	48	4E	54	5A
7	38	3F	46	43	54	5B	62	69
8	40	48	50	58	60	68	70	78
9	48	51	5A	63	6C	75	7E	87
A	50	5A	64	6E	78	82	8C	96
B	58	63	6E	79	84	8F	9A	A5
C	60	62	78	84	90	9C	A8	B5
D	68	75	82	8F	9C	A9	B6	C3
E	70	7E	8C	9A	A8	B6	C4	D2
F	78	87	96	A5	B4	C3	D2	E1

Misal 10.17. Onaltılıq və onluq təsvirləri ekvivalent olan ədədlər üzərində (müqayisəli təhlil aparın) aşağıdakı əməlləri yerinə yetirək.

a) cəmin tapılması:

1) $12_{16} + 18_{16} = 2A_{16}$; $18_{10} + 24_{10} = 42_{10}$.

2) $A3.E_{16} + 5B.D_{16} = FF.B_{16}$; $163.875_{10} + 91.8125_{10} = 1.125_{10}$.

b) fərqin tapılması:

1) $1E0_{16} - 186_{16} = 5A_{16}$; $480_{10} - 390_{10} = 90_{10}$.

2) $A3.E_{16} - 5B.D_{16} = 48.1_{16}$; $163.875_{10} - 7.625_{10} = 2.875_{10}$;

c) hasilin tapılması:

1) $17_{16} \times 12_{16} = 19E_{16}$; $23_{10} \times 18_{10} = 314_{10}$

2) $12.4_8 \times 7.5_8 = 120.04_8$; $80.0625_{10} \times 2.25_{10} = 181.40625_{10}$.

d) qismətin tapılması:

1) $19E_{16} : 17_{16} = 12_{16}$; $314_{10} : 23_{10} = 12_{10}$.

2) $B5.68_{16} : 2.4_{16} = 5.A_{16}$; $181.40625_{10} : 2.25_{10} = 80.625_{10}$.

10.1.6. Müxtəlif say sistemlərində verilmiş ədədlər üzərində hesab əməlləri

Müxtəlif say sistemlərində verilmiş ədədlər üzərində hesab əməllərini yerinə yetirmək üçün əvvəlcə onları eyni say sistemində yazmaq, sonra isə tələb olunan əməliyyatları müvafiq qaydaları tətbiq etməklə həyata keçirmək gərəkdir.

Məsələn, $123_8 + A5_{16}$ cəmini hesablayaq.

İki hala baxaq.

1-ci üsul: $A5_{16}$ ədədini 8-lik say sistemində yazaq:

$A5_{16} = A*16^1 + 5*16^0 = 16*10 + 5*1 = 165_{10} = 245_8$

Bu sonuncu münasibətə əsasən, alarıq:

$123_8 + A5_{16} = 123_8 + 245_8 = 370_8$.

2-ci üsul: 123_8 dədini 16-lıq say sisteminə çevirək:

$123_8 = 1*8^2 + 2*8^1 + 3*8^0 = 64+16+3 = 83_{10} = 53_{16}$

Sonuncu münasibətə əsasən, yaza bilərik:

$123_8 + A5_{16} = 53_{16} + A5_{16} = F8_{16}$,

$F8_{16} = 370_8$.

Doğrudan da

$370_8 = 3*8^2 + 7*8^1 + 0*8^0 = 3*64 + 7*8 + 0*1 =$

$= 192 + 56 + 0 = 248_{16}$,

$F8_{16} = F*16^1 + 6*16^0 = 15*16 + 6*1 = 240+8 = 248_{16}$

münasibətləri ödənilir.

Sonda qeyd edək ki, çox vaxt 8-lik və 16-lıq say sistemlərindəki ədədlər üzərində əməlləri onları ikilik hesablama sisteminə çevirərək, aparırlar. Sonra isə yenidən əvvəlki sistemə qayıdırlar.

10.2. Verilənlərin təsvir formaları

Kompyuterdə emal olunan verilənlərin əsas tipləri aşağıdakılardır:

- tam ədədlər;
- sabit nöqtəli (vergüllü) ədədlər;

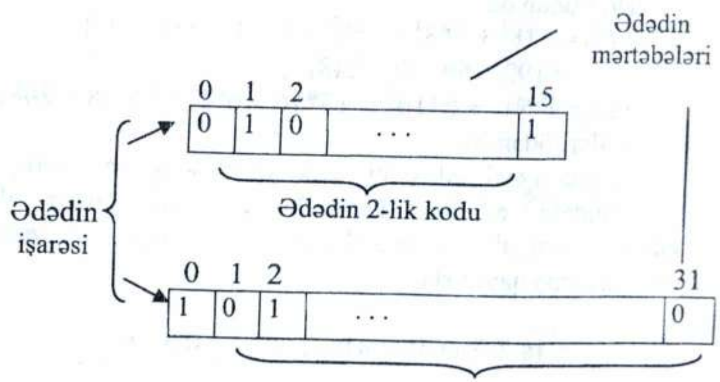
- sürüşən nöqtəli ədədlər;
- simvol tipli verilənlər;
- məntiqi verilənlər.

Qeyd edək ki, keçmiş SSRİ məkanında ədədin tam hissəsini kəsr hissədən ayıran işarə kimi vergüldən istifadə olunurdu, xaricdə isə onun yerinə nöqtə işarəsindən istifadə olunur. İnformatikada da həmin məqsədlə nöqtə işarəsi işlədilir.

Tam tip – müsbət və ya mənfi işarəli nöqtəsiz ədəddir. Ədədin işarəsi mərtəbə şəbəkəsinin soldan 0-cı (nömrələnmə sıfırdan başlanır) mərtəbəsində yazılır: müsbət işarəsi "0", mənfi işarəsi isə "1" kimi təsvir olunur. Qalan mərtəbələrdə tam ədədin ikilik kodu yazılır (16 mərtəbəli kompyuterlərdə 15 mərtəbə, 32 mərtəbəli kompyuterlərdə 31 mərtəbə) (şəkil 10.1).

16 və 32 mərtəbəli kompyuterlərdə təsvir oluna bilən tam ədədlərin diapazonu belə təyin olunur:

16 mərtəbəli kompyuterlərdə: - 32768-dən+32767-yə,
32 mərtəbəli kompyuterlərdə:
- 2147483648-dən+2147483647-yə qədər.



Şəkil 10.1. *Tam və sabit nöqtəli ədələrin kompyuterdə təsviri*

Sabit nöqtəli ədədlərdə tam hissəni kəsr hissədən ayıran nöqtənin yeri əvvəlcədən (kompyuter layihə olunarkən) birdəfəlik qeyd olunur və məsələlərin həll prosesində dəyişilmir. Tam ədədlərdə olduğu kimi, ədədin işarəsi mərtəbə şəbəkəsinin soldan 1-ci mərtəbəsində yazılır (müsbət – "0", mənfi – "1"). Kompyuterin quruluşunu və əməliyyatların icra vaxtını azaltmaq məqsədilə sabit nöqtəli formada yalnız 1-dən kiçik ədədlər təsvir olunur, yəni nöqtənin yeri ədədin işarəsindən bilavasitə sonra qeyd olunur və nöqtə işarəsi aşkar şəkildə yaddaşda yazılmır. Odur ki, 2-lik say sistemində istifadə olunan sabit nöqtəli ədədlərin təsviri tam ədədlərin təsvirinə uyğundur (şəkil 10.1.).

Göstərilən üstünlüklərinə baxmayaraq, sabit nöqtəli forma ilə işləyərkən hesablama prosesi zamanı verilənlərin, aralıq və son nəticələrin qəbul olunmuş diapazondan kənara çıxmaması tələb olunur. Əks halda mərtəbə şəbəkəsinin dolub daşması baş verir, bu isə səhv nəticələrə səbəb olur. Bu çatışmazlıqlardan azad olmaq üçün ədədlərin sürüşən nöqtəli formasından istifadə olunur.

Sürüşən nöqtəli formada ədəd belə təsvir olunur:

$$x=mq^p ,$$

burada m - ədədin mantissası,
q – say sisteminin əsası,
p – tərtibdir.

İstənilən həqiqi ədədi sürüşən nöqtəli formada təsvir etmək olar.

Misal 10.18. 12.5 ədədini sürüşən nöqtəli formada təsvir etməli.

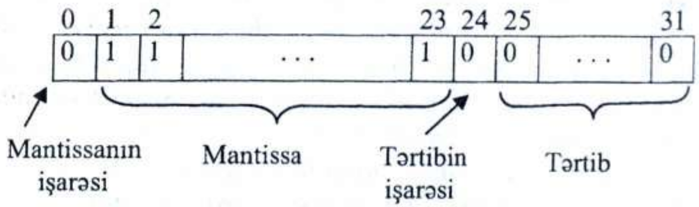
$$12.5=12.5x10^0=1.25\ x10^1=0.125\ x\ 10^2$$

Göründüyü kimi, mantissada nöqtənin yerini sürüşdürməklə eyni ədədi müxtəlif cür yazmaq olar. Bu zaman nöqtənin yerinə uyğun tərtibin qiyməti dəyişir.

Kompyuterdə sürüşən nöqtəli ədədin birmənalı təsvirini almaq üçün ədədin normallaşdırılmış formasından istifadə olunur. Normallaşdırılmış ədəddə mantissa bu şərti ödəməlidir:

$$q^{-1} \le |m| < 1 \qquad (10.3)$$

Yəni nöqtənin yeri ədədin qiymətli (sıfırdan fərqli) rəqəmindən əvvəl qeyd edilir. 10.18-ci misalda verilən 12.5 ədədinin normallaşdırılmış forması $0.125x10^2$-dir. Şəkil 10.2.-də sürüşən nöqtəli ədədlərin kompyuterdə təsvir sxemi göstərilmişdir.



Şəkil 10.2. Sürüşən nöqtəli ədədlərin kompyuterdə təsviri

Şəkildən göründüyü kimi, 32 mərtəbəli kompyuterlərdə mantissa üçün 24 mərtəbə (3 bayt), tərtib üçün 8 mərtəbə (1 bayt) ayrılır. Mantissanın işarəsi 0-cı, tərtibin işarəsi isə 24-cü mərtəbədə yazılır (müsbət – "0", mənfi – "1"). Tərtibin qiyməti üçün ayrılan 7 mərtəbədə [-127,+127] diapazonunda onluq ədəd yazıla bilər ki, bu da istənilən qədər kiçik və böyük ədədlərin təsviri üçün tam kifayət edir.

Simvol tipli verilənlərin təsviri. Müasir kompyuterlər yalnız rəqəm tipli informasiyanı deyil, həmçinin hərflərdən, rəqəmlərdən və digər istənilən işarədən ibarət olan simvol tipli informasiyanı da emal edir. Kompyuterdə həll olunan iqtisadi, plan, uçot-hesabat, informasiya-məntiqi, idarəetmə və modelləşdirmə məsələləri simvol tipli verilənlərlə xarakterizə olunurlar. Bu tip informasiyanın kompyuterdə təsviri üçün dəyişən uzunluqlu sözlər tələb olunur. Simvol tipli informasiyanın kompyuterə daxil edilməsi, emalı və xaric edilməsi hesablama nəticələrinin cədvəl, mətn, qrafik şəklində alınmasına, lazımi başlıqlar, izahatlar verilməsinə imkan yaradır.

Kiçik, orta və böyük kompyuterlərdə (meynfreymlərdə) simvol verilənlərin təsviri üçün beynəlxalq miqyasda qəbul olunmuş EBCDIC (Extended Binary Coded Decimal Interchange Code–informasiya mübadiləsi üçün genişləndirilmiş ikilik kodlaşdırılmış kod) və onun rus hərfləri ilə genişləndirilməsindən ibarət olan DKOI (ДКОИ - Двоичный Код для Обмена Информацией) kodundan istifadə olunur. Mikroprosessor sistemlərində və fərdi kompyuterlərdə simvol verilənlərin təsviri üçün ASCII (American Standart Code for Information Interchange – İnformasiya Mübadiləsi üçün Amerika Standart Kodu) kodundan istifadə olunur. Beynəlxalq miqyasda qəbul olunan bu kod milli hərfləri daxil etməklə genişləndirilir.

ASCII kodunun əsas və genişləndirilmiş variantları cədvəl 10.6 və 10.7-də göstərilmişdir.

Bu kodların hamısında hər bir simvol 8 mərtəbəli (1 bayt) ikilik kodla təsvir olunur. Beləliklə, bu kodlar vasitəsilə 256-ya qədər müxtəlif işarələri kodlaşdırmaq olar. Bu isə latin əlifbasından başqa bir neçə digər əlifbanı kodlaşdırmağa imkan verir.

ASCII kodu dünya miqyasında milli əlifbaların hamısının kompyuterdə təsvirinə imkan vermir. Odur ki, 2000-ci ildən başlayaraq simvol tipli verilənlərin təsviri üçün «Unicode» (universal kod) adlanan standart koddan istifadə edilir. Bu kodda hər bir simvol üçün 2 bayt ayrılır ki, bu da 65536 sayda müxtəlif simvolları təsvir etməyə imkan verir.

Məntiqi verilənlərin təsviri. Məntiqi verilənlər yalnız iki qiymətdən ("yalan" və "doğru") ibarət olduğundan, onların kompyuterdə təsviri xeyli asanlaşır. Kompyuterin daxili kodu ikilik say sistemi olduğundan, məntiqi verilənlərin təsviri belə sadə üsulla aparılır:

"Yalan" $\longrightarrow$ 0

"Doğru" $\longrightarrow$ 1

Proqramlaşdırma dillərində isə məntiqi verilənlər söz və ya hərflə təsvir olunur:

"Yalan" ⟶ FALSE və ya F
"Doğru" ⟶ TRUE və ya T

Cədvəl 10.6

ASCII kodunun əsas cədvəli

	00	10	20	30	40	50	60	70
0		►		0	@	P	`	p
1	☺	◄	!	1	A	Q	a	q
2	☻	↕	"	2	B	R	b	r
3	♥	‼	#	3	C	S	c	s
4	♦	¶	$	4	D	T	d	t
5	♣	§	%	5	E	U	e	u
6	♠	▬	&	6	F	V	f	v
7	•	↨	'	7	G	W	g	w
8	◘	↑	(	8	H	X	h	x
9	○	↓	)	9	I	Y	i	y
A	◙	→	*	:	J	Z	j	z
B	♂	←	+	;	K	[	k	{
C	♀	∟	,	<	L	\	l	|
D	♪	↔	-	=	M	]	m	}
E	♫	▲	.	>	N	^	n	~
F	☼	▼	/	?	O	_	o	⌂

Cədvəl 10.7

ASCII kodunun genişləndirilmiş cədvəli

	80	90	A0	B0	C0	D0	E0	F0
0	А	Р	а	░	└	╨	р	≡
1	Б	С	б	▒	┴	╤	с	±
2	В	Т	в	▓	┬	╥	т	≥
3	Г	У	г	│	├	╙	у	≤
4	Д	Ф	д	┤	─	╘	ф	⌠
5	Е	Х	е	╡	┼	╒	х	⌡
6	Ж	Ц	ж	╢	╞	╓	ц	÷
7	З	Ч	з	╖	╟	╫	ч	≈
8	И	Ш	и	╕	╚	╪	ш	°
9	Й	Щ	й	╣	╔	┘	щ	∙
A	К	Ъ	к	║	╩	┌	ъ	·
B	Л	Ы	л	╗	╦	█	ы	√
C	М	Ь	м	╝	╠	▄	ь	ⁿ
D	Н	Э	н	╜	═	▌	э	²
E	О	Ю	о	╛	╬	▐	ю	■
F	П	Я	п	┐	╧	▀	я	

10.3. Ədədlərin xüsusi kodlaşdırılması

İkilik say sistemində ədədlərin saxlanması və onların üzərində müxtəlif əməliyyatların aparılması üçün 3 koddan istifadə olunur: *düz, əks və əlavə.*

Düz koddan işarəli ədədlərin yaddaşda təsviri üçün istifadə olunur. X ədədinin düz kodu belə işarə olunur: $[X]_{düz}$. Düz kodun təsvir qaydası belədir:

$$[X]_{düz}=\begin{cases} 0\ x_n\ x_{n-1}\ \ldots\ x_1\ .\ x_{-1}\ x_{-2}\ \ldots\ x_{-m}, & X \ge 0, \\ 1\ x_n\ x_{n-1}\ \ldots\ x_1\ .\ x_{-1}\ x_{-2}\ \ldots\ x_{-m}, & X < 0, \end{cases}$$

burada x_i – ədədin i-ci mərtəbəsindəki rəqəmidir. Göründüyü kimi, ən böyük mərtəbədə ədədin işarəsi: "+" işarəsi 0, "-" işarəsi 1 kimi yazılır.

Məsələn,

$X_2 = +101010$ ədədi üçün: $[X]_{düz} = 0101010$,

$X_2 = -110111$ ədədi üçün: $[X]_{düz} = 1110111$.

Eyni işarəli ədədlərin düz kodda toplanması sadə üsulla aparılır: ədədlər toplanır və cəmə toplananın işarəsi mənsub edilir. Lakin müxtəlif işarəli ədədlərin toplanması çətin başa gəlir. Bu halda mütləq qiymətə görə böyük ədədi təyin etmək, çıxma əməlini yerinə yetirmək və nəticəyə mütləq qiyməti böyk olan ədədin işarəsini mənsub etmək lazımdır.

Çıxma əməlini sadələşdirmək məqsədilə kompyuterdə xüsusi kodlardan istifadə olunur və nəticədə çıxma əməli toplama əməlinə gətirilib çıxardılır.

Xüsusi kodlar kimi əks və əlavə kodlardan istifadə olunur. Bu kodlar düz koddan yaradılır və müsbət ədədin xüsusi kodu onun düz koduna bərabər götürülür.

X ədədinin *əks kodu* belə ifadə olunur:

$$[X]_{əks}=\begin{cases} 0\ x_n\ x_{n-1}\ \ldots\ x_1\ .\ x_{-1}\ x_{-2}\ \ldots\ x_{-m}, & X \ge 0, \\ 1\ \overline{x}_n\ \overline{x}_{n-1}\ \ldots\ \overline{x}_1\ .\ \overline{x}_{-1}\ \overline{x}_{-2}\ \ldots\ \overline{x}_{-m}, & X < 0, \end{cases}$$

burada $\overline{x}_i$ yazılışı x_i rəqəminin inversiyası adlanır və 2-lik say sistemində belə təyin olunur:

Əgər $x_i=1$ onda $\overline{x}_i=0$ və əksinə.

Buradan da mənfi ikilik ədədlər üçün əks kodun yazılışı qaydasını belə ifadə etmək olar: mənfi ikilik ədədin əks kodunu almaq üçün işarə mərtəbəsini dəyişmədən digər mərtəbələrdə sıfırları birlərlə və birləri sıfırlarla əvəz etmək lazımdır. Əksinə,

əks koddan düz koda keçid üçün də bu qaydadan istifadə olunur.

Misal 10.19.

a) $X = +101010$ ədədi üçün: $[X]_{düz} = 0101010$,
$[X]_{əks} = 0101010$;

b) $X = -110111$ ədədi üçün: $[X]_{düz} = 1110111$,
$[X]_{əks} = 1001000$.

X ədədinin əlavə kodu belə təyin olunur:

$$[X]_{əlavə}=\begin{cases} 0\ x_n\ x_{n-1}\ \ldots\ x_1\ .\ x_{-1}\ x_{-2}\ \ldots\ x_{-m}, & X \ge 0, \\ 1\ \overline{x}_n\ \overline{x}_{n-1}\ \ldots\ \overline{x}_1\ .\ \overline{x}_{-1}\ \overline{x}_{-2}\ \ldots\ \overline{x}_{-m} + 2^{-m}, & X < 0. \end{cases}$$

Beləliklə, mənfi ikilik ədədin əlavə kodunu almaq üçün onu əks koda çevirib, kiçik mərtəbəyə 1 əlavə etmək lazımdır.

Misal 10.20.

$X_2 = +101010$, $[X]_{düz}=0101010$, $[X]_{əks}=0101010$,
$[X]_{əlavə}=0101010$,

$X_2 = -110111$, $[X]_{düz}=1110111$, $[X]_{əks}=1001000$,
$[X]_{əlavə}=1001001$

Xüsusi kodlarda təsvir olunan ikilik ədədləri toplayanda ədələrin rəqəmləri ilə yanaşı işarələri də əməliyyatda iştirak edirlər. Bu zaman rəqəm mərtəbələri ikilik say sisteminin qaydaları ilə toplanır. İşarə mərtəbələri və yuxarı mərtəbədən köçürülən rəqəmlər birrəqəmli ikilik ədədləri kimi toplanır. Əks koddan istifadə etdikdə, əgər yuxarı mərtəbədən köçürmə alınırsa, o nəticənin kiçik mərtəbəsi ilə toplanır. Əlavə koddan istifadə edildikdə isə köçürülən vahid nəzərə alınmır, yəni atılır.

Misal 10.21.

$$\begin{array}{r} [X]_{əks}=0101010 \\ + \\ \underline{[X]_{əks}=1101001} \\ 10010011 \\ + \\ \underline{\qquad 1} \\ 0010100 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} [X]_{əlavə}=0101010 \\ + \\ \underline{[X]_{əlavə}=1101010} \\ 10010100 \\ \\ \underline{\text{atılır}} \\ 0010100 \end{array}$$

Toplama əməlinin yerinə yetirilməsi zamanı toplananların mərtəbələrinin sayı müxtəlif olarsa, düz kodu xüsusi kodlara çevirməzdən əvvəl mərtəbələrin sayını bərabərləşdirmək lazımdır. Bunun üçün çatışmayan rəqəmlərin yerinə tam hissədə soldan, kəsr hissədə isə sağdan sıfırlar yazılır.

Bəzi hallarda mərtəbə şəbəkəsinin dolub-daşması baş verə bilər. Mərtəbə şəbəkəsinin dolub-daşması əlaməti toplananların və nəticənin işarə mərtəbələrində aşağıdakı kombinasiyaların yaraması kimi təyin olunur:

$$\begin{array}{l} \ 0\,\text{- - -} \\ + \\ \ \underline{0\,\text{- - -}} \\ \ 1\,\text{- - -} \end{array} \qquad \text{və ya} \qquad \begin{array}{l} \ 1\,\text{- - -} \\ + \\ \ \underline{1\,\text{- - -}} \\ \ 0\,\text{- - -} \end{array}$$

Mərtəbə şəbəkəsinin dolub-daşması zamanı toplamanın nəticəsi düz olmur.

Yoxlama tapşırıqları

10.1. Aşağıdakı ədədləri onluq say sisteminə çevirməli:

a) 110111_2;

b) 10110111.1011_2;

c) 563.44_8;

d) 721.35_8;

e) $1C4.A_{16}$;

f) $9A2F.B5_2$.

10.2. Aşağıdakı ədədləri onluq say sistemindən "2-lik", "8-lik", "16-lıq" say sisteminə çevirməlı:

a) 463;

b) 1209;

c) 362;

d) 3925;

e) 11355.

10.3. Aşağıdakı ədədləri onluq say sistemindən "2-lik", "8-lik", "16-lıq" say sisteminə çevirməli(hesablama dəqiqliyi – nöqtədən sonra, yəni kəsr hissədə 5 dənə simvol saxlamalı):

a) 0.0625;

b) 0.345;

c) 0.225;

d) 0.725;

e) 217.375;

f) 31.2375;

j) 725.03125;

h) 8846.04.

10.4. Aşağıdakı ədədləri ikilik say sisteminə çevirmıli:

a) 1725.326_8;

b) 341.34_8;

c) $7BF.52A_{16}$;

d) $3D2.C_{16}$.

10.5. Aşağıdakı ikilik ədədləri 8-lik say sisteminə çevirmıli:

a) 11011001.01011_2 ;
b) 1011110.1101_2 .

10.6. Aşağıdakı ikilik ədədləri 16-lıq say sisteminə çevirmılı:
a) 1101111101.0101101_2;
b) 110101000.100101_2.

10.7. Aşağıdakı 8-lik ədədləri 16-lıq say sistemində təsvir etməli:
a) 312.7_8 ;
b) 51.43_8 .

10.8. Aşağıdakı 16-lıq ədədləri 8-lik say sisteminə çevirmılı:
a) $5B.F_{16}$;
b) $D4.19_{16}$.

10.9. Aşağıda verilmiş ikilik X , Y ədədlərinə əsasən (X+Y) və (X –Y) –i hesablamalı:
a) X=1101001; Y=101111;
b) X=101110110; Y=10111001;
c) X=100011001; Y=101011.

10.10. Aşağıda verilmiş ikilik X , Y ədədlərinə əsasən X*Y və X /Y –i hesablamalı:
a)X=1000010011;Y=1011;
b)X=110010101;Y=1001;
c)X=100101.011;Y=110.1;
d) X=100000.1101; Y=101.01.

FƏSİL 11. SİSTEMLİ ANALİZ VƏ MODELLƏŞDİRMƏ

11.1. Əsas anlayışlar

Sistem analizinin metodlarının formalaşdırılmasından öncə, bu problemə uyğun *"sistem"* anlayışını şərh edək. Platon'a görə (b.e.əv.427-347) "sistem odur ki, təbiətdə sistem kimi nəzərə çarpır,-ayrılır". "İngilis dilinin Oksford lüğəti"ndə "sistem"-"Əlaqəli və ya tam təbii və ya süni qruplar, çoxluqlar və ya predmetlər küllüsü" kimi izah edilir. Müasir interpretasiyada isə, sistem-vahid tamlıq təşkil edən obyekt və onlar arasındakı münasibətlərin toplusudur.

Sistemin vacib xüsusiyyətləri aşağıdakılardır:

- Sistem-onun elementləri adlanan tərkib hissələrindən ibarətdir; hər bir element özünün xüsusi varlığına (davranışına) malikdir və sistemin davranışı elementlərin davranışlarının adicə cəmindən ibarət deyil;
- Sistem qarşılıqlı əlaqəli elementlərdən ibarət kompleks olmaqla, tam təşkilə malikdir;
- İstənilən sistem daha yüksək saviyyəli sistemin elementidir;
- Sistemin istənilən elementi ondan aşağı səviyyədə yerləşən elementlərdən ibarət olan sistemdir;
- Sistem ətraf mühitlə kəsilməz qarşılıqlı təsiri həyata keçirir.

Beləliklə, abstrakt olaraq S sistemi dedikdə X və Y abstrakt çoxluqları arasındakı münasibət başa düşülür:

$$S \subseteq X \times Y$$

Sistemlərin təsnifatı zamanı aşağıdakı formal əlamətlər nəzərə alınır:

1) qarşılıqlı əlaqədə olan elementlərin sayı;
2) fəaliyyətin formal riyazi modelinin olmaması;

3) yazılış üsulu.

Sistemə daxil olan elementlərin sayına görə onları 3 sinfə bölürlər: *kiçik sistemlər* ($10-10^3$ elementli), *mürəkkəb sistemlər* (10^4-10^{30} elementli); *super sistemlər* ($10^{30}-10^{200}$ elementli).

İngilis kibernetiki S.Bir yazılış üsullarına görə kibernetik sistemləri sadə və mürəkkəb kimi determinik və nəzəri-ehtimali siniflərə bölür.

Hər bir idarəetmə sistemi, əsasən, 3 məsələni həll edir: idarəedilən obyekt haqqında informasiyanın yığılması və ötürülməsi; informasiyanın emalı; idarəedici qərarların idarəetmə obyektinə verilməsi(ötürülməsi).

Ümumi sistem anlayışına tərif verək.

Tərif 11.1. Sistem öncə elementlər yığımıdır, həmin elementlərə isə öz növbəsində müəyyən şərtlər daxilində ayrıca sistemlər kimi baxmaq olar və araşdırılan sistemə də daha geniş sistemin bir elementi kimi baxmaq olar.

Əgər S sistemi funksiyadırsa($Y=S(X)$), yəni $S:X \rightarrow Y$, onda sistem *fuksional* adlanır.

Sistemə fenomenoloji(F) səviyyədə müxtəlif təriflər(T) vermək olar.

FT 11.1. Sistem hər hansı tamdır.

FT 11.2. Sistem təşkil olunmuş çoxluqdur.

FT 11.3. Sistem əşya, xassə və münasibətlər çoxluğudur.

FT 11.4. Sistem struktur təşkil edən və ətraf mühiti nəzərə almaqla müəyyən fəaliyyəti təmin edən elementlər çoxluğudur.

FT 11.5. Sistem giriş, çıxış, keçidlər funksiyası ilə xarakterizə olunan vəziyyətlər çoxluğudur.

Sistemin fəaliyyətinin yazılışı üçün onun vəziyyətini, özünüaparması(davranışını), dayanıqlıq şərtlərini, inkişaf problemini və məqsədini nəzərə almaq zəruridir.

Sistemli yanaşma zamanı mürəkkəb sistemlərin öyrənilməsi və təkmilləşdirilməsi məqsədi ilə ancaq elə metodlardan istifadə olunur ki, onlar: baxılan sistemin

fəaliyyətini təyin edən böyük sayda faktorlar arasında sıx qarşılıqlı əlaqələrin mövcudluğunu rədd etmir; sistemin fəaliyyətindəki hər hansı kiçik və ya böyük qeyri-müəyyənlik (sistemin bütövlükdə özündəki və ya onun ayrı-ayrı hissələrindəki) təsadüfi faktorların və sistemdə iştirak edən insanların təsirinin nəticəsi kimi nəzərə alınır; sistem və onu əhatə edən mühitin qarşılıqlı təsirləri nəzərə alınır; sistemin xassələrinin və ətraf mühitin zamana görə dəyişməsi nəzərə alınır.

Müasir sistem və idarəetmə işlərinin təşkilinin vacib xüsusiyyəti təkcə sistemi təşkil edən altsistemlərin (elementlərin) çox sayda olması deyil, həmçinin, elementlərin özlərinin və onlar arasındakı əlaqələrin müxtəlifliyidir. *Mürəkkəb (böyük) sistem* anlayışı kibernetikaya xas olan idarəetmə məsələlərinin qoyuluşu və həllinə sistemli yanaşma ifadəsi kimi meydana gəldi və ona əsaslanır ki, istənilən sistemə hər hansı mürəkkəb böyük sistemin hissəsi kimi qarşılıqlı əlaqədə baxmaq lazımdır.

Mürəkkəb sistem nəzəriyyəsi aşağıdakı problemlərin işlənməsi istiqamətində inkişaf etdirilir:

- anlayışları formalaşdıran dil problemləri;
- modellər problemi;
- dekompozisiya problemi;
- bir neçə göstəricinin ümumi bir göstərici ilə əvəz edilməsi problemi;
- strategiya problemi; yəni, sistemin vəziyyətinin qiymətləndirilməsi üsulunun və mühitinin seçilməsi, idarəedici təsirlər proqramının işlənməsi.

Hal-hazırda böyük(mürəkkəb) sistemlərin analizi və sintezində klassik(induktiv) yanaşmadan fərqlənən sistemli yanaşma geniş inkişaf etməkdədir. *İnduktiv yanaşma* sistemi xüsusidən ümumiyə keçmə yolu ilə araşdırır və onu hər biri ayrı-ayrılıqda istənilən sayda komponentə malik altsistemlərə bölməklə sintez edərək quraşdırır.

Sistemli yanaşmanın əsasında, ətraf mühitdən seçilərək tədqiq olunan sistemin məqsədi qalmaqla, ümumidən xüsusiyə ardıcıl keçidlər durur. Belə yanaşma üçün sistemin strukturunun təyini vacibdir.

Sistemin strukturu dedikdə onun elementlərinin qarşılıqlı təsirlərini əks etdirən əlaqələr çoxluğu başa düşülür.

Sistemli yanaşma məsələsi - sistemin səmərəli işinin təmin edilməsindən ibarətdir. Sistemin strukturunun onun xassələri ilə tədqiqi üçün 2 cür yanaşma var: struktur və funksional. *Struktur yanaşma* zamanı sistemin elementlərinin tərkibi və onlar arasındakı əlaqələr aşkar edilməlidir. *Funksional yanaşma*da sistemin məqsədə çatmaq üçün davranış(özünü aparma) alqoritmlərinə baxılır.

Sistemli yanaşma aşağıdakıları nəzərdə tutur:

- idarəetmə ilə, xüsusi halda, qərar qəbulu ilə əlaqədar fəaliyyətin başlanmasına qədər məqsədlərin formalaşdırılması və onların səviyyələrinin aydınlaşdırılması;
- qarşıya qoyulan məqsədlərə nail olmaq üçün maksimum effektin və müvafiq seçimin həyata keçirilməsi;
- məqsədlərin, metodların və onlara nail olma vasitələrinin bütün mümkün, planlaşdırılmış nəticələrinin geniş, hərtərəfli olaraq qiymətləndirilməsi.

Obyektlə əlaqədar hər hansı məsələnin həlli üçün həmin obyektin müəyyən təsir kateqoriyasına (fiziki, kimyəvi və ya sosial) aid edilməsi və müəyyən elmi aparatdan istifadə olunması lazım gəlir.

Tədqiq və idarəetmə məsələlərinin həllində mərkəzi anlayışlar - sistem ətrafında qruplaşan geniş ümumelmi *xassələr, münasibətlər, əlaqələr, məhdudiyyətlər, artım, təkamül, öyrənmə, məqsədəyönlülük, stabillik* və s. anlayışlar kompleksinin işlənməsi tələb olunur.

Mürəkkəb sistemlərin yaradılması və istifadə edilməsinin sadalanan fundamental problemləri ilə birlikdə bir sıra funksional və əməli tətbiq məsələlərin həlli də tələb olunur. *Funksional məsələlərə* sistem vasitəsilə onun təyinatının yerinə yetirilməsini təmin edən və iş qabiliyyətini dəstəkləyən tədbirlər aiddir. *Əməli məsələlər* aşağıdakıların həllinə yönəldilir: planlaşdırma, əməliyyat kompleksləri, resursların idarə edilməsi və sistemin inkişaf etdirilməsi.

"Model" – modus - latın sözündəndir, hərfi tərcümədə mənası "surət", "obraz", "cizgiləmə" deməkdir.

Model – obyektin, prosesin və ya sistemin müəyyən şərtlərlə orijinal adlanan bir formadan digər formaya keçidi ilə öyrənilməsi və ya onun hər hansı xassələrinin canlandırılması üçün təsviridir. Model - bir strukturun digərinə inikasıdır. Fiziki sistemi(obyekti) riyazi sistemə inikas etdirməklə sistemin fiziki-riyazi və ya riyazi modeli alınır.

Tətbiq sahələrinə görə modelləri üç sinfə bölürlər: dərkolunan, praqmatik, instrumental.

Dərkolunan model - biliklərin təşkili və təqdimatı formasıdır, köhnə və yeni biliklərin birləşdirilməsi vasitəsidir.

Praqmatik model - praktiki əməllərin təşkili vasitəsidir, sistemin idarə edilməsi üçün onun məqsədlərinin işlək təqdimatıdır.

İnstrumental model - praqmatik və/və ya dərkolunan modellərin qurulması, tədqiqi və/və ya istifadəsi vasitəsidir.

Dərkolunan model-mövcud olanı, praqmatik isə - mövcud olmayanı, yəni, ancaq arzu olunanı, icra oluna bilən münasibəti və əlaqələri əks etdirir.

Modelləşdirmənin dərinliyinə, səviyyəsinə görə modellər *empirik* (empirik və faktiki əlaqələr əsasında), *nəzəri* (riyazi yazılışlar əsasında) və qarişiq, *yarımempirik* (təcrübi əlaqələrin və riyazi yazılışların əsasında) olurlar.

11.2. Sistemli analiz və onun mərhələləri

Obyektin, prosesin və ya sistemin xassələrinin tədqiqi və optimal idarə edilməsi üçün onların praktik tətbiqlərində sistemli analizin asağıdakı əsas mərhələlərini ayırmaq olar:

- məsələnin məzmunlu qoyuluşu;
- öyrənilən obyektin modelinin qurulması;
- qurulmuş modelin köməyilə məsələnin həllinin axtarışı;
- modelin köməyilə həllin yoxlanılması;
- həllin xarici şəraitə uyğunlaşdırılması;
- həllin həyata keçirilməsi.

Sistemli analiz məsələsinin qoyuluşunda hökmən 2 tərəfin iştirakı vacibdir: *sifarişçi* (qərar qəbul edən şəxs) və baxılan sistem layihəsinin *icraçısı*. Sifarişçi təkcə maliyələşdirmə ilə məşğul olmamalıdır. O, həmçinin, idarə etdiyi obyektin analizini apararaq, məqsədi formalaşdırmalı və mümkün təsir variantlarını razılaşdırmalıdır. Həmin mərhələdə sistemin fəaliyyətinin səmərəliliyinə də baxılır. Bu isə sistemin elementlərinin qarşılıqlı əlaqələrinin xarici mühitlə təmasda olması şərti ilə nəzərə alınmalıdır. Sifarişçi nə etmək lazım olduğunu, icraçı isə onu necə etməyi bilməlidir.

Aşkardır ki, sistemin yaradılması və tədqiqi riyazi modelləşdirmə ilə sıx əlaqədardır. Odur ki, sistemin modelinin qurulması mərhələsində adekvatlığa xüsusi fikir verilməlidir.

Tədqiq edilən sistemin modelini ən sadə şəkildə aşağıdakı asılılıqla təqdim etmək olar:

$$E = f(X,Y), \qquad (11.1)$$

burada E - sistemin məqsədə çatmaq baxımından səmərəliliyinin hər hansı kəmiyyət göstəricisi;
X - sistemin idarə olunan parametrləri, yaxud idarəedilən təsirləri;
Y - sistemin xaricdən təsir edən idarə olunmayan parametrləridir.

Əlbəttə, elə hallar var ki, idarəetmə strategiyası müəyyən olur, yəni xarici təsir rol oynamır. Xarici mühitin təsiri ilə razılaşmalı olduqda isə sistemi qeyri-müəyyənlik şəraitində idarə etmək zərurətində qalırıq.

Göründüyü kimi, sistemli analizin əsas mərhələsi öyrənilən obyektin modelinin qurulmasıdır. Odur ki, modelləşdirmə ilə yaxından tanış olaq.

11.3. Riyazi modelləşdirmə

Fəlsəfi baxımdan modelləşdirmə dünyanın qavranılma metodlarından biridir. Qeyd etdiyimiz kimi, modelin özü də, ümumiyyətlə, obyektdir. Başqa sözlə desək, model- obyekt-orijinalın bir sıra xassələrinin öyrənilməsini təmin edən obyekt-əvəzedicisidir. *Modelləşdirmə* (yəni, modelin yaradılması prosesi) hər hansı A obyektinin digər B obyekti ilə əvəz olunmasıdır; burada A-*modelləşdirmə obyekti*, B isə *model* adlanır.

Riyazi modelləşdirmə A orijinal obyektinin, B riyazi modellə əvəz edilməsi prosesidir.

Riyazi model orijinalın mahiyyət cizgilərini saxlayan, riyazi termin və qaydalarla ifadə edilən obyektin (proses və ya sistemin) təqribi təsviridir.

Real obyektin riyazi modeli ümumi halda aşağıdakı F_i - funksionallar sistemi şəklində təsvir edilir:

$$F_i(X,Y,Z,t) = 0,$$

burada X - giriş dəyişənləri vektoru;
Y - çıxış dəyişənləri vektoru;
Z - xarici təsirlər vektoru;
t - zamanın koordinantıdır.

Riyazi modelin qurulması bu və ya digər proses və hadisələrin son nəticəyə təsir edən fiziki kəmiyyətləri və faktorları arasındakı qarşılıqlı əlaqələri ifadə etməyə imkan verən riyazi aparatın yaradılmasından ibarətdir.

Adətən, həmin kəmiyyət və faktorlar o qədər çoxluq təşkil edir ki, onların hamısını modelə daxil etmək mümkünsüz olur. Riyazi modelin qurulması zamanı tədqiqatdan öncə son nəticəyə əhəmiyyətli dərəcədə təsir etməyən faktorları aşkarlayıb çıxarmaq məsələsi ortaya gəlir. Sonra riyazi məsələ formalaşdırılır.

Qurulma prinsiplərinə görə riyazi modellərin 2 növünü ayırırlar: analitik və imitasiya modelləri.

Analitik modellərdə real obyektlərin fəaliyyətləri açıq funksional əlaqələr şəklində yazılırlar. Analitik modellərin riyazi problemdən asılı olaraq, aşağıdakı növləri var: tənliklər, aproksimasiya məsələləri, stoxastik problemlər. Obyekt mürəkkəbləşdikcə, analitik modellərin qurulması çətin problemə çevrilir. O zaman, imitasiya modellərindən istifadə olunur.

İmitasiya modellərində obyektin fəaliyyəti alqoritmlərlə təsvir edilir. Həmin alqoritmlər orijinal obyektin fəaliyyətini və məntiqi strukturunu saxlayan real elementar təsirləri imitasiya edir. Bu isə, əsasən, kompyuterlərdə reallaşdırılır.

Tədqiq edilən obyektin xarakterindən asılı olaraq riyazi modellər determinik və stoxastik ola bilərlər.

Determinik modellərdə bütün təsadüfi təsirlərin yoxluğu, modelin elementlərinin və sistemin fəaliyyətinin kifayət qədər dəqiq təyin olunduğu fərz edilir.

Determinik modelləri iki sinfə bölürlər:
- həqiqi modellər;
- ideal modellər.

Həqiqi modellər öz növbəsində aşağıdakılara bölünür: natura, fiziki, riyazi.

Həqiqi natura modellər - üzərində elmi, texniki, istehsal təcrübələri aparılan real obyektlər, proseslər və sistemlərdir.

Həqiqi fiziki modellər – orijinal obyektlərin fiziki xassələrini canlandıran və təqlid edən maketlər, mulyajlardır.

Həqiqi riyazi modellər - analoq, struktur, həndəsi, qrafiki, rəqəmli və kibernetik modellərdir.

İdeal modellər əyani və işarəli olmaqla iki yerə ayrılır.

İdeal əyani modellər - sxemlər, xəritələr, cizgilər, qrafiklər, qraflar, analoqlar, struktur və həndəsi modellərdir.

İdeal işarəli modellər – simvollar, əlifbalar, proqramlaşdırma dilləri, nizamlı texnoloji yazılar, şəbəkəli təsvirlərdir.

Natura modellərindən başqa yerdə qalanların hamısını insanın abstrakt zəkasının məhsulu hesab etmək,- bir sinfə aid etmək olar.

Stoxastik model tədqiq edilən obyektdəki prosesin təsadüfi xarakterdə olduğunu nəzərə alır; bu isə ehtimal nəzəriyyəsi və riyazi statistikanın metodları ilə həyata keçirilir.

Obyektin giriş informasiyasına nəzərən modellər kəsilməz və diskret olurlar.

Əgər informasiya və parametrlər kəsilməzdirlərsə, riyazi əlaqələr isə dayanıqlıdırsa, onda model-*kəsilməz* adlanır. Tərsinə, əgər informasiya və parametrlər-diskretdirlərsə, əlaqələr isə dayanıqsızdırlarsa, onda riyazi model *diskret* adlanır.

Zamana görə modellər statik və dinamik olurlar.

Statik model obyektin, sistemin və ya prosesin fəaliyyətini hər hansı zaman anında, *dinamik* isə - zamanla təsvir edir.

Real obyektlə riyazi modelin uyğunluğuna görə riyazi modellər izomorf (eyni formaya malik) və homomorf (formaya nəzərən müxtəlif) olurlar.

Modellə obyektin (sistemin və ya prosesin) bütün elementləri arasında tamamilə qarşılıqlı birqiymətli uyğunluq mövcud olduqda, model - *izomorf* adlanır. Modellə obyektin ancaq bir sıra əhəmiyyətli elementləri arasında uyğunluq olduqda, belə modelə - *homomorf* deyilir.

11.3.1. Riyazi məsələlərin həll metodları

Riyazi məsələlərin həllinin bütün metodlarını iki qrupa bölmək olar:

1. Məsələnin həllinin dəqiq metodları;
2. Məsələnin həllinin təqribi metodları.

Dəqiq metodlarla riyazi məsələlərin həllində nəticəni(cavabı) düstur vasitəsilə almaq mümkün olur.

Məsələn:

a) $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ kvadrat tənliyinin həqiqi köklərinin hesablanması:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

b) funksiyanın törəməsinin hesablanması:

$y=sinx$ funksiyası üçün $y'=\cos x$;

$y=x^n$ funksiyası üçün $y'=nx^{n-1}$.

c) müəyyən inteqralın hesablanması:

$$\int_a^b \cos x dx=\sin b-\sin a.$$

Lakin ədədləri düsturda sonlu onluq kəsr şəklində yerinə yazdıqda, biz onsuz da nəticənin çox vaxt təqribi qiymətini alırıq.

Praktikada rast gəlinən məsələlərin çoxu üçün ya dəqiq həll metodları məlum olmur, ya da onlar mürəkkəb düsturlarla verilir.

Tətbiqi məsələ, onu lazımi dəqiqliklə həll etmək mümkün olduqda, praktiki həll edilmiş sayılır. Belə məsələlərin həlli üçün çoxlu sayda ədədi üsullar işlənilmişdir. Ədədi üsullar vasitəsilə mürəkkəb riyazı məsələlərin həlli çoxlu sayda sadə hesab əməllərinin ardıcıllığına gətirilir. Bu üsulların bilavasitə işlənilməsi hesablama riyaziyyatına aid sahədir.

Ədədi üsula misal olaraq, təqribi inteqrallama üçün dördbucaqlılır metoduna baxaq. Burada inteqralaltı ifadənin(funksiyanın) hesablanılması tələb olunur. İnteqralaltı funksiyanın əvəzinə sonlu kvadratur cəm hesablanılır:

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{n-1}^{n+1} f(x_i)\,\Delta x_i,$$

burada

$x_1=a$ - inteqrallaşdırmanın aşağı sərhəddi;

$x_{n+1}=b$ - inteqrallaşdırmanın yuxarı sərhəddi;

n - (a,b) inteqrallaşdırma intervalının bölündüyü parçaların sayı;

Δx_i - bölgüdəki elementar parçanın uzunluğu;

$f(x_i)$ - elementar inteqrallaşdırma parçalarının uc nöqtələrində inteqralaltı funksiyanın qiymətləridir.

Elementar parçaların n – sayı çox olduqca, hesablama dəqiqliyi də artır, yəni nəticə daha səhih olur.

Beləliklə, təqribi məsələlərdə istər dəqiq, istərsə də təqribi metodlarla aparılan həllər təqribi xarakter daşıyır. Vacib odur ki, xəta tələb edilən dəqiqlik çərçivəsindən kənara çıxmasın.

Ədədi üsullarla riyazi məsələlərin həlli metodları kompyuterlərin meydana gəlməsindən öncə məlum olsalar da, ancaq onlardan istifadə çox nadir hallarda baş verirdi. Kompyuterlər yarandıqdan sonra ədədi üsulların tətbiqi geniş vüsət almağa başladı.

11.3.2. Riyazi modelin qurulmasına dair yanaşmalar

Sistemlərin fəaliyyət proseslərinin riyazi modellərinin qurulması zamanı aşağıdakı yanaşmaları ayırd etmək olar: kəsilməz-determenik, diskret-determenik, diskret-stoxastik, kəsilməz-stoxastik, şəbəkə, ümumiləşdirilmiş (və ya universal). Bu yanaşmalara uyğun olaraq modellərin qurulmasının tipik riyazi sxemləri işlənilmişdir.

Kəsilməz-determinik yanaşmada riyazi modellər kimi diferensial tənliklər sistemindən istifadə edilir. Məsələn, kəfkirin kiçik meyletmələri prosesi adi diferensial tənliklə belə təsvir olunur:

$$m.l^2 \cdot \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} + m.g.l.\kappa(t) = 0,$$

burada m,l - kəfkirin kütlə və uzunluğu (uyğun olaraq);

g - sərbəst düşmə təcili;

$\varphi(t)$ - kəfkirin t zamanı anındakı meyletmə bucağıdır.

Bir qayda olaraq, kəsilməz-determenik yanaşma əsasında qurulan riyazi modellər analitik üsullarla tədqiq edilir.

Diskret-determenik yanaşma avtomatlar nəzəriyyəsi riyazi aparatının köməyi ilə reallaşdırılır. Sistem diskret informasiyanı emal edən və öz daxili vəziyyətini ancaq zamanın müəyyən anlarında dəyişən avtomat şəklində təqdim edilir.

Bu zaman riyazi model aşağadakılarla xarakterizə edilən sonlu avtomatdan ibarət olur:

- giriş siqnalların X sonlu çoxluğu;
- çıxış siqnalların Y sonlu çoxluğu;
- daxili vəziyyətlərin Z sonlu çoxluğu;
- Z_0 başlanğıc vəziyyəti ($Z_0 \in Z$);
- $g(z,x)$ keçid funksiyaları ($z \in Z, \quad x \in Z$);
- $v(z,x)$ çıxış funksiyaları.

Sonlu avtomatın işi aşağıdakı sxemlə həyata keçirilir: *z(t)* vəziyyətində olan avtomatın girişinə hər bir takt zamanında yeni *z(t+1)* vəziyyətinə keçməni təmin edən *(t+1)* taktında *x(t)* siqnalı ötürülür və müəyyən çıxış siqnalları alınır.

Diskret–stoxostik yanaşmada riyazi aparat kimi statik təsvirli ehtimali avtomatlardan istifadə olunur.

Avtomatın tədqiqi istər analitik, istərsə də imitasiya metodları ilə aparıla bilər. Bu yanaşma istehsal müəssisələrinin istismarı xarakteristikalarının öyrənilməsi zamanı geniş tətbiq edilir.

Kəsilmiş-stoxastik yanaşma əsasən xidmət proseslərinin formallaşdırılması üçün tətbiq olunur.

11.3.3. Riyazi modellərin qurulma prinsipləri

Tətbiqi məsələlərin həlli zamanı kompyuterdən istifadə etmək üçün öncə həmin məsələ formal riyazi dilə "çevrilməlidir", yəni real obyekt, proses və ya sistem üçün onun riyazi modeli qurulmalıdır.

Riyazi modellər kəmiyyət formasında məntiqi-riyazi konstruksiyaların köməyi ilə obyektin, prosesin və ya sistemin əsas xassələrini , parametrlərini, daxili və xarici əlaqələrini təsvir edir.

Riyazi modelin qurulması üçün aşağıdakılar zəruridir:

- real obyektin hərtərəfli analizi;
- obyektin ən çox mahiyyət kəsb edən cəhətlərinin ayırd edilməsi;
- obyektin əsas cəhətlərinə və xassələrinə təsir edən parametrlərin təyini;
- obyektin əsas xassələrinin əlaqələrini məntiqi-riyazi münasibətlərin köməyilə dəyişənlərin qiymətlərindən asılı olaraq təsviri;
- məhdudiyyətlərin, tənliklərin, bərabərliklərin, bərabərsizliklərin məntiqi-riyazi əməllərin köməyilə obyektin, prosesin və ya sistemin daxili və xarici əlaqələrinin müəyyənləşdirilməsi.

Riyazi modelləşdirmə həm də özündə aşağıdakıları cəmləşdirir:

- obyektin fəaliyyətini modelləşdirən alqoritmin qurulması;
- model və obyektin adekvatlığının yoxlanılması;
- modelin təshih edilməsi;
- modeldən istifadə.

Modelin seçilməsi zamanı obyektin, prosesin və ya sistemin xətti və qeyri xəttiliyi, dinamik və ya statikliyi, stasionar və ya qeyri-stasionarlığı, həmçinin, determiniklik dərəcəsi də müəyyənləşməlidir. Riyazi məsələlər isə ya dəqiq, ya da təqribi metodlarla həll edilir.

İstənilən model aşağıdakı xassələrə malik olmalıdır:

- sonluluq;
- sadəlilik;
- təqribilik;
- adekvatlıq;
- informativlik.

11.4. Modelləşdirilən sistemin həyat dövrü və tətbiqləri

Modelləşdirilən sistemin həyat dövrü aşağıdakıları əhatə edir:

1. Obyekt haqqında məlumatın yığılması, hipotezlərin irəli sürülməsi, modeldən əvvəlki analizin aparılması;
2. Modellərin(altmodellərin) struktur və tərkibinin layihələndirilməsi;
3. Modelin spesifikasiyalarının qurulması, ayrı-ayrı altmodellərin işlənməsi və sazlanması, modelin tam şəkildə quraşdırılması;
4. Modelin tədqiqi – tədqiqat üsulunun seçilməsi və modelləşdirmə alqoritminin qurulması;
5. Modelin adekvatlığının, dayanıqlığının, həssaslığının araşdırılması;
6. Modelləşdirmə vasitələrinin və vəsaitlərinin(sərf edilən resursların) qiymətləndirilməsi;
7. İnteqrallaşdırma(yəni, altmodellərin birləşdirilməsi), modelləşdirmənin nəticələrinin analizi və tədqiq olunan sistemdə bir sıra səbəb-nəticə əlaqələrinin ayırd edilməsi;
8. Hesabat və layihə həllərinin generasiyası;

9. Modelin dəqiqləşdirilməsi, modifikasiyası və tədqiq edilən sistemə yeni biliklərlə qayıdış.

Model və modelləşdirmə aşağıdakı əsas, vacib istiqamətlərdə tətbiq olunur:

- *öyrənmə*(modellərin və modelləşdirmənin);
- *dərkolunma*(hər hansı model, modelləşdirmə, modelləşdirmənin nəticələrinin vasitəsilə tədqiq edilən sistemlərin nəzəriyyələrinin);
- *proqnozlaşdırma*(sistemin çıxış verilənlərinin, vəziyyətlərinin);
- *idarəetmə*(sistemin bütövlükdə, sistemin ayrı-ayrılıqda altsistemlərinin, idarəedici qərarların hazırlanmasının);
- *avtomatlaşdırma*(sistemin və ya onun ayrı-ayrı altsistemlərinin) və s.

11.5. Modellər üzərində əməliyyatlar

Modellər üzərində müəyyən əməliyyatlar aparıla bilər. Bu əməliyyatlardan əsas hesab etdiklərimizi qısa şərh edək.

1. Xəttiləşdirmə. Tutaq ki, model aşağıdakı şəkildə funksional sistem kimi təqdim edilmişdir:

$$M = M(X,Y,A),$$

burada X -girişlər, Y -çıxışlar, A -sistemin vəziyyətləri çoxluqlarıdır.

X,Y,A -xətti fəza (çoxluq) olarlarsa, onda $X \otimes A \otimes Y$ münasibətindəki $\otimes$ opetorları da xətti olurlar və model xətti adlanır. Digər modellər qeyri-xəttidirlər. Qeyri-xətti modellər çətin tədqiq olunduqlarından, onları çox vaxt xəttiləşdirirlər, yəni hər hansı bir təsirdə xəttiyə gətirirlər.

2. İdentifikasiya. Tutaq ki, modelin M=M(X,Y,A) şəkildə təqdimində $A = \{a_i\}$ obyektin (sistemin) vəziyyətləri çoxluğu $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ vektoru ilə ifadə edilib. Əgər a_i vektoru bir sıra məlum olmayan parametrlərdən asılıdırsa, onda identifikasiya (modelin, model parametrlərinin) məsələsi bir sıra əlavə şərtlərin təyin edilməsindən ibarət olur (məsələn, müxtəlif vəziyyətlərdə sistemin vəziyyətini təyin edən təcrübi verilənlərin).

İdentifikasiya – real sistemin fəaliyyətini adekvat olaraq təsvir edən riyazi modelin nəzarətlərin nəticələrinə görə qurulması məsələsinin həlli deməkdir.

3. *Aqreqatlaşdırma.* Bu əməliyyat modeli (X,Y,A) ölçüsündən daha kiçik ölçülü modelə (modellərə) çevirməkdən ibarətdir.

4. *Dekompozisiya.* Dekompozisiya əməliyyatı sistemin (modelin) strukturunu saxlamaqla altsistemlərə (altmodellərə) bölünməsindən ibarətdir. Bu zaman eyni elementlərin eyni altsistemlərə aidliyi də gözlənilməlidir.

5. *Quraşdırma.* Bu əməliyyat verilmiş və ya təyin edilmiş struktura görə əlaqəli və dayanıqlı altmodellərdən ümumi modeli quraşdırmaqdan ibarətdir.

6. *Maketləşdirmə.* Bu əməliyyat altmodellərin köməyi ilə sistemin struktur əlaqəliyinin, mürəkkəbliyinin, dayanıqlığının tədqiqindən ibarətdir. Bu zaman altmodellərin giriş və çıxışları saxlanılır.

7. *Ekspertiza. Ekspert qiymətləndirməsi* tədqiq edilən sistemin altsistemlərinin tədqiqi və ya modelləşdirilməsi üçün ekspertlərin təcrübi bilik, intuisiya, intellektindən istifadə etməyi nəzərdə tutur.

8. *Hesablama təcrübəsi* -model vasitəsilə kompyuterdə obyektin(prosesin və ya sistemin) bu və ya digər vəziyyətlərinin paylanması, proqnozu, giriş siqnallarına reaksiyasını həyata keçirir. Burada təcrübə aləti kimi kompyuter və modeldən istifadə edilir.

11.6. Modelləşdirilən sistemin funksiyaları və imkanları

Obyekt-yönlü modelləşdirilən sistemin əsas funksiyaları aşağıdakılardan ibarətdir:

- diskret komponentlərin formal yazılışı üçün vasitələrin təqdimi;
- modelin struktur qrafı şəklində təsviri və onun obyeklərinin ümumi informasiya sahəsi ilə uzlaşdırılması;
- hadisələrin koordinasiyasının həyata keçirilməsi;
- tranzaktların keçəcəyi yolun təyini;
- qovşaqların vəziyyətlərinin dəyişdirilməsi və idarə etmənin modelin kəsilməz komponentlərinə ötürülməsi.

Modelləşdirilən sistem 6 anlayışa əsaslsnır:

1. *Modelin qrafı.* Bütün proseslər çoxsəviyyəli iyerarxik istiqamətlənmiş qraf şəklində biləşdirilərək təsvir edilir.

2. *Tranzakt.* Tranzakt – hər hansı xidmətə dair formal sorğudur. Adi sorğudan fərqli olaraq, tranzakt xüsusi dəyişən xassə və parametrlər yığımına malikdir. Tranzaktların qraf üzrə hərəkət yolu modelin komponentlərinin fəaliyyət məntiqi ilə təyin edilir.

Tranzakt aşağıdakıları yerinə yetirə bilər:

- digər tranzaktlar qrupunu yaratmağı;
- konkret tranzaktlar qrupunu ləğv etməyi;
- resursları zəbt etmək və onlardan müəyyən vazt ərzində istifadə edib, sonra isə azad etməyi;
- xidmət vaxtlarını təyin etməyı, gedilən yol haqqında informasiya toplamağı, özünün və digər tranzaktların sonrakı yoluna dair informasiyaya malik olmağı.

Tranzaktların əsas parametrləri aşağıdakılardır:

- tranzaktın unikal identifikatoru;
- tranzaktın daxil olduğu qrupun identifikatoru;
- tranzaktın nə vaxtsa istifadə edə biləcəyi müxtəlif resurslar yığımı;

- tranzaktın həyat dövrü;
- tranzaktın üstünlük dərəcəsi;
- tranzaktın hər hansı xidmətedici qurğudakı xidmət parametrləri.

Tranzaktlara misallar: telekommunikasiya paketı, alıcı, məhsula sorğu, avtomobil, emal olunan detal, işçi və s.

3. *Model qrafının qovşaqları*. Model qrafının qovşaqları dedikdə tranzaktların xidmət mərkəzi başa düşülür. Qovşaqlarda tranzaktlar gecikə, xidmət edilə, yeni tranzaktlar qrupunu əmələ gətirə, digər tranzaktları ləğv edə bilər. Tranzakt həmişə model qrafının bir qovşağına və bundan asılı olmayaraq, koordinatları dəyişə bilən müəyyən fəzaya və ya müstəviyə aid ola bilər.

4. *Hadisə*. Hadisə - bir tranzakt qovşağının giriş faktıdır. Modeli işləyənlər hadisəni praktiki olaraq əllə idarə edə bilməzlər.

Hər hansı hadisələr zəncirindən keçən tranzakta baxaq. O, hadisədən hadisəyə yer dəyişərək, hadisələrlə əlaqədar olan təsirlərin həyata keçirilməsini təmin edir. Aşkardır ki, bütün modelləşdirmə boyu hərəkətdə olan belə aktiv tranzakt yeganədir. Bu zaman model vaxtının qiyməti tranzakt aktiv olana qədər dəyişməz qalır. Tranzaktın aktivliyi onun gələcək hadisələr siyahısında yerləşməsi ilə sona çatır və o da digərləri kimi öz növbəsini gözləyir. Ümumiyyətlə, istənilən hadisə baş verdikdən sonra tranzakt öz aktivliyini itirir.

5. *Resurs*. Resurs onun təbiətindən asılı olmadan modelləşdirmə prosesində 3 ümumi parametrlə xarakterizə oluna bilər: güc, qalıq və defisit(kəsir). *Güc* – resurs vahidinin maksimum qiymətinə uyğun ədəddir. *Qalıq* - resursun verilən zamanda məşğul olmayan vahididir. *Defisit* - verilən resursa növbə gözləyən tranzaktların cəmi sorğular üzrə resursun miqdarıdır.

6. *Fəza*. Fəza – coğrafi, dekart müstəvidir. Qovşaqlar, tranzaktlar, resurslar fəzanın nöqtələrinə birləşdirilə və orada qərarlaşa bilər.

Modelin daxili icrası proseslərin təqdimi üçün obyekt-yönlü üsuldan istifadə edir. Tranzakt, qovşaq, hadisə və resurslar imitasiya modelinin əsas obyektləridir.

Modellərin qurulması zamanı 2 əsas funksiya yerinə yetirilməlidir:

- sistemin vəziyyətinin zaman koordinatının təshihi;
- sistemdə müxtəlif hadisələrin uzlaşmasının təmini.

Beləliklə, modelin fəaliyyəti real zamanda deyil, süni vaxtda həyata keçirilməlidir. Bu isə tələb olunan məntiqlə hadisələrin baş vermələrini və onlar arası zaman intervalını tənzimləməlidir.

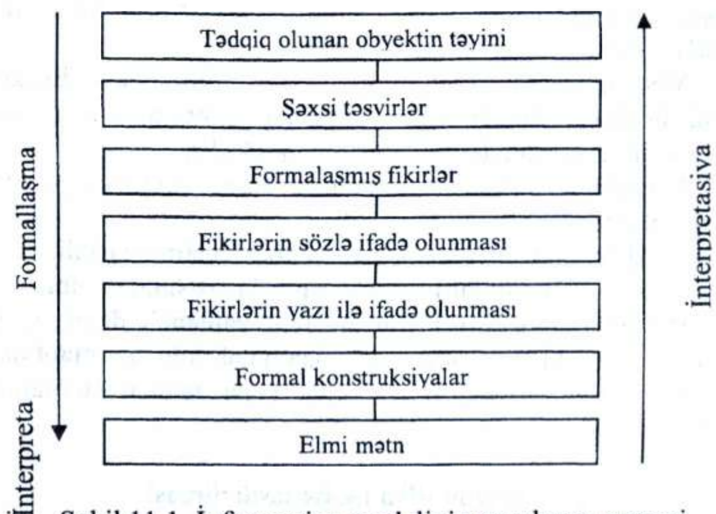
11.7. İnformasiya modelləşdirilməsi

11.7.1. İnformasiya modelləşdirilməsinin mahiyyəti və növləri

İnformasiya modelləşdirilməsində məqsəd tədqiq olunan obyektin, prosesin, hadisənin informasiya şəklində əks etdirilməsindən ibarətdir. *İnformasiya modeli* obyektin, prosesin, hadisənin informasiya baxımından təsviri deməkdir. İnformasiya modelinin qurulma prosesi tədqiq olunan obyektin təyinindən başlayaraq, onun təsviri üçün formal konstruksiyaların seçilməsinə qədər bir neçə mərhələni əhatə edir (şəkil 11.1). Bu prosesə "formallaşma" deyilir. "İnterpretasiya" adlanan əks proses isə çox vaxt dünyanın dərk edilməsində və öyrənilməsində istifadə edilir.

İnformasiya modelinin əsasında aşağıdakı müddəalar durur:

1. Hər bir obyekt elementlərdən ibarətdir;
2. Elementlər xassələrə malikdirlər;
3. Elementlər öz aralarında əlaqələrlə bağlıdırlar.



Şəkil 11.1. İnformasiya modelinin qurulması prosesi

Bu müddəalarla təyin edilən obyektlər informasiya modeli ilə təsvir oluna bilərlər.

İnformasiya modellərini aşağıdakı əlamətlərə görə siniflərə ayırırlar: təsvir üsulu, qurulma məqsədi, yaddaş mühiti (kompyuter) ilə bağlılığı, modelləşdirilən obyektin təbiəti.

Təsvir üsuluna görə informasiya modellərini iki sinfə bölürlər:

1. Formal dillərlə təsvir olunan modellər;
2. Qrafik üsullarla təsvir olunan modellər.

Formal dillərlə təsvir olunan modellərə aşağıdakıları aid etmək olar:

- riyazi dil vasitəsilə təsvir olunan modellər;
- cədvəl vasitəsilə təsvir olunan modellər;
- formal dil (deklarativ və ya prosedur) vasitəsilə təsvir olunan modellər;
- məhdudlaşdırılmış təbii dil vasitəsilə təsvir olunan modellər.

Qrafik üsullarla təsvir olunan modellərə isə aşağıdakıları daxil etmək olar:

- sxem üsulu ilə təsvir edilən modellər;
- diaqramlarla təsvir edilən modellər;
- qrafiklərlə təsvir edilən modellər;
- sxem, diaqram və qrafiklərdən birgə istifadə etməklə təsvir edilən modellər.

Qurulma məqsədinə görə informasiya modellərini 3 sinfə ayırırlar:

1. Təsnifat-yönlü modellər;
2. Statik modellər;
3. Dinamik modellər.

Təsnifat-yönlü modellər təsnifat məqsədilə qurulurlar. Bu tip modellərə misal olaraq ağacvari modelləri, geneoloji modelləri, Darvinə görə təbiətin inkişaf modelini, İnternet şəbəkəsində kataloqlar ağacını və s. göstərmək olar.

Statik modellər informasiya modellərinin böyük bir hissəsini təşkil edirlər. Buraya müəyyən vaxt intervalı ərzində obyektin vəziyyətini xarakterizə edən verilənlərlə qurulan modelləri aid etmək olar.

Dinamik modellər vaxt ölçüsünü nəzərə alırlar və adətən differensial tənliklərin həlli əsasında idarəetmə və proqnozlaşdırma məsələlərinin həlli məqsədilə qurulurlar.

Yaddaş mühiti ilə (kompyuterlə) bağlılığına görə informasiya modellərini iki sinfə bölürlər:

- infoloji (konseptual) modellər;
- dataloji modellər.

İnfoloji (informasiya-məntiqi) model yaddaş mühitinin təbiətindən və parametrlərindən asılı olmur. Yaddaş mühiti kimi elektron (kompyuter) və ya qeyri-elektron tipli daşıyıcılardan istifadə oluna bilər. Burada informasiya modeli modelləşdirilən obyektin atributlarını yalnız təbii formada, yəni real aləm baxımından nəzərə alır. Başqa sözlə, infoloji model obyektin kompyuterdən kənar informasiya modelini əks etdirir.

Verilənlər bazası konsepsiyasında həmin modelə *konseptual və ya məntiqi model* deyilir.

Dataloji model infoloji modelin kompyuter-yönlü təsvirini əks etdirir. Əksər halda dataloji modeldə verilənlər bazasının reallaşdırılması üçün tətbiq edilən sistemin (tətbiqi proqram paketinin) xüsusiyyətləri də nəzərə alınır. Dataloji modellərə misal olaraq verilənlərin iyerarxik, şəbəkə və relasiya modellərini göstərmək olar.

Modelləşdirilən obyektin təbiətinə görə informasiya modellərini 2 sinfə bölürlər:

- determinləşdirilmiş;
- ehtimallı.

Determinləşdirilmiş modellərdə obyektin dəyişilməsi və ya inkişafı müəyyən qanunlarla baş verir və həmin qanunlar məlum olur.

Ehtimallı modellərdə obyektin dəyişilməsi və ya inkişafı qanunauyğunluqlarla deyil, müəyyən ehtimalla baş verir. Məsələn, statistik qeyri-müəyyənliliyin və qeyri-səlis informasiyanın emalı ilə xarakterizə olunan obyektlər üçün qurulan modellər.

İnformasiya modellərinə misal olaraq şəxsiyyət vəsiqəsini, işçinin şəxsi işini, qatarların, təyyarələrin, avtobusların hərəkət qrafiklərini (cədvəllərini), dərs cədvəllərini, müəssisənin, şirkətin, dövlətin strukturunu, ölkələrin və dünyanın coğrafi xəritələrini, müəssisənin istehsalat planının cəbri tənliklər sistemi şəklində təsvirini, hər hansı verilənlər bazasının konseptual modelini və s. göstərmək olar.

10.7.2. İnformasiya modelləşdirilməsinin metodologiyası

Yuxarıda qeyd etdiyimiz kimi, hər hansı obyekt üçün informasiya modelinin qurulması həmin obyektin təyinindən

başlayır. Mücərrəd anlayış olan obyekt rolunda tədqiq edilən əşya, material, cihaz, qurğu, hadisə, proses və s. çıxış edə bilər. İnformasiya modelləşdirilməsində, adətən, obyekt anlayışı *predmet* (mövzu) *sahəsi* anlayışı ilə ifadə edilir. Bu baxımdan, informasiya modelləşdirilməsinin ilkin mərhələsi predmet sahəsinin təyinini əhatə edir.

Predmet sahəsinin təyinində onun sərhədlərinin dəqiqləşdirilməsi mühüm əhəmiyyət kəsb edir. Bu mərhələdə, həmçinin, baxılan predmet sahəsi üzrə istifadəçilərin informasiya tələbləri nəzərə alınır. Belə tələblər, adətən, konseptual xarakter daşıyırlar, yəni burada tətbiq ediləcək texniki, linqvistik və proqram vasitələri nəzərə alınmır.

İnformasiya modelləşdirilməsi müxtəlif metodikalarla aparıla bilər. Həmin metodikalar bir-birindən predmet sahəsinin növünə və ya xarakterinə görə fərqlənirlər. Məsələn, predmet sahəsi kimi müəssisə və ya təşkilat götürülərsə, müxtəlif baxışlara uyğun olaraq 2 tip metodikadan istifadə etmək mümkündür: obyektyönlü və funksional(struktur)-yönlü [21].

Obyektyönlü metodikada müəssisəni və ya təşkilatı bir-birilə qarşılıqlı əlaqəli obyektlər toplusu kimi təsvir edirlər. Məsələn, istehsalat müəssisəsində obyekt kimi istehsalat vahidləri (şöbələr, sahələr, sexlər və s.) çıxış edə bilərlər. Bu metodikanın tətbiqində məqsəd predmet sahəsini təşkil edən obyektləri ayırmaq və görülən işlərə (funksiyalara) cavabdehliyi onlar arasında bölüşdürməkdən ibarətdir.

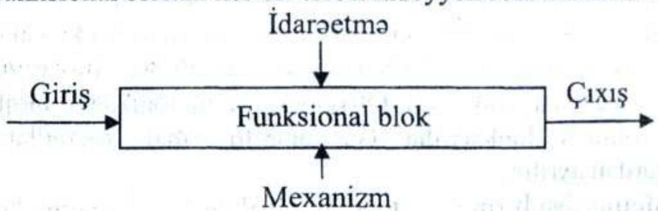
Funksional-yönlü və ya struktur metodikada təşkilata, giriş informasiya axınını çıxış axınına çevirən funksiyalar toplusu kimi baxılır. İnformasiyanın çevrilməsi prosesinə müəyyən resurslar cəlb edilir. Obyekt-yönlü metodikadan fərqli olaraq, burada funksiyalar (verilənlərin emalı metodları) verilənlərdən ayrılır.

İnformasiya-biznes modelləşdirilməsi baxımından göstərilən metodikalardan hər birinin özünə məxsus üstünlükləri var. Obyekt-yönlü yanaşma dəyişilmələrə daha davamlı olan sistem qurmağa imkan verir, müəssisənin və təşkilatın mövcud strukturuna daha uyğundur. Funksional modelləşdirmə isə, təşkilati struktur yenicə formalaşanda və ya dəyişmə ərəfəsində olduqda səmərəlidir. Belə yanaşmada yerinə yetirilən funksiyalar icraçılar tərəfindən daha yaxşı başa düşülür.

Funksional sistemlərin qrafik təsviri dili olan SADT-ın (Structured Analysis and Design Technique) sonrakı inkişafı nəticəsində meydana gələn *IDEF metodologiyası* tədqiq edilən sistemin modelləşdirilməsini tam təmin edən və bütün prosesləri təsvir etməyə qadir funksional sxemin qurulmasında beynəlxalq standart kimi geniş tətbiq edilir. IDEF standartlar ailəsi keçən əsrin 80-cı illərində qəbul edilmiş istehsalat müəssisəsinin avtomatlaşdırılması üçün ICAM (Integrated Computer Aided Manufacturing) proqramı əsasında yaradıldığından, IDEF abbreviaturası da bu proqramın adından götürülmüşdür (IDEF=Icam DEFintion) [21]. Həmin standartın sonuncu redaksiyası 1993-cü ildə ABŞ-ın Standartlar və Texnologiyalar üzrə Milli İnstitutu (NIST) tərəfindən buraxılmışdır.

IDEF metodologiyası 4 anlayışa əsaslanır: funksional blok, interfeys qövsü, dekompozisiya, qlossari.

Funksional blok (Aktivity Box)-baxılan sistem çərçivəsində müəyyən funksiyanı təsvir edir. Diaqramda funksional blok düzbucaqlı formasında göstərilir (şəkil 11.2). Funksional blokun hər bir tərəfi müəyyən rola malikdir.



Şəkil 11.2. Funksional blok

İnterfeys qövsü (Arrow) –funksional blokda emal edilən və ya funksiyaya digər təsiri olan elementi əks etdirir. İnterfeys qövsü vasitəsilə sistemdə baş verən prosesləri bu və ya digər dərəcədə təyin edən müxtəlif obyektlər əks etdirilir. Burada obyektlər kimi real aləmin elementləri (dəzgah, qurğu, avtomobil, işçi və s.) və ya informasiya axınları (sənədlər, verilənlər, təlimatlar və s.) çıxış edə bilərlər. İnterfeys qövsünü, onun funksional blokun hansı tərəfinə uyğun gəlməsinə görə, "daxil olan", "xaric olan" və ya "idarəedici" adlandırırlar. Standartın tələbinə görə hər bir funksional blok ən azı bir "idarəedici" və bir "xaric olan" qövsə malik olmalıdır.

Dekompozisiya (Dekompsition)-IDEF standartının əsas anlayışıdır. Dekompozisiya prinsipindən mürəkkəb prosesin, onu təşkil edən funksiyalara ayrılması üçün istifadə edilir. Dekompozisiya sistemin modelini ayrı-ayrı diaqramların iyerarxik strukturu şəklində təsvir etməyə imkan verir. Bununla da model sadələşir və asan başa düşülür.

Qlossari (Glossary-lüğət)-özündə IDEF-in hər bir elementi (diaqram, funksional blok, interfeys qövsü) üçün uyğun təyinatlar, açar sözləri, izahatlar toplusu saxlayır. Başqa sözlə, qlossari modelin elementlərinin mahiyyətlərini təsvir edir. Beləliklə, qlossari diaqramları lazım olan əlavə informasiya ilə təmin etməklə, qrafik dili tamamlayır.

IDEF modelində əvvəlcə sistem baxılan predmet sahəsinin hüdudlarından kənara istiqamətlənmiş interfeys qövslərinə malik bir funksional blok şəklində tam vahid kimi təsvir olunur. Bir funksional blokdan ibarət olan bu cür diaqrama *kontekst diaqramı* deyilir. Kontekst diaqramına izahatda diaqramın qurulmasında məqsəd(purpose), modelin əsas inkişaf istiqamətlərini və lazımi detallaşdırma dərəcəsini təyin edən baxış (viewpoint) göstərilir.

Dekompozisiya prosesi zamanı kontekst diaqramındakı funksional blok digər diaqramlarla *detallaşdırılır*. 2-ci səviyyənin diaqramı kontekst diaqramındakı funksional blokun əsas funksiyalarını əks etdirən funksional bloklardan ibarət olur. Bu səviyyədəki altfunksiyalar da analoji olaraq uyğun funksional blokun dekompozisiyası nəticəsində detallaşdırıla bilərlər. Funksional blokun hər dəfə dekompozisiyası zamanı həmin bloka daxil olan və ondan xaric olan interfeys qövsləri aşağı səviyyənin diaqramında nəzərə alınır. Bununla da IDEF modelinin struktur tamlığı təmin edilir.

Adətən, IDEF–modellər özlərində mürəkkəb və zəngin informasiya saxlayırlar. Onların həddindən artıq yüklənməməsi və asan qavranılması üçün standartda müəyyən məhdudiyyətlər qəbul edilmişdir. Belə ki, diaqramda 3-dən 6-ya qədər funksional blokun təsviri tövsiyyə edilir. Hər bir funksional bloka daxil olan və ondan xaric olan interfeys qövslərinin sayı 4-dən çox olmamalıdır.

IDEF standartı informasiya-biznes modelinin təşkilatın müxtəlif fəaliyyət sahələrində çalışan insanlar qrupu tərəfindən qurulmasını və razılaşdırılmasını təmin edən prosedurlar toplusuna malikdir. IDEF-in qrafik dilinin əyaniliyi modelin layihələndirilməsində iştirak etməyən insanlar tərəfindən də qavranılmasına, həmçinin, onun təqdimatına və nümayiş etdirilməsinə imkan verir. Qurulmuş modelin əsasında sonradan həmin modeldə dəyişikliklər edilməsinə və təkmilləşdirilməsinə yönəlmiş yeni layihələr reallaşdırıla bilər.

10.7.3. Verilənlərin modelləri

Verilənlərin modelləri dataloji informasiya modelləri sinfinə aiddir və verilənlər bazalarında (VB) verilənlərin təsviri üçün tətbiq edilir.

Verilənlərin modeli onların necə və hansı qaydalarla strukturlaşmasını təyin edir. Lakin struktur xassələri verilənlərin semantikasını və onlardan istifadə üsullarını tam açmağa imkan vermir. Bunun üçün verilənlər üzərindəki

əməliyyatlar da müəyyən olunmalı və həmin əməliyyatlar verilənlərin strukturları ilə uyğunlaşdırılmalıdır [1].

Verilənlərin modelləri yüksək dərəcədə tipikləşdirilmiş modellər sinfinə aiddir. Bu o deməkdir ki, hər bir verilən bu və ya digər kateqoriyaya aid edilə bilər. Əgər belə aidetmə mümkün deyilsə, onda verilənі süni yolla müəyyən kateqoriyaya gətirib çıxarırlar. Əksər halda kateqoriyalar əvvəlcədən müəyyənləşdirilir, məsələn, «mahiyyət», «atribut», «əlaqə» kateqoriyaları. Kateqoriyalar və onlar arasındakı əlaqələr birlikdə *sxem* adlanır.

Tətbiq sahəsinin xüsusiyyətlərindən və istifadəçilərin tələblərindən asılı olaraq verilənlərin modelləri müxtəlif ola bilər. Buna baxmayaraq, bütün modellərə aid olan ümumi anlayışlar və təyinetmələr mövcuddur. Hər bir model real obyektlərin statik və dinamik xassələrini əks etdirməlidir. Statik xassələrə vaxta görə invariant olan xassələr aiddir. Onlar həmişə və ya müəyyən vaxt intervalında doğru və dəyişməz olur. Dinamik xassələr isə obyektlərin məruz qaldıqları əməliyyatlar nəticəsində vəziyyətlərinin dəyişilmələrini əks etdirirlər.

Statik xassələr verilənlər modelinin yaranma qaydalarını ifadə edir və verilənlərin təsviri dili ilə əlaqələndirilir. Burada əsas məqsəd verilənlərin mümkün strukturlarını və onlar arasındakı əlaqələri təyin etməkdir. Verilənlərin strukturunun təyini yaranma qaydalarına cavab verən uyğun kateqoriyaların müəyyən edilməsi ilə əldə olunur. Kateqoriyaların müəyyənləşdirilməsi isə atributlar və onların mümkün qiymətləri vasitəsilə aparılır. Bu zaman hər bir kateqoriyaya aid edilə bilən «tamlığın məhdudluğu» nəzərə alınmalıdır. Məsələn, işçinin tabel nömrəsi unikal olmalıdır və ya əmək haqqı 5 rəqəmli ədəddən böyük olmamalıdır. Aşkar məhdudluqlarla yanaşı modeldə struktur spesifikasiyalarına aid olan daxili məhdudluqlar da göstərilə bilər. Məsələn, obyektlər arasındakı əlaqələr ağacvari strukturla məhdudlaşa bilər.

Verilənlər üzərində aparılan əməliyyatlar çoxluğu verilənlər modelinin dinamiki xassələrini ifadə edir və verilənlərlə əməliyyat dili ilə əlaqələndirilir. Əməliyyatlar çoxluğu verilənlər bazasının VB_i vəziyyətindən VB_j vəziyyətinə çevrilməsi üçün aparılan əməliyyatları əhatə edir. Həmin çoxluğun hər bir əməliyyatı VB-ni bir vəziyyətdən digərinə çevirə bilər. Belə olan halda VB-nin məntiqi strukturu dəyişilmir. Bu isə o deməkdir ki, daxili məhdudluqların pozulmasına içazə verilmir.

Verilənlərin struktur modelləşdirilməsi üçün klassik və onların əsasında yaradılmış yeni modellərdən istifadə olunur. Klassik modellərə aşağıdakılar aiddir: *iyerarxik, şəbəkə* və *relasiya* modelləri. Son illərdə yaranan və praktikada geniş tətbiq olunan yeni modellərə aşağıdakıları aid etmək olar: *postrelasiya, çoxölçülü* və *obyekt-yönlü* modellər.

Göstərilən modellərin genişləndirilməsindən yaradılan digər modellərdən də istifadə edilir. Onlara misal olaraq *obyekt-relasiya, deduktiv obyekt-yönlü, semantik, konseptual-yönlü* modelləri göstərmək olar. Bu modellərdən bəziləri verilənlər bazalarını, biliklər bazalarını və proqramlaşdırma dillərini inteqrasiya etmək məqsədilə tətbiq olunur.

İyerarxik model verilənlərin nizamlı qraf (və ya ağac) şəklində təsvirinə əsaslanır. Qraf diaqramında təpələr (düyünlər) mahiyyətlərin tipini, budaqlar(tillər) isə mahiyyətlər arasındakı əlaqələri göstərir. İyerarxik modelin əsas məhdudluqları bunlardır:

- əlaqələrin bütün tipləri funksional xarakterlidir (1:1, 1:M, M:1);
- əlaqələr ağacvari struktura malikdirlər.

Verilənlər bazasının sxemini əks etdirən qraf-diaqrama *təyinat ağacı* deyilir. Əgər verilənlər təbii olaraq ağacvari struktura malikdirsə, iyerarxik modelin tətbiqi heç bir problem yaratmır. Lakin ağacvari strukturdan fərqli strukturların təsviri üçün modelə əlavə vasitələr daxil edilir. İyerarxik modeldə

struktur dəyişikliklərinin aparılması, ələlxüsüs altağacların ağacdan kənarlaşdırılması və ya ağaca əlavə edilməsi böyük çətinliklərlə əlaqədardır.

Şəbəkə modelində verilənlər ixtiyari qraf şəklində təsvir olunur. İyerarxik modeldən fərqli olaraq, şəbəkə modelində 1:1, 1:M, M:1 funksional əlaqələrlə yanaşı, M:N tipli əlaqələr də qurmaq mümkündür.

Şəbəkə modelində M:N tipli əlaqənin reallaşdırılması onun k sayda ($1 \leq k \leq M$) 1:N əlaqəsinə çevrilməsi ilə əldə edilir. Bu isə həm məntiqi, həm də fiziki səviyyədə mürəkkəblik yaradır.

Relasiya modeli . İBM firmasının əməkdaşı Edqar Kodd tərəfindən təklif edilmiş, verilənlərin strukturlarının nisbətlər şəklində təsvirinə və cədvəl formasında ifadə olunmasına əsaslanır.

Nisbət (ingiliscə-relation)-kortej adlanan elementlər çoxluğundan ibarətdir. Nisbətin təsvirinin əyani forması bizim üçün adi olan ikiölçülü cədvəldir. Bildiyimiz kimi, cədvəl sətirlərdən və sütunlardan ibarət formadır. Cədvəlin hər bir sətri eyni struktura malik olan sahələrdən ibarətdir. Nisbət baxımından cədvəlin sətrinə *kortej,* sütununa isə *domen* deyilir. Adlandırılmış domenə isə *atribut* deyilir.

Fayl baxımından isə cədvəl-fayla, cədvəlin sətri-yazıya, sütun isə elementar verilənə uyğun gəlir.

Relasiya modeli nisbətlər cəbri adlanan riyazi aparatın verilənlər bazasına tətbiqi nəticəsində yaranmışdır. Həmin riyazi aparat relasiya modelinin xassələrini aydın və yığcam formada təyin etməyə imkan verir. Bundan əlavə, relasiya modeli nisbətlər üzərində müxtəlif əməliyyatların (dekart hasili, birləşmə, kəsişmə, çıxma, bölmə, seçmə, proyeksiya və s.) aparılmasına və nisbətlər arasında istənilən tip əlaqənin (1:1, 1:M, M:N) reallaşdırılmasına imkan yaradır. Bu cəhətlərə görə keçən əsrin 70-ci illərin sonundan başlayaraq yaradılan verilənlər bazalarının əksəriyyətində relasiya modelindən istifadə olunur.

Relasiya modelinin çatışmayan cəhətlərinə aşağıdakıları aid etmək olar: a) kortejrəin (yazıların) təyin edilməsi üçün standart vasitələr yoxdur; b) nisbətlərin normallaşdırılması tələb olunur.

Klassik relasiya modeli nisbətin atributlarının bölünməz (atomar) olduqlarını nəzərdə tutur, yəni cədvəldə informasiya 1-ci normal formada olmalıdır. Lakin bu məhdudiyyət bəzi halda tətbiqin səmərəli reallaşdırılmasına maneçilik törədir.

Postrelasiya modeli cədvəldə saxlanılan verilənlərin bölünməzliyinə qoyulan məhdudiyyətləri aradan qaldırmaqla, relasiya modelinin genişləndirilməsinə imkan yaradır. Postrelasiya modelində çoxqiymətli sahələrə icazə verilir. Çoxqiymətli sahələrin qiymətlər dəsti əsas cədvələ salınan(daxil edilən) ayrıca cədvəl hesab olunur. Yəni, burada cədvəllərin bir-birinin içərisinə salınmasına icazə verilir.

Çoxölçülü model. Verilənlər modelinin çoxölçülüyü - verilənlərin təsviri və emalı zamanı onların strukturunun çoxölçülü məntiqi təsviri deməkdir. Relasiya modeli ilə müqayisədə verilənlərin çoxölçülü təşkili daha artıq əyaniliyə və informativliyə malik olur.

Obyekt-yönlü model. Obyekt-yönlü modellə verilənlərin təsvirində VB-nin ayrı-ayrı yazılarını təyin etmək mümkün olur. Obyekt-yönlü proqramlaşdırma dillərindəki uyğun vasitələrə oxşar mexanizmlərin köməyilə VB-nin yazıları ilə onların emalı funksiyaları arasında qarşılıqlı əlaqələr qurulur.

11.8. Kompyuter modelləşdirməsi

Müasir kompyuter (imitasiya) modelləşdirməsi özünün müxtəlif təzahürlərində praktiki olaraq, müasir riyaziyyatın bütün aparatından istifadə edir.

Kompyuter modelləşdirməsinin məğzi aşağıdakından ibarətdir: kompyuterin köməyi ilə riyazi model əsasında seriya hesablama eksperimentləri aparılır, yəni obyekt və ya proseslərin xassələri tədqiq olunur, onların optimal parametrləri və iş rejimləri tapılır, model dəqiqləşdirilir.

Hesablama eksperimenti baha başa gələn natur təcrübəni kompyuterdə hesablamalarla əvəz etməyə imkan verir. O qısa zaman kəsiyində və kiçik material sərfi ilə layihələndirilən obyektin çoxlu sayda variantlarının və ya prosesin istismarı üçün müxtəlif rejimlərinin tədqiqini həyata keçirir. Bu isə mürəkkəb sistemlərin işlənməsi və onların istehsalatda tətbiqi müddətini xeyli azaldır.

Beləliklə, kompyuter modelləşdirməsi aşağıdakıları nəzərdə tutur:

- imitasiya (hesablama) modelləşdirilməsi;
- hadisələrin və proseslərin vizuallaşdırılması (qrafiki modelləşdirmə);
- böyük texnologiyalar (kompyuterlə ölçü cihazlarının, vericilərin, sensorların və s. birgə istifadəsinə əsaslanan xüsusiləşdirilmiş tətbiqi texnologiyalar).

Kompyuter texnologiyalarının inkişafı ilə əlaqədar sistemlərin analizi üçün modelləşdirmənin imitasiya metodları geniş tətbiq tapmışdır.

Məşhur amerikalı alim Robert Şennon aşağıdakı tərifi verir: "İmitasiya modelləşdirməsi real sistemin modelinin qurulması prosesidir və bu model əsasında sistemin fəaliyyətini (özünüaparmasını) qavramaq, yaxud da qiymətləndirmək məqsədilə eksperimentlərin qoyulmasıdır".

Bütün imitasiya modelləri "qara qutu" prinsipindən istifadə edir. Bu o deməkdir ki, imitasiya modelləri sistemə bir sıra giriş siqnalları daxil olduqda sistemin çıxış siqnallarını hasil edirlər.

İmitasiya modelləşdirilməsində obyektlərin, proseslərin və ya sistemlərin fəaliyyəti alqoritmlər yığımı ilə təsvir edilir.

Alqoritmlər proses və ya sistemi təşkil edən elementar əməliyyatları, onların məntiqi strukturlarını və zamana görə icra ardıcıllığını saxlamaqla imitasiya edir. İmitasiya modelləşdirməsi ilkin verilənlərə əsasən proses və ya sistemin müəyyən zaman anındakı vəziyyəti haqqında məlumat almağa imkan verir. Deməк olar ki, imitasiya modelləri real obyekt, hadisə, proses və ya sistemin özünüaparmasını imitasiya edən, kompyuterdə riyazi modellərin köməyilə aparılan hesablama eksperimentləridir.

Beləliklə, imitasiya modelləri analitik modellərdəki kimi özünün xüsusi həllərini formalaşdırmır, ancaq eksperimentlər vasitəsilə təyin edilən şərtlər daxilində sistemin davranışını analiz etmək üçün vasitə rolunu oynayırlar.

İmitasiya modelləşdirilməsinin tətbiqi müəyyən şərtlər daxilində məqsədəuyğundur. Bu şərtlər R.Şennon tərəfindən belə təyin edilir:

1. Verilən məsələnin başa çatdırılmış riyazi qoyuluşu mövcud deyil, yaxud da formalaşdırılmış riyazi modelin analitik metodla həlli işlənilməyib. Bu kateqiriyaya çoxlu kütləvi xidmət modelləri aiddir.

2. Analitik metodlar mövcuddur, lakin riyazi proseduralar o qədər mürəkkəb və çoxzəhmətlidir ki, onlardan istifadə edilməsi səmərəli olmur. Bu halda imitasiya modelləşdirməsi məsələnin daha sadə həll üsulunu verir.

3. Müəyyən parametrlərin qiymətləndirilməsindən başqa imitasiya modelində müəyyən dövr ərzində prosesin gedişinə nəzarəti həyata keçirmək də mümkündür.

İmitasiya modelləşdirməsinin əlavə üstünlüyü olaraq, onun təhsil və peşə hazlrlığı sahəsində geniş tətbiqi imkanlarını saymaq olar. İmitasiya modelinin işlənməsi və istifadəsi eksperiment aparana modeldə real vəziyyətləri asanliqla görmək imkanı verir.

Kompyuter (imitasiya) modelləşdirməsi aşağıdakı mərhələlərlə yerinə yetirilir:

- modelləşdirmənin məqsədlərinin təyini (bu, obyektin qavranılması, idarə edilməsi və obyektə təsirlərin proqnozlaşdırılmasından ibarətdir);
- modelin giriş dəyişənlərinin çıxış dəyişənlərinə təsirinin vaciblik dərəcəsinə görə bölünməsi;
- modelin riyazi yazılışının (təsvirinin) axtarılması;
- qurulmuş modelin tətbiqi;
- alqoritm və proqramların qurulması;
- proqramların icrası və testləşdirilməsi;
- modelin real obyektə adekvatlılığının müəyyənləşdirilməsi.

11.8.1. Kompyuter modelləşdirməsinin mərhələləri

Sistemlərin modelləşdirilməsində kompyuter aşağıdakı funksiyaları yerinə yetirir:

- ənənvi hesablama vasitələri, alqoritmlər, texnologiyalarla həll edilən məsələlərin həlli üçün köməkçi vasitə rolunu yerinə yetirmək;
- ənənəvi hesablama vasitələri alqoritmlər, texnologiyalarla həll edilə bilməyən məsələlərin həlli üçün yeni məsələlərin qoyuluşu və həlli vasitəsi rolunu ifa etmək;
- kompyuter öyrənmə-modelləşdirmə vasitələrinin konstruksiyası rolunu yerinə yetirmək;
- yeni biliklərin alınması üçün modelləşdirmə vasitəsi rolunu oynamaq;
- yeni modellərin öyrətmə vasitəsi rolunu ifa etmək.

Kompyuter modelləşdirməsi-kompyuterdə biliklərin təsvirinin əsasıdır.

Kompyuter modelləşdirməsi məsələnin qoyuluşundan-nəticələrin alınmasına qədər aşağıdakı *mərhələləri* keçir:

1. Məsələnin qoyuluşu:

a) məsələnin formalaşdırılması;

b) modelləşdirmənin məqsədlərinin və onların üstünlük dərəçələrinin təyini;

c) modelləşdirmə obyekti-sistem haqqında informasiyanın yığılması;

d) verilənlərin təsviri (onların strukturları, diapazonları mənbələri və s.).

2. Modelləşdirmədən əvvəlki analiz:

a) mövcud analoqların və altsistemlərin analizi;

b) modelləşdirmənin texniki vasitələrinin analizi;

c) modelləşdirmənin proqram təminatının analizi (proqramlaşdırma dilləri, proqram paketləri, instrumental mühitlər);

d) riyazi təminatın analizi (modellər, metodlar, alqoritmlər).

3. Məsələnin (modelin) analizi:

a) verilənlərin strukturlarının işlənməsi;

b) verilənlərin giriş/çıxış spesifikasiyalırının, formalarının hazırlanması;

c) modelin struktur və tərkibinin layihələndirilməsi.

4. Modelin tədqiqi:

a) altmodellərin tədqiqi metodlarının seçilməsi;

b) alqoritmlərin, onların psevdekordlarının seçilməsi, adaptasiyası və işlənməsi;

c) altmodellərdən modelin yığılması;

d) modelin identifikasiyası (əgər buna şərait varsa);

e) modelin istifadə olunan adekvatlılıq, dayanıqlılıq və həssaslıq kriterilərinin formalaşdırılması.

5. Proqramlaşdırma:

a) testləşdirmə metodu və testlərin seçilməsi;

b) proqramlaşdırma dilində kodlaşdırma;

c) proqramın şərhi.

6. Testləşdirmə və sazlama:

a) sintaksis sazlama;

b) semantik sazlama (məntiqi strukturun sazlanması);

c) test hesabatları, testləşdirmənin nəticələrinin analizi;

d) modelin dayanıqlığının tədqiqi.

7. Modelləşdirmənin qiymətləndirilməsi:

a) modelləşdirmə vasitələrinin qiymətləndirilməsi;

b) modelləşdirmənin adekvatlığının qiymətləndlirilməsi;

c) modelləşdirmənin həssaslığının qiymətləndirilməsi;

d) proqramın optimallaşdırılması.

8. Sənədləşdirmə:

a) Məsələnin, məqsədlərinin yazılışı;

b) modelin, metodun, alqoritmin təsviri;

c) reallaşdırma vasitələrinin təsviri;

d) imkan və məhdudiyyətlərin təsviri;

e) giriş/çıxış formatlarının, spesifikasiyalarının təsviri;

f) testləşdirmənin yazılışı;

g) istifadəçi təlimatlarının yaradılması.

9. Müşayiət:

a) istifadənin, istifadə tezliyinin, istifadəçilərin sayının, istifadə tipinin analizi (dialoq, avtonom və s.), modeldən istifadə zamanı imtiyazların analizi;

b) modelin, alqoritmin və proqramın istismarına xidmət edilməsi;

c) imkanların genişləndirilməsi, yeni funksiyaların daxil edilməsi və ya modelləşdirmə rejimlərinin dəyişdirilməsi (eyni zamanda mühitin);

d) proqramda gizli səhvlərin tapılması və açıqlanması.

10. Modeldən istifadə.

11.8.2. Kompyuter modelləşdirməsinin instrumental vasitələri

Modellərin yaradılmasinin universal instrumental vasitələri ümumi istifadəli proqramlaşdırma dilləridir (Pascal/Turbo Pascal, C/C++ və s.). Proqramlaşdırma dillərinin əsasında proqramların layihələndirilməsi vasitələrinin inkişafı geniş vüsət almışdır (Delphi, Visual C++ və s.). Bu vasitələr isə çox zəhmət tələb edən bir sıra əməliyyatların yerinə yetirilməsini asanlaşdırır(məsələn, proqram interfeysinin yaradılması). Bunlarla yanaşı, modelləşdirmənin xüsusi vasitələri də mövcuddur. Həmin vasitələr universal proqramlaşdırma dilləri ilə müqayisədə modeli tez, eyni zamanda az məsrəflə qurmağa və tətqiq etməyə imkan verir.

Modelləşdirmənin xüsusi vasitələrinin inkişafında iki istiqaməti ayırd etmək olar:

1. *Böyük və mürəkkəb sistemlərin analizi üçün modelləşdirmə vasitələri.* Buraya böyük və mürəkkəb sistemlər sinfinin analizi üçün modelləşdirmə dilləri (məsələn, GPSS, SİMSCRİPT və s. kimi imitasiya modelləri dilləri), analitik metodları modelləşdirmək üçün istifadə edilən tətbiqi proqram paketləri(MathCad, MatLab,SAS və) daxildir.

Beləliklə, imitasiya modelləşdirməsi dilləri kifayət qədər mürəkkəb sistemlərin modellərini daha az müddətdə tərtib etməyə imkan verirlər.

İmitasiya modelləri dilləri xüsusiləşdirilmiş proseduralara malik olduqlarına görə, universal proqramlaşdırma dilləri ilə müqayisədə, modelləşdirmə prosesinin həyata keçirilməsi zamanı çəkilən zəhməti və müddəti azaldır. Həmin prosedurlar istənilən imitasiya modellərində tətbiq oluna bilərlər və anlayışların dəqiq ifadə edilməsi ilə fərqlənirlər. Bu anlayışlar imitasiya olunan prosesləri xarakterizə edirlər və avtomatik sürətdə imitasiya modelləşdirməsi prosesində zəruri olan müəyyən tip verilənlərin formalaşdırılmasını təmin edirlər.

Bu vasitələrin əsas çatışmazlığı onlardan istifadə üçün tədqiqatçının xüsusi hazırlığa malik olmasının vacibliyidir.

2. *Proqram kompleksləri.* Belə proqram kompleksləri konkret bir predmet sahəsinə aid olan sistemin modelləşdirməsi üçün ixtisaslaşdırılır. Bu cür proqramların ancaq müəyyən predmet sahəsi ilə məhdudlaşdırılması kimi çatışmazlığına baxmayaraq, həmin sahə mütəxəssisinin istifadə etməsi asan və səmərəli olur.

Hal-hazırda imitasiya modelləşdirmə dilləri vizuallaşdırılır və müasir tətbiqi proqram paketlərindən geniş istifadə edilir.

ƏDƏBİYYAT

1. Kərimov S.Q. İnformasiya sistemləri. -Bakı: Elm, 2008, -676s.

2. Kərimov S.Q., Həbibullayev S.B., İbrahim-zadə T.İ. İnformatika. -Bakı, 2009,-436s.

3. Sərdarov Y.B. İnformatika və hesablama texnikasının riyazi elementləri /Dərs vəsaiti/. – Bakı, 2006. – 102 s.

4. Sərdarov Y.B. Formal məntiq və informatika. "Sosial- siyasi fəlsəfə problemləri"(məqalələr toplusu).- Bakı, 1999.

5. Грей П. Логика, алгебра и базы данных. (перевод с англ.).- Москва, 1989 г., 368 с.

6. Н. А. Алешина и др. Логика и компьютер. Моделирование рассуждений и проверка правильности программ. -Москва, 1990 г.- 240 с.

7. Молпас Дж. Реляционный язык Пролог и его применение(перевод с англ.).- Москва, 1990 г., 464 с.

8. Дж. Кемени и др. Введение в конечную математику. - Москва, 1963 г.

9. Тейз А. и др. Логический подход к искусственному интелекту: от класической логики к логическому программированию(перевод с фран.).- Москва, 1990 г.- 432 с.

10. Яглом Г. Необыкновенная алгебра.- Москва, 1968 г.- 25 с.

11. Колмогоров А.Н., Фрагалин А. Г. Введение в математическую логику.- Москва, 1982 г.- 120с.

12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элэменты теории функций и функционального анализа. –М., 1981.

13. Лавров И.А., Максимова Л.Л. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. – Москва,1984.-224с.

14. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика:пер с англ. – Москва, 1990. -384с.

15. Могилев А.В. и др. Информатика: Учеб. пособие для стув. пед. вузов. – Москва, 2004.-848 с.

16.Дегтяров Ю.И. Основы кибернетики. Теория кибернетических систем. М:. Высш. Школа, 1976.-408с.

17.Джордж Ф. Основы кибернетики. Пер. с англ.- Москва: Радио и связь, 1984.-272 с.

18.Мейер Д. Теория реляционных баз данных. Пер. с англ.- Москва:Мир, 1987.-608с.

19.Четвериков В.Н., Ревунков Г.И., Самохвалов Э.Н. Базы и банки данных.-М.: Высш. Школа, 1987.-248 с.

20.Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учашихся веузов.- Москва: Наука, 1986.-544с.

21.Грекул В.И. Проектирование информационных систем. Метедология моделирования предметной области. www.intuit.ru/department/se/devis/6

AMEA-nın müxbir üzvü, professor, Azərbaycan
Dövlət Neft Akademiyasının "Kompyuter
texnologiyaları və proqramlaşdırma"
kafedrasının müdiri
KƏRİMOV SABİT QƏHRƏMAN oğlu

Azərbaycan Dövlət Neft Akademiyasının
"Kompyuter texnologiyaları və proqramlaşdırma"
kafedrasının dosenti
SƏRDAROV YAQUB BALI oğlu

KOMPYUTER ELMİNİN NƏZƏRİ ƏSASLARI

DƏRSLİK

Çapa imzalanmışdır: 26.10.2009.
Kağız formatı $60x84^{1}/_{16}$
Çap vərəqi 18. Sifariş 120. Sayı 300
Qiyməti müqavilə ilə.

ADNA-nın mətbəəsi
Bakı, Azadlıq küçəsi, 20