Ә. ҺӘБИБЗАДӘ

ФУНКСИОНАЛ АНАЛИЗ

Ә. ҺӘБИБЗАДӘ
Проф., физика-ријазијјат елмләри доктору

ФУНКСИОНАЛ АНАЛИЗ

•

ДӘРСЛИК

Азәрбајҹан ССР Али вә Орта Ихтисас Тәһсили Назирлији тәрәфиндән тәсдиг едилмишдир

„МААРИФ“ НӘШРИЈЈАТЫ
Бакы — 1978

Мүвафиг дәрс програмы әсасында јазылмыш бу дәрсликдә гошма фәзалар вә гошма операторларла әлагәдар олан бир нечә мүһүм теоремин исбаты верилмиш, гијмәтләри мүәјјән Банах фәзасына дахил олан скалјар аргументли һоломорф функсијалар үчүн Коши нәзәријјәсинин бә'зи тәклифләри әсасландырылмыш, мүасир функсионал анализ курсунун чох мүһүм шөбәси олан спектрал нәзәријјәјә хүсуси јер верилмиш, мәһдуд вә гејри-мәһдуд операторларын үмуми спектрал нәзәријјәси вә Һилберт фәзасында тамам кәсилмәз операторларын бә'зи спектрал мәсәләләринә ајрыча фәсил һәср олунмушдур.

Дәрсликдән университет вә дикәр али мәктәбләрин јухары курс тәләбәләри, аспирантлар вә елми ишчиләр истифадә едә биләрләр.

Елми редактору: *Ч. Аллаһвердијев*
проф., физика-ријазијјат елмләри доктору

Дәрслијә Азәрбајчан ССР ЕА-нын
Механика-Ријазијјат Институту
рә'ј вермишдир.

$\frac{2-3-1}{\text{М}-652}$ 134–78

Унудулмаз мүәллимимиз
академик Заһид Хәлиловун
хатирәсинә һәср едирәм

КИРИШ

Функсионал анализ, тәхминән XX әсрин әввәлләриндә јаранмыш, лакин ријази фәнн кими анҹаг 1930—1940-ҹы илләрдә формалашараг сәрбәст инкишаф етмишдир. Бу саһәдә ән гијмәтли әсәрләрдән бири мәшһур полјак ријазијјатчысы С. Банаха мәхсусдур. С. Банахын „Функсионал анализ курсу“ адлы монографијасы 1948-ҹи илдә Украјна дилинә тәрҹүмә олунараг дәрҹ едилмишдир. Белә бир әсәрин нәшри бу фәннин инкишафында чох мүһүм рол ојнамышдыр. Беләликлә, „Функсионал анализ“ фәнниниин јаранма тарихинин гыса олмасына бахмајараг, бу мүддәт әрзиндә хејли сүр'әтлә инкишаф етмишдир. Бу инкишаф, демәк олар ки, әсасән ики истигамәтлә әлагәдардыр: бир тәрәфдән, классик анализ васитәсилә һәлл олмајан бир чох мүһүм мәсәләләрин һәлли, дикәр тәрәфдән исә функсионал анализин классик нәзәријјәсинин үмумиләшмәси, јә'ни даһа мүҹәррәд шәкилдә тәдгиг олунмасыдыр.

Бу саһәдә алынан нәтиҹәләр мүхтәлиф бөлмәләр үзрә шахәләнәрәк һәр бири ајрыҹа нәзәријјә шәклиндә инкишаф етдирилмишдир.

Мүасир ријази физика тәнликләринин вариасија үсулу илә һәллинин арашдырылмасы вә бир чох тәдгигаты олан мәсәләләрин һәлли функсионал анализдә диференсиал вә интеграл һесабынын мүасир инкишафына сәбәб олмушдур. Белә бир инкишаф истәр мәһдуд вә истәрсә дә мәһдуд олмајан хәтти операторлу тәнликләрин тәбии олараг ҹидди арашдырылмасы илә әлагәләндирилмишдир. Бир чох мәсәләләрин һәлләри классик анализ курсунун чәрчивәсинә сығышмыр вә она көрә дә курсун верилмиш аксиомларынын јүксәк ријази сәвијјәдә үмумиләшмәсини тәләб едир. Функсионал анализин мүасир нәтиҹәләринин мүхтәлиф мәсәләләрә тәтбиги бу мәсәләләр илә елә үзви сурәтдә бағлыдыр ки, һәмин мәсәләләр бу фәннә мүәјјән бөлмә кими дахил олур.

Тәгдим олунан бу курс 12 фәсилдән ибарәт олмагла, мүвафиг програм әсасында јазылараг функсионал анализ курсунун классик нәзәријјәси верилмиш вә бә'зи мүһүм нәтиҹәләр дә дахил едилмишдир.

Китабын әввәлиндә мүчәррәд фәзалар тә'риф олунараг мүәјјән тәснифат верилиир. Бу фәзалардан ән вачибләриндән бири олан хәтти фәзаларда хәтти функсионаллар вә хәтти операторлар нәзәријјәсинин әсас чәһәтләри көстәрилир. Еләчә дә Һилберт фәзасына хүсуси јер верилмиш вә бир чох параграфлар бурада мүфәссәл шәрһ олунур.

Хәтти фәзаларла әлагәдар ән мүһүм мәсәләләрдән бири олан Хан—Банах теореми вә ондан алынан нәтичәләр дахил едилмәклә хәтти фәзаларда тамам кәсилмәз операторларын аналитик нәзәријјәси вә еләчә дә Рисс нәзәријјәси верилир вә белә тәнликләрин нормал һәллолма шәртләри көстәрилир. Хәтти мәһдуд вә мәһдуд олмајан гапалы операторларын үмуми спектриал нәзәријјәси нәзәрдән кечирилир, ваһиди олан вә ваһиди олмајан Банах чәбрләри өјрәнилир. Верилмиш чәбрин регулјар вә сингулјар елементләри тә'риф олунмагла бунларла әлагәдар бир чох тәклифләр исбат едилир. Бурада алынан мүһүм нәтичәләр резолевентин вә дисолвентин биринчи вә икинчи тәнликләри илә әлагәдардыр.

Дәрсликдә конкрет сингулјар операторлу тәнликләрин бә'зи мәсәләләри верилир, сонлу өлчүлү фәзаларда тә'сир едән хәтти операторлара ујғун матрисләрин нормал шәклә кәтирилмәси һаггында бир нечә тәклиф исбат едилир. Хәтти интеграл тәнликләрлә әлагәдар олан Фредһолмун алтернативи гыса јазылараг симметрик нүвәли тәнликләрә нисбәтән мүфәссәл јер верилир. Хүсусән симметрик нүвәнин, бунун итерасијаларынын, резолвентинин вә һәлләрин мәхсуси функсијалара көрә мүәјјән ајрылышлары, еләчә дә симметрик нүвәли тәнликләр үчүн Шмидт үсулу верилир.

Нәһајәт, С. Л. Соболев мә'нада үмумиләшмиш төрәмәләр һаггында мүәјјән фәсил верилир вә бурада үмумиләшмиш төрәмәләрин бир нечә хассәләри илә әлагәдар олан мүәјјән тәклифләр гејд олунур. Потенсиал типли интегралын бир нечә хассәси көстәрилир, сонра $W_{\mathrm{p}}^{(l)}$ вә $L_{\mathrm{p}}^{(l)}$ фәзалары тә'риф олунараг мүәјјән проjексиjалаjычы операторлар васитәсилә нормалашмаларынын мүмкүнлүјү гејд едилир. $W_{\mathrm{p}}^{(l)}$ фәзасында С. Л. Соболевин хүсуси интеграл көстәришинин исбаты верилләрәк ики дахилолма теоремләринин исбатлары илә тамамланмышдыр.

I ФӘСИЛ

ТОПОЛОЖИ ФӘЗАЛАР

§ 1. ТОПОЛОЖИ ФӘЗАЛАР

Фәрз едәк ки, X үмумијјәтлә мүәјјән абстракт елементләрдән ибарәт мүәјјән чохлугдур. Бундан әлавә τ илә X-ин алтчохлугларындан дүзәлмиш елә чохлуғу ишарә едәк ки, τ чохлуғу ашағыдакы аксиомлары өдәсин:

Тә’риф. 1. *Бош чохлуг вә һәм дә X чохлуғу τ-ја дахил олсун;*

2. τ-дан олан истәнилән сајда чохлугларын бирләшмәси τ-ја дахил олсун;

3. τ-дан олан истәнилән сонлу сајда чохлугларын кәсишмәси τ-ја дахил олсун, онда X тоположи фәза адланыр.

τ чохлуғу бу фәзанын тополокијасыны тә’јин едир вә бура дахил олан һәр бир елемент, јә’ни һәр бир чохлуг бу фәзанын ачыг чохлуғу адланыр. $x \in X$ нөгтәсини өз дахилинә алан һәр бир ачыг чохлуг бу нөгтәнин әтрафы адланыр. Әкәр мүәјјән шәртләшмә олмаса биз фәза дедикдә мүәјјән бир (X, τ) ҹүтүнүн верилдијини баша дүшәҹәјик. Беләки, X верилмиш чохлуг, τ исә һәмин чохлуғун тополокијасыны тә’јин едир. Лакин конкрет фәзаларын өјрәнилмәсиндә һәр дәфә тополокија гејд олундугда (X, τ)-ну садәҹә олараг X тоположи фәзасы адландыраҹағыг. Фәрз едәк ки, X чохлуғунда мүхтәлиф τ_1 вә τ_2 тополокијалары верилмишдир. Әкәр $\tau_1 \subset \tau_2$ оларса, онда τ_1 чохлуғу τ_2-јә нисбәтән зәиф тополокија вә јахуд да τ_2 чохлуғу τ_1-ә нисбәтән күҹлү тополокија адланыр. Әкәр X_1 вә X_2 верилмиш тоположи фәзаларынын елементләри арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг варса, беләки, бу ин’икасда јалныз ачыг чохлуг ачыг чохлуға ин’икас олунур, онда belә фәзалар һомеоморф фәза адланыр. Тоположи фәзаларын нәзәријјәсиндә белә фәзалар ејни фәзалар, јә’ни $X_1 \Leftrightarrow X_2$ кими гәбул олунур. Ашкардыр ки, һәр бир чохлуг үчүн тривијал тополокија вардыр. Мәсәлән, M мүәјјән чохлугдурса, τ_0 илә

бош чохлуғу вә M-дән ибарәт олан чохлуғу ишарә етсәк,
1,2 вә 3 аксиомлары өдәнмәклә M-ин тривиjал тополокиjасы-
ны аларыг. M чохлуғу сонлу елементләрдән ибарәт оларса,
буна дахил олан бүтүн алтчохлуглары, бош чохлуғу вә M-ин
өзүнү көтүрсәк M-дә мүәjjән τ' тополокиjаны алырыг. Доғру-
дан да 1, 2 вә 3 аксиомларынын өдәнилмәсини jохламаг олар.
Бу һалда τ', M-ин дискрет тополокиjасы адланыр. Бурада,
һәмчинин бир елементдән ибарәт олан чохлуг, ачыгдыр. N,
X тоположи фәзасында верилмиш чохлуг исә бу чохлуғун
бүтүн ачыг чохлугларынын бирләшмәси олан һиссәси һәмин
чохлуғун дахили һиссәси адланыр вә $\operatorname{int} N$ илә ишарә олу-
нур. Һәр бир $x \in \operatorname{int} N$ x нөгтәси N-ин дахили нөгтәси адланыр.
x, N-нин о заман лимит нөгтәси адланыр ки, x-ин истәнилән
әтрафында $x \neq y$ олан N-дән һеч олмаса бир y нөгтәси олсун.

$X_0 \in X$ олан ачыг чохлуглар системи X_0-ын о заман базиси ад-
ланыр. X-ә дахил олан һәр ачыг чохлуг X_0-дан олан чохлуг-
ларын бирләшмәси кими көстәрилсин. x нөгтәси топо-
ложи X фәзасындан көтүрүлмүш нөгтә исә M_x әтрафлар чох-
луғу о заман бу нөгтәнин базиси адланыр ки, m, x-ин истә-
нилән әтрафы олдугда $m_x \in M_x$ олан елә m_x олсун ки, $m_x \subset m$.
Бу тә'рифи нәзәрә алсаг, X-ин базиси ашағыдакы кими
тә'риф олунур.

Тә'риф 2. *$x \in X$ истәнилән нөгтә олдугда бүтүн M_x ба-
зисләринин чохлуғу X-ин базиси адланыр. Тоположи фәза-
да верилмиш F чохлуғуна о заман гапалы чохлуғу дejилир
ки, онун тамамлаjычысы ачыг чохлуг олсун.*

Тә'риф 3. *Әкәр верилмиш X тоположи фәзасында
истәнилән кәсишмәjән F_1 вә F_2 гапалы чохлуглары үчүн
елә кәсишмәjән уjғун G_1 вә G_2 ачыг чохлуглара варса ки,
$F_1 \subset G_1$ вә $F_2 \subset G_2$ олур. Онда белә фәза нормал фәза ад-
ланыр.*

Бә'зән верилмиш τ тополокиjасы ашағыдакы әлавә шәрти
өдәjир; jә'ни истәнилән x_1, $x_2 \in X$ олан мүхтәлиф $x_1 \neq x_2$ нөг-
тәләринин τ-jа дахил олан кәсишмәjән әтрафлары вардыр.
Әлавә олан бу аксиом *аjрылма аксиому*, X исә аjрылан вә
jахуд *һаусдорф фәзасы* адланыр. Белә фәзалар олдугча ке-
ниш тәдгигатлара малик олмагла функсионал анализин мүһүм
мәсәләләринин һәлләринә сәбәб олмушдур. Гејд едәк ки, кә-
ләчәкдә биз тоположи фәза дедикдә jалныз Һаусдорф фәза-
ларыны нәзәрдә тутачаjыг.

Фәрз едәк ки, X һәгиги охдур. Бурада тополокиjаны аша-
ғыдакы кими тә'jин едәк. τ илә сонлу чохлуглары тамамлаjан
чохлуглары, бош вә X-и көтүрсәк мүәjjән бир тополокиjа
алырыг. Лакин бурада истәнилән ики ачыг чохлуг бош ол-
маjан чохлуг үзрә кәсишир, она көрә бу тополокиjаjа көрә

һәгиги ох Һаусдорф фәзасы дејилдир. Әкәр һәгиги охда τ әвәзинә бош чохлуг, һәгиги ох вә сонлу интерваллар чохлуғу көтүрдүкдә исә һәгиги ох Һаусдорф фәзасына чеврилир. Доғрудан да, белә чохлуг 1, 2 вә 3 аксиомаларыны өдәмәклә һәгиги охун истәнилән $x_1 \neq x_2$ нөгтәләринин елә әтрафларыны көстәрмәк олар ки, кәсишмәсин.

§ 2. КВАЗИ МЕТРИК ФӘЗА

Тә'риф 4. *Фәрз едәк ки, X чохлуғу верилмишдир. Белә ки, X-дән олан истәнилән x вә y-ә гаршы мүәјјән гајда үзрә* мүәјјән $\rho(x, y)$ *һәгиги әдәди гаршыја гојулур.*

$\rho(x, y)$-дән әлавә ашағыдакы шәртләрин өдәнилдијини фәрз едәк.

1. $x = y$ олдугда $\rho(x, y) = 0$ олсун.

2. X-дә истәнилән x, y вә z елементләри үчүн $\rho(x, y) \leqslant \rho(z, x) + \rho(z, y)$ өдәнилир. Бу һалда X *квази метрик фәза* $\rho(x, y)$ исә x вә y арасында *квази мәсафә* адланыр.

1 вә 2-дән истифадә едәрәк $\rho(x, y)$-ин бир нечә хассәләри өдәдијини көстәрәк. Көстәрәк ки, истәнилән z вә x үчүн.

3. $\rho(z, x) \geqslant 0$ доғрудур. Әкәр 2-дә $x = y$ оларса, 3 тәләби дә өдәниләр.

4. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ олдуғуну көстәрәк. 2-дә $z = y$ јазсаг, $\rho(x, y) \leqslant \rho(y, x)$; $\rho(y, x) \leqslant \rho(z, y) + \rho(z, x)$-дә исә $z = x$ јазсаг $\rho(y, x) \leqslant \rho(x, y)$ нәзәрә алсаг 4-үн өдәнилдији алыныр.

5. $|\rho(x, y) - \rho(z, y)| \leqslant \rho(x, z)$—өдәнилдијини көстәрәк:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(y, z) = \rho(x, z) + \rho(z, y),$$
$$\rho(z, y) \leqslant \rho(z, x) + \rho(y, x) = \rho(x, z) + \rho(x, y).$$

Бу бәрабәрсизликләрдән

$$-\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) - \rho(z, y) \leqslant \rho(x, z)$$

5-ин өдәнилдији алыныр.

$x = x_0$ гејд олунмуш елемент r верилмиш мүсбәт әдәд исә $\rho(x, x_0) \leqslant r$ бәрабәрсизлијини өдәјән x елементләр чохлуғу мәркәзи x_0 вә радиусу r олан *квази күрә* адланыр.

§ 3. МЕТРИК ФӘЗА

Тә'риф 5. Фәрз едәк ки, бизә мүәјјән X фәзасы верилмишдир. Бундан әлавә елә мүәјјән бир ин'икас вар ки, $X' = X \cdot X$ тopoложи һасилини мүәјјән әдәдләр чохлуғуна ин'икас етдирир.

Белә ки, $x, y \in X$ истәнилән елементләр исә, белә чүтә биргијмәтли олараг елә мүәјјән $\rho(x, y)$ *әдәди гаршы гојулурса, ашағыдакы шәртләр өдәниләр.*

1. $\rho(x, y) = 0$ *јалныз вә јалныз о заман өдәнилир ки:* $x = y$ *олсун,*

2. $x, y, z \in X$ истәнилән елеменләри исә $\rho(x, y) \leqslant \rho(z,x)+$ $+\rho(z, y)$ олур. Бу һалда X метрик фәза адланыр.

Һәр бир метрик фәза квази метрик олдуғундан әлавә көстәрдијимиз 3, 4 вә 5 шәртләри өдәнилир. Бә'зән метрик фәза һәмчинин ашағыдакы аксиомлар шәклиндә тә'риф олунур. Истәнилән x, y үчүн:

1. $\rho(x, y) \geqslant 0$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. Истәнилән x, y, z үчүн үчбучаг аксиому, јә'ни

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу үчбучаг аксиому адланыр.

§ 4. ТАМ ФӘЗАЛАР ВӘ МЕТРИК ФӘЗАНЫН ТАМАМЛАНМАСЫ

Тә'риф 6. *Фәрз едәк ки, $\{x_n\}$ метрик X фәзасында верилмиш ардычыллыгдыр. Әкәр ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә N_ε нөмрәси варса ки, ихтијари $n \geqslant N_\varepsilon$ олдугда X-ә дахил олан x елементи үчүн $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ бәрабәрсизлији өдәнилир. Онда һәмин ардычыллыг јығылан адланыр.*

Верилмиш $\{x_n\}$ ардычыллығы о заман фундаментал ардычыллыг адланыр ки, ихтијари $\varepsilon > 0$-на гаршы елә N_ε нөмрәси олсун ки, $n, m \geqslant N_\varepsilon$ олан истәнилән n вә m үчүн $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ олсун. X-дә олан һәр бир фундаментал ардычыллыг јығыларса, онда һәмин фәзаја там фәза дејилир. Биз һәләлик бу јығылма илә кифајәтләнәчәјик вә кәләчәкдә мүхтәлиф јығылма анлајышлары верәчәјик.

Теорем 1. Фәрз едәк ки. X **метрик фәзадыр. Онда** X**-и там фәзаја гәдәр тамамламаг олар.**

Исбаты. Бу фәзадан олан ики фундаментал $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$ ардычыллыглары о заман еквивалент адланырлар ки,

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = 0 \tag{1}$$

өдәнилсин. Бурада ρ, X-дә верилмиш метрикадыр. X-дән олан вә өз араларында еквивалент олан фундаментал ардычыллыглары бир синфә дахил едәк. Онда X белә синифләрә ајрылыр, һәмин синифләр чохлуғуну $\widetilde{X}$ илә ишарә едәк. $\widetilde{X}$-ин тә'јининдән көрүндүјү кими, X-дән олан һәр бир фундаментал ардычыллыг $\widetilde{X}$-ә дахил олан синифләрдән јалныз бирисинә дахил ола биләр.

$\{x_n\} \in \xi$ вә $\{y_n\} \in \eta$ олсун, әввәлчә $\{\alpha_n\}$ ардычыллығынын јығылдығыны көстәрәк. Белә ки, $\alpha_n = \rho(x_n, y_n)$.

$$\alpha_n - \alpha_m = \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) =$$

$$= \rho(x_n, y_n) - \rho(x_m, y_m) + \rho(x_m, y_n) - \rho(x_m, y_n)$$

бурадан исә үчбучаг аксиомуна көрә

$$\alpha_n - \alpha_m \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \tag{2}$$

олдуғуну алырыг. Бурада n вә m-ин јерләрини дәјишсәк:

$$-(\alpha_n - \alpha_m) \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m). \tag{3}$$

(2) вә (3) көрә

$$|\alpha_n - \alpha_m| \leqslant \rho(x_n, x_m) + \rho(y_n, y_m) \tag{4}$$

олур, $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$ ардычыллыгларынын фундаментал олмаларындан $\{\alpha_n\}$-нин јығылдығы алыныр. ξ, $\eta \in \tilde{X}$ фәрз едәрәк, $\tilde{X}$-дә ашағыдакы мәсафәни тә'јин едәк:

$$\tilde{\rho}(\xi, \eta) = \lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n). \tag{5}$$

Инди $\tilde{\rho}$-нын биргијмәтли тә'јин олдуғуну көстәрәк. Она көрә дә ξ вә η-дан ујғун олараг $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$-дан фәргли $\{x'_n\}$ вә $\{y'_n\}$ фундаментал ардычыллыгларыны көтүрә:

$$\rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, y'_n) + \rho(y_n, y'_n) \tag{6}$$

олдуғундан

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n) \leqslant \rho(x_n, y'_n) + \rho(y_n, y'_n) - \rho(x'_n, y'_n)$$

вә

$$\rho(x_n, y'_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(x'_n, y'_n) \tag{7}$$

бәрабәрсизлијинә көрә исә

$$\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n, y'_n) \leqslant \rho(y'_n, y_n) + \rho(x'_n, x'_n) \tag{8}$$

өдәнилир. Еләчә дә $\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x'_n, x_n) + \rho(x_n, y_n) - \rho(x_n, y_n)$ вә $\rho(x_n, y'_n) \leqslant \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y'_n)$ бәрабәрсизлијинә көрә

$$\rho(x'_n, y'_n) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_n, x'_n) + \rho(y_n, y'_n)$$

олмагла

$$|\rho(x_n, y_n) - \rho(x'_n y'_n)| \leqslant \rho(y'_n, y_n) + \rho(x_n, x'_n) \tag{9}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Она көрә дә $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(y'_n, y_n) = \lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$ олдугларындан

$$\lim_{n \to \infty} \rho(x_n, y_n) = \lim_{n \to \infty} \rho(x'_n, y'_n) \tag{10}$$

алыныр. Беләликлә дә $\tilde{\rho}$-нын ξ вә η-ја көрә биргијмәтли тә'јин олдуғу исбат олунур. $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$-нын метрика аксиомаларыны өдәдијини јохламаг, асандыр. $\tilde{\rho}(\xi, \eta)$-нын мәнфи олмамасы симметриклик, вә үчбучаг аксиомлары билаваситә ρ-нын хассәләрдән чыхыр. Нәһајәт, $\tilde{\rho}(\xi,\eta)=0$ оларса, (5)-дән $\lim\limits_{n\leftarrow\infty}\rho(x_n, y_n)= =0$ олмагла $\{x_n\}$ вә $\{y_n\}$ ардычыллыгларын еквивалент олмалары алыныр. Беләликлә $\tilde{\rho}(\xi,\eta)=0$ бәрабәрлијиндән $\xi=\eta$ олур. Еләчә дә, әксинә $\xi=\eta$-дән, $\tilde{\rho}(\xi,\eta)=0$. Беләликлә, $\tilde{X}$ фәзасы метрик фәзаја чеврилир. Инди көстәрәк ки, $\tilde{X}$-ә X-ин алт чохлуғу кими бахмаг олар. Әкәр $x\in X$ оларса, x елементини $(x, x,\dots, x,\dots)$ ардычыллығына гаршы гојараг бу ардычыллығын дахил олдуғу синфи ξ_x илә ишарә едәк. Ајдындыр ки, ξ_x-ә дахил олан һәр бир ардычыллыг x-ә јығылан ардычыллыгдыр. Умумијјәтлә ејни синфә дахил олан $\{x_n\}$ вә $\{x'_n\}$, ардычыллыглардан бири, мәсәлән, $\{x_n\}$, x-ә јығыларса, онда $\{x_n\}$-дә һәмин елементә јығылар. Бу

$$\rho(x'_n, x)\leqslant\rho(x'_n, x_n)+\rho(x_n, x) \tag{11}$$

бәрабәрсизлијиндән ашкардыр. Дикәр тәрәфдән $\tilde{\rho}(\xi_x, \xi_y)= =\rho(x, y)$ өдәнилмәси $\tilde{\rho}$-нын тә'јининдән асанлыгла көрүнүр. Бу нәтичәләри нәзәрә алсаг, X-ин $\tilde{X}$-ә изометрик дахил олмасы алыныр. $\xi\in\tilde{X}$ көтүрәк вә $\{x_n\}\in\xi$ олдуғуну фәрз едәк вә көстәрәк ки, $\xi_{x_n}\to\xi$ олур. $\tilde{\rho}$-нын тә'рифинә көрә:

$$\tilde{\rho}(\xi_{x_n}, \xi)=\lim_{m\to\infty}\rho(x_n, x_m), \tag{12}$$

$\{x_n\}$ фундаментал олдуғундан ихтијари $\varepsilon>0$ үчүн елә $N(\varepsilon)$ вар ки, $n, m>N(\varepsilon)$ олдугда $\rho(x_n, x_m)<\varepsilon$ олур. (12)-дән алырыг ки, $\xi x_n\to\xi$. Беләликлә, биз көстәрдик ки, $\xi\in X$ олан һәр бир ξ үчүн ξ_{x_n} вар ки,

$$\tilde{\rho}(\xi_{x_n}, \xi)<\varepsilon \tag{13}$$

өдәнилир. Һәр бир ξ_{x_n}-ә X-дән x_n елементи ујғун олдуғундан дејә биләрик ки, $\xi\in\tilde{X}$ олан һәр бир ξ үчүн X-дән олан ән азы бир $x_n=x$ вар ки,

$$\tilde{\rho}(x, \xi)<\varepsilon$$

өдәнилир.

Бу нәтичәни нәзәрә алараг $\hat{X}$-ин там олдуғуну көстәрәк. $\{\xi^{(m)}\}$-нын фундаментал олдуғуну гәбул едәрәк көстәрәк ки, бу ардычыллыг $\tilde{X}$-дән олан мүәјјән ξ-јә јығылыр.

$\varepsilon_n\to0$ мүсбәт әдәдләр ардычыллығыны көтүрәк. Көстәрдијимиз кими, ε_n верилдикдә $\xi^{(n)}$-ә гаршы X-дән елә ујғун $x^{(n)}$ елементи вар ки,

$$\tilde{\rho}(x^{(n)}, \xi^{(n)})<\varepsilon_n \tag{14}$$

өдәнилир. (14)-ә көрә

$$\widetilde{\rho}\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) \leqslant \widetilde{\rho}\left(x^{(n)}, \xi^{(n)}\right) + \widetilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}\right) + \widetilde{\rho}\left(\xi^{(m)}, x^{(m)}\right)$$

бәрабәрсизлијиндән

$$\widetilde{\rho}\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) < 2\varepsilon_n + \widetilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, \xi^{(m)}\right) \tag{15}$$

олдуғуну алырыг. $\{\xi^{(m)}\}$-нын фундаментал олдуғуну нәзәрә алсаг, (15)-дән $\lim\limits_{n, m \to \infty} \widetilde{\rho}\left(x^{(n)}, x^{(m)}\right) = 0$ олмагла $\{x^{(n)}\}$-нын фундаментал олдуғу алыныр.

$\{x^{(m)}\}$, X-дә олан фундаментал ардычыллыг олдуғундан, беләликлә, $\{x^{(n)}\}$ ардычыллығы мүәјјән бир ξ синфи тә'јин едир вә һәмчинин көстәрдијимиз кими

$$\widetilde{\rho}\left(x^{(n)}, \xi\right) \to 0. \tag{16}$$

Нәһајәт,

$$\widetilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, \xi\right) \leqslant \widetilde{\rho}\left(\xi^{(n)}, x^{(m)}\right) + \widetilde{\rho}\left(x^{(n)}, \xi\right) \tag{17}$$

бәрабәрсизлијиндән (14) вә (16)-ја көрә $\xi^{(n)} \to \xi$ олмагла $\widetilde{X}$-ин там фәза олдуғу чыхыр вә беләликлә дә X-и там фәзаја гәдәр тамамламаг олар. Бунунла да теорем исбат олунур.

§ 5. МЕТРИК СЕПЕРАБЕЛ ФӘЗА

X һәгиги ох оларса, бу фәзанын рассионал әдәдләр чохлуғундан ибарәт олан елә алт X_0 һиссәси вар ки, X_0, X-дә сыхдыр. X_0, X-ин әсас һиссәси һесаб олараг X-и бу чохлуг васитәсилә гурмаг олар. Сых чохлуг анлајышы метрик фәзаларда ашағыдакы кими тә'риф олунур.

Тә'риф 7. *Фәрз едәк ки, X метрик фәзадыр X_1 вә X_2 бу фәзаја дахил олан алт чохлуглардыр. X_1, X_2-дә о заман сых чохлуг адланыр ки, $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олдугда $x \in X_2$-олан истәнилән нөгтә оларса, X_1-дә елә y нөгтәси олсун ки, $\rho(x, y) < \varepsilon$ өдәнилсин.*

Сыфра јахынлашан мүсбәт $\{\varepsilon_n\}$ әдәдләр ардычыллығыны вә $x \in X_2$-дән гејд олунмуш нөгтә көтүрәк, онда гејд етдијимиз кими һәр $\varepsilon_n > 0$ әдәдинә гаршы X_1-дән олан елә ујғун x_n нөгтәси вар ки, $\rho(x_n, x) < \varepsilon_n$ өдәнилир. Бу бәрабәрсизлик көстәрир ки, X_2-дән олан һәр x нөгтәсинә X_1-дән бу нөгтәјә јығылан $\{x_n\}$ ардычыллығы сечмәк олар вә әксинә, X_2-дән олан һәр бир x-ә гаршы X_1-дән бу нөгтәјә јығылан ујғун $\{x_n\}$ ардычыллығы олдугда X_2, X_2 дә сых чохлуг олур. Демәли $X_1 \subset \overline{X}_2$, бурада, $\widetilde{X}_2$, X_2-нин гапанмасыдыр. Хүсуси һалда, X_1 X-дә сыхдырса, онда $\widetilde{X}_1 = X$ олур.

Әкәр верилмиш фәзада һесаби сых чохлуг варса, белә фәза Сеперабел фәза адланыр.

§ 6. КОМПАКТ ЧОХЛУГЛАР

X һәгиги ох көтүрүләрсә бу фәзадан көтүрүлмүш һәр бир мәһдуд чохлугдан јығылан алт ардычыллыг сечмәк олар. Хүсуси мисалларла көстәрмәк олар ки, бу хассә ихтијари метрик фәзаларда өдәнилмир.

Тә'риф 8. *Метрик X фәзасына дахил олан X_1 чохлуғу бу фәзада о заман компакт чохлуг адланыр ки, X_1-дән көтүрүлмүш истәнилән $\{x_\text{п}\}$ ардычыллығындан X-дә јығылан алт ардычыллыг сечмәк олсун. Хүсуси һалда X өзү, өзүндә компакт оларса, X метрик фәзасы компакт фәза адланыр.*

Теорем 2. Һәр бир компакт метрик фәза тамдыр.
Фәрз едәк ки, *X* компакт метрик фәзадыр.

$$\{x_\text{п}\} \tag{1}$$

ардычыллығы исә фундаменталдыр. *X* компакт олдуғундан (1)-дән јығылан

$$\{x_{\text{п}_\text{к}}\} \tag{2}$$

алт ардычыллығыны сечмәк олар. Фәрз едәк ки, (2) x_0 нөгтәсинә јығылыр.

$$x_0 \in X, \quad \rho(x_\text{к}, x_0) \leqslant \rho(x_\text{к}, x_{\text{п}_\text{к}}) + \rho(x_{\text{п}_\text{к}}, x_0) \tag{3}$$

бәрабәрсизлијини көтүрәк. (1) фунтаментал ардычылыг олдуғундан

$$\lim_{\text{к}\to\infty} \rho(x_\text{к}, x_{\text{п}_\text{к}}) = 0 \tag{4}$$

еләчә дә, $x_{\text{п}_\text{к}} \to x_0, \lim\limits_{\text{к}\to\infty} \rho(x_{\text{п}_\text{к}}, x_0) = 0$, (3)-дән $\lim\limits_{\text{к}\to\infty} \rho(x_\text{к}, x_0) = 0$.

Беләликлә, *X*-дән көтүрүлмүш һәр бир фундаментал ардычыллыг јығыландыр. Она көрә дә *X* там фәзадыр.

§ 7. ҺАУСДОРФ ТЕОРЕМИ

Тәриф 9. *Фәрз едәк ки, X метрик фәзадыр. M_1 вә M_2-алт чохлуглардыр. Әкәр $\varepsilon > 0$ верилмиш әдәд олдугда $x \in M_2$ олан истәнилән x үчүн M_1-дә елә y нөгтәси варса ки, $\rho(x\ y) < \varepsilon$ олур. Онда M_1, M_2 үчүн ε-шәбәкә адланыр.* **Бунунла әлагәдар олараг ашағыдакы тәклиф исбат олунур.**

Һаусдорф теореми 3.

***X* метрик фәзасында верилмиш M_1 чохлуғунун компакт олмасы үчүн истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн M_1-дә сонлу ε шәбәкәнин олмасы зәрури вә *X* там олдугда исә һәмчинин кафи шәртдир.**

Шәртин зәрурилији фәрз едәк ки, M_1 компактдыр. Көстәрсәк ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн M_1 дә ε шәбәкә олмадыгда M_1 компакт дејилдир. Онда шәртин зәрури олдуғу алыныр.

M_1-ин компактлыгыны гәбул едәк вә фәрз едәк ки, елә $\varepsilon > 0$ әдәди вар ки, бу әдәдә ујғун M_1 дә сонлу ε шәбәкә јохдур. $x_1 \in M_1$ нөгтәсини көтүрәк, онда x_1, M_1 үчүн $\varepsilon > 0$ шәбәкә ола билмәз. Она көрә дә $x_2 \in M_1$ олан елә x_2 нөгтәси вар ки, $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$ олур. Еләчә дә x_1, x_2 нөгтәләри M_1 үчүн ε шәбәкә ола билмәз, онда $x_3 \in M_1$ олан елә нөгтә вар ки, ејни заманда $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$ вә $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$. Доғрудан да белә x_3 олмасајды, онда M_1-нин истәнилән x нөгтәси үчүн $\rho(x_2, x) < \varepsilon$ оларды. Дикәр тәрәфдән $\rho(x_1, x_1) = 0$ олдуғундан x_1, x_2 нөгтәләри M_1-ин сонлу ε шәбәкәси оларды. Ејни мүлаһизәјә көрә x_1, x_2, x_3 нөгтәләри M_1 үчүн ε шәбәкә ола билмәз она көрә дә, $x_4 \in M_1$ олан елә нөгтә вар ки, $\rho(x_j, x_4) \geqslant \varepsilon (j = \overline{1, 3})$ олур, бу гајда илә мүлаһизәни давам етдирсәк M_1-ә дахил олан елә сонсуз $\{x_n\}$ ардычыллығы гурмаг олар ки, $n \neq m$ олдугда $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon$ олур. Бу исә ону көстәрир ки, бу ардычыллыгдан јығылан алт ардычыллыг сечмәк олмаз, бу исә M_1-ин компакт олмасына зиддир. Она көрә дә M_1 компакт олдугда бу чохлуг үчүн истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн сонлу ε шәбәкә олмалыдыр. Бунунла зәрури шәрт исбат олунур.

Шәртин кафилији. Фәрз едәк ки, X тамдыр вә M_1 үчүн истәнилән сонлу ε шәбәкә вар. M_1-ин компакт олдуғуну көстәрәк. Она көрә дә M_1-дән истәнилән сонсуз

$$\{x_n\} \tag{1}$$

ардычыллығыны көтүрәрәк бурадан јығылан алт ардычыллығын сечилдијини көстәрәк. $\varepsilon_n \to 0$ олан

$$\{\varepsilon_n\} \tag{2}$$

ардычыллығыны көтүрәк. Белә ки, $\varepsilon_n > 0$. ε_1 әдәдини көтүрәк, шәртә көрә M_1 үчүн сонлу ε_1 шәбәкәси вар, бу шәбәкәни M_{ε_1} илә ишарә едәк. M_{ε_1} сонлу ε_1 шәбәкә олдуғундан M_{ε_1}-нын нөгтәләри үзәриндә гурулмуш сонлу сајда сфералар вар ки, M_1-ин нөгтәләринин һамысы бу сфераларын дахилиндәдир.

(1) сонсуз олдуғундан бу сфераларын ичәрисиндә еләси вар ки, бу сферанын дахилиндә (1)-дән сонсуз сајда елементләр вардыр. Бу сфераны $\sigma_{\varepsilon_1}(t_1)$ илә ишарә едәк. M_1-ин ε_2 сонлу шәбәкәсини M_{ε_2} илә ишарә едәк. Еләчә дә бурада елә сонлу сајда сфералар вар ки, бунлар да өз дахилләринә M_1-ин бүтүн нөгтәләрини сахлајыр. Онда бу сфералардан елә бириси вар ки, (1)-дән $\sigma_{\varepsilon_1}(t_1)$-ә дахил олан сонсуз сајда нөгтәләриндән өз дахилиндә сонсуз сајда нөгтәләр сахлајыр. Бу сфераны $\sigma_{\varepsilon_2}(t_2)$ илә ишарә едәк. Бу схемдән ајдын көрүнүр ки, һәр бир M_{ε_n} шәбәкәсини гурдугда бу шәбәкәјә дахил олан елә $\sigma_{\varepsilon_n}(t_n)$ сферасы вар ки, (1)-дән $\sigma_{\varepsilon_{n-1}}(t_{n-1})$-ә дахил олан сонсуз сајда нөгтәләриндән, һәмчинин $\sigma_{\varepsilon_n}(t_n)$-ә дахил олан сонсуз сајда нөгтәләр вардыр. Демәли, нәтичәдә елә $\{\sigma_{\varepsilon_n}(t_n)\}$

сфералар ардычыллығыны алырыг ки, бунларын ихтијари сајда кәсишмәләриндә (1)-дә сонсуз сајда елементләр вардыр. $x_{n_к} \in \bigcap\limits_{i}^{к} \sigma_{\varepsilon_i}(t_i)$ нөгтәләрини көтүрәк, belә ки, $(n_к > n_{к-1})$. Бу $\{x_{n_к}\}$ ардычыллығынын гурулмасындан көрүндүјү кими, $n_\mu \geqslant n_\nu$ олдугда x_{n_ν} вә x_{n_μ} нөгтәләри M_{ε_μ}-јә ујғун $\sigma_{\varepsilon_\mu}(x_\mu)$ сферасынын дахилиндәдирләр.

$$\rho(x_{n_\nu}, x_{n_\mu}) \leqslant \rho(x_\mu, x_{n_\mu}) + \rho(x_{n_\nu}, x_\mu)$$

бәрабәрсизлијини көтүрәк. x_{n_ν}, $x_{n_\mu} \in \sigma_{\varepsilon_\mu}(x_\mu)$ олдуғундан (1)-дән

$$\rho\left(x_{n_\nu}, x_{n_\mu}\right) < 2\varepsilon_\mu.$$

$n \to \infty$ олдугда, һәмчинин $\nu \to \infty$, Дикәр тәрәфдән $\varepsilon_\mu \to 0$ олдуғундан $\rho_{\substack{\nu\to\infty \\ \mu\to\infty}}(x_{n_\nu}, x_{n_\mu}) \to 0$. Бу ону көстәрир ки, $\{x_{n_\nu}\}$ фундаментал ардычыллыгдыр. Шәртә көрә X там олдуғундан бу ардычыллыг X-ин мүәјјән бир x_0 нөгтәсинә јығылыр. Нәтиҹәдә биз көстәрдик ки, X_1 үчүн истәнилән сонлу шәбәкә олдугда X_1-дән көтүрүлмүш истәнилән $\{x_n\}$ ардычыллығындан јығылан алт ардычыллыг сечмәк олар, јә'ни X_1 компакт чохлугдур. Бунунла да, X там олдугда кафи шәртин исбаты тамамланыр.

§ 8. АРСЕЛ ТЕОРЕМИ

Теорем 4. $C=C[a, b]$ фәзасында верилмиш $C_1=C_1[a, b]$ чохлуғунун компакт олмасы үчүн һәмин чохлуғун мүнтәзәм мәһдуд вә ејни дәрәҹәдән кәсилмәз олмалары зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, $C_1[a, b]$ компакт чохлугдур. Онда Һаусдорф теореминә көрә C_1-дә истәнилән сонлу шәбәкә вардыр. Фәрз едәк ки, $\varepsilon > 0$ верилмиш мүсбәт әдәддир. Бу әдәдә ујғун сонлу ε шәбәкәни C_ε илә ишарә едәк. Онда $\varphi(t) \in C_1$ олан истәнилән функсија олдугда C_ε-да елә $\varphi_к(t)$ функсијасы вар ки, $\rho(\varphi(t), \varphi_к(t)$ јә'ни

$$\max_{b \leqslant t \leqslant a} |\varphi(t) - \varphi_к(t)| < \varepsilon, \tag{1}$$

бурадан

$$|\varphi(t)| \leqslant \max|\varphi(t) - \varphi_к(t)| + \max|\varphi_к(t)|. \tag{2}$$

C_ε-на дахил олан функсијаларын сајы сонлу олдуғундан елә сабит мүсбәт M әдәди вар ки, $|\varphi_к(t)| \leqslant M$ олар. Бу бәрабәрсизлик вә (1)-ә көрә (2)-дән $|\varphi(t)| < Q$, беләки, $Q = M + \varepsilon$ бу бәрабәрсизлик C_1-ә дахил олан истәнилән $\varphi(t)$ үчүн доғрудур. Демәли, C_1-ә дахил олан функсијалар чохлуғу мүнтәзәм мәһдуддур. Сонра ашкардыр ки, C_ε-на дахил олан $\varphi_j(t)$ $(j = \overline{1, n})$ функсијалары мүнтәзәм кәсилмәздир. Она көрә дә верилмиш $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы $\delta(\varepsilon) > 0$ әдәди вар ки, $[a, b]$-јә дахил олан

$$|t' - t''| < \delta, \tag{3}$$

өдәјән истәнилән t' вә t'' нөгтәләри үчүн,

$$|\varphi_к(t') - \varphi_к(t'')| < \varepsilon \quad (к = \overline{1, n}). \tag{4}$$

Инди $\varphi(t) \in C_1$ олан ихтијары $\varphi(t)$ функсијасыны көтүрәк. Онда C_ε-дан олан елә $\varphi_к(t)$ вар ки,

$$\max_{a \leqslant t < b} |\varphi(t) - \varphi_к(t)| < \varepsilon, \tag{5}$$

t' вә t'' (3)-ү өдәјән нөгтәләр фәрз едәрәк $\varphi(t') - \varphi(t'')$ фәргини гијмәтләндирәрәк:

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| \leqslant \max |\varphi(t') - \varphi_к(t')| + \\ + |\varphi_к(t') - \varphi_к(t'')| + \max_к |\varphi_к(t'') - \varphi(t'')|, \tag{6}$$

(4), (5) вә (6)-дан

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < 3\varepsilon. \tag{7}$$

Демәли, биз исбат етдик ки, ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta(\varepsilon) > 0$ әдәди вар ки, $|t' - t''| < \delta$-ни өдәјән $[a, b]$-нын истәнилән t' вә t'' нөгтәләри үчүн C_1-ә дахил олан истәнилән функсија үчүн (7)-и өдәнилир. Бу о дејән сөздүр ки, C_1-ә дахил олан функсијалар чохлуғу ејни дәрәчәдән кәсилмәздир. Бунунла зәрури шәрт исбат олунур.

Шәртин кафилији. Һаусдорф теореминә көрә $\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олдугда C_1 дә сонлу ε шәбәкәнин варлығыны исбат етмәк кифајәтдир. Онун үчүн дә фәрз едәк ки, C_1-ә дахил олан функсијалар мүнтәзәм мәһдуд олмагла ејни дәрәчәдән кәсилмәздир. Јә'ни, елә мүсбәт сабит M әдәди вар ки, $\varphi(t) \in C_1$ олан истәнилән $\varphi(t)$ үчүн:

$$|\varphi(t)| < M. \tag{8}$$

$\varepsilon > 0$ ихтијари әдәд олдугда елә $\delta(\varepsilon)$ әдәди вар ки, $[a, b]$-нын $|t' - t''| < \delta$ бәрабәрсизлијини өдәјән ихтијари t' вә t'' нөгтәләри үчүн C_1-дән олан истәнилән $\varphi(t)$ функсијасы үчүн

$$|\varphi(t') - \varphi(t'')| < \varepsilon, \tag{9}$$

өдәнилир.

$[a, b]$ вә $[-M, M]$ парчаларыны ујғун олараг $t_к\ (к = \overline{1, n})$ вә $y_к\ (к = \overline{1, m})$ нөгтәләри илә елә һиссәләрә ајыраг ки, ујғун олараг алынан парчаларын узунлуглары δ вә ε-дан кичик олсун.

$\varphi(t) \in C_1$ олан $\varphi(t)$функсијасыны, ашағыдакы кими тә'јин олунан сыныг хәтли $\psi(t)$ функсијасына гаршы гојаг.

$t_к \left(к=\overline{1, n}\right)$ вә $y_к \left(к=\overline{1, m}\right)$ бөлкү нөгтәләриндән координат охларына паралел хәтләр чәкәрәк мүәјјән бир шәбәкә дүзәлдәк. $(t_к, y_m)$ нөгтәләриндән кечән елә $\psi(t)$ сыныг хәттини көтүрәк ки, $t=t_к \left(к=\overline{1, n}\right)$ нөгтәсиндә

$$|\varphi(t_к)-\psi(t_к)|<\varepsilon \tag{10}$$

$t_к$-ны $t_{к+1}$ илә әвәз етсәк

$$|\varphi(t_{к+1})-\psi(t_{к+1})|<\varepsilon \tag{11}$$

$|t_к-t_{к+1}|<\delta$ олдуғундан

$$|\varphi(t_к)-\varphi(t_{к+1})|<\varepsilon \tag{12}$$

$\psi(t_к)-\psi(t_{к+1})$ фәргини гијмәтләндирәрәк

$$|\varphi(t_к)-\varphi(t_{к+1})|\leqslant|\varphi(t_к)-\varphi(t_к)|+$$
$$+|\varphi(t_к)-\varphi(t_{к+1})|+|\varphi(t_{к+1})-\psi(t_{к+1})| \tag{13}$$

(10), (11) вә (12) бәрабәрсизликләринә көрә

$$|\psi(t_к)-\psi(t_{к+1})|<3\varepsilon$$

$t_к$ вә $t_{к+1}$ нөгтәләри арасында сыныг хәтт һиссәси парча олдуғундан $t\in[t_к, t_{к+1}]$ олдугда ејни мүлаһизәјә көрә

$$|\psi(t)-\psi(t_к)|<3\varepsilon \tag{14}$$

өдәнилир.

$t\in[a, b]$ олан истәнилән t нөгтәсини көтүрәк. Ашкардыр ки, елә $t_к$ нөгтәси вар ки, $|t-t_к|<\delta$ олур. Онда шәртә көрә

$$|\varphi(t)-\varphi(t_к)|<\varepsilon$$

$\varphi(t)-\psi(t)$ фәргини гијмәтләндирәк:

$$|\varphi(t)-\psi(t)|\leqslant|\varphi(t)-\varphi(t_к)|+$$
$$+|\varphi(t_к)-\psi(t_к)|+|\psi(t_к)-\psi(t)|$$

(10) вә (14) бәрабәрсизликләринә көрә, бурадан:

$$|\varphi(t)-\psi(t)|<5\varepsilon \tag{16}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Биз көстәрдик ки, C_1-дән олан истәнилән $\varphi(t)$-јә гаршы ујғун $\psi(t)$ функсијасы вар ки, (16) өдәнилир. Дикәр тәрәфдән $\psi(t)$ функсијасы гурдуғумуз шәбәкәнин нөгтәләриндән кечмәлидир. Һәмин шәбәкәнин дүјүм нөгтәләри сонлу олдуғундан $\psi(t)$ кими функсијаларынын сајы сонлудур, бунларын чохлуғуну $C_{1\varepsilon}$ илә ишарә етсәк $C_{1\varepsilon}$-нун истәнилән ε үчүн C_1 үчүн сонлу ε_1 шәбәкә олдуғу алыныр вә беләликлә дә Һаусдорф теореминә көрә компакт чохлугдур. Бунунла да кафи шәрт исбат олунур.

II ФӘСИЛ

ХӘТТИ ФӘЗАЛАР

§ 1. ХӘТТИ ФӘЗАЛАР

Тә’риф 1. *Фәрз едәк ки, мүчәррәд* X *чохлуғу вә* Ф *ја һәгиги әдәдләр, јахуд да комплекс әдәдләр чохлуғу олсун. Бундан әлавә* X*-дән* X*-ә тә‘сир едән мүәјјән хәтти чевирмәләрин верилдијини гәбул едәк;*

1. $x, y \in X$ олан истәнилән елементләр олдугда бунлар васитәсилә биргијмәтли тә’јин олунан вә X-ә дахил олан мүәјјән елемент вар, бу елементи x вә y-ин чәми адландырыб $x+y$ ишарә едәк. Һәмчинин $\alpha \in$ Ф истәнилән әдәд вә $x \in X$ истәнилән елемент олдугда бунлар васитәсилә биргијмәтли тә’јин олунан вә X-ә дахил олан мүәјјән елемент вар. Бу елемент α-нын x-ә һасили адланараг αx кими јазылыр.

2. X чәм әмәлинә көрә Абел групу тәшкил едир, јә’ни x, y вә z, X-дән олан ихтијари елементләр олдугда чәм әмәлинә көрә ашағыдакы аксиомлар өдәнилир:

1) $x+(y+z)=(x+y)+z$,

2) Елә θ елементи вар ки, истәнилән x үчүн $x+\theta=x$ олур,

3) Һәр бир x-ә гаршы елә $-x$ вар ки,

$$x+(-x)=\theta,$$

θ, X-ин сыфры адланыр, $-x$ исә x-ин әкс елементи адланыр.

4) Истәнилән x вә y үчүн $x+y=y+x$.

$x, y \in X$ олан истәнилән елементләр вә α, $\beta \in$ Ф истәнилән әдәдләр олдугда ашағыдакы аксиомлар өдәнилир:

5) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$,
6) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$,
7) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$,
8) $1\cdot x=x$.

X 1 вә 2, 5), 6), 7), 8) шәртләрини өдәјирсә, онда X хәтти вә јахуд да *хәтти вектор фәза*, бура дахил олан һәр бир x исә вектор адланыр. Ф һәгиги әдәдләр чохлуғу олдугда X һәгиги хәтти вектор фәзасы вә Ф комплекс әдәдләр чохлуғу олдугда исә X хәтти *комплекс вектор фәзасы* адланыр. Һәр ики һалда дејилир ки, X, Ф әдәдләр мејданында верилмишдир. X_0 чохлуғу о заман алт хәтти чохлуг адланыр ки, x, $y \in X_0$ вә α, $\beta \in$ Ф олан истәнилән елементләр вә әдәдләр үчүн $\alpha x+\beta y \in X_0$.

Тә’риф 2. *Хәтти метрик фәза о заман суперметрик фәза адланыр ки,* X *фәзасына дахил олан ихтијари* x, y *вә* z *елементләри үчүн*

$$\rho(x,\ y+z)=\rho(x-z,$$

бәрабәрлији өдәнилсин.

Һәр бир суперметрик X фәзасында истәнилән x, y. z вә t елементләри үчүн

$$\rho(x+y, z+t)\leqslant\rho(x, z)+\rho(y, t) \tag{1}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Тә'рифә көрә

$$\rho(x+y, z+t)=\rho(x, z+t-y),$$

үчбучаг аксиомуна көрә

$$\rho(x, z+t-y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, z+t-y),$$

дикәр тәрәфдән

$$\rho(z, z+t-y)=\rho(z-z+y, t)=\rho(y, t),$$

олдуғундан (1) өдәнилир.

Хәтти фәзаларла әлагәдар бир нечә мисаллар көстәрәк:

Мисал 1.

$$x=(x_1, x_2,.., x_n,...) \tag{2}$$

кими һәгиги әдәдләр ардычыллығы васитәсилә дүзәлмиш бүтүн x-ләр чохлуғу көтүрәк вә l_2 илә ишарә едәк, белә ки,

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_j^2 < +\infty$$

$x, y \in l_2$ олдугда $x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2,\dots, x_n+y_n,\dots)$ (3)

бурада x (2) илә вә y исә $y=(y_1, y_2,..., y_n,...)$ бәрабәрлији илә тә'јин олунур, α, R һәгиги әдәдләр мејданындан. көтүрүлмүш истәнилән әдәд исә:

$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2,,, \alpha x_n,...) \tag{4}$$

кими тә'јин олунур.

Нәһајәт:

$$\sum_{i=1}^{\infty}(x_i+y_i)^2\leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2+2\sum_{i=1}^{\infty}y_i^2 \tag{5}$$

вә

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha x_i)^2=\alpha^2\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2 \tag{6}$$

мүнасибәтләрини нәзәрә алсаг, (3) вә (4) чәбри әмәлләрә әсасән l_2 хәтти вектор фәза олур.

Мисал 2. $[a, b]$ парчасында верилмиш бүтүн кәсилмәз һәгиги вә јахуд да комплекс функсијалар чохлуғуну $C=\mathbf{C}[a: b]$ илә ишарә едәк. C-дән олан ихтијари ики функсијанын ҹәми ади мә'нада вә һәмчинин әдәдә вурма, ади мә'нада, ја'ни $\varphi_1, \varphi_2 \in C[a, b]$ олдугда, $(\varphi_1 + \varphi_2)(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$ еләчә дә $(\alpha\varphi)(t) = \alpha\varphi(t)$ кими көтүрүләрсә, бу чохлуг хәтти вектор фәза олур.

Хәтти өртүк. Әкәр M, Ф мејданында тә'јин олунмуш хәтти X вектор фәзасында верилмиш чохлуг исә бу чохлуғу өз дахилиндә сахлајан ән кичик хәтти чохлуг вар. Белә чохлуг M-и өз дахилинә алан бүтүн хәтти чохлугларын кәсишмәсиндән алыныр. Һәмин чохлуға M-ин хәтти өртүјү дејилир вә $L_1(M)$ илә ишарә олунур.

Фәрз едәк ки, M X-дә верилмиш чохлугдур. Бурадан истәнилән $x_1, x_2, \ldots, x_n$ елементләрини вә Ф-дән истәнилән $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ әдәдләрини көтүрәрәк бүтүн мүмкүн олан хәтти

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

комбинасијаларыны дүзәлдәк вә һәмин чохлуғу $L(M)$ илә ишарә едәк. Көстәрәк ки, $L(M) = L_1(M)$. $L_1(M)$-ин хәтти $L(M)$ чохлуғуна дахил олмасы ашкардыр. Әкәр M, $L_1(M)$-и өз дахилинә алан хәтти чохлуг исә, онда M һәмчинин $L(M)$-и өз дахилинә алар. Беләликлә, $L(M) = L_1(M)$ олдуғу алыныр.

Базис. X фәзасында верилмиш $x_1, x_2, \ldots, x_n$ векторлары заман хәтти асылы олмајан адланыр ки,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0 \text{ оларса, } \lambda_k = 0 \text{ олсун } \left(k = \overline{1, n}\right).$$

Әкс һалда һәмин векторлар хәтти асылы олан адланыр. Сонсуз $\{x_i\}$ векторлар системи о заман хәтти асылы олмајан адланыр ки, бу системдән көтүрүлмүш истәнилән сонлу систем хәтти асылы олмасын. Хәтти асылы олмајан $E = \{x_i\}$ системи үчүн $L_1(E) = X$ оларса, онда бу систем X-ин ҹәбри базиси адланыр.

Әкәр X нормалашмыш фәза исә, норманын кәсилмәзлијиндән вә фәзанын хәтти олмасындан алыныр ки, хәтти чохлуғун гапанмасы да хәттидир. M чохлуғу верилдикдә $L_1(M)$-ин гапанмасы, ја'ни $\overline{L_1(M)}$, M-и өз дахилиндә сахлајан ән кичик гапалы хәтти чохлуг олар. Нормалашмыш X фәзасында верилмиш $E_1 = \{y_i\}$ системи о заман там адланыр ки, $\overline{L_1(E_i)} = X$ олсун.

§ 2. НОРМАЛАШМЫШ ФӘЗА

Фәрз едәк ки, X мүәјјән, Φ мејанында верилмиш хәтти фәзадыр. $x \in X$ олан истәнилән x елементини көтүрәрәк бу елементә гаршы мүәјјән мәнфи олмајан әдәд гаршы гојараг ашағыдакы аксиомларын өдәнилдијини фәрз едәк:

Тә'риф 1. $\|x\| = 0$ олмасы үчүн $x = 0$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Истәнилән $x \in X$ вә $\alpha \in Ф$ олдугда:

2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$. Бу үчбучаг аксиом адланыр. *Бу шәртләр дахилиндә хәтти X фәзасы нормалашмыш адланыр.* Әкәр X нормалашмыш фәза исә бу фәзаны һәмишә метрик фәзаја чевирмәк олар. Доғрудан да, әкәр

$$\rho(x, y) = \| x - y \| \tag{1}$$

оларса, ашкардыр ки:

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ олур;

2) $\rho(x, y) = 0$ бәрабәрлијиндән $x = y$ олмасы вә әксинә, $y = x$ олдугда бунун өдәнилдији алыныр;

3) Нәһајәт, $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ өдәнилир.

Беләликлә, X метрик фәзаја чеврилир. Ола билсин ки, хәтти фәза метрик фәза олдуғу һалда һәмин фәзаны нормалашдырмаг мүмкүн олмасын. Лакин хәтти метрик фәзада верилмиш метрикадан ихтијари x, y вә z елементләри вә ихтијари λ әдәди үчүн

$$\rho(x, y) = \rho(x + z, y + z), \tag{2}$$
$$\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda\rho|(x, y)$$

шәртләринин өдәнилмәсини тәләб етсәк, онда метрик фәзаны нормалашмыш фәзаја чевирмәк олар. Бу һалда норма $\rho(x, 0) = \|x\|$ бәрабәрлији васитәсилә тә'јин олунур. Бурада $\|x\| \geqslant 0$, $x = 0$, *олдугда* $\|x\| = 0$ вә әксинә $\|x\| = 0$ олдугда исә $\rho(x, 0) = 0$, $x = 0$ олур. $y = 0$ олдугда $\rho(\lambda x, 0) = \lambda\rho(x, 0)$-дан $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$. Үчбучаг аксиомунун өдәнилдијини көстәрәк

$$\|x + y\| = \rho(x + y, 0) = \rho(x, -y) \leqslant \rho(x, 0) + \\ + \rho(0, -y) = \|x\| + \|y\|,$$

беләликлә

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

олмагла метрик фәза нормалашмыш фәзаја чеврилир.

X фәзасында метриканын вә норманын верилмәсилә әлагәдар олараг ујғун тополокија бунлар васитәсилә верилә биләр.

Әкәр X нормалашмыш хәтти фәзасы там исә онда белә фәза Банах фәзасы адланыр. Кәләчәкдә X Банах фәзасыдыр әвәзинә $X - (B)$ фәзадыр јазачағыг.

§ 3. ФАКТОР ФӘЗА

Функсионал анализдә бир чох мәсәләләрин һәллиндә верилмиш фәзадан мүәјјән типли фәзанын дүзәлмәси лазым кәлир ки, белә фәзалардан бири фактор фәза адланыр. Биз һәмин фәзанын тә'рифини вермәклә бир нечә хассәләрини көстәрәк. Фәрз едәк ки, X хәтти векгор фәзадыр вә $M \subseteq X$ олан мүәјјән хәтти алт чохлугдур. $x \in X$ олан гејд олунмуш елемент көтүрәк. X-дән елә y елементләрини сечәк ки, $y-x \in M$ олсун. Бу һалда y вә x M модулуна көрә мүгајисә олунан адланараг: ашағыдакы кими ишарә олунур.

$$y \equiv x (mod M). \tag{1}$$

M хәтти алт чохлуг олдуғундан еләчә дә,

$$x \equiv y (mod\, M) \tag{2}$$

өдәнилир.

Һәмчинин ашкардыр ки, $x \equiv x\, (mod\, M)$. (1)-и өдәјән y-ләр чохлуғуну ξ_x илә ишарә едәк. $x_2 \equiv x_1 (mod\, M)$ вә $x_2 \equiv x_3 (mod\, M)$ оларса, $x_1 \equiv x_8 (\mathrm{mod}\, M)$. Доғрудан да тә'рифә көрә

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\in M, \\ x_2 - x_3 &\in M, \end{aligned} \tag{3}$$

өдәнилдикләриндән, бурадан $x_1 - x_3 \in M$ олмагла $x_1 \equiv x_3 (mod\, M)$ өдәнилир.

Көстәрәк ки, әкәр $y \in \xi_x$ исә $\xi_y = \xi_x$ олур. Она көрә дә фәрз едәк ки, $y \in \xi_x$. Онда тә'рифә көрә $y - x \in M$.

Инди $z \in \xi_y$ олсун еләчә дә тә'рифә көрә

$$z - y \in M, \tag{4}$$

M алт хәтти чохлуг олдуғундан (2) вә (4)-дән

$$z - x \in M. \tag{5}$$

Бурадан $z \in \xi_x$ олур, демәли, көстәрдик ки, $z \in \xi_y$ олдугда, онда $z \in \xi_x$ олур. Јә'ни:

$$\xi_y \subseteq \xi_x \tag{6}$$

өдәнилир.

Инди $z \in \xi_x$ олдуғуну гәбул едәк. Онда:

$$z - x \in M. \tag{7}$$

x вә y-ин һәр икиси ејни синифдән олдуғундан:

$$x - y \in M \tag{8}$$

(7) вә (8)-дән $z - y \in M$ ајдындыр ки, $z \in \xi_y$.

Јә'ни:

$$\xi_x \subseteq \xi_y \tag{9}$$

(6) илә мүгајисә олунарса, $\xi_x = \xi_y$. Биз бурада X-дан көтүрүлмүш һәр бир x елементинә гаршы мүәјјән гајда илә бир гијмәтли ξ_x чохлуғуну гаршы гојдуг. Инди елементләри ξ_x кими чохлуглардан ибарәт олан мүәјјән бир фәза дүзәлдәрәк һәмин фәзаны X/M кими ишарә едәк. X/M фәзасы X фәзасынын M хәтти алт чохлуғуна көрә фактор фәзасы адланыр.

X/M фәзасынын бир нечә хассәләрини көстәрәк. X/M фәзасында чәбри әмәлләр дахил едәк. Мәсәлән, $\xi_x, \xi_y \in X/M$ исә, онда $\xi_x = x + M$, $\xi_y = y + M$. Бу бәрабәрликләрдән:

$$\xi_x + \xi_y = x + y + M. \tag{10}$$

Бурадан алырыг ки, ξ_{x+y} (10) васитәси илә тә'јин олунур. X/M-дән олан ξ_{x+y} елементи ξ_x вә ξ_y елементләринин ҹәми адланыр.

Беләликлә:

$$\xi_{x+y} = \xi_x + \xi_y. \tag{11}$$

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, јухарыда гејд етдијимиз belә бир ҹәм биргијмәтли тә'риф олунур. Башга сөзлә ξ_{x+y}, $x_1 \in \xi_x$, $y_1 \in \xi_y$ дахил олан x_1 вә y_1-дән асылы дејилдир.

$x_1 - x \in M$ вә $y_1 - y \in M$ олдугларындан $x_1 + y_1 - (x+y) \in M$, она көрә көстәрмишдик ки, $\xi_{x_1+y_1} = \xi_{x+y}$. Јери кәлмишкән гејд едәк ки, M-ин X/M фәзасынын сыфры олмасы ашкардыр. Буну ξ_0 илә ишарә едәк. Инди α әдәдини ξ_x һасилини тә'јин едәк. $\xi_x = x + M$ олдуғундан, бурадан:

$$\alpha\xi_x = \alpha x + M.$$

бу бәрабәрлијин сағ тәрәфиндән көрүндүјү кими, X/M-ә дахил олан мүәјјән бир елемент алыныр ки, бу да αx васитәсилә тә'јин олунур. Бу елемент α-нын ξ_x-ә һасили адланараг $\xi_{\alpha x} = \alpha\xi_x$ јазылыр. Беләликлә, бу ҹәбри әмәлләрдән сонра X/M хәтти фәзаја чеврилир.

Теорем 1. X нормалашмыш фәза вә *M*, *X*-ин алт фәзасы олдугда *X/M* нормалашмыш фәзаја чевирмәк олар.

Исбаты. Бу фәзада норманы ашағыдакы кими тә'јин едәк:

$$\|\xi_x\| = \inf_{x \in \xi_x} \|x\|. \tag{12}$$

Исбат едәк ки, бу гајда үзрә тә'јин олунмуш норма, норма аксиомларыны өдәјир. X фәзасынын сыфры ξ_0-ә дахил олдуғундан (12)-дән $\|\xi_0\| = 0$. Инди фәрз едәк ки, мүәјјән бир ξ_x үчүн $\|\xi_x\| = 0$. Онда $\xi_x = \xi_0$ олдуғуну көстәрәк. Онда $\|\xi_x\|$-ин тә'рифинә көрә:

$$\inf_{x \in \xi_x} \|x\| = 0. \tag{13}$$

Она көрә $x_n \in \xi_x$ елә $\{x_n\}$ ардычыллығы гурмаг олар ки,

$$\lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0.$$

Демәли, $x_n \to 0$ олдуғундан ξ_x-ин гапалы олдуғуну нәзәрә алсаг, $0 \in \xi_x$, $\xi_x = \xi_0$ олур. Беләликлә:

1. $\|\xi_x\| = 0$ олмасы үчүн $\xi_x = \xi_0$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир,

2. $\|\alpha\xi_x\| = |\alpha|\,\|\xi_x\|$ өдәнилмәси $\alpha\xi_x$-ин тә'рифиндән ашкардыр,

3. Нəhajəт үчбучаг аксиомунун өдəнилдиjини јохлаjаг. X/M-да норманын тə'jининдəн ашкардыр ки, ε ихтиjари мүсбəт əдəд олдугда ξ_x вə η_y дахил олан елə x' вə y' елементлəри вар ки,

$$\| x' \| \leqslant \| \xi_x \| + \varepsilon, \tag{14}$$

$$\| y' \| \leqslant \| \eta_y \| + \varepsilon, \tag{15}$$

бəрабəрсизликлəри өдəнилир. Бурадан исə:

$$\| x' \| + \| y' \| \leqslant \| \xi_x \| + \| \eta_y \| + 2\varepsilon. \tag{16}$$

Һəмчинин $x' + y' \in \xi_x + \eta_y$ олдуғундан X/M-дə верилмиш норманын тə'рифинə көрə,

$$\| \xi_x + \eta_y \| \leqslant \| x' + y' \| \tag{17}$$

өдəнилир. Бурадан,

$$\| \xi_x + \eta_y \| \leqslant \| x' + y' \| \leqslant \| x' \| + \| y' \| \tag{18}$$

(16)-ны нəзəрə алсаг

$$\| \xi_x + \eta_y \| \leqslant \| \xi_x \| + \| \eta_y \| + 2\varepsilon.$$

Лакин ε ихтиjари олдуғундан

$$\| \xi_x + \eta_y \| \leqslant \| \xi_x \| + \| \eta_y \| \tag{19}$$

бəрабəрсизлиjини алырыг вə беләликлə дə үчбучаг аксиомасы өдəнилир. Демəли, X нормалашмыш фəза олдугда X/M-ны нормалашмыш фəзаjа чевирə билəрик.

Теорем 2. $X-(B)$ фəзасы олдугда $X/M-(B)$ фəзасыдыр.

Исбаты. Фəрз едəк ки,

$$\{\xi_m\} \tag{20}$$

фундаментал ардычыллығы верилмишдир. Бурадан $\xi_m = \xi_{x_m}$-ки кими баша дүшүлүр. (20)-нин јығылан олмасыны көстəрмəк үчүн $\varepsilon_к$-ны ашағыдакы кими сечəк:

$$\varepsilon_к = 2^{-к-2} \tag{21}$$

Шəртə көрə (20) фундаментал олдуғундан һəр бир $\varepsilon_к$-ја гаршы уjғун елə алт ардычыллыг сечмəк олар ки, $\xi_{n_{к+1}} - \xi_{n_к}$ фəргинин нормасы ашағыдакы бəрабəрсизлиjи өдəjəр,

$$\| \xi_{n_{к+1}} - \xi_{n_к} \| < 2^{-к-2}. \tag{22}$$

Белəликлə, елə $\{\xi_{n_x}\}$ алт ардычыллығы гурдуг ки, бу ардычыллыг үчүн (22) өдəнилир.

X/M-да олан норманын тə'рифиндəн аjдындыр ки, $2^{-к-2}$ əдəдинə гаршы $y_к \in \xi_{n_{к+1}} - \xi_{n_к}$ олан елə $y_к$ елементи вар ки,

$$\| y_к \| < \| \xi_{n_{к+1}} - \xi_{n_к} \| + 2^{-к-2} \tag{23}$$

өдəнилир. (22) вə (23)-дəн

$$\| y_k \| < 2^{-k-1}. \qquad (24$$

өдәнилир.

$$x_{n_1} \in \xi_{n_1} \qquad (25))$$

олдуғуну фәрз едәрәк

$$x_{n_1} + y_1 + y_2 + \cdots + y_k + \cdots \qquad (26)$$

сырасыны көтүрәк. (24)-ә көрә (26) сырасы нормаја көрә јығылыр. Шәртә көрә, X там олдуғундан (26)-нын лимити x $x \in X$ олар. x-ә гаршы X/M-дән мүәјјән ξ елементи гаршы гојаг. Исбат едәк ки, $\xi_m \to \xi$ олмагла $\xi \in X/M$. Әкәр S_k (26) сырасынын хүсуси чәми исә, онда $S_k \in \xi_{nk}$ олар. Доғрудан да (26) сырасы

$$x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_2} - x_{n_3}) + \cdots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}}) + \cdots$$

шәклиндә јазылыр, беләликлә $S_k = x_{n_k} \in \xi_{n_k}$,

$$\| \xi_{n_k} - \xi \| \leqslant \| S_k - x \| \qquad (27)$$

өдәнилир. $\| S_k - x \| \to 0$ олдуғундан

$$\| \xi_{n_k} - \xi \| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (28)$$

көтүрмәк олар.

Бурадан $\xi_{n_k} \to \xi$,

$$\| \xi_n - \xi \| \leqslant \| \xi_n - \xi_{n_k} \| + \| \xi_{n_k} - \xi \|. \qquad (29)$$

$\{\xi_n\}$ фундаментал олдуғундан $\| \xi_n - \xi_{n_k} \| \to 0$ вә (28)-ә көрә $|\xi_{n_k} - \xi \| \to 0$, $\| \xi_n - \xi \| \to 0$ олмагла X/M-ин там фәза олдуғу исбат олунур.

Гејд. Верилмиш X фәзасы хәтти тpositionожи фәза исә, онда көстәрилән гајда үзрә гурулмуш фактор фәзада хәтти тopoложи фәза олур.

§ 4. ИНВОЛЈУСИЈАЛЫ ФӘЗАЛАР

Тә'риф 4. *Фәрз едәк ки, $X\Phi$ мејданында тә'јин олунмуш хәтти фәзадыр. Гәбул едәк ки, мүәјјән гајда үзрә $x \in X$ олан һәр бир x елементинә һәмин фәзаја дахил олан* мүәјјән *x^* елементи гаршы гојулур, белә ки, ашағыдакы аксиомлар өдәнилир:*

1. $(x + y)^* = x^* + y^*$ истәнилән $x, y \in X$,
2. $(x^*)^* = x$ истәнилән $x \in X$,
3. $(\alpha x)^* = \bar{\alpha} x^*$ истәнилән $x \in X$, $\alpha \in \Phi$,

онда белә X фәзасы инволјусијалы фәза адланыр.

x^*, x-ин гошма елементидир. 2-дән көрүндүјү кими, x вә x^* гаршылыглы гошма елементләрдир. Әкәр $x = x^*$ оларса, онда x өзү-өзүнә гошма елемент адланыр. Асанлыгла јохламаг олар ки, $x + x^*$, $i(x - x^*)$ елементләри өзү-өзүнә гошмадырлар.

$$x = \frac{x + x^*}{2} + i\,\frac{x - x^*}{2i}. \qquad (1)$$

Көстәрир ки, ихтијари x елементи ики $\frac{x+x^*}{2}$ вә $\frac{x-x^*}{2i}$ өзү-өзүнә гошма елементләринин комбинасијасы кими көстәрилир. Асанлыгла јохламаг олар ки, бу көстәриш јеканәдир.

Доғрудан да әкәр, $x = x_1 + ix_2$ кими көстәриләрсә, беләки, $x_1 = x_1^*$ вә $x_2 = x_2^*$ онда $x^* = x_1^* - ix_2^* = x_1 - ix_2$ олур:

$$\begin{cases} x = x_1 + ix_2, \\ x^* = x_1 - ix_2. \end{cases}$$

Системиндән $x_1 = \frac{x + x^*}{2}$ вә $y_1 = \frac{x - x^*}{2i}$ олмагла јеканәлик исбат олунур. Һәгиги әдәдләрин комплекс әдәдләр чохлуғунда һансы ролу варса, өзү-өзүнә гошма елементләрин инволјусијасы хәтти фәзада ујғун ролу вардыр.

§ 5. ҺИЛБЕРТ ФӘЗАСЫ

Нормалашмыш фәзалар ичәрисиндә кениш тәдбигаты олан мүәјјән синиф вар ки, бу фәзаларда норма, скалјар һасили васитәсилә верилир,

Тә'риф 5. *Фәрз едәк ки, Ф мејданында тә'јин олунмуш һәгиги хәтти вектор X фәзасы верилмишдир.*

$X \cdot X$ тоположи һасилиндә тә'јин олунан мүәјјән әдәди функсија тә'јин едәк. Беләки, $x, y \in X$ олан x, y чүтүнә гаршы мүәјјән гајда үзрә гојулмуш һәгиги әдәди (x, y) илә ишарә едәк. (x, y), x вә y-ин скалјар һасили вә јахуд да бу елементләрин дахили һасили адланараг ашағыдакы шәртләрин өдәдијини фәрз едәк. Истәнилән x, y вә z үчүн:

1. $(x + y, z) = (x, y) + (x, z)$,
2. $(x, y) = (y, x)$,

$\alpha \in Ф$ истәнилән α әдәди вә $x, y \in X$ истәнилән x, y үчүн:

3. $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$;
4. $(x, x) \geqslant 0$ олмагла $(x, x) = 0$ үчүн $x = 0$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир. Бу аксиомларын көмәји илә асанлыгла јохламаг олар ки,

$$(z, x + y) = (z, x) + (z, y), \quad (x, \alpha y) = \alpha(x, y)$$

өдәнилир. Әкәр хәтти X фәзасы көстәрилән ин'икас заманы 1, 2 вә 3, 4 шәртләри өдәнилирсә, онда белә фәза Евклид вә јахуд да Унитар фәза адланыр.

Φ комплекс әдәдләр чохлуғу, јә'ни X комплекс фәза олдугда јухарыда гејд олунан аксиомларда мүәјјән дәјишиклик апарылыр. Доғруданда әкәр X комплекс фәза олдугда һәр x, y-ә гаршы 1, 2, 3 вә 4 шәртләрини өдәјән комплекс (x, y) әдәди гаршы гојулдугда 2 вә 3-ә көрә 4 үчүн зиддијјәт алыныр.

Доғрудан да 2 вә 3-ә көрә $(\alpha x, \alpha y)$ һасили ашағыдакы кими јазылыр.

$$(\alpha x, \alpha y) = \alpha(x, \alpha y) = \alpha(\alpha y, x) = \alpha^2(y, x) = \alpha^2(x, y)$$

Она көрә $\alpha = i$ олдугда $(ix, iy) = -(x, y)$; $x = y$ олдугда исә $(ix, ix) = -(x, x)$ олур. 4-ә көрә исә һәм (ix, ix) вә һәм дә (x, x) мүсбәт олмалыдыр. Бу бәрабәрликдә исә зиддијјәт алыныр. Она көрә дә X комплекс фәза олдугда 2 аксиому $(x, y) = \overline{(y, x)}$ аксиому илә әвәз олунур.

§ 6. ШВАРС БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ

Һилберт фәзасында Шварсын ады илә адланан бир бәрабәрсизлик исбат олунур ки, һәмин бәрабәрсизлијин функсионал анализин бир чох мәсәләләрин һәллиндә лазыми әһәмијјәти вардыр. Һилберт фәзасында норма

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)} \tag{1}$$

бәрабәрлији васитәсилә верилир.

Теорем 3. *H*-дан олан истәнилән x вә y елементләри үчүн

$$|(x, y)| \leqslant \| x \| \cdot \| y \| . \tag{2}$$

Исбаты. H-дан ихтијари x вә y елементләрини вә ихтијари α әдәдини көтүрүб $(x + \alpha y,\ x + \alpha y)$ һасилини мүәјјән гајда үзрә чевирәк. Ашкардыр ки, $(x + \alpha y,\ x + \alpha y) \geqslant 0$. Беләликлә:

$$(x + \alpha y,\ x + \alpha y) = (x,\ x) + (x,\ \alpha y) + (\alpha y,\ x) +$$

$$+ (\alpha y,\ \alpha y) = \| x \|^2 + \bar{\alpha}(x,\ y) + \alpha(y,\ x) + |\alpha|^2 \| y \|^2$$

ејнилијини көтүрәк. Бурада α ихтијари олдуғундан буну ашағыдакы кими сечәк:

$$\alpha = -\frac{(x,\ y)}{\| y \|^2}$$

бурада $y \neq \theta$ фәрз олунур. Әкс һалда, (2) өдәниләрди.

$$\bar{\alpha} = -\frac{(y, x)}{\| y \|^2} \tag{3}$$

һәмчинин $(x, y)(y, x) = |(x, y)|^2$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$\| x \|^2 - \frac{(y,x)(x,y)}{\| y \|^2} - \frac{(x,y)(y,x)}{\| y \|^2} + \frac{|(x,\ y)|^2}{\| y \|^4} \| y \|^2 \geqslant 0$$

бәрабәрсизлијиндән

$$\|x\|^2 - \frac{|(x,y)\|^2}{\|y\|^2} \geqslant 0 \qquad (4)$$

бурадан исә, (2) өдәнилир. (2) Шварс бәрабәрсизлији адланыр. Унитар фәзаларда норма скалјар һасил васитәсилә вериләрәк һәмишә белә фәзалар нормалашыр. $\sqrt{(x,x)}$ әдәди x-ин нормасы гәбул олунур. Јә'ни

$$\|x\| = \sqrt{(x,\ x)}$$

$\|x\| = 0$ олдугда $x = 0$ вә эксинә өдәнилир.

$\|\alpha x\| = \sqrt{(\alpha x,\ \bar{\alpha} x)} = |\alpha|\,\|x\|$ вә нәһајәт, Шварс бәрабәрлијинә көрә, јә'ни

$$|(x,\ y)| \leqslant \|x\|\cdot\|y\|,$$

көстәрәк ки, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ өдәнилир. Бу бәрабәрсизлик

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(x,\ y) + \|y\|^2$$

васитәсилә

$$\|x+y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\,|(x,\ y)| + \|y\|^2 \leqslant (\|x\| + \|y\|)^2$$

бәрабәрсизлијиндән алынмагла үчбучаг аксиому өдәнилир.

Беләликлә, Унитар фәзада норма көстәрилән гајда илә тә'јин олдугда, һәмин фәза нормалашыр. Әкәр бу һәмин фәзада јығылма бу норма илә тә'јин олмагла там олурса, онда бу фәза Һилберт фәзасы адланараг H илә ишарә олунур.

H фәзасынын тә'риф олунмасындан ашкардыр ки, бу фәза (B) фәзасыдыр.

Скалјар һасилин хассәсиндән истифадә едәрәк

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

доғру олдуғуну көстәрәк:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (x+y,\ x+y) + (x-y,\ x-y) =$$
$$= \|x\|^2 + (x,y) + (y,x) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - (x,\ y) - (y,x) + \|y\|^2$$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Теорем 4. Фәрз едәк ки, $H_1 \subset H$ **олмагла** $\frac{H_1 + H_1}{2} \subset H$ δ **илә** $x \in H$ **олан** x**-лә** H_1 **арасындакы мәсафә олсун. Фәрз едәк ки,** $\{x_i\} \in H_1$ **елә ардычыллыгдыр ки,**

$$\lim_{l} \|x_i - x\| = \inf_{m_1 \in H_1} \|m_1 - x\| = \delta \geqslant 0 \qquad (5)$$

бәрабәрлији өдәнилир. Онда $\delta = \|x' - x\|$ **белә ки,** $x' \in H$.

Исбаты. Кифајәтдир ки,

$$\{x_l\} \qquad (6)$$

(6)-нын јығылдығыны көстәрәк. $\|x_l - x_j\|$ фәргини гијмәтләндирәк:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

ејнилијини нəзəрə алсаг, (6)-да x əвəзинə $x_i - x$ вə y əвəзинə $x - x_j$ јазмагла (6)-дан

$$\| x_i - x_l \|^2 = 2 \| x_i - x \|^2 + 2 \| x_j - x \| - \| 2x - x_j - x_i \|^2 \qquad (7)$$

бəрабəрлијини алырыг. Бурадан

$$\| x_i - x_j \|^2 = 2 \| x_i - x \|^2 + 2 \| x_j - x \|^2 - 4 \left\| x - \frac{x_i + x_j}{2} \right\|^2, \qquad (8)$$

$\frac{x_i + x_i}{2} \in H_1$ олдуғундан шəртə көрə $\left\| x - \frac{x_i + x_j}{2} \right\|^2 \geqslant \delta$ олмагла (8)-дəн

$$\| x_j - x_j \|^2 \leqslant 2 \| x_j - x \|^2 + 2 \| x_j - x \|^2 - 4\delta^2 \qquad (9)$$

бəрабəрсизлији алыныр.

$i \to \infty$, $j \to \infty$ оларса, шəртə көрə $\| x_i - x \| \to \delta$ вə $\| x_j - x \| \to \delta$ (9)-дан. $\| x_j - x_i \| \to 0$ олмагла (6)-нын фундаментал вə H-ын там олмасындан һəмин ардычыллығын јығылан олмасы чыхыр.

H_1 гапалы чохлуг исə, онда $\frac{H_1 + H_1}{2} \subset H_1$ олдуғундан бу теорем гапалы чохлуғу үчүн дə доғрудур. Бу теорем гапалы чохлуглар үчүн Беппо—Леви бəрабəрсизлији васитəсилə дə исбат олунур.

§ 7. ОРТОНОРМАЛ СИСТЕМ

Теорем 5. Фəрз едəк ки, H фəзасында сонлу вə јахуд да сонсуз хəтти асылы олмајан $\{f_n\}$ системи верилир. Көстəрəк ки, $\{f_k\}$-дан асылы елə $\{\varphi_n\}$ системини көтүрмəк олар ки, бу систем ортонормал олсун.

Исбаты. Истəнилəн $m \neq k$ үчүн $(\varphi_m, \varphi_k) = 0$ вə $\| \varphi_k \|^2 = 1$ шəртини өдəјəн. φ_n—ləри гураг

$$\varphi_1 = \frac{1}{\| f_1 \|} f_1 \qquad (1)$$

$\| f_1 \| = \alpha_1$ ишарə етсəк, (1)-дəн

$$f_1 = \alpha_1 \varphi_1 \qquad (2)$$

$$\tilde{f}_2 = f_2 - \alpha \varphi_1 \qquad (3)$$

бəрабəрлијиндə α-ны елə сечəк ки, $(\tilde{f}_2, \varphi_1) = 0$ олсун.

$$(\tilde{f}_2, \varphi_1) = (f_2, \varphi_1) - \alpha \| \varphi_1 \|^2 = 0$$

олдуғундан $\| \varphi_1 \| = 1$ нəзəрə алынарса, $\alpha = (f_2, \varphi_1)$ олур, шəртə көрə f_1 вə f_2 хəтти асылы олмадығындан φ_1 вə f_2-дə хəтти асылы дејилдир. Она көрə дə, $\tilde{f_2} \neq 0$ олур.

$$\varphi_2 = \frac{1}{\|\widetilde{f}_2\|}\widetilde{f}_2 \qquad (4)$$

онда $\|\varphi_2\| = 1$.

(4)-ə көрə (3)-дəн көрүндүјү кими, f_2, φ_1, φ_2-нин хəтти комбинасијасы кими ифадə олунар. Она көрə дə $f_2 = \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ вə бурадан исə $\varphi_2 = \beta_1 f_1 + \beta_2 f_2$ кими көстəрилир. Бу схем үзрə һəр f_n, $m \leqslant n$ олан φ_m-лəр васитəсилə

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n_k} \varphi_k \qquad (5)$$

шəклиндə вə əксинə һəр бир φ_n, $m \leqslant n$ олан $\widetilde{f}_m$-лəр васитəсилə

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_{n_k} f_k \qquad (6)$$

көстəрилир.

f_n (5) шəклиндə көстəрилəрсə, онда $\widetilde{f}_{n+1}$ ашағыдакы шəкилдə сечилир:

$$\widetilde{f}_{n+1} = f_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n_k} \varphi_k \qquad (7)$$

бундан сонра $\widetilde{f}_{n+1}$, $\varphi_j\left(j = \overline{1, n}\right)$. елементлəринə ортогонал фəрз олунараг $\lambda_i = \left(f_{n+1}, \varphi_i\right)\left(i = \overline{1, n}\right)$ сечилмəклə $\widetilde{f}_{n+1} \neq 0$ олур, əкс һалда $\widetilde{f}_{n+1} = 0$ оларса, f_{n+1}, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$-лəр вə белəликлə дə $f_1, f_2, \ldots, f_n$ векторлары хəтти асылы олмагла зиддијјəт алынарды. $\widetilde{f}_{n+1} \neq 0$ олдуғундан

$$\varphi_{n+1} = \frac{\widetilde{f}_{n+1}}{\|\widetilde{f}_{n+1}\|}$$

кими сечилир.

Бу исбат гајдасы көстəрир ки, $\{f_n\}$ системиндəн һəмишə ортонормал $\{\varphi_n\}$ системини сечмəк олар.

§ 8. БИОРТОГОНАЛ СИСТЕМ

Тə'риф 6. *Н-дан көтүрүлмүш*

$$\{f'_n\} \qquad (1)$$

$$\{f''_n\} \qquad (2)$$

ардычыллыглары о заман биортогонал систем адланыр ки, $n \neq m$ олдугда $\left(f'_n, f''_m\right) = 0$ олмагла $\left(f'_n. f''_n\right) = 1$ олсун. Би-

ортогонал систем о заман там адланыр ки, (1) вә (2) там олсун.

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, әкәр (1) вә (2) там олдугда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f, f_n'')f_n' \tag{3}$$

вә

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f, f_n')f_n' \tag{4}$$

сыраларынын бири јығыландырса, о бири дә јығылыр, бунларын чәмләри бәрабәр олмагла f-ә бәрабәрдир. Мәсәлән, (3) јығыларса вә g бу сыранын чәми исә, јә'ни

$$g = \sum_{n=1}^{\infty}(f, f_n'')f_n', \tag{5}$$

бурадан

$$(g, f_m'') = \sum_{n=1}^{\infty}(f, f_n'')\,(f_n', f_m''). \tag{6}$$

(1) вә (2) биортогонал олдуғундан,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f, f_n'')\,(f_n', f_m'') = (f, f_m'') \tag{7}$$

өдәнилир.

Она көрә дә (6) вә (7)-јә көрә

$$(g - f, f_m'') = 0.$$

Бу бәрабәрлик $(m = \overline{1, \infty})$ олан истәнилән m әдәди үчүн өдәнилдијиндән бурадан $g = f$. Әкс һалда $g - f$, f_n'-ләрин мүәјјән комбинасијасы кими көстәрмәклә биортогоналлыг шәртинә зидд оларды. Беләликлә, (3) сырасынын чәминин f-ә бәрабәр олмасы алыныр. Ејни гајда үзрә әкәр g' (4)-үн чәми олса иди, $(g' - f, f_m') = 0$ шәртиндән $f = g'$ оларды. Биортогонал системлә әлагәдар олараг мүһүм бир теореми исбатсыз верәк. Һәмин теореми гејд етмәдән габаг белә бир тә'риф верәк.

Тә'риф 7. *Фәрз едәк ки,* $\{f_n'\}$ *системи верилир. Әкәр елә сабит* $0 < \delta < 1$ *әдәди варса ки, истәнилән сонлу* $\{\alpha_j\}$ *әдәдләри* үчүн *H-да верилмиш ортонормал* $\{f_n\}$*-дан*

$$\Big\|\sum_n \alpha_n(f_n - f_n')\Big\|^2 \leqslant \delta^2 \sum_n |\alpha_n|^2 \tag{8}$$

бәрабәрсизлији өдәјән $\{f_i'\}$ *системини сечмәк мүмкүн олсун. Онда дејилир ки,* $\{f_i'\}$ *системи* $\{f_i\}$ *орто нормал системинә јахындыр.*

Теорем 6. Әкәр $\{f'_n\}$ системи ортонормал $\{f_n\}$ системинә јахындырса, онда елә $\{g_n\}$ системи вар ки, $\{f'_n\}$-ла биортогонал систем тәшкил етмәклә H-а дахил олан истәнилән f үчүн $\sum_n (f, g_n) f'_n$ вә $\sum_n (f, f'_n)\, g'_n$ ҹәминин һәр бири f-ә јығылмагла ашағыдакы бәрабәрсизликләр өдәнилир:

$$K_1 \|f\| \leqslant \left[\sum_i (f, g_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K_2 \|f\|, \tag{9}$$

$$K_2^{-1} \|f\| \leqslant \left[\sum_i (f, f'_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant K_i^{-1} \|f\|, \tag{10}$$

белә ки,

$$K_1 = (1+\delta)^{-1} \text{ вә } K_2 = (1-\delta)^{-1}.$$

Верилмиши теоремин шәртләриндән

$$\sum_i (f, f_i)\,(f_i - f'_i) \tag{11}$$

сырасынын јығылмасы асанлыгла көстәрилир:

$\{f'_n\}$ вә $\{f_n\}$ системләри јахын олдуғундан елә $0 < \delta < 1$ әдәди вар ки,

$$\left\|\sum_{i-n}^{m} \alpha_i \left(f_i - f''_i\right)\right\|^2 \leqslant \delta^2 \sum_{i=n}^{m} |\alpha_i|^2$$

(10) өдәнилир. α_i-ләр ихтијари олдугларындан $\alpha_i = (f, f_i)$ кими сечәк. Дикәр тәрәфдән мә'лумдур ки, $\sum_{i=1}^{\infty} |(f, f_i)|^2$ сырасы јығылыр. Она көрә дә һәмчинин $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2$ сырасы да јығылыр. Бу исә (11) сырасынын јығылдығыны көстәрир. Бу сыранын ҹәми биргијмәтли тә'јин олдуғундан ашағыдакы кими f ифадәсини тә'јин едәк

$$f' = \sum_n (f, f_n)\,(f_n - f'_n).$$

Бу ҹәмә дахил олан скалјар (f, f_n) һасилин хассәләринә көрә ахырынҹы бәрабәрсизликдән истифадә едәрәк $\|f'\|^2$-ы гијмәтләндирәк.

$$\|f'\|^2 = \lim \left\|\sum_{i=1}^{n} (f, f_i)\,(f_i - f'_i)\right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \delta^2 \sum_{l=1}^{n} | f, f_l) |^2 = \delta^2 \| f \|^2. \tag{12}$$

Теоремин сонракы исбаты исә хәтти операторларын хассәләри илә тамамланыр.

АЛТ ФӘЗАЛАРЫН ОРТОГОНАЛ ЧӘМИ

Фәрз едәк ки, H_J H-да верилмиш гаршылыглы ортогонал алт фәзалардыр. H-да H_J-ын һамысыны өз дахилиндә сахлајан ән кичик фәза H_J-ын ортогонал чәми адланыр вә $\oplus H_J$ илә ишарә олунур. Беләликлә, H_J-ын чәми сонлу исә ортогонал чәм

$$H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n \tag{13}$$

илә вә бунларын чәми һесаби сајда исә,

$$H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n \oplus \tag{14}$$

илә ишарә олунур.

Һилберт H фәзасында ортогонал чәм олан алт фәзанын һансы векторлардан ибарәт олдуғуну тә'јин едәк: шәртә көрә H_j алт фәзалары гаршылыглы ортогонал олдугларындан $x_i \in H_j$, $y_j \in H_j$ оларса, $i = j$ олан истәнилән x_i, y_i үчүн $(x_i, y_j = 0$ олар. Әввәлчә фәрз едәк ки, H_j—алт фәзалары сонлу сајдадыр.

H_j $(j = \overline{1, n})$ $x_k \in H_k$ оларса, көстәрәк ки, ортогонал чәм

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j \tag{15}$$

векторларын чәминдән ибарәтдир.

$$H_0 = H_1 \oplus H_2 \oplus \cdots \oplus H_n \tag{16}$$

илә ишарә едәк.

Әкәр x (15) кими көстәрилирсә, белә векторун H_0-а дахил
олмасы ашкардыр. Сонракы параграфда көстәрәчәјик ки, век-
тор H_1 H-дан көтүрүлмүш алт фәза исә, онда H-дан олан
истәнилән вектор $x = x_1 + x_1^+$ кими көстәрилир. Белә ки,
$D_1 \in H_1$ вә $x_1^\perp$ исә H_1-ин ортогонал тамамлајычысына дахил-
дир. x_1—вектору x-ин H_1-дәки проjексијасы адланыр. Беләликлә,

$$H = H_1 + H_1^{\perp} \tag{17}$$

кими көстәрилир. Инди $x \in H$-дан олан вектәр көтүрәк. x-ин $H_к$-ки проjексиjасыны $x_к$-илә ишарә едәк:

$$x' = x - \sum_{j=1}^{n} x_j. \tag{18}$$

Бу вектору ашағыдакы кими jазаг:

$$x' = (x - x_к) + (-x_1) + \cdots + (-x_к) +$$
$$+ (-x_{к+1}) + \cdots + (-x_n) \tag{19}$$

әввәлчә геjд едәк ки, белә jазылыш ону көстәрир ки, $x' \in H_0$. Дикәр тәрәфдән исә $H_j (j = \overline{1, n})$ гаршылыглы ортогонал олдугларындан (19)-ja дахил олан һәр бир вектор $H_к$-ja $(к = \overline{1, n})$ ортогоналдыр. Онда x' һәмчинин H_0-а ортогонал олар. Она көрә дә $x' = 0$ олмагла (14)-дән (15)-ин доғрулуғу алыныр. Инди фәрз едәк ки, H_j $(j = 1, \infty)$.

Көстәрәк ки, $x_к \in H$ олан истәнилән вектор исә, онда H_j-ын ортогонал чәми

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x + \cdots \tag{20}$$

көстәрилән векторларын чәминдән ибарәт олар.

$$H_{00} = \sum_{j=1}^{\infty} H_j$$

олсун. (20) кими көстәрилән x-ин H_{00}-а дахил олмасы ашкардыр. Еләчә дә $x \in H_{00}$ олдугда x-ин (20) шәклиндә олдуғу исбат олунур.

§ 9. БЕППО—ЛЕВИ БӘРАБӘРСИЗЛИJИ

Фәрз едәк ки, M Һилберт H фәзасында верилмиш хәтти алт чохлуг вә d, $f \in H$ олан f илә M арасында олан мәсафәдир. Исбат едәк ки, g_1 вә g_2 M-ә дахил олан истәнилән векторлар исә, онда

$$\| g_1 - g_2 \| \leqslant \sqrt{\| f - g_1 \|^2 - d^2} + \sqrt{\| f - g_2 \|^2 - d^2}, \tag{1}$$

бәрабәрсизлиjи өдәнилир. Исбаты. $g = \frac{g_1 - \lambda g_2}{1 - \lambda}$ вә $\lambda \neq 1$, оларса, онда $g \in M$. Она көрә дә $\| f - g \| \geqslant d$ вә jахуд да

$$\left\| f - \frac{g_1 - \lambda g_2}{1 - \lambda} \right\|^2 \geqslant d^2.$$

Бурадан

$\| f - \lambda f - g_1 + \lambda g_2 \|^2 \geqslant | 1 - \lambda |^2 d^2$, $f - g_1 = t_1$ вә $f - g_2 = t_2$ оларса,

$$\| t_1 - \lambda t_2 \|^2 \geqslant | 1 - \lambda |^2 d^2$$

Јә'ни
$$(t_1 - \lambda t_2,\ t_1 - \lambda t_2) \geqslant (1 - \lambda)\left(1 - \overline{\lambda}\right) d^2,$$

она көрә дә

$$(t_1,\ t_1) - \overline{\lambda}(t_1,\ t_2) - \lambda (t_2,\ t_1) + \lambda\overline{\lambda}\,(t_2,\ t_2) \geqslant (1 - \lambda)\left(1 - \overline{\lambda}\right) d^2.$$

Бурадан

$$\begin{gathered}[(t_1, t_1) - d^2] - \overline{\lambda}\,[(t_1,\ t_2) - d^2] - \lambda[(t_2,\ t_1) - d^2] + \\ + \lambda\overline{\lambda}\,[(t_2,\ t_2) - d^2] \geqslant 0.\end{gathered} \qquad (2)$$

λ ихтијари әдәд олдуғундан:

$$\lambda = \frac{(t_1,\ t_2) - d^2}{(t_2,\ t_2) - d^2}$$

кими сечәк. Онда (2)-дән

$$\begin{gathered}[(t_1,\ t_1) - d^2]\,[(t_2,\ t_3) - d^2] - [(t_1,\ t_2) - d^2][(t_2,\ t_1) - d^2] - \\ - [(t_1,\ t_2) - d^2]\,[(t_2,\ t_1) - d^2] + [(t_1,\ t_2) - d^2]\,[(t_2,\ t_1) - d^2] \geqslant 0,\end{gathered}$$

өдәнилир. Беләликлә,

$$| (t_1,\ t_2) - d^2 |^2 \leqslant [(t_1,\ t_1) - d^2]\,[(t_2,\ t_2) - d^2]. \qquad (3)$$

Инди $\| g_1 - g_2 \|^2$-ны гијмәтләндирәк:

$$\begin{gathered}\| g_1 - g_2 \|^2 = \| t_1 - t_2 \|^2 = (t_1 - t_2,\ t_1 - t_2) = \\ = \| t_1 \|^2 + \| t_2 \|^2 - (t_1,\ t_2) - (t_2,\ t_1) = \\ = [\, \| t_1 \|^2 - d^2] + [\, \| t_2 \|^2 - d^2] - [(t_1,\ t_2) - d^2] - [(t_2,\ t_1) - d^2].\end{gathered} \qquad (4)$$

Лакин

$$- [(t_1,\ t_2) - d^2] - [\overline{t_1,\ t_2) - d^2}] \leqslant 2\ |\ (t_1,\ t_2) - d^2\ | \qquad (5)$$

(3)-ә көрә (5)-дән

$$\begin{gathered}- [(t_1,\ t_2) - d^2] - [\overline{(t_1,\ t_2) - d^2}] \leqslant \\ \leqslant 2[(t_1, t_1) - d^2] - [(t_2,\ t_2) - d^2],\end{gathered} \qquad (6)$$

(6)-дан

$$\begin{gathered}\| t_1 - t_2 \|^2 \leqslant [\, \| t_1 \|^2 - d^2] + [\, \| t_2 \|^2 - d^2] + \\ + 2\,[\, \| t_1 \|^2 - d^2]\,[\, \| t_2 \|^2 - d^2], \text{ беләликлә}\end{gathered}$$

$$\| t_1 - t_2 \| \leqslant \sqrt{[\, \| t_1 \|^2 - d^2]} + \sqrt{[\, \| t_2 \|^2 - d^2}\,. \qquad (7)$$

t_1 вә t_2-нин ифадәләринә көрә (7) өдәнмәклә Беппо—Леви бәрабәрсизлијинин өдәнилдији алыныр. (1)-ин өдәнмәсиндә $\lambda \neq 1$ фәрз етмишдик вә (2)-дән истифадә олунмушдур. Лакин бу бәрабәрсизлик $\lambda = 1$ олдугда өдәнир. Она көрә дә $\lambda = 1$ олан һал бәрабәрлијә кәтирир.

Нәтичә 1. Фәрз едәк ки, M гапалыдыр вә бурада елә $\{g_n\}$ ардычыллығы вар ки,

$$\lim_{n \to \infty} \| f - g_n \| = d(f, M) \tag{8}$$

олур. Она көрә дә (1)-дән $\| g_n - g_m \| < \varepsilon$ олдуғу алыныр. H там олдуғундан бурадан $\{g_n\}$-нын јығылдығы алыныр. Әкәр $\lim\limits_{n \to \infty} g_n = g_0$ оларса, $d(f, M) = \| f - g_0 \|$ олур.

Нәтичә 2. Әкәр M, H-дан олан ихтијари алт фәза вә f H-дан гејд олунмуш елемент исә онда елә јеканә g_0 вар ки, $f - g_0 \perp M$ олур. Бунун үчүн $d = \| f - g_0 \|$ нәзәрә алараг $f - g_0 \perp M$ олдуғуну көстәрәк. Јә'ни $g \in M$ олан истәнилән g үчүн $(f - g_0, g) = 0$ олдуғуну көстәрәк. $f - g_0 = g'$ вә $t = -\dfrac{(g', g)}{(g, g)}$ кими көтүрсәк $g_0 - tg' \in M$ олар.
$d^2 \leqslant \| f - (g_0 - tg) \|^2$ олдуғундан бурадан

$d^2 \leqslant \| f - (g_0 - tg) \|^2 = \| g' + tg \|^2 = (g' + tg, g' + tg) =$
$= (g', g') + \bar{t}(g', g) + t(g, g') + t\bar{t}(g, g)$ бурада $(g', g') = d^2$ олдуғуну вә t-нин ифадәсини нәзәрә алсаг, онда $-\dfrac{\| (g', g) \|}{(g, g)} \geqslant 0$ нәзәрдә тутсаг $(g', g) = 0$ вә она көрә дә $(f - g_0, g) = 0$ олур. Беләликлә, көстәрдик ки, H-а дахил олан һәр бир f вектору $f = g_0 + g'$ шәклиндә көстәрилир. Белә ки, $g' \perp M$ олур. Көстәрәк ки, белә g_0 јеканәдир, онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни $f = g_{00} + g''$ кими көстәрилир. Белә ки,

$$g_{00} \in M, \ g'' \perp M.$$

Онда

$$g_0 + g' = g_{00} + g''$$

бурадан исә

$$g_0 - g_{00} = g'' - g$$

$g_0 - g_{00} \in M$, $g'' - g' \perp M$. Демәли, $g_0 - g_{00}$ өз-өзүнә ортогонал олмагла $g_0 = g_{00}$ олур.

g_0, x-ин M үзәриндәки проjексиjасы адланыр. Јухарыдакы мүлаһизәләримиздән белә нәтичәјә кәлирик ки, әкәр $M \subseteq H$ олан истәнилән алтфәза исә онда $H = M \oplus M^{\perp}$ кими көстәрилир, јә'ни H, M вә $M^{\perp}$-ин ортогонил чәминдән ибарәт олур. $M^{\perp}$, M-ин ортогонал тамамлајычысы адланыр.

§ 10. БЕССЕЛ БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ ВӘ ПАРСЕВАЛ БӘРАБӘРЛИЈИ

Теорем 7. Фәрз едәк ки, $f_1, f_2, \dots f_n$ H-да верилмиш ортонормал системдир.

$f \in H$ олан истәнилән f елементини көтүрәк, исбат едәк ки,

$$\sum_{k=1}^{n} |f, f_k)|^2 \leqslant \|f\|^2 \tag{1}$$

Исбаты. Онун үчүн $P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$ илә ишарә едәрәк

$$\min_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} |f - P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n}\| \tag{2}$$

мәсәләсини һәлл едәк. Она көрә

$$\gamma_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \right\|^2 = \left(f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k, f_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k \right) =$$

$$= (f, f) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f, f_k) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k (f_k, f) + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot \bar{\alpha}_k, \tag{3}$$

ејнилијини көтүрәк. Әкәр бу бәрабәрлијин сағ тәрәфинә $\sum_{k=1}^{n} |(f_1, f_k)|^2$—ифадәсини әлавә етсәк вә чыхсаг

$$\gamma_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, f_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(f, f_k)|^2 -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f, f_k) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k (f_k, f) + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2, \tag{4}$$

бәрабәрлији алынар.

$$\sum_{k=1}^{n} |f, f_k)|^2 - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (f, f_k) - \sum_{k=1}^{n} \bar{\alpha}_k (f_k, f) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = \sum_{k=1}^{n} |(f, f_k) - \alpha_k|^2 \tag{5}$$

(4)-дән

$$\gamma_{\alpha_1', \dots, \alpha_n} = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |(f, f_k)|^2 + \sum_{k=1}^{n} |(f, f_k) - \alpha_k|^2 \tag{6}$$

бәрабәрлији өдәнилир. Бурадан көрүндүјү кими $\gamma_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$-нин $\alpha_j\ (j=\overline{1,\ n})$-ын вариасијасы илә минимуму $\alpha_к=(f_к, f)$ $(к=\overline{1,\ n})$ олдугда алыныр. $\alpha_к$-ларын бу гијмәтләрини нәзәрә алсаг, (4)-дән

$$\left\| f-\sum_{к=1}^{n}(f,\ f_к)f_к\right\|^2=\|f\|^2-\sum_{к=1}^{n}|(f,f_к)|^3 \tag{7}$$

Бессел ејнилијини алырыг. (7)-нин сол тәрәфи мәнфи олмадығы үчүн

$$\sum_{к=1}^{n}|(f_1,\ f_к)|^2\leqslant\|f\|^2, \tag{8}$$

Бессел бәрабәрсизлији алыныр. Бурада бир нәтиҹәни гејд едәк.

Нәтиҹә. Әкәр гојдуғумуз екстримал мәсәлә һәлл олунмушдурса, онда

$$\left\|f-\sum_{к=1}^{n}(f,f_к)f_к\right\|\leqslant\left\|f-\sum_{к=1}^{n}\alpha_к f_к\right\| \tag{9}$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Бурадан көрүндүјү кими әкәр мүәјјән дәгигликлә

$$f=\sum_{к-1}^{n}\alpha_к f_к \tag{10}$$

бәрабәрлијини нәзәрә алсаг,

$$f=\sum_{к=1}^{n}(f,f_к)f_к \tag{11}$$

шәклиндә јазылыр. Инди H-да сонсуз $\{f_i\}$ ортонормал системини көтүрәк. (8) истәнилән n үчүн өдәнилдијиндән $n\to\infty$ олмагла лимитә кечсәк,

$$\sum_{к=1}^{\infty}|(f,f_к)|^2\leqslant\|f|^2, \tag{12}$$

јә'ни сонсуз ортонормал $\{f_i\}$ системи үчүн Бессел бәрабәрсизлијини алырыг. (12)-ни сол тәрәфинә дахил олан сыранын јығылмасы ашкардыр. Бу сыранын јығылмасындан

$$\sum_{к=1}^{\infty}(f,\ f_к)f_к \tag{13}$$

сырасынын јығылдығыны көстәрмәк олар. $\{f_к\}$ ортонормал олдуғундан

$$\left\| \sum_{к=m}^{n} (f, f_к) f_к \right\|^2 = \sum_{к=m}^{n} |(f, f_к)|^2 \tag{14}$$

(12)-нин сол тәрәфи јығылыр. $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $N(\varepsilon)$ вар ки, n, $m \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда

$$\sum_{к=m}^{n} |(f, f_к)|^2 < \varepsilon.$$

Она көрә n, $m \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда $\left\| \sum\limits_{к=m}^{n} (f, f_к) f_к \right\|^2 < \varepsilon$ өдәнилир.

H там фәза олдуғуна көрә, бурадан

$$\sum_{к=1}^{\infty} (f, f_к) f_к \tag{15}$$

сырасынын јығылан олмасы алыныр.

(15) күчлү јығылдығындан һәмчинин зәиф јығылыр, јә'ни

$$S_n = \sum_{к=1}^{n} (f, f_к) f_к$$

оларса,

$$\lim_{n \to \infty} (S_n, \varphi) = \lim_{n \to \infty} \sum_{к=1}^{n} (f, f_к)(f_к, \varphi)$$

истәнилән φ үчүн өдәнилмәлидир. Бурада, хүсуси һалда, φ ләри ортонормал $\{f_к\}$ системилә əвәз етсәк,

$$\lim_{n \to \infty} (S_n, f_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{к=1}^{n} (f, f_к)(f_к, f_i) = (f, f_i)$$

$$(S', f_i) = (f, f_i). \tag{16}$$

Бурада $(S' - f, f_i) = 0$, $\{f_i\}$ там систем олдуғуна көрә

$$f = S' = \sum_{к=1}^{\infty} (f, f_к) f_к. \tag{17}$$

Демәли, әкәр $\{f_i\}$, H-да верилмиш там ортонормал систем исә, онда $f \in H$ олан истәнилән f елементи үчүн

$$f = \sum_{к=1}^{\infty} (f, f_к) f_к \tag{18}$$

бәрабәрлији доғрудур. Белә ки, (18)-ә дахил олан сыра күчлү јығылыр. (18)-и нәзәрә алараг (7) Бессел ејнилијиндән $n \to \infty$ олдугда лимит алсаг,

$$\sum_{\text{к}=1}^{\infty} |(f, f_{\text{к}})^2 = \| f \|^2. \qquad (19)$$

Бу, Парсевал бәрабәрлији адланыр.

Теорем 8. Истәнилән f_1 вә f_2 елементләри үчүн

$$\sum_{\text{к}=1}^{\infty} (f_1, f_{\text{к}}) \overline{(f_2, f_{\text{к}})} = (f_1, f_2) \qquad (20)$$

бәрабәрлији доғрудур.

Исбаты. Бунун үчүн (19)-дан ујғун олараг

$$\| f_1 + f_2 \|^2 - \| f_1 - f_2 \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |(f_1 + f_2, f_j)|^2 -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} |(f_1 - f_2, f_j)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f_1 + f_2, f_j)(f_j, f_1 + f_2) -$$

$$- \sum_{j=1}^{\infty} (f_1 - f_2, f_j)(f_j, f_1 - f_2) = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (f_1, f_j)(f_j, f_2) +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} (f_2, f_j)(f_j, f_1) \qquad (21)$$

вә

$$\| f_i + i f_2 \|^2 - \| f_1 - i f_2 \|^2 = 2 \sum_{j=1}^{\infty} (f_1, f_j)(f_j, i f_2) +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{\infty} (i f_2, f_j)(f_j, f_1) \qquad (22)$$

бәрабәрликләрини јазаг. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфини i-јә вуруб (21) илә топласаг,

$$\| f_1 + f_2 \| - \| f_1 - f_2 \|^2 + i \| f_1 - i f_2 \| - i \| f_1 - i f_2 \|^2 =$$

$$= 4 \sum_{j=1}^{\infty} (f_1, f_j)(f_j, f_2). \qquad (23)$$

Бу бәрабәрлијин сол тәрәфинин $4(f_1, f_2)$ бәрабәр олмасыны билаваситә јохламаг олар. Бурадан (20)-нин доғру олмасы алыныр. (20) үмумиләшмиш Парсевал бәрабәрлији адланыр.

§ 11. НОРМАЛАШМЫШ ВӘ УНИТАР ФӘЗАЛАР АРАСЫНДА МҮНАСИБӘТ

Теорем 9. Нормалашмыш X фәзасынын унитар фәза олмасы үчүн һәмин фәзада тә'јин олунмуш норма үчүн

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2 [\| x \|^2 + \| y \|^2] \tag{1}$$

шәртинин өдәнилмәси һәм зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији ашкардыр. Шәртин кафилији (1)-ин өдәнилдијини гәбул едәк. Әввәлчә X-ин һәгиги фәза олдуғуну фәрз едәк. Ашағыдакы бәрабәрлији көтүрәк:

$$(x, y) = \frac{1}{4} [\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2], \tag{2}$$

(2)-дән $(x, y) = (y, x)$ олмасы вә $(x, x) = \| x \|^2$ өдәнилмәси ашкардыр. $(x, y) + (x, z)$ чәмини тә'јин едәк. (2)-ни нәзәрә алараг

$$(x, y) + (x, z) = \frac{1}{4} [\| x + y \|^2 - \| x - y \|^2 + \| x - z \|^2 -$$

$$- \| x - z \|^2] = \frac{1}{8} [\| 2x + y + z \|^2 + \| y - z \|^2 -$$

$$- \| 2x - (y + z) \|^2 - \| y - z \|^2] = \frac{1}{2} \left[\left\| x + \frac{y + z}{2} \right\|^2 - \right.$$

$$\left. - \left\| x - \frac{y + z}{2} \right\|^2 \right] = 2 \left(x, \frac{y + z}{2} \right),$$

она көрә дә

$$(x, y) + (x, z) = 2 \left(x, \frac{y + z}{2} \right) \tag{3}$$

олдуғу алыныр. Хүсуси һалда $z = 0$ олдугда $(x, y) + (x, 0) = 2 \left(x, \frac{y}{2} \right)$ вә јахуд

$$(x, y) = 2 \left(x, \frac{y}{2} \right). \tag{4}$$

Бурада y әвәзинә $y + z$ көтүрсәк:

$$(x, y + z) = 2 \left(x, \frac{y + z}{2} \right) \tag{5}$$

(3) вә (5)-дән

$$(x, y) + (x, z) = (x, y + z) \tag{6}$$

(4)-ү нәзәрә алсаг, ардычыл ујғун бәрабәрзликләр васитәсилә

$$\left(x, \frac{m}{2^n} y \right) = \frac{m}{2^n} (x, y) \tag{7}$$

олдуғуну көстәрмәк олар. $\left\{\frac{m}{2^n}\right\}$ чохлуғу һәгиги охун һәр јердә сых олдуғундан истәнилән α үчүн

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \tag{8}$$

(8) ашағыдакы бәрабәрликдән алыныр:

$$(\alpha x, y) = \frac{1}{4}[\|\alpha x + y\|^2 - \|\alpha x - y\|^2] = \frac{1}{4}\left[\left\|\lim_{n\to\infty}\frac{m}{2^n}x + y\right\|^2 - \right.$$

$$\left. - \left\|\lim_{n\to\infty}\frac{m}{2^n}x - y\right\|^2\right].$$

(7)-ин өдәнилмәсиндән вә скалјар һасилин кәсилмәмәзлијиндән (8)-ин өдәнилдији алыныр. Беләликлә, (2) васитәсилә тә'јин олунан норма аксиомларын өдәндијиндән, һәмин фәза *Унитар фәзадыр*. X-ин комплекс фәза олдуғуну гәбул едәк. (2) васитәсилә тә'јин олан норманы нәзәрә алараг, ашағыдакы кими норма тә'јин едәк:

$$(x, y)_0 = (x, y) + i(x, iy). \tag{9}$$

(2)-јә көрә (x, y) вә (x, iy) һәгигидирләр. (2)-дән көрүндүјү кими $(ix, iy) = (x, y)$. Бурада x әвәзинә ix јазсаг $(-x, iy) = (ix, y)$ беләликлә

$$-(x, iy) = (ix, y) \quad . \tag{10}$$

Бу бәрабәрлији нәзәрә алараг.

$(y, x)_0 = (y, x) + i(y, ix)$ бәрабәрлијинин сағ тәрәфинә дахил олан скалјар һасилләрин һәгиги олдуглары нәзәрә алынарса,

$$(y, x)_0 = (x, y) + i(ix, y).$$

(9)-а көрә, бурадан

$$(y, x)_0 = (x, y) - i(x, iy) \tag{11}$$

(9) вә (11)-дән

$$(x, y)_0 = \overline{(y, x)}_0. \tag{12}$$

Инди

$$(ix, y)_0 = i(x, y)_0 \tag{13}$$

олдуғуну көстәрәк, $(ix, y)_0 = (ix, y) + i(ix, iy)$ олдуғундан $(ix, y)_0 = (ix, y) + i(x, y)$ олур. $(ix, y) = -(x, iy)$ олдуғундан исә $(ix, y)_0 = -(x, iy) + i(x, y) = i^2(x, iy) +$

$$+ i(x, y) = i[(x, y) + i(x, iy)] = i(x, y) \text{ олур.}$$

Демәли, $(ix, y)_0 = i(x, y)_0$. Јердә галан аксиомлар скалјар һасилин хассәләриндән асанлыгла алыныр. Беләликлә, теорем исбат олунду.

§ 12. ХӘТТИ ТОПОЛОЖИ ФӘЗАЛАР

Тположи фәзалардан кениш тәдгигаты олан мүәјјән бир синиф вар ки, онун тә'рифини верәк.

Тә'риф 8. *Фәрз едәк ки, X, Φ мејданында верилмиш тположи фәзадыр. Әкәр бу фәзада верилмиш чәбри әмәлләр верилмиш тполокијаја көрә кәсилмәздирләрсә, белә фәза хәтти тположи фәза адланыр.*

Фәрз едәк ки, τ X-ин тполокијасыны тә'јин едир.

1. $x, y \in X$ истәнилән x, y нөгтәләри вә $V_{x+y} \in \tau$. V_{x+y} әтрафы верилдикдә x вә y-ин V_x, $V_y \in \tau$ олан елә V_x вә V_y әтрафлары вардыр ки,

$$V_x + V_y \subset V_{x+y}. \tag{1}$$

2. $\lambda x \in X$ ихтијари $V_{\lambda x}$ әтрафы үчүн $x \in X$ елә V_x әтрафы вә $\delta > 0$ вар ки, ихтијари μ, $|\mu - \lambda| < \delta$-дан

$$\mu V_x \subset V_{\lambda x}. \tag{2}$$

Демәли, $X \cdot X$-ин X-ә вә $\Phi \cdot X$-ин X-ә ујғун олараг $[x, y] \to \to x + y$, $[\lambda, x] \to \lambda x$ ин'икаслары кәсилмәз олур.

Банах фәзаларында апарылан тәдгигатлар һәм нәзәри вә һәм дә тәтбиги чәһәтдән лазыми диггәтә лајиг олмасына бахмајараг белә фәзалар олдугча дар синиф тәшкил едир. Јухарыда тә'риф етдијимиз кими хәтти фәзалардан мүәјјән синиф тәшкил едән хәтти тположи фәзалар вар ки, бунлар кениш синиф тәшкил едирләр. Лакин белә фәзаларда апарылан тәдгигатлар мүкәммәл нәзәријјә тәшкил етмир. Лакин хәтти тположи фәзалардан мүәјјән синиф тәшкил едән елә фәзалар вар ки, бу фәзаларда апарылан тәдгигатлар диггәтә лајигдир. Белә фәзалар локал габарыг фәзалардыр. Белә ки, бу фәзаларда алынан нәтичәләр кафи гәдәр дөвләтли олмамасына бахмајараг кениш тәтбигата маликдир. Белә фәзаларда әтрафлар системи габарыг чохлуглар васитәсилә вериләрәк, белә чохлугларын бир чох мүһүм хассәләри аналитик үсул тәшкил едән ујғун Минковски функционаллары васитәсилә өјрәнилир.

§ 13. ЈАРЫМ АДДИТИВ ФУНКСИОНАЛ

Тә'риф 9. *Фәрз едәк ки, хәтти X фәзасында $x^*(x)$ функционалы верилмишдир. $x, y \in X$ истәнилән x вә y елементләри үчүн,*

$$x^*(x+y) \leqslant x^*(x) + x^*(y)$$

өдәниләрсә, белә функционал јарым аддитив функционал адланыр.

Белә функционалларын бә'зи хассәләрини көстәрәк:

1. $x^*(\theta) \geqslant 0$, $x^*(\theta+\theta) \leqslant x^*(\theta)+x^*(\theta)$ олдуғундан, бурадан $x^*(\theta) \leqslant 2x^*(\theta)$, јахуд да $0 \leqslant x^*(\theta)$, $x \in X$ истәнилән x үчүн.

2. $x^*(x) \leqslant x^*(-x)$-ин доғрулуғу $0 \leqslant x^*(x-x) \leqslant x^*(x) + x^*(-x)$ бәрабәрсизлијиндән алыныр.

Теорем 10. Нормалашмыш X фәзасында верилмиш јарым аддитив $x^*(x)$ функсионалы $\|x\| \geqslant R$ олан x-ләр үчүн $x^*(x) \geqslant 0$ исә онда бу бәрабәрсизлик истәнилән x үчүн дә доғрудур.

Исбаты. Она көрә дә, $\|x\| < R$-дә бу бәрабәрсизлијин өдәнилдијини көстәрмәк кифајәтдир. R верилдикдә һәмишә елә ујғун n нөмрәси тапмаг олар ки,

$$\|nx\| \geqslant R.$$

Јарым аддитивлик хассәсинә көрә $x^*(nx) \leqslant nx^*(x)$ олдуғундан $\|nx\| \geqslant R$ исә $x^*(nx) \geqslant 0$ вә беләликлә дә $x^*(x) \geqslant 0$ олдуғу алыныр. Демәли, $\|x\| < R$, $x^*(x) \geqslant 0$ олмагла теорем исбат олунур.

Теорем 11. Јарым аддитив $x^*(x)$ функсионалы $x^*(\theta)=0$ олмагла $x=\theta$ нөгтәсиндә кәсилмәз исә, онда бүтүн X фәзасында кәсилмәз олар.

Исбаты.

$$x^*(x+h) \leqslant x^*(x) + x^*(h), \tag{1}$$

$$x^*(x-h) \leqslant x^*(x) + x^*(-h) \tag{2}$$

бәрабәрсизликләрини көтүрәрәк (2)-дә x әвәзинә $x+h$ јазмагла

$$x^*(x) \leqslant x^*(x+h) + x^*(-h) \tag{3}$$

бәрабәрсизлијиндән

$$-x^*(-h) \leqslant x^*(x+h) - x^*(x) \leqslant x^*(h). \tag{4}$$

Бурадан $h \to 0$ олмагла лимит алараг, бәрабәрликләриндән

$$\lim_{h\to 0} x^*(x+h) = x^*(x).$$

Беләликлә, теорем исбат олунур.

Теорем 12. Нормалашмыш X фәзасында верилмиш кәсилмәз $x^*(x)$ јарым аддитив функсионалы үчүн:

1. $M_{x^*} < \infty$ вә истәнилән x үчүн.

2. $M_{x^*}\|x\| \leqslant |x^*(x)| \leqslant M_{x^*}[\|x\|+1]$ $\qquad$ **(5)**

бәрабәрсизликләри өдәнилир. Белә ки, $M_{x^*} = \{\sup x^*(x), \|x\| \leqslant 1\}$

Исбаты. Шәртә көрә $x^*(x)$ функсионалы кәсилмәз олдуғундан $x=0$-ын мүәјјән δ әтрафында, јә'ни $\|x\| \leqslant \delta$ олдугда:

$$| x^*(x) | \leqslant M. \tag{6}$$

M мүәјјән сабит әдәддир. (6)-дән истифадә едәрәк асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\| x \| \leqslant Q$ истәнилән күрә дә $x^*(x)$ функсионалы мәһдуддур

$$x^*(x) = x^*\left(n \cdot \frac{x}{n}\right) \leqslant nx^*\left(\frac{x}{n}\right) \tag{7}$$

верилдикдә елә n сечмәк олар ки, $\left\|\frac{x}{n}\right\| < \delta$, $x^*\left(\frac{x}{n}\right) < M$ олдуғундан (7)-дән $x^*(x) < nM$ олар.

$- x^*(x) \leqslant x^*\ (- x)$ бәрабәрсизлијиндән $x^*(x) > - nM$ олар-са, (6)-дан $\| x \| \leqslant Q$-нин өдәнилмәси алыныр. $x^*(x)$-ин бу хассәсиндән M_{x^*}-ын сонлу олмасы алыныр. $0 \leqslant x^*(\theta) \leqslant M_{x^*}$ олдуғундан исә $M_{x^*} \geqslant 0$ олдуғу чыхыр. (5)-ин доғрулуғуну көстәрмәк үчүн x-и $x \in X$ гејд олунмуш елемент көтүрәк. Елә натурал n әдәди сечмәк олар ки,

$$n - 1 \leqslant \| x \| < n \tag{8}$$

бәрабәрсизлији өдәнилсин. Она көрә дә $\left\|\frac{x}{n}\right\| < 1$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$x^*(x) = x^*\left(n\, \frac{x}{n}\right) \leqslant nx^*\left(\frac{x}{n}\right) \leqslant nM_{x^*} \tag{9}$$

бәрабәрсизлијинин өдәнилдији алыныр. Дикәр тәрәфдән $n \leqslant \leqslant \| x \| + 1$ нәзәрә алсаг,

$$x^*(x) \leqslant nM_{x^*} \leqslant M_{x^*}[\, \| x \| + 1], \tag{10}$$

$$x^*(x) \leqslant M_{x^*} \| x \| + M_{x^*} \tag{11}$$

шәклиндә јазсаг:

$$\| x \| > \frac{M_{x^*}}{\varepsilon} \tag{12}$$

олдуғуну фәрз едәк, јә'ни

$$\| x \| \geqslant \frac{M_{x^*}}{\varepsilon}. \tag{13}$$

(13)-а көрә (11)-дән

$$x^*(x) \leqslant M_{x^*} \| x \| + \varepsilon \| x \|$$

јахуд

$$x^*(x) \leqslant [M_{x^*} + \varepsilon] \| x \| .$$

$- x^*(x) \leqslant x^*(- x)$ бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг:

$$x^*(- x) \leqslant [M_{x^*} + \varepsilon] \| x \| ,$$

вә јахуд

$$- x^*(x) \leqslant [M_{x^*} + \varepsilon] \| x \| \tag{14}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

$$y^*(x) = x^*(x) + [M_{x^*} + \varepsilon] \, \| x \|$$

функсионалыны көтүрәк. $[M_{x^*} + \varepsilon] \, \| x \|$ вә $x^*(x)$ функсионалы јарым аддитив олдугларындан һәмчинин $y^*(x)$ функсионалы јарым аддитивдир. (14)-ү нәзәрә алсаг, (13)-ү өдәјән x-ләр үчүн $y^*(x) \geqslant 0$ олур. Онда исбат етдијимиз теоремә көрә, һәмин бәрабәрсизлик истәнилән x үчүн өдәнилир. Демәли, (14) истәнилән x үчүн өдәнилир. ε ихтијари олдуғундан (14)-дән

$$-x^*(x) \leqslant M_{x^*} \| x \|$$

вә

$$x^*(x) \geqslant -M_{x^*} \| x \| \tag{15}$$

олдуғу чыхыр.

(11) вә (14) бәрабәрсизликләринә көрә (5)-ин өдәнилмәси исбат олунур:

Гејд: Јарым аддитив функсионал $\alpha > 0$ олан истәнилән әдәд үчүн $x^*(\alpha x) = \alpha x^*(x)$ оларса, белә функсионалы мүсбәт јарым аддитив адландырачајыг.

§ 14. МИНКОВСКИ ФУНКСИОНАЛЫ

Тә'риф 10. *Фәрз едәк ки, M хәтти X вектор фәзасында верилмиш чохлугдур. M о заман габарыг чохлуг адланыр ки, x, $y \in M$ истәнилән елементләр олдугда истәнилән $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ әдәди үчүн*

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in M. \tag{1}$$

Хүсуси һалда $\frac{x + y}{2} \in M$ олмасы ашкардыр.

Фәрз едәк ки, бизә ашағыдакы ики шәрти өдәјән $P(x)$ функсионалы верилмишдир:

1. $P(x_1 + x_2) \leqslant P(x_1) + P(x_2)$, (2)
2. $P(\alpha x) = |\alpha| \, P(x)$, (3)

(3)-ә көрә $P(0) = 0$.

Инди

$$P(x_1 - x_2) \geqslant | P(x_1) - P(x_2) | \tag{4}$$

бәрабәрсизлијинин өдәнилдијини көстәрәк.

x_1 вә x_2 $P(x)$-ин тә'јин областындан олан ихтијари ики елемент олсун. Тә'рифә көрә

$$P(x_1) = P(x_1 - x_2 + x_2) \leqslant P(x_1 - x_2) + P(x_2), \tag{5}$$

$$P(x_1) - P(x_2) \leqslant P(x_1 - x_2) \tag{6}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Дикәр тәрәфдән (2) вә (3)-ү нәзәрә алсаг

$P(x_1 - x_2) = |-1| \, P(x_2 - x_1) - P(x_2 - x_1) \geqslant P(x_2) - P(x_1)$ бәрабәрсизлији вә бурадан

$$P(x_1 - x_2) \geqslant P(x_2) - P(x_1), \tag{7}$$

бәрабәрсизлији алыныр. Бурадан исә

$$-P(x_1 - x_2) \leqslant P(x_1) - P(x_2). \tag{8}$$

(8) вә (5) көрә $-P(x_1 - x_2) \leqslant P(x_1) - P(x_2) \leqslant P(x_1 - x_2)$ бәрабәрсизлији вә јахуд да

$$P(x_1 - x_2) \geqslant | P(x_1) - P(x_2) | \tag{9}$$

өдәнилир. Бурадан исә хүсуси һалда $P(x) \geqslant 0$ олдуғу чыхыр. $C > 0$ гәбул едәрәк (2) вә (3) шәртләрини өдәјән елә $P(x)$ функсионалыны көтүрәк ки, ашағыдакы бәрабәрсизлији өдәсин:

$$P(x) \leqslant C. \tag{10}$$

(10)-у өдәјән нөгтәләр чохлуғуну M илә ишарә едәк бу функсионал васитәсилә алынан чохлуғун бир нечә хассәләрини көстәрәк. Исбат едәк ки, M габарыгдыр.

1. $x, y \in M$ ихтијари x, y елементләрини вә $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ олан ихтијари әдәдини көтүрәк вә көстәрәк ки,

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in M.$$

(2), (3) вә (10) көрә

$$P[\alpha x + (1 - \alpha) y] \leqslant P(\alpha x) + P[(1 - \alpha) y] = \alpha P(x) + (1 - \alpha) P(y) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha C + (1 - \alpha) C = C$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$. Беләликлә, M-ин габарыг олдуғу исбат олунур.

2. $|\lambda| < 1$ вә $x \in M$ оларса, һәмчинин $\lambda x \in M$ олар. Бу исә ашағыдакы бәрабәрсизлијин өдәнилмәсиндән көрүнүр. $P(\lambda x) = |\lambda| \, P(x) \leqslant C$ она көрә $\lambda x \in M$ олур.

3. $x \in X$ истәнилән елемент исә онда елә үјғун $a > 0$ әдәдини сечмәк олар ки,

$$a^{-1} x \in M. \tag{11}$$

Фәрз едәк ки, елә $a > 0$ әдәди вар ки, (11) өдәнилир. Онда

$$P(a^{-1} x) \leqslant C, \tag{12}$$

јахуд

$$a^{-1} P(x) \geqslant C \tag{13}$$

бурадан

$$a^{-1} \leqslant \frac{C}{P(x)}. \tag{14}$$

Демәли, (14) өдәнилдикдә (11) өдәниләр. Шүбһәсиз $P(x) \neq 0$ олдуғу фәрз олунур. Әкс һалда, јә'ни $P(x) = 0$ оларса, a әвәзинә истәнилән мүсбәт әдәди көтүрмәк олар.

4. Нәһајәт $x \in M$ исә $-x \in M$ олар. Бу исә $P(x) = |-1|P(-x)$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг (10) васитәсилә алыныр.

Теорем 15. Әкәр $P(x)$ (2), (3) вә (10) шәртләрини өдәјирсә, онда белә функционалын

$$P(x) = \inf_{\substack{a>0 \\ a^{-1}x\in M}} a \qquad (15)$$

шәклиндә олдуғуну көстәрәк.

Исбаты. $x \in X$ елементини вә (10)-а дахил олан мүсбәт сабит C әдәдини көтүрәрәк

$$\tilde{x} = \frac{Cx}{P(x)+\varepsilon} \qquad (16)$$

елементин дүзәлдәк. Ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн гејд етдијимиз кими, $\frac{P(x)}{P(x)+\varepsilon} < 1$ олдуғундан

$$P(\tilde{x}) = P\left(\frac{Cx}{P(x)+\varepsilon}\right) = \frac{C}{P(x)+\varepsilon}\,P(x) < C \qquad (17)$$

бәрабәрсизлијиндән $\tilde{x} \in M$ олдуғу алыныр. (17) бәрабәрсизлијини ашағыдакы шәкилдә јазаг:

$$P\left[\left(\frac{P(x)+\varepsilon}{C}\right)^{-1} x\right] < C, \qquad (18)$$

$$a = \frac{P(x)+\varepsilon}{C}, \qquad (19)$$

бурадан

$$P\left(a^{-1}x\right) < C. \qquad (20)$$

Биз көстәрдик ки, һәр бир x елементинә гаршы (19) илә тә'јин олунан $a > 0$ әдәди вар ки, $a^{-1}x \in M$. $\varepsilon > 0$ ихтијари олдуғундан (19)-дан $\inf a = \frac{P(x)}{C}$ олур вә беләликлә дә (15)-ин өдәнилдији исбат олунур. Биз бурада ашағыдакы нәтичәни гејд едә биләрик ки, (2), (3) вә (10) шәртләрини өдәјән $P(x)$ функционалы (15) бәрабәрлијини өдәјир. Белә функционал Минковски функционалы адланыр. Фәрз едәк ки, M мүәјјән габарыг чохлугдур. Белә ки, $|\lambda| \leqslant 1$ вә $x \in M$ олдугда $\lambda x \in M$. Бундан әлавә һәр бир x-ә гаршы елә мүсбәт $a > 0$ әдәди вар ки, $a^{-1}x \in M$ олур. Бу чохлуг үзрә тә'јин олунан Минковски функционалыны көтүрәк:

$$P_M(x) = \inf_{\substack{a>0 \\ ax^{-1} \in M}} a \qquad (21)$$

(21) илә тә'јин олунан $P_M(x)$-ин бир нечә хассәләрини көстәрәк:

Теорем 14. $P_{\text{М}}(x)$ Минковски функсионалы ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1. $P_{\text{М}}(x) \geqslant 0.$ (22)

2. $P_{\text{М}}(x) < +\infty.$ (23)

3. $x \in M$ **олдугда исә** $P_{\text{М}}(x) \leqslant 1.$ (24)

4. $P_{\text{М}}(x)$ **јарым аддитивдир.**

Исбаты. (21)-дән көрүндүјү кими (22) вә (23)-үн өдәнилмәләри ашкардыр. Доғрудан да, M габарыг олдуғундан $x \in M$ олдугда, мәсәлән: $\frac{x}{2} \in M$, јә'ни $2^{-1}x \in M$. Она көрә дә (21)-ә дахил олан a-ларын дәгиг ашағы сәрһәди ваһиддән чох олмаз. Она көрә дә (21)-ә көрә (23) өдәнилир. $P_{\text{М}}(x)$-ин јарым аддитивлијини көстәрмәк үчүн ихтијари x вә y елементләрини көтүрәк:

$$[P_{\text{М}}(x) + \varepsilon]^{-1}\, x \in M \tag{25}$$

вә

$$[P_{\text{М}}(y) + \varepsilon]^{-1}\, y \in M \tag{26}$$

өдәнилмәси ашкардыр.

$$\alpha = \frac{P_{\text{М}}(x) + \varepsilon}{P_{\text{М}}(x) + P_{\text{М}}(y) + 2\varepsilon} \tag{27}$$

әдәдини көтүрсәк $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, шәртә көрә M габарыг олдуғундан

$$\alpha \frac{x}{P_{\text{М}}(x) + \varepsilon} + (1 - \alpha) \frac{y}{P_{\text{М}}(y) + \varepsilon} \in M \tag{28}$$

$1 - \alpha$ ашағыдакы кими олдуғундан:

$$1 - \alpha = \frac{P_{\text{М}}(y) + \varepsilon}{P_{\text{М}}(x) + P_{\text{М}}(y) + 2\varepsilon}. \tag{29}$$

(28) вә (29)-дан

$$\frac{P_{\text{М}}(x) + \varepsilon}{P_{\text{М}}(x) + P_{\text{М}}(y) + 2\varepsilon} \cdot \frac{x}{P_{\text{М}}(x) + \varepsilon} + \frac{P_{\text{М}}(y) + \varepsilon}{P_{\text{М}}(x) + P_{\text{М}}(y) + 2\varepsilon} \cdot \frac{y}{P_{\text{М}}(y) + \varepsilon} \in M. \tag{30}$$

Бурадан исә

$$\frac{x + y}{P_{\text{М}}(x) + P_{\text{М}}(y) + 2\varepsilon} \in M \tag{31}$$

вә јахуд да

$$[P_{\text{М}}(x) + P_{\text{М}}(y) + 2\varepsilon]^{-1} (x + y) \in M. \tag{32}$$

$P_М(x)$-ин тә'рифинә көрә $P_М(x+y)$, (32)-ни өдәјән мүсбәт әдәдләринин дәгиг ашағы сәрһәди олдуғундан

$$P_М(x+y)\leqslant P_М(x)+P_М(y)+2\varepsilon. \qquad (33)$$

Бурадан исә $\varepsilon>0$ ихтијари олдуғундан $P_М(x+y)\leqslant P_М(x)+P_М(y)$ олмагла $P_М(x)$-ин јарым аддитив олдуғу чыхыр.

§ 15. ЛОКАЛ ГАБАРЫГ ФӘЗАЛАР

Биз габагкы фәсилләрдә метрик вә нормалашмыш фәзаларын бир чох үмуми хассәләрини вермәклә, бә'зи нәзәри мәсәләләрин һәлләринин дә тәдгигини көстәрдик. Хүсуси илә Банах фәзалары даһа дәгиг тәдгиг олунмагла һәмин фәзаларда хәтти чевирмәләрлә әлагәдар олан олдугча гијмәтли мәсәләләрин һәлләри мүфәссәл шәкилдә шәрһ едилмишдир. Дикәр тәрәфдән, верилмиш хәтти фәзанын ујғун гошма фәзасынын варлығы истәр һәмин фәзанын структурун өјрәнилмәсиндә вә истәрсә дә бу фәзада гојулмуш бә'зи мәсәләләрин һәлләриндә бөјүк әһәмијјәтә маликдир. Елә метрик фәзалар көстәрмәк олар ки, һәмин фәзада ејнилик кими сыфырдан фәргли функсионаллар олмасын. Она көрә дә јухарыда гејд етдијимиз чатмамазлығы арадан галдырмаг мәгсәдилә мүәјјән бир синиф хәтти фәзаларда тополокијаны башга чүр тә'јин етмәклә мүәјјән үмумиләшмә верилир ки, белә фәзалар локал габарыг фәзалар адланыр. Ашағыда белә фәзалары тә'риф етмәклә бир нечә хассәләрин исбатыны верәчәјик. Биз көстәрмишдик ки, әкәр хәтти X фәзасында јарым аддитив $P(x)$ функсионалы, һәмчинин

$$P(\lambda x)=|\lambda|P(x) \qquad (1)$$

өдәјирсә, онда верилмиш C әдәди үчүн $P(x)<C$ бәрабәрсизлији өдәјән M ашағыдакы хассәләри өдәјир:

1) M габарыгдыр,

2) $|\alpha|\leqslant 1$ $x\in M$ олдугда $\alpha x\in M$,

3) $x\in X$ истәнилән x исә, онда елә ујғун мүсбәт a әдәди вар ки, $a^{-1}x\in M$. Әкәр истәнилән габарыг M чохлуғу 2) хассәсини өдәјирсә, онда белә чохлуг *удаған чохлуг* адланыр. Әкәр истәнилән габарыг M чохлуғу 3) хассәсини өдәјирсә, онда белә чохлуг *таразлашдырылмыш чохлуг* адланыр. $P_М(x)$-ин мүсбәт ејничинсли олмасы исә M габарыг чохлуғунун мүәјјән хассәләри илә әлагәдардыр. Әкәр M, таразлашдырылмыш чохлуг исә, онда истәнилән $\alpha\geqslant 0$ әдәди үчүн $P_М(\alpha x)=\alpha P_М(x)$. Әкәр әлавә олараг M һәм дә удаған чохлуг исә, онда истәнилән α үчүн

$$P_М(\alpha x)=|\alpha|P_М(x).$$

Буну исбат етмәк үчүн $|\alpha|=1$ олан α-лар үчүн исбат етмәк кифајәтдир. Она көрә $|\alpha|=1$ олдуғуну гәбул едәк; M

удаган чохлуг олдуғундан $x \in M$ олдугда. еләчә дә $\frac{1}{\alpha} x \in M$ олур.

X һәгиги фәза олдугда $|\lambda| \leqslant 1$ олан λ-лар үчүн $P_M(\lambda x) = |\lambda| P_M(x)$ олдуғу асанлыгла көстәрилир:

$$P_M(\lambda x) = \inf_{a^{-1}x \in M} a = \lambda \inf_{a^{-1}\lambda x \in M} \lambda^{-1} a = \lambda P_M(x).$$

Дикәр тәрәфдән $P_M(x)$ јарым аддитив вә $P_M(0) = 0$ олдуғундан $P_M(-x) = P_M(x - x + x) \leqslant P_M(x)$ вә еләчә дә $P_M(x) = P_M(x - x - x) \leqslant P_M(-x)$ олмагла $P_M(-x) = P_M(x)$. Она көрә дә, әкәр $|\lambda| \leqslant 1$ олан мәнфи әдәддирсә, онда $P_M(-\lambda x) = -\lambda P_M(x)$ вә она көрә $P_M(\lambda x) = |\lambda| P_M(x)$. Үмумијјәтлә, $P_M(\lambda x) = |\lambda| P_M(x)$ истәнилән λ һәгиги әдәди үчүн өдәнилир.

Бүтүн бу мүлаһизәләрдән ашағыдакы нәтичәни алырыг: әкәр јарым аддитив $P(x)$ функсионалы һәмчинин $P(\lambda x) = |\lambda| P(x)$ шәрти өдәниләрсә, онда C верилмиш әдәд олдугда $P(x) \leqslant C$ бәрабәрлијини өдәјән нөгтәләр чохлуғу M 1, 2, 3 вә 4 шәртләрини өдәјир вә әксинә әкәр M чохлуғу 1, 2 вә 3 шәртләрини өдәјирсә, онда бу чохлуг үзрә тә'јин олунан $P_M(x)$ Минковски функсионалы јарым аддитив олмагла мүсбәт ејни чинслидир. Сонралар һәр дәфә лазым кәлдикдә бу хассәләри тәкрар етмәмәк мәгсәдилә ашағыдакы шәртләшмәни гәбул едәк. Әкәр һәр һансы габарыг M чохлуғу һәм удаған вә һәм дә таразлашдырылмыш чохлуг исә онда дејәчәјик ки, һәмин чохлуг Q хассәлидир.

Минковски функсионалынын гурулмасы ону көстәрир ки, һәр бир Q хассәли чохлуға мүәјјән хассәли функсионал ујғундур. Бу нөгтеји нәзәрдән локал габарыг фәзалар ики гајда үзрә тә'риф олунурлар:

Фәрз едәк ки, X тоположи хәтти вектор фәзасыдыр вә әлавә фәрз едәк ки, бу фәзада тә'сир едән верилмиш

$$\{P_\nu(x)\} \tag{2}$$

јарым мүсбәт аддитив функсионаллар чохлуғудур. Бурада ν индекси мүәјјән бир M' чохлуғу үзрә дәјишир; јә'ни $\nu \in M'$ әлавә бу функсионаллардан белә бир хассәнин өдәнилдијини фәрз едәк. Әкәр $x_0 \in X$ мүәјјән x_0 нөгтәсиндә $\nu \in M'$ истәнилән ν үчүн $P_\nu(x_0) = 0$ исә, онда $x_0 = 0$ олсун. Јахуд бу хассә ашағыдакы кими дә тә'риф ола биләр. $x_0 \in X$ гејд олунмуш $x_0 \neq 0$ олан нөгтә исә онда (2)-јә дахил олан елә $P_{\nu_0}(x)$ вар ки, $P_{\nu_0}(x_0) \neq 0$ олур. Бу аксиом *ајрылма аксиомудур.* Белә функсионаллар васитәсилә X-дә ашағыдакы кими тополокија верилир. $x_0 \in X$ исә x_0-ын әтрафы белә тә'јин олунур: истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдини вә (2)-дән сонлу сајда

$$P_{\nu_1}(x),\ P_{\nu_2}(x),\ \dots,\ P_{\nu_n}(x) \qquad (3)$$

функсионалларыны көтүрәк.

$$P_{\nu_k}(x-x_0) < \varepsilon, \quad \left(k=\overline{1,n}\right) \qquad (4)$$

бәрабәрсизликләрини өдәјән нөгтәләр чохлуғуну N илә ишарә едәк. Демәли, N, x_0-ын гејд олунмуш әтрафы олур.

x_0-ын әтрафлар һеј'әтини алмаг үчүн $\varepsilon > 0$ ихтијари көтүрмәклә (3) истәнилән сонлу сајда функсионаллар $N=N(\varepsilon, P_1, P_2, \dots$ $\dots P_n)$ кими јазылар.

$P_{\nu k}(x-x_0) < \varepsilon_k$, $\left(k=.\overline{1,n}\right)$ верилдикдә, бу әтраф $N=\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, P_1, P_2, ..P_n\}$ кими, ишарә олунур. Әкәр X-дә тополокија бу гајда үзрә верилирсә, белә фәза, хәтти тоположи локал габарыг фәза вә јахуд да садәчә олараг локал габарыг фәза адланыр. Локал габарыг фәза ашағыдакы кими дә тә'риф олунур.

Әкәр тоположи хәтти X фәзасында сыфры өз дахилинә алан истәнилән ачыг чохлуг өз дахилиндә Q хассәли чохлуг сахлајырса, онда белә фәза локал габарыг фәза адланыр. Фәза хәтти олдуғундан јалныз сыфрын әтрафлар һеј'әтини вермәк кифајәтдир. Доғрудан да, әкәр $\{G\}$ системи сыфрын әтрафлар һе'јәти исә, онда $x_0 \in X$ олан истәнилән нөгтә исә x_0-ын әтрафлар һеј'әти $(G+x_0)$ олар. Исбат олунур ки, локал габарыг фәзалара верилмиш һәр ики тә'рифләр еквивалентдирләр.

Бә'зән хәтти тоположи фәзаларда тополокија һесабы сајда мүсбәт јарым аддитив функсијалар васитәсилә верилир. Белә фәзалар һесаби нормалы фәзалар адланыр.

Теорем 15. Локал габарыг фәзанын метрикләшмәси үчүн онун һесаби квазинормалы олмасы зәрури, һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин кафилији. Гәбул едәк ки, локал габарыг X фәзасында тополокија һесаби сајда

$$\{P_i(x)\} \qquad (5)$$

мүсбәт јарым аддитив функсијалар системи васитәсилә верилмишдир. Исбат едәк ки, һәмин фәзаны метрикләшдирмәк олар:

$$P_i(x) = \| x \|_i. \qquad (6)$$

олсун $\| x \|_i$-дән ашағыдакы кими мәсафә тә'јин едәк, јә'ни x_1 вә x_2 нөгтәләри арасындакы мәсафәни

$$\rho(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\| x_1 - x_2 \|_k}{1 + \| x_1 - x_2 \|_k} \qquad (7)$$

ишарә едәрәк (7)-јә дахил олан сыранын јығылмасы ашкардыр. Јә'ни (7) һәр x_1, x_2 нөгтәләринә гаршы мүәјјән $\rho(x_1, x_2)$ әдәди гаршы гојур. $\rho(x_1, x_2) \geqslant 0$, $\rho(x_1, x_2) = \rho(x_2, x_1)$ олмасы ашкардыр. $\rho(x_1, x_2) = 0$, (7)-јә дахил олан һәр бир топланан сыфыр олмагла

$$P_к(x_1 - x_2) = \| x_1 - x_2 \|_к = 0. \tag{8}$$

(8) истәнилән $к$ үчүн өдәндијиндән $P_к$-нын хассәсинә көрә: $x_1 = x_2$ олар. Әксинә $x_1 = x_2$ олдугда $\rho(x_1, x_2) = 0$ олур. $\rho(x_1, x_2)$ үчүн үчбучаг аксиомасынын өдәнилмәси

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

бәрабәрсизлији васитәсилә алыныр.

Демәли, (7) илә тә'јин олунан $\rho(x_1, x_2)$ локал габарыг фәзаны метрик фәзаја чевирир. Шүбһәсиз бунунла мәсәлә гуртармыр, көстәрмәк лазымдыр ки, бу метрика илә тә'јин олунан әтрафлар, јә'ни шарлар, сыфрын әтрафлар һеј'әтини верир, јә'ни тәзә дахил олан тополокија әввәлки тополокија илә әлагәдар олараг ондан асылыдыр. (3) васитәсилә тә'јин олунан тополокијада сыфрын әтрафлар һеј'әтини $\tilde{u}$ илә ишарә едәк. $\rho(x) < \varepsilon$ сферасыны көтүрәк вә бу сфераны K_ε илә ишарә едәк. Әввәлчә көстәрәк ки, гејд олунмуш K_ε сферасы $\tilde{u}$-дан олан мүәјјән бир u-нын әтрафына дахилдир. $\varepsilon_к$ $(к = \overline{1, n})$ мүсбәт әдәдләрини верәрәк сыфрын $u = \{x \in X, \| x \|_к < \varepsilon_к \; к = \overline{1, n}\}$ әтрафыны көтүрәк. Көстәрәк ки, ε әдәдини елә сечмәк олар ки, K_ε сферасы u-нын дахилиндә олсун.

Беләликлә, ε әдәдини елә сечәк ки,

$$\varepsilon < 2^{-к} \varepsilon_к (1 + \varepsilon_к)^{-1} \quad (к = \overline{1, n}) \tag{9}$$

бәрабәрсизлијини өдәсин. (7)-дән

$$\sum_{к=1}^{n} 2^{-к} \frac{\| x \|_к}{1 + \| x \|_к} < \varepsilon \tag{10}$$

бәрабәрсизлијини јазсаг:

$$\frac{2^{-к} \| x \|_к}{1 + \| x \|_к} < \varepsilon \tag{11}$$

истәнилән $к$ үчүн өдәнилдијиндән

$$2^{-к} \| x \|_к [1 + \| x \|_к]^{-1} < \varepsilon \tag{12}$$

$(к = \overline{1, n})$ гијмәтләри үчүн дә өдәниләр. ε (9) бәрабәрсизлијини өдәдијиндән (12)-дән

$$2^{-к} \| x \|_к [1 + \| x \|_к]^{-1} < 2^{-к} \varepsilon_к (1 + \varepsilon_к)^{-1}.$$

Бурадан, $\| x \|_k < \varepsilon_k$ $(k = \overline{1, n})$ бәрабәрсизлији алыныр. Биз көстәрдик ки, $\varepsilon > 0$ әдәди вар ки, $K_\varepsilon \subset u$ олур. Инди, әксинә, көстәрәк ки, һәр бир K_ε өз дахилиндә $\tilde{u}$-дән ујғун чохлуг сахлајыр. Она көрә дә фәрз едәк ки, $u \in \tilde{u}$. Белә ки, u һәмин бәрабәрлик васитәсилә тә'јин олунур.

$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\| x \|_k}{1 + \| x \|_k} = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \frac{\| x \|_k}{1 + \| x \|_k} + $$

$$+ \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} \frac{\| x \|_k}{1 + \| x \|_k} \qquad (13)$$

бәрабәрсизлијини көтүрәк; (8)-и вә $\frac{\| x \|_k}{1 + \| x \|_k} < 1$ бәрабәрсизлијин өдәндијини нәзәрә алараг (13)-дән

$$\rho(x) < \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} \varepsilon_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} < \frac{1}{2} \max_k \varepsilon_k + \frac{\varepsilon}{2} \qquad (14)$$

бәрабәрсизлијини аларыг.

Елә $\varepsilon > 0$ әдәди сечәк ки, ејни заманда

$$2^{-k} > \frac{\varepsilon}{2} \qquad (15)$$

вә

$$\max \varepsilon_k < \varepsilon \qquad (16)$$

бәрабәрсизликләри өдәнилсин. Она көрә дә (15) вә (16)-ә көрә $\rho(x) < \varepsilon$ өдәнилир. Демәли, исбат етдик ки, $u \in \tilde{u}$ олдугда елә $\varepsilon > 0$ әдәди вар ки, $\rho(x) < \varepsilon$ өдәнилир вә она көрә $u \in K_\varepsilon$ олур. Биз K_ε шарлар һеј'әтинин сыфрын әтрафлар һе'јәтини тәшкил етмәклә кафи шәртин исбаты бунунла тамамланыр.

Шәртин зәрурилији. Әкәр X метрик фәза исә, онда $\rho(x) < r$ бурада r истәнилән рассионал әдәд олмагла сыфрын һесаби сајда әтрафлар һеј'әти алынмагла шәртин зәрури олмасы алыныр. Беләликлә дә, теорем исбат олунур.

Инди локал габарыг фәзаларда еквивалент мүсбәт јарым аддитив функсијалар системинин тә'рифини верәк, фәрз едәк ки, локал габарыг X фәзасында тополокија

$$\{P_j(x)\} \qquad (17)$$

$$\{Q_j(x)\} \qquad (18)$$

мүсбәт јарым аддитив системләри верилмишдир. Фәрз едәк ки, (17)-дән көтүрмүш һәр бир $P_j(x)$-ә гаршы (18)-дән елә мүәјјән $Q_j(x)$ функсионаллар системи ујғундур ки,

$$P_i(x) \leqslant \sum_j M_{ij} Q_j(x) \tag{19}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бурада M_{ij} сабит мүсбәт әдәддир, вә тәрсинә фәрз едәк ки, (18)-дән көтүрүлмүш һәр бир $Q(x)$-ә гаршы (17)-дән елә $P(x)$ ујғундур ки,

$$Q_\mu(x) \leqslant \sum_\nu M_{\nu,\mu} P_\nu(x) \tag{20}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Әкәр көстәрилән (17) вә (18) јарым нормалар системи (17) вә (18)-и өдәјирләрсә, онда белә систем јарым нормалар гаршылыглы еквивалент адланырлар вә јахуд да дејирләр ки, һәр ики систем X-дә ејни тополокијаны верир. Локал габарыг фәзаларда јығылма анлајышы, мәһдуд чохлуг анлајышы һәмин фәзада верилмиш јарым нормалар васитәсилә верилир. Мәсәлән, $\{x_n\}$ локал габарыг фәзада верилмиш ардычыллыг x_0 елементинә јығылырса бу ашағыдакы кими баша дүшүлүр. Бу фәзада тополокија $\{P_\nu(x)\}$ $\nu \in \tilde{u}$ јарым нормалар васитәсилә верилмишдирсә истәнилән ν үчүн $\{P_\nu(x_n - x)\}$ әдәди ардычыллығы јығылырса, онда $\{x_n\}$ x_0-а јығылан ардычыллыг адланыр. $X_0 \subset X$ олан чохлуг о заман мәһдуд адланыр ки, истәнилән ν үчүн $\{P_\nu(x)\}$ чохлуғу мәһдуд олсун.

Теорем 16. ***M*** **чохлуғунун мүтләг габарыг олмасы үчүн бу чохлуғун ејни заманда таразлашан вә габарыг олмасы зәрури һәм дә кафи шәртдир.**

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, M мүтләг габарыгдыр. Јә'ни $x, y \in M$ олан истәнилән елементләр вә λ, μ $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$ олан ихтијари әдәдләр исә $\lambda x + \mu y \in M$. Ашкардыр ки, бу шәрт дахилиндә M габарыгдыр. Әкәр λ вә μ-дән бири сыфыр оларса, мәсәлән, $\mu = 0$ вә $|\lambda| < 1$ онда $\lambda x \in M$. Беләликлә, M таразлашан чохлуг олур.

Шәртин кафилији. Инди фәрз едәк ки, M һәм габарыг вә һәм дә таразлашандыр. Көстәрәк ки, M мүтләг габарыгдыр. λ вә μ-ләрдән бири сыфыр оларса, мәсәлән, $\mu = 0$ олдугда M таразлашан олдуғундан $|\lambda| \leqslant 1$ вә $\lambda x \in M$. Јә'ни фәрз едәк ки, ејни заманда $\lambda \neq 0$ вә $\mu \neq 0$,

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|) \cdot \left[\frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\lambda}{|\lambda|} x + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} \cdot \frac{\mu}{|\mu|} \cdot y\right].$$

M таразлашан олдуғундан $x' = \frac{\lambda}{|\lambda|} x \in M$ вә $\frac{\mu}{|\mu|} y = y' \in M$.

M габарыг олдуғундан $z' = \frac{|\lambda|}{|\lambda| + |\mu|} x' + \frac{|\mu|}{|\lambda| + |\mu|} y' \in M$. Она көрә $|\lambda| + |\mu| \leqslant 1$ олдугда исә M-ин таразлашан олмасына көрә $(|\lambda| + |\mu|) z' \in M$, M-ин мүтләг габарыг олмасы алыныр. Беләликлә, теорем исбат олунур.

Теорем 17. Әкәр M мүтләг габарыг вә таразлашан чохлуг исә, ашағыдакы мүнасибәтләр өдәнилир:

1. $0 \in M$.

2. $|\lambda| \leqslant |\mu|$ олдугда $\lambda M \subseteq \mu M \cdot \lambda_i \; (i = \overline{1, n})$ истәнилән әдәдләр олдугда.

3. $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i M = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |\lambda_i| \right) M$.

Исбаты. M мүтләг габарыг олдуғуна көрә $\left(-\frac{1}{2}\right) x + \frac{1}{2} x \in M$ олмагла 1-ин өдәнилдији алыныр. 2-нин өдәнилдијини көстәрәк. $\mu = 0$ олдугда $\lambda = 0$ олдуғундан $\lambda M \supseteq \mu M = \{0\}$ олмагла 2 өдәнилир. Инди $\mu \neq 0$ олдуғуну гәбул етсәк, онда $|\lambda| < |\mu|$ бурадан $\left|\frac{\lambda}{\mu}\right| \leqslant 1$. M шәртә көрә таразлашан олдуғундан $x \in M$ оларса, $\frac{\lambda}{\mu} x \in M$ вә јахуд да $\lambda x \in \mu M$.

$x \in M$ истәнилән елемент олдуғундан 2-нин өдәнилдији алыныр. Нәһајәт, 3-үн өдәнилдијини јохлајаг. Әввәлчә $n = 2$ олдуғуну гәбул едәрәк 3-үн өдәнилдијини көстәрәк:

$\lambda = \mu = 0$ олдугда һәмин бәрабәрлик өдәнилир. Онун үчүн дә $\lambda_1 \neq 0$ вә јахуд да $\lambda_2 \neq 0$ олдуғуну гәбул етсәк M мүтләг габарыг олдуғундан $\frac{\lambda_1}{|\lambda_1| + |\lambda_2|} M + \frac{\lambda_2}{|\lambda_1| + |\lambda_2|} M \subseteq M$. Она көрә

$$\lambda_1 M + \lambda_2 M \subseteq (|\lambda_1| + |\lambda_2|) M \tag{21}$$

өдәнилир. Дикәр тәрәфдән ашағыдакы бәрабәрсизлик

$$(|\lambda_1 + |\lambda_2|) M \subseteq |\lambda_1| M + |\lambda_2| M \tag{22}$$

өдәнилир. Ејни мүлаһизәјә көрә

$$|\lambda_1| M + |\lambda_2| M \subseteq \lambda_1 M + \lambda_2 M, \tag{23}$$

(22) вә (23)-дән

$$(|\lambda_1| + |\lambda_2|) M \subseteq \lambda_1 M + \lambda_2 M. \tag{24}$$

Онда (21) вә (22)-јә көрә

$$\lambda_1 M + \lambda_2 M = (|\lambda_1| + |\lambda_2|) M. \tag{25}$$

Инди 3-үн $n - 1$ үчүн өдәнилдијини гәбул едәрәк n үчүн өдәнилдијини көстәрәк:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda^i M = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i M + \lambda_n M,$$

вә

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i M = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|\right) M$$

бәрабәрлијини нәзәрә алсаг:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M = \left(\sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_1|\right) M + \lambda_n M.$$

$$\mu = \sum_{i=1}^{n-1} |\lambda_i|$$

ишарә етсәк

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M = \mu M + \lambda_n M. \qquad (25)$$

(25)-ә көрә $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M = (|\mu| + |\lambda_n|) M$ вә бу бәрабәрликдән $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i M = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) M$. Бу бәрабәрлик $n = 2$ үчүн өдәнилдијиндән 3 өдәнилдији исбат олунур.

III ФӘСИЛ

ХӘТТИ ФУНКСИОНАЛЛАР ВӘ ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАР

§ 1. ХАН–БАНАХ ТЕОРЕМИ

Хан—Банахын ады илә мәшһур олан бу теорем хәтти функсионалларын давамына аид олмагла бәрабәр функсионал анализдә исбат олунан бир чох мүһүм теоремләриндә тәдгигиндә чох әһәмијјәтли рол ојнајыр. Биз әввәлчә бу теоремин исбатыны һәгиги фәзаларда сонра исә комплекс фәзада верәчәјик.

Онун үчүн дә фәрз едәк ки, X верилмиш һәгиги хәтти вектор фәзадыр вә фәрз едәк ки, $P(x)$ бу фәзада верилмиш јарым аддитив вә мүсбәт ејничинсли функсионалдыр. Јә'ни X-дән олан истәнилән x_1 вә x_2 елементләри үчүн

$$P(x_1 + x_2) \leqslant P(x_1) + P(x_2) \qquad (1)$$

истәнилән x вә истәнилән $\alpha > 0$ әдәди үчүн

$$P(\alpha x) = \alpha P(x). \qquad (2)$$

Тә'риф 1. *Тә'јин олма областы* $M \subset X$ олан $f(x)$ *функсионалынын давамы елә* $F(x)$ *функсионалына дејилир ки, бу-*

нун тә'јин олма областы M-и өз дахилинә алмагла $x \in M$ олдугда $F(x) = f(x)$ олсун.

Теорем 1. Фәрз едәк ки, $P(x)$, X-дә верилмиш јарым аддитив мүсбәт ејничинсли функсионал вә $f(x)$, $M \subset X$ олан хәтти алт чохлуғунда верилмиш хәтти функсионалдыр. Әкәр истәнилән $x \in M$ елемент үчүн:

$$f(x) \leqslant P(x) \tag{3}$$

оларса, онда $f(x)$ функсионалыны X-ә хәтти давам етдирмәк олар. Белә ки, $F(x)$, $f(x)$-ин давамы исә,

$$F(x) \leqslant P(x) \tag{4}$$

өдәнилир.

Исбаты. Она көрә $x_0 \in X$ гејд олунмуш елемент көтүрәк вә фәрз едәк ки, $x_0 \overline{\in} M$

$$x = \alpha x_0 + m \tag{5}$$

бәрабәрлији илә тә'јинн ола x елементләр чохлуғуну көтүрәк. Бурада α ихтијари һәгиги әдәд вә $m \in M$ истәнилән елементдир. Белә елементләр чохлуғуну M' илә ишарә едәк. Биз көстәрдик ки, һәр бир α вә m-ә гаршы (5) илә тә'јин олан мүәјјән бир x елементи вар. Әксинә, көстәрәк ки, һәр бир x-ә гаршы ујғун α вә m вардыр. Јә'ни M-ә дахил олан һәр бир елемент үчүн јеканә (5) шәклиндә бәрабәрлик вар. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни габул едәк ки, ејни x үчүн (5)-дән әлавә

$$x = m' + \alpha' x_0 \tag{6}$$

бәрабәрлији дә доғрудур. (5) вә (6)-дан

$$m - m' = (\alpha - \alpha')x_0 \tag{7}$$

$m - m' \in M$ онда $(\alpha - \alpha')x_0 \in M$ вә $\alpha' - \alpha \neq 0$ олдуғундан M-ин хәтти олмасыны нәзәрә алсаг, $\frac{1}{\alpha' - \alpha}(\alpha' - \alpha)x_0 \in M$, $x_0 \in M$ олур вә бу исә $x_0 \in \overline{M}$ шәртинә зиддир, алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\alpha' = \alpha$ вә беләликлә дә $m' = m$.

Инди M' үзәриндә ашағыдакы функсионалы тә'јин едәк: x-ин (5) илә тә'јин олдуғуну гәбул едәрәк $F_1(x) = f(m) + \alpha C$ (8) бәрабәрлијини көтүрәк, бурада C мүәјјән сабит әдәддир вә $F_1(x)$ үчүн мүәјјән хассәләринин өдәнилмәсини тә'мин етмәклә әлагәдар олараг сонрадан мүәјјән гајда илә сечилир. (7)-нин тә'јин олдуғундан көрүндүјү кими $F_1(x)$ функсионалы $f(x)$-нын M-дән M'-ә давамыдыр. Доғрудан да $x \in M$ олдугда $f(x) = F(x)$. Биз әввәлчә $F_1(x)$-ин хәтти олдуғуну сонра исә бу функсионалын

$$F_1(x) \leqslant P(x) \tag{9}$$

бәрабәрсизлијини өдәдијини көстәрәк. Онун үчүн

$$x = m_1 + \alpha_1 x_0, \quad y = m_2 + \alpha_2 x_0 \tag{10}$$

оларса бурадан:

$$x + y = m_1 + m_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)x_0. \tag{11}$$

Она көрә дә $F_1(x)$-ин тә'јининдән

$$F_1(x + y) = f(m_1 + m_2) + (\alpha_1 + \alpha_2)C = f(m_1) + \tag{12}$$
$$+ \alpha_1 C + f(m_2) + \alpha_2 C = F_1(x) + F_1(y),$$

$F_1(x)$-ин аддитив олдуғу алыныр. Һәмчинин $x = m + \alpha x_0$ һәр тәрәфини β-ја вурмагла

$$F_1(\beta x) = \beta F_1(x) \tag{13}$$

бәрабәрлији өдәниләр. Инди C-ни елә сечәк ки, (10) өдәнилсин она көрә дә m'', $m'' \in M'$ елементләрини көтүрәк

$$F_1(m') + F_1(m'') = f(m' - x_0 + x_0 + m'') =$$
$$= F_1(m' - x_0) + F_1(x_0 + m'') \tag{14}$$

бәрабәрлијини јазаг.

$m' - x_0$ вә $x_0 + m''$, M-ә дахил олдуғундан $F(m' - x_0) = f(m' - x_0)$ вә $F(x_0 + m'') = f(x_0 + m'')$.

Шәртә көрә

$$f(m' - x_0) \leqslant P(m' - x_0), \tag{15}$$
$$f(m'' + x_0) \leqslant P(m'' + x_0) \tag{16}$$

бәрабәрсизликләрини нәзәрә алсаг:

$$f(m') + f(m'') \leqslant P(m' - x_0) + P(m'' + x_0). \tag{17}$$

Бурадан

$$f(m') - P(m' - x_0) \leqslant P(m'' + x_0) - \alpha(m''). \tag{18}$$

(18) истәнилән m'' үчүн өдәнилдијиндән

$$f(m') - P(m' - x_0) \leqslant \inf_{m''} [P(m'' + x_0) - f(m'')] \tag{19}$$

бәрабәрлијини алырыг. Ејни мүлаһизәјә көрә (19) истәнилән m' үчүн өдәнилдијиндән

$$\sup_{m'} [f(m') - P(m' - x_0)] \leqslant \inf_{m''} [P(m'' + x_0) - f(m'')], \tag{20}$$
$$\sup_{m'} [f(m') - P(m' - x_0)] = C_1, \tag{21}$$
$$\inf_{m''} [P(m'' + x_0) - f(m'')] = C_2 \tag{22}$$

ишарә едәк, онда

$C_1 \leqslant C_2$ олар. M' үзрә $F(x) \leqslant P(x)$ (23)

олдуғуну гәбул едәк.

$x = m + \alpha x_0$ олдугда $F_1(x)$-ин тә'рифинә көрә (23)-дән

$$f(m) + \alpha C \leqslant P(m + \alpha x_0) \tag{24}$$

$\alpha > 0$ олдуғуну гәбул едәрәк (24)-дән

$$\frac{f(m)}{\alpha} + C \leqslant \frac{P(m + \alpha x_0)}{\alpha} \tag{25}$$

јахуд

$$f\left(\frac{m}{\alpha}\right) + C \leqslant P\left(\frac{m}{\alpha} + x^0\right) \tag{26}$$

$\alpha < C$ вә $-\alpha > 0$ олмагла еләчә дә (24)-дән

$$f\left(-\frac{m}{\alpha}\right) - C \leqslant P\left(-\frac{m}{\alpha} - x_0\right). \tag{27}$$

(26) илә (27)-ни бирләшдирсәк:

$$f\left(-\frac{m}{\alpha}\right) - P\left(-\frac{m}{\alpha} - x_0\right) \leqslant C \leqslant P\left(\frac{m}{\alpha} + x_0\right) - f\left(\frac{m}{\alpha}\right) \cdot \tag{28}$$

$-\frac{m}{\alpha} = m'$ вә $\frac{m}{\alpha} = m''$ ишарә етсәк. Бурадан

$$f(m') - P(m' - x_0) \leqslant C \leqslant P(m'' + x_0) - f(m'') \tag{29}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. (21) вә (22)-дән

$$C_1 \leqslant C \leqslant C_2.$$

Биз (23)-үн өдәнилдијини гәбул едәрәк (29) тә'јин етдик. Бу мүлаһизәләр ону көстәрир ки, $F_1(x)$-ин тә'јининә дахил олан C (29)-у өдәјән истәнилән сабит әдәд оларса, онда $F_1(x)$, $f(x)$-ин һәгиги давамы олмагла һәтта (10) бәрабәрсизлијини өдәјәр. Бу схемдән көрүндүјү кими биз X-дән башга бир x_0 елементи көтүрмәклә $x_0 \overline{\in} M'$-ин гәбул едәрәк $F_1(x)$-и M'-дән мүәјјән бир M''-ә ($M' \subseteq M''$) давам етдирә биләрик. Бу гајда үзрә бүтүн мүмкүн олан давамлары тә'јин етсәк, онда Сорн леммасына көрә белә функсионаллардан максимум давам вардыр. Һәмин давамы $F(x)$ вә тә'јин областыны D_F илә ишарә едәк. Көстәрәк ки, $D_F = X$. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни $D_F \neq X$. Онда $x' \in X$ олан елә елемент вар ки, $x' \overline{\in} D_F$. Она көрә дә исбат етдијимиз тәклифә көрә тә'јин областы D' олан $F(x)$ функсионалы гурмаг олар, башга сөзлә, $F(x)$-ин давамыны тапмаг олар $D_F \subset D_{F'}$. Бу исә $F(x)$-ин максимум давам олмасына зиддир, алынан зиддијјәт көстәрир ки, $D_F = X$. Беләликлә, Хан—Банах теореми исбат олунур. Исбат гајдасындан көрүндүјү кими белә давам, үмумијјәтлә, јеканә дејилдир. Инди Хан—Банах теореминин комплекс фәзаларда доғру олдуғуну исбат едәк. Она көрә дә фәрз едәк ки, $f(x)$ тә'јин областы D комплекс хәтти X вектор фәзасына дахил олан D-дә верилмиш хәтти функсионалдыр. Хан—Банах теоремини белә функсионаллар үчүн доғрулуғуну исбат етмәк үчүн әввәлчә белә функсијаларын һәгиги компонентләринә көрә мүәјјән көстәрилишиндән истифадә едәрәк бә'зи хассәләрини верәк: $f(x)$ функсионалы һәмчинин комплекс гијмәтләр алдығындан $f(x)$-и

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) \tag{30}$$

шәкилиндә јазмаг олар. Белә ки, $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ һәмин фәзада тә'јин олунмуш һәгиги функсионаллардыр (30)-дан

$$\overline{f(x)} = f_1(x) - if_2(x) \tag{31}$$

(30) вә (31)-дән

$$f_1(x) = \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2}, \tag{32}$$

$$f_2(x) = \frac{f(x) - \overline{f(x)}}{2i}. \tag{33}$$

Беләликлә, $f_1(x)$ вә $f_2(x)$-ин $f(x)$-ә көрә биргијмәтли тә'јин олундуғу алыныр. α һәгиги олдугда $f_1(x)$-ин ејничинсли олдуғу алыныр. Доғрудан да, (32)-дән

$$f_1(\alpha x) = \frac{f(\alpha x) + \overline{f(\alpha x)}}{2} = \frac{\alpha f(x) + \overline{\alpha f(x)}}{2} = \alpha \frac{f(x) + \overline{f(x)}}{2} = \alpha f_1(x)$$

еләчә дә, $f_2(x)$-ин һәгиги ејничинсли, олдуғу алыныр, јә'ни α һәгиги олдугда $f_2(\alpha x) = \alpha f_2(x)$. $f(x)$ ејни чинсли олдуғундан $f(ix) = if(x)$. (30) бәрабәрлијиндән

$$f_1(ix) + if_2(ix) = i\,[f_1(x) + if_2(x)] \tag{34}$$

бурадан исә

$$f_1(ix) + if_2(ix) = if_1(x) - f_2(x). \tag{35}$$

Бу бәрабәрлијә ики комплекс әдәдин мүгајисәси кими бахсаг, онда

$$f_2(x) = -f_1(ix), \tag{36}$$

$$f_2(ix) = f_1(x). \tag{37}$$

(36) вә (37)-нин һәр икиси ејни бәрабәрлик олдуғундан јалныз (36)-дан истифадә етмәк кифајәтдир. Комплекс фәзада Хан—Банах теореминин тә'риф олунмасында $j(x) \leqslant P(x)$ бәрабәрсизлији тәбии олараг $|f(x)| \leqslant P^*(x)$ илә әвәз олунмалыдыр. Она көрә дә теоремин һәм тә'рифинин вә һәм дә һөкмүнүн ејни күчдә галдығыны гәбул едәрәк $f(x)$-ин D_1 тә'јин областында

$$|f(x)| \leqslant P^*(x) \tag{38}$$

өдәнилмәсини фәрз едирик. Белә ки, $P^*(x)$ исә јарым аддитив олмагла $P^*(\alpha x) = |\alpha|\,P^*(x)$ өдәнилдији фәрз олунур. Исбат едәк ки, $f(x)$-и D_1-дән X-ә давам етдирмәк олар. Белә ки,

$F(x)$, $f(x)$-ин давамы исә, онда $|F((x)| \leqslant P^*(x)$. (30) бәрабәрлијини нәзәрә алсаг (38)-дән D_1 областында $|f_1(x)| \leqslant P^*(x)$ вә $|f_2(x)| \leqslant P^*(x)$ бәрабәрсизликләри вә еләчә дә

$$f_1(x) \leqslant P^*(x) \tag{39}$$

вә

$$f_2(x) \leqslant P^*(x). \tag{40}$$

(39)-ун өдәнилдијини вә һәм дә $\alpha > 0$ үчүн $P^*(\alpha x) = \alpha P^*(x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг онда исбат етдијимиз теоремә көрә һәгиги $f_1(x)$ функсионалыны D_1-дән X-ә давам етдирмәк олар. $f_1(x)$-ин давамыны $\Phi(x)$ илә ишарә едәк. Исбат етдијимиз теоремаја көрә

$$\Phi(x) \leqslant P^*(x) \tag{41}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. $P^*(x)$-ин хассәсинә көрә көстәрмәк олар ки,

$$|\Phi(x)| \leqslant P^*(x) \tag{42}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. $\Phi(x)$ үчүн $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ өдәнилдијини вә дикәр тәрәфдән исә $\Phi(-x) \leqslant P(-x) = P^*(x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\Phi(x) \geqslant -P^*(x). \tag{43}$$

(41) вә (43) бәрабәрсизликләрини мүгајисә етсәк, (42)-нин өдәнилмәси алыныр. Бундан сонра $\Phi(x)$-ин көмәјилә $f(x)$-ин давамыны гураг вә бу давамы

$$F(x) = \Phi(x) - i\Phi(ix) \tag{44}$$

шәкилдә көстәрәк. Ашкардыр ки, бу функсионал $f(x)$-ин давамыдыр. $F(x)$-ин аддитив олмасы бундан алыныр. $F(x)$-ин ејничинсли олмасыны көстәрмәк үчүн (44)-дән

$$F(ix) = \Phi(ix) + i\Phi(x). \tag{45}$$

(45)-ин сағ тәрәфини $i[\Phi(x) - i\Phi(ix)]$ кими јазсаг $F(ix) = iF(x)$ беләликлә, $F(x)$-ин ејничинсли олдуғу исбат олунур. Нәһајәт, $x \in D$ олдугда

$$|F(x)| \leqslant P^*(x) \tag{46}$$

олдуғуну көстәрәк. $F(x)$ комплекс әдәдини

$$F(x) = |F(x)|\, e^{i\theta} \tag{47}$$

шәкилиндә көстәрәк. Бурада

$$\theta = \arg F(x)$$

(47)-дән

$$|F(x)| = e^{-i\theta} F(x). \tag{48}$$

$F(x)$ ејничинсли олдуғундан $e^{-i\theta}F(x)=F\left(xe^{-i\theta}\right)$, $|F(x)|=$ $=F\left(x\text{г}^{-i\theta}\right)$ олмагла, бурадан

$$F\left(xe^{-i\theta}\right)\geqslant 0. \tag{49}$$

Буна көрә дә, (44)-дән

$$F\left(x\cdot e^{-i\theta}\right)=\Phi\left(xe^{-i\theta}\right) \tag{50}$$

$\Phi\left(x\cdot e^{-i\theta}\right)=\left|\Phi\left(x\cdot e^{-i\theta}\right)\right|\leqslant P^*\left(xe^{-i\theta}\right)$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$|F(x)|=\left|\Phi\left(xe^{-i\theta}\right)\right|\leqslant P^*\left(e_x^{i\theta}\right)=\left|e^{-i\theta}\right|P^*(x)$$

бәрабәрсизлијиндән (46) өдәнилир. Беләликлә, Хан—Банах теореми комплекс фәзаларда исбат олунур.

Хан—Банах теореминдән бир нәтичә.

Хәтти һәгиги X вектор фәзасында елә $f(x)$ функсионалы гурмаг олар ки, һәмин функсионал

$$-P(-x)\leqslant f(x)\leqslant P(x) \tag{51}$$

бәрабәрсизлијини өдәсин. Бурада $P(x)$ јарым аддитив мүсбәт ејничинсли функсионалдыр.

Исбаты. $x_0\in X$ гејд олунмуш x_0 елементини көтүрәк. X' чохлуғуну дүзәлдәк: $X'=\{x:x=\alpha x_0\}$ бурада α истәнилән һәгиги әдәддир. X'-дә ашағыдакы функсионалы тә'јин едәк:

$$f_0(x)=f_0(\alpha x_0)=\alpha P(x_0)$$

бу функсионалын хәтти олмасындан ашкардыр. Онда исбат етдијимиз теоремә көрә $f_0(x)$-и X'-дән бүтүн фәзаја давам етдирмәк олар. Бу давамы $f(x)$ илә ишарә едәк. Әввәлчә, $f_0(x)\leqslant P(x)$ олдуғуну көстәрәк, ашкардыр ки, $\alpha>0$ олдугда

$$f_0(x)=P(x) \tag{52}$$

$\alpha<0$ исә $-\alpha>0$. $0=P(0)=P(x_0-x_0)$ вә $P(x)$-ин јарым аддитив олдуғуну нәзәрә алаг, $0\leqslant P(x_0)+P(-x_0)$ бу бәрабәрсизлијин һәр тәрәфини $-\alpha$-ја вурсаг $0\leqslant-\alpha P(x_0)-$ $-\alpha P(x_0)$ вә бурадан исә

$$\alpha P(x_0)\leqslant-\alpha P(-x_0)=P(\alpha x_0),$$

$$f_0(x)\leqslant P(x). \tag{53}$$

(53) нәзәрә алараг исбат етдијимизә көрә $f_0(x)$ X'-дән X-ә давам етдирмәк олар.

Шәртә көрә, $f_0(x)$-ин давамы $f(x)$ олдуғундан

$$f(x) \leqslant P(x) \tag{54}$$

өдәниләр. Дикәр тәрәфдән, $-f(x) = f(-x) \leqslant P(-x)$, она көрә дә,

$$f(x) \geqslant -P(-x) \tag{55}$$

(54) вә (55)-и бирләшдирмәклә (51)-ин өдәнилдији алыныр вә гејд етдијимиз нәтичә исбат олунур.

Нормалашмыш фәзада Хан—Банах теоремини верәк.

Фәрз едәк ки, $f(x)$-ин тә'јин областы D_2 нормалашмыш X фәзасына дахил олан верилмиш хәтти функсионалдыр. Бу функсионалын нормасыны дәјишмәмәк шәртилә D_2-дән X-ә давам етдирмәк олар.

Исбаты $\|f\|_1$, $f(x)$ функсионалынын D_2-дәки нормасы олсун.

$$P(x) = \|f\|_1 \cdot \|x\| \tag{56}$$

функсионалыны тә'јин етсәк бу функсионалын $P^*(x)$ типли олмасы $\|x\|$ - нын хәссәсинә көрә ашкардыр. $|f(x)| \leqslant \|f\|_1 \cdot \|x\|$ олдуғундан

$$|f(x)| \leqslant P(x). \tag{57}$$

Онда исбат етдијимиз теоремә көрә $f(x)$-и D_2-дән X-ә давам етдирмәк олар. Һәмин давамы $F(x)$ илә ишарә едәк. Јенә һәмин теоремә көрә $P(x)$, $F(x)$-ин можаранты олар. Она көрә дә истәнилән x үчүн $\|F(x)\| \leqslant \|f\|_1 \cdot \|x\|$

$$\|F\| \leqslant \|f\|_1. \tag{58}$$

Дикәр тәрәфдән $F(x)$ функсиалы бүтүн фәзада тә'јин олундуғундан ашкардыр ки, $\|F\| \geqslant \|f\|_1$ олар. (57) вә (58)-ә көрә $\|F\| = \|f\|_1$ олмагла теорем исбат олунур.

Нормалашмыш фәзада Хан-Банах теореминдән бир нечә мүһүм нәтичәсини гејд едәк. Һәмин нәтичәләр функсионал анализдә бир чох мүһүм әһәмијјәтә малик олан теоремләрин исбатында көркәмли рол ојнајыр.

Нәтичә 1. $x_0 \in X$ нормалашмыш фәзада гејд олунмуш $x_0 \neq 0$ шәртини өдәјән елемент исә она бу фәзада тә'сир едән елә $f(x)$ функсионалы вар ки, $x = x_0$ олдугда гијмәти $\|x_0\|$ -ә бәрабәр олмагла нормасы ваһидә бәрабәр олсун. Бу нәтичәни исбат етмәк үчүн X-ин ашағыдакы кими алт фәзасыны дүзәлдәк. Јә'ни

$$X' = \{x : x = \lambda x_0\}.$$

Бурада λ ихтијари әдәддир. Јери кәлмишкән гејд едәк ки, бу нәтичә һәм ихтијари һәгиги вә һәм дә ихтијари комплекс фәза үчүн доғрудур.

$f_0(x)$ функсионалыны дүзәлдиб $f_0(x) = \lambda \| x_0 \|$ бу функсионалын хәтти олдуғуну көстәрәк:

$x_1 = \lambda_1 x_0$ вә $x_2 = \lambda_2 x$ исә, бурадан $x_1 + x_2 = (\lambda_1 + \lambda_2) x_0$. $f_0(x_1 + x_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) \| x_0 \| = \lambda_1 \| x_0 \| + \lambda_2 \| x_0 \| = f_0(x_1) + f_0(x_2)$ бәрабәрлијиндән $f_0(x)$-ин аддитивлији алыныр. $x = \lambda x_0$ јахуд $\mu x = \mu\lambda x_0$ олдугда $f_0(\mu x) = \mu f_0(x)$ бәрабәрлијиндән һәмин функсионалын ејничинсли олдуғу алыныр.

$|f_0(x)| = |\lambda| \cdot \| x_0 \|$ бурадан $| f_0(x) | = \| \lambda x_0 \| = \| x \|$. Демәли истәнилән x үчүн $| f_0(x) | = \| x \|$ өдәнилир. Она көрә $\| f_0 \| = 1$. Онда Хан—Банах теореминә көрә $f_0(x)$ функционалыны X'-дән X-ә елә давам етдирмәк олар ки, нормасы дәјишмәсин. Әкәр һәмин давам $f(x)$ илә ишарә етсәк $f(x_0) = \| x_0 \|$, $\| f \| = 1$. Бурада һәмин нәтичәдән алынан бир хассәни көстәрәк. Әкәр гејд олунмуш x_0 елементиндән X-ә көрә гошма олан фәзадан јә'ни X^*-дан көтүрүлмүш истәнилән x^* функсионалы үчүн

$$x^*(x_0) = 0 \tag{59}$$

исә онда $x_0 = 0$. Доғрудан да, Хан—Банах теореминдән алдығымыз нәтичәјә көрә (59)-у өдәјән елә x_0^* функсионалы вар ки, $x_0^*(x_0) = \| x_0 \|$ олмагла $x_0^*(x_0) = 0$ бәрабәрлијиндән $x_0 = 0$.

Нәтичә 2. Фәрз едәк ки, M нормаланмыш X фәзасындан көтүрүлмүш алт фәзадыр. $x' \in X$ вә $x' \overline{\in} M$ x' елементини көтүрәк вә x'-дән M-ә гәдәр олан мәсафәни d ишарә едәк. Ашкардыр ки, $d = \inf\limits_{m \in M} \| m - x' \| > 0$ бу M-ин гапалы олмасындан алыныр. Онда исбат едәк ки, X-дә тә'сир едән елә $f(x)$ функсионалы вар ки, ашағыдакы шәртләри өдәјир:

1. $f(x') = 1$,
2. $x \in M$ олан истәнилән x үчүн $f(x) = 0$,
3. $\| f \| = \frac{1}{d}$.

Бу нәтичәни исбат етмәк үчүн ашағыдакы алт фәзаны дүзәлдәк

$$X' = \{x : x = m + dx'\} \tag{60}$$

бурада $m \in M$ истәнилән елемент, α исә истәнилән әдәддир. Ашағыдакы бәрабәрликлә тә'јин олунан $f_0(x)$ функсионалыны дүзәлдәк:

$$f_0(x) = f_0(m + \alpha x') = \alpha. \tag{61}$$

Јенә дә (61) тә'јин олунмасындан көрүндүјү кими бу функсионал хәттидир. Онда Хан—Банах теореминә көрә $f(x)$ нормасы галмаг шәртилә X'-дән X-ә давам етдирмәк олар. Һәмин давамы $f(x)$ илә ишарә едәк. Һәр бир $m' \in M$ елементи

$$m' = m' + Ox \tag{62}$$

шәклиндә көстәрилдијиндән һәмин елемент үчүн $f_0(m') = 0$ олур. Еләчә дә истәнилән x' елементи $x' = 0 + 1 \cdot x'$ шәклиндә көстәрилдијиндән $f_0(x') = 1$ олур. Беләликлә, истәнилән $x \in M$ нөгтәсиндә $f(x) = 0$ вә x' нөгтәсиндә $f(x') = 1$. Нәһајәт, $\| f \| = \frac{1}{d}$ олмасыны көстәрмәк үчүн $\| f_0 \| = \frac{1}{d}$ олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир. $\frac{m}{\alpha} \in M$ олдугда d-нин тә'рифинә көрә

$$\| x \| = \| m + \alpha x' \| = \| \alpha \| \left\| \frac{m}{\alpha} + x' \right\| \geqslant | \alpha | \, d. \tag{63}$$

Она көрә дә, $\| x \| \geqslant | \alpha | \, d$ вә јахуд $x \in X$ олан истәнилән x нөгтәсиндә

$$\alpha \leqslant \frac{\| x \|}{d} \tag{64}$$

өдәнилир. Еләчә дә $x \in X'$ олан истәнилән x-дә $\| f_0(x) \| = | \alpha |$ олдуғундан (64)-ә көрә $x \in X'$ истәнилән елемент исә,

$$| f_0(x) | \leqslant \frac{\| x \|}{d}$$

бурадан

$$\| f_0 \| \leqslant \frac{1}{d} \tag{65}$$

олдуғу алыныр.

Инди $y_n \in M$ олан елә $\{y_n\}$ ардычыллығы сечәк ки, $\| x' - y_n \| \to d$ олсун. $f_0(x' - y_n) = f_0(x') - f_0(y_n)$, $f_0(x') = 1$ вә $f_0(y_n) = 0$ нәзәрә алсаг $f_0(x' - y_n) = 1$, она көрә

$$1 = f_0(x' - y_n) \leqslant \| f_0 \| \; \| x' - y_n \| \to \| f_0 \| \, d \tag{66}$$

өдәнмәклә бурадан

$$1 \leqslant \| f_0 \| \leqslant d \text{ вә јахуд да } \| f_0 \| \geqslant \frac{1}{d}. \tag{67}$$

(65) вә (67)-јә көрә 3 өдәнилир вә беләликлә дә, икинчи нәтичә исбат олунур. Нормалашмыш фәзада Хан—Банах теореминдән алынан биринчи нәтичә һәмин фәзанын мүһүм бир структурасыны мејдана чыхарыр, јә'ни һәр бир нормалашмыш фәзада кафи гәдәр сыфырдан фәргли функсионаллар вардыр вә белә ки, $x_1 \neq x_2$ олдугда һәмин фәзада елә ики $x_1^*(x)$ вә $x_2^*(x)$ функсионаллары гурмаг олар ки,

$$x_1^*(x) \neq x_2^*(x). \tag{68}$$

§ 2. ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАР ВӘ БУНЛАРЫН БӘ'ЗИ ХАССӘЛӘРИ

Тә'риф 2. *Фәрз едәк ки, тәјин областы* $D_\text{т}$, *Ф мејданында тә'јин олунмуш хәтти X вектору фәзасына дахил вә гијмәтләр чохлуғу* $R_\text{т}$, *һәмчинин хәтти У фәзасына дахил олан T оператору верилмишдир.* $x_1, x_2 \in D_\text{т}$ *истәнилән* x_1, x_2 *үчүн*

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2) \tag{1}$$

оларса, онда T аддитив оператор адланыр вә истәнилән α *үчүн*

$$T\alpha x = \alpha T x \tag{2}$$

оларса, онда T ејничинсли оператор адланыр.

T үчүн (1) вә (2) өдәниләрсә, онда T хәтти оператор адланыр. Әкәр елә сабит $M > 0$ әдәди варса ки, истәнилән $x \in D_\text{т}$ үчүн

$$\| Tx \|_2 \leqslant M \| x \|_1 \tag{3}$$

олур, онда T мәһдуд оператор адланыр, бу һалда X вә $У$-нин һәр икиси нормалашмыш олдуглары фәрз олунур. Белә ки, $\| \ \|_1$ вә $\| \ \|_2$ X вә $У$-дә верилмиш ујғун нормалардыр. (3)-ү өдәјән M-ләрин дәгиг ашағы сәрһәди T-нин нормасы адланараг $\| T \|$ илә ишарә олунур. Јери кәлмишкән гејд едәк ки, мәһдуд хәтти операторун, нормасыны дәјишмәмәк шәртилә бүтүн фәзаја давам етдирмәк олар. Биз белә бир тәклифин кәләчәкдә доғру олдуғуну көстәрәчәјик. Она көрә дә хәтти мәһдуд оператор верилдикдә онун бүтүн фәзада тә'јин олдуғуну фәрз едәчәјик, сыфыр оператор елә оператор адланыр ки, $x \in X$ истәнилән нөгтәдә сыфра бәрабәр олсун. Нәһајәт, ејнилик кими оператор о оператор адланыр ки, $x \in X$ һәр бир x нөгтәси бу чевирмәдә тәрпәнмәз галыр. Белә оператор $T \equiv E$ илә ишарә олунур. Хәтти T операторун тә'рифиндән көрүндүјү кими, $T\theta = \theta$ олур. Доғрудан да $T(x - x) = Tx - Tx$ һәмин бәрабәрлијин өдәнилмәси алыныр. Әкәр T_1 вә T_2, ејни X фәзасында верилмиш хәтти операторлар исә бу операторларын чәми

$$(T_1 + T_2)\, x = T_1 x + T_2 x \tag{4}$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунан оператор адланыр. Һәмчинин α әдәдинин T-јә һасили, јә'ни αT ашағыдакы кими тә'јин олунур:

$$(\alpha T)\,(x) = \alpha T\,(x). \tag{5}$$

(4) вә (5)-и нәзәрә алсаг, ејни фәзада тә'јин олунан хәтти операторлар чохлуғуну $F(X)$ илә ишарә етсәк $F(X)$-ин өзүнүн хәтти фәза олдуғуну билаваситә јохламаг олар. Бунун үчүн хәтти фәзанын аксиомларындан истифадә едәрәк $F(X)$-дә тәбии 4) вә (5) чәбри әмәлләр вермәклә хәтти фәзанын аксиом-

ларынын асанлыгла өдәнилдијини көстәрмәк олар. Һәмчинин нормалашмыш X фәзасында тә'јин олунмуш мәһдуд хәтти операторлар чохлуғуну $\Phi(X)$ илә ишарә етсәк, бу хәтти фәзаны нормалашмыш фәзаја чевирмәк олар. Бунун үчүн кифајәтдир ки, $T \in \Phi(X)$ олан һәр бир T-јә бунун нормасы гаршы гојулсун. Көстәрәк ки, $\Phi(X)$-да верилмиш норма, норма аксиомларыны өдәјир. $\| T \| \geqslant 0$ олмасы ашкардыр $(\alpha T)x = \alpha T(x)$ олдуғундан, буна әсасән $| \alpha Tx \| \; | \leqslant \alpha | \; \| T \| \; \| x \|$, она көрә

$$\| \alpha T \| \leqslant | \alpha | \; \| T \| . \tag{6}$$

Дикәр тәрәфдән, $Tx = \frac{1}{\alpha}(\alpha T)x$, буна әсасән $\| Tx \| \leqslant \frac{1}{|\alpha|} \times$ $\times \| \alpha T \| \, \| x \|$ бурадан

$$\| T \| \leqslant \frac{1}{|\alpha|} \| \alpha T \| \text{ јахуд}$$

$$| \alpha | \, \| T \| \leqslant \| \alpha T \|. \tag{7}$$

(6) вә (7)-ни мүгајисә етсәк $\| T\alpha \| = | \alpha | \, \| T \|$, $T = 0$ олдугда $\| T \| = 0$ вә әксинә $\| T \| = 0$ олдугда исә (3)-дән истәнилән x үчүн $Tx = 0$ олмагла $T = 0$ олур. Нәһајәт, үчбучаг аксиомунун өдәнилдијини јохлајаг:

$$\| (T_1 + T_2)x \| = \| T_1x + T_2x \| \leqslant \| T_1x \| + \| T_2x \| \leqslant$$

$\leqslant (\| T_1 \| + \| T_2 \|) \| x \|$, бурадан $\| T_1 + T_2 \| \leqslant \| T_1 | + \| T_2 \|$. Беләликлә, биз $\Phi(X)$-ин нормалашмыш фәза олдуғуну көстәрдик. Нәһајәт, $G(X)$ илә X-дән X-ә тә'сир едән хәтти операторлар чохлуғуну ишарә етсәк, $G(X)$-ин ҹәбр олдуғуну көстәрмәк олар. $T_1, T_2 \in G(X)$ һәмин операторларын композисијасы јә'ни һасили ашағыдакы кими тә'јин олунур:

$$(TT_2)x = T_1(T_2x). \tag{8}$$

Јухарыда көстәрдијимиз ҹәмә көрә, әдәдә вурма әмәлинә көрә вә еләҹә дә һасил бу гајда үзрә тә'јин олдугда $G(X)$-дә ҹәбр аксиомларынын доғрулуғуну көстәрмәк олар. Беләликлә, $G(X)$ ҹәбр олмагла бу ҹәбрин ваһиди E-дир. $G(X)$-ә дахил олан хәтти операторлар һәмчинин мәһдуд оларса, онда белә ҹәбр нормалашмыш адланыр. Бурада әлавә олараг

$$\| T_1T_2 \| \leqslant \| T_1 \| \; \| T_2 \| . \tag{9}$$

јохламаг лазымдыр ки, бу да $\| T_1T_2(x) \| \leqslant \| T_1 \| \; \| T_2 \| \; \| x \|$ бәрабәрсизлијиндән алыныр. X-дә тә'сир едән һәр бир хәтти мәһдуд оператор ендоморфизм адланыр. Нәһајәт, $G(X)$, $X-(B)$ фәзасында тә'јин олунмуш хәтти мәһдуд операторлар чохлуғу исә онда $G(X)$ Банах ҹәбри олмагла ендоморфизмләрин Банах ҹәбри адланыр. Бу һалда $G(X)$-дән олан фундаментал ардыҹыллығын јығылан олмасыны көстәрмәк олар. Лакин биз һәләлик операторларын јығылма анлајышыны вермәдијимиздән һәмин тәклифин јери кәлдикдә доғрулуғуну ајрыҹа гејд едәҹәјик. Тә'јин областы $D(T)$ вә гијмәтләр чохлуғу $R(T)$ олан T оператору васитәсилә $D(T)$ вә $R(T)$ арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг варса, онда дејирләр ки, T-нин

5*

тәрс оператору вар вә T^{-1} илә ишарә олунур. Беләликлә, T^{-1}, $R(T)$-дән һәр бир елементә гаршы $D(T)$-дән мүәјјән бир елемент гаршы гојур. $y = Tx$ оларса, $x = T^{-1}y$ олур. Бу тә'рифдән көрүндүјү кими

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E. \tag{10}$$

T хәтти олдугда T^{-1}-дә хәтти олдуғуну көстәрмәк олар.

$$T^{-1}y_1 = x_1 \tag{11}$$

вә

$$T^{-1}y_2 = x_2 \tag{12}$$

$$T^{-1}y_1 + T^{-1}y_2 = x_1 + x_2 \tag{13}$$

олар. $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$ вә $y_1 + y_2 = T(x_1 + x_2)$-дән

$$x_1 + x_2 = T^{-1}(y_1 + y_2). \tag{14}$$

(13) вә (14)-дән T^{-1}-ин аддитив олмасы чыхыр. Ејни гајда илә $T^{-1}\alpha y = \alpha T^{-1}y$ өдәнилдијини көстәрәк:

$$T^{-1}\alpha y = x \tag{15}$$

јахуд

$$\alpha y = Tx \tag{16}$$

бурадан $\alpha y = Tx$, $\frac{x}{\alpha} = T^{-1}y$, бу бәрабәрликдән

$$x = \alpha T^{-1}y \tag{17}$$

T^{-1}-ин хәтти олмасы алыныр. Һәмчинин хәтти операторун тәрсинин варлығындан көрүндүјү кими $x_1 \neq x_2$ елементләринә гаршы $y_1 \neq y_2$ олмалыдыр. Она көрә $y_1 - y_2 = T(x_1 - x_2)$ бәрабәрлијиндән $y_1 = y_2$ оларса, $x_1 - x_2 = 0$ олар. Әкс һалда T васитәсилә олан ин'икасда гаршылыглы биргијмәтлилик позуларды. Она көрә дә, хәтти T операторунун тәрси олмасы үчүн $Tx = \theta$ бурадан $x = \theta$ олмасы һәм зәрури вә һәм дә кафи шәртдир. Әкәр T хәтти мәһдуд оператор олдугда тәрси варса, тәрсинин мәһдуд олмасы үмумијјәтлә чыхмыр.

T-нин тәрсинин мәһдуд олмасыны характеризә едән ашағыдакы теорем исбат олунур.

Теорем 2. Фәрз едәк ки, хәтти T оператору үчүн елә мүсбәт сабит m әдәди вар ки, истәнилән x үчүн

$$\|Tx\| \geqslant m\|x\| \tag{18}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу бәрабәрсизлијин өјрәнилмәси T-нин тәрсинин мәһдуд олмасы үчүн зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији. T-нин тәрсинин мәһдуд олдуғуну фәрз едәк. Јә'ни $\|Ty^{-1}\| \leqslant M\|y\|$ бәрабәрлијинин өдәнилдијини гәбул едәк:

$$T^{-1}y = x \tag{19}$$

олдуғундан (19)-дан алынан

$$\|x\| \leqslant M\|Tx\| \tag{20}$$

бәрабәрсизлијиндә $\frac{1}{M} = m$ илә ишарә етсәк (18)-ин өдәнилдији алынар.

Шәртин кафилији. (18)-ин өдәнилдијини гәбул едәк. (18)-дән $Tx = \theta$ олдугда $x = \theta$ олмагла T-нин тәрси олдуғу алыныр. $T^{-1}y = x$ оларса, (18)-дән $\|y\| \geqslant m\|T^{-1}y\|$ өдәнилир. Әкәр $\frac{1}{m} = M$ илә ишарә етсәк $\|T^{-1}y\| \leqslant M\|y\|$ олур вә она көрә дә T^{-1}-ин мәһдуд олдуғу чыхыр.

Тә'риф. 3 *Фәрз едәк ки, X нормалашмыш хәтти фәзасында T оператору верилмишдир. Гејд олунмуш $x_0 \in X$ елементини көтүрәк T, $x = x_0$ нөгтәсиндә о заман кәсилмәз адланыр ки, верилмиш ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ әдәди олсун ки, $\|x - x_0\| < \delta$ олдугда $\|Tx - Tx_0\| < \varepsilon$.*

Теорем 4. Хәтти оператор бир нөгтәдә кәсилмәз исә онда бүтүн фәзада кәсилмәздир вә T-нин кәсилмәмәзлији илә мәһдудлуғу еквивалентдир.

Исбаты. Фәрз едәк ки, T мәһдуддур. $T(x - x_0)$ олсун, она көрә дә

$$\|T(x - x_0)\| \leqslant \|T\|\|x - x_0\| \tag{21}$$

олмагла T-нин истәнилән x_0 нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғу исбат олунур. Инди тәрсини, фәрз едәк ки, T кәсилмәздир. T һәмчинин θ нөгтәсиндә кәсилмәз олдуғундан истәнилән $\varepsilon > 0$-на гаршы елә $\delta > 0$ әдәди вар ки, $\|x\| < \delta$ олдугда

$$\|Tx\| < \varepsilon \tag{22}$$

$\widetilde{x} = \delta \frac{x}{2\|x\|}$ олдуғундан $\|\widetilde{x}\| = \frac{\delta}{2}$ олур. (22)-јә көрә $\left\|T\frac{\delta x}{2\|x\|}\right\| < \varepsilon$ она көрә дә

$$\|Tx\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}\|x\| \tag{23}$$

$\frac{2\varepsilon}{\delta} = M$ илә ишарә етсәк, истәнилән x үчүн

$$\|Tx\| < M\|x\| \tag{24}$$

јә'ни, T-нин мәһдуд олдуғу исбат олунур. Бурадан белә бир нәтичә алыныр ки, T мүәјјән бир нөгтәдә кәсилмәз исә онда истәнилән нөгтәјә кәсилмәздир. Биз сонралар мүхтәлиф јығылма анлајышлары верәчәјик. Һәләлик хәтти операторлар ардычыллығы үчүн ашағыдакы күчлү јығылма анлајышы верәк.

Тә'риф 4. *$\{T_n\}$ операторлар ардычыллығы мүәјјән T операторуна о заман күчлү јығылан адланыр ки, $x \in X$ истәнилән нөгтә исә онда истәнилән $\varepsilon > 0$-на гаршы елә $N(\varepsilon, x) > 0$ нөмрәси олсун ки, $n \geqslant N(\varepsilon, x)$ олдугда*

$$\| T_n x - Tx \| < \varepsilon \tag{25}$$

олсун, бу һалда

$$\lim_{n \to \infty} T_n x = Tx \tag{26}$$

кими вә јахуд да $T_n \Rightarrow T$ кими јазылыр.

Көстәрәк ки, (26) олдугда T оператору хәтти олар. Әввәлчә, $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$ олдуғуну јохлајаг:

$$T(x_1 + x_2) - Tx_1 - Tx_2 = T(x_1 + x_2) - T_n(x_1 + x_n) + \\ + T_n(x_1 + x_2) - Tx_1 - Tx_2, \tag{27}$$

һәмчинин

$$T_n(x_1 + x_2) = T_n x_1 + T_n x_2. \tag{28}$$

(27)-дән

$$\| T(x_1 + x_2) - Tx_1 - Tx_2 \| \leqslant \| T(x_1 + x_2) - T_n(x_1 + x_2) \| + \\ + \| T_n x_1 - Tx_1 \| + \| T_n x_2 - Tx_2 \| \tag{29}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. $\{T_n\}$-ин јығылдығыны нәзәрә алсаг,

$$\| T(x_1 + x_2) - Tx_1 - Tx_2 \| < \varepsilon \tag{30}$$

олар. ε истәнилән олдуғундан (26)-ы өдәнилир. Еләчә дә,

$$T\alpha x = \alpha Tx \tag{31}$$

олдуғуну јохламаг үчүн

$$T\alpha x - \alpha Tx = T\alpha x - T_n\alpha x + T_n\alpha x - \alpha Tx. \tag{32}$$

$T_n\alpha x = \alpha T_n x$ олдуғундан (32)-дән

$$\| T\alpha x - \alpha Tx \| \leqslant \| T\alpha x - T_n\alpha x \| + | \alpha | \; \| T_n x - Tx \| \tag{33}$$

јенә дә $\{T_n\}$-ин јығылан олмасындан

$$\| T\alpha x - \alpha Tx \| < (1 + | \alpha |)\, \varepsilon \tag{34}$$

$\varepsilon > 0$ ихтијари олдуғундан (31)-ин өдәнилмәси чыхыр. Беләликлә, биз лимит операторунун хәтти олдуғуну исбат етдик.

Теорем 3. Мәһдуд хәтти T операторунун нормасы

$$\| T \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Tx \| \tag{35}$$

васитәсилә тә'јин олунур.

Исбаты.

олдуғундан
$$\| Tx \| \leqslant \| T \| \, \| x \| \tag{36}$$

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Tx \| \leqslant \| T \| \tag{37}$$

олур. Һәмчинин $\| T \|$-нин тә'рифинә көрә һәр бир $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $x_\varepsilon \neq 0$ әдәди вар ки,

$$\| Tx_\varepsilon \| > (\| T \| - \varepsilon) \| x_\varepsilon \| . \tag{38}$$

Бурада $y_\varepsilon = \frac{x_\varepsilon}{\| x_\varepsilon \|}$ илә ишарә етсәк

$$\| Ty_\varepsilon \| > \| T \| - \varepsilon . \tag{39}$$

Бурадан исә $\sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \| Tx \| \geqslant \| T \| - \varepsilon$, олмагла ε ихтијари олдуғу нәзәрә алынарса

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| Tx \| \geqslant \| T \| \qquad (40$$

(40) вә (37) бәрабәрсизлијиндән (35)-ин доғрулуғу исбат олунур

§ 3. ГОШМА ФӘЗАЛАР ВӘ ГОШМА ОПЕРАТОРЛАР

Тә'риф 5. *Фәрз едәк ки, T X, (B) фәзасындан $У(B)$ фәза-*
сына тә'сир едән верилмиш мәһдуд хәтти оператордур. X-дә
тә'јин олунмуш бүтүн мәһдуд хәтти функсионаллар чох-
луғуну X^* илә ишарә едәк. Хан—Банах теореминә көрә бе-
лә функсионаллар чохлуғу кифајәт гәдәрдир.

X^*, X-ә нәзәрән гошма фәза адланыр. x^*, $y^* \in X^*$ исә
$x^* + y^*$ ашағыдакы кими тә'јин олунур. Истәнилән x үчүн
$(x^* + y^*)(x) = x^*(x) + y^*(x)$ һәмчинин α, X-нын тә'јин ол-
дуғу мејданындан верилмиш әдәд оларса, $(\alpha x^*)(x) = \alpha x^*(x)$ илә
тә'јин олунур.

X^*-да ҹәбри әмәлләр бу гајда илә тә'јин олдугдан сонра
X-нын хәттилијиндән һәмчинин X^*-ын хәттилији алыныр.
Еләҹә дә, X-нын (B) фәзасы олмасындан X^* — (B) фәзасы ол-
масы асанлыгла көстәрилир. Доғрудан да, әдәдләр фәзасы там
олдуғундан X нормалашмыш фәзасына ујғун гошма фәза там-
дыр. Бурадан көрүнүр ки, X^* там олмасындан X-нын(B) фәзасы
олмасы зәрури дејилдир. Ејни гајда үзрә $У$-на ујғун $У^*$ гош-
ма фәзасыны гура биләрик.

Теорем 4. X^{**}-ын елә X_0^{**} олан һиссәси вар ки, X илә X_0^{**} хәтти изоморф вә изометрикдир.

Исбаты. x-и X-дан гејд едәрәк X^*-а дахил олан x^* функ-
сионалыны көтүрсәк, онда $x^*(x)$ васитәсилә X^{**}-а дахил олан
вә $x^{**}(x^*) = x^*(x)$ бәрабәрлији васитәсилә тә'јин олунан x^{**}

функсионалыны алырыг. Демәли, $x \in X$ һәр бир x-ә гаршы X^{**}-дан олан мүәјјән бир x^{**} функсионалы ујғундур. $x \to x^{**}$, $y \to y^{**}$ оларса, $\alpha x + \beta y \to \alpha x^{**} + \beta y^{**}$ олар. Бу мүнасибәт $x^{**}(x^*) = x^*(x)$, $y^{**}(y^*) = y^*(y)$ бәрабәрликләринин көмәји илә алынмыш $(\alpha x^{**} + \beta y^{**})(x^*) = x^*(\alpha x + \beta y)$ бәрабәрлијиндән ашкардыр. Беләликлә, X-нын елә бир X_0 һиссәси вар ки, X илә хәтти изоморфдур. Инди $\| x^{**} \| = \| x \|$ олдуғуну көстәрәк. $| x^{**}(x^*) | = | x^*(x) | \leqslant \| x \| \, \| x^* \|$ олдуғундан, бурадан $\| x^{**} \| \leqslant \| x \|$. Дикәр тәрәфдән Хан—Банах теореминә көрә x верилдикдә елә $\overset{*}{x_0}$ функсионалы вар ки, $\| \overset{*}{x_0} \| = 1$ олмагла $\overset{*}{x_0}(x) = \| x \|$ олур. Она көрә $x^{**}(\overset{*}{x_0}) = \overset{*}{x_0}(x)$-дән $\| x \| \leqslant \| x^{**} \|$ олмагла $\| x^{**} \| = \| x \|$ олур. Беләликлә, X_0^{**} вә X изометрикдирләр. X вә X_0^{**} арасында олан белә ујғунлуг имкан верир ки, тәбии олараг функсионал анализин мүчәррәд нәзәријјәси нөгтеји-нәзәриндән $X = X_0^{**}$ гәбул етмәклә X, X^{**} һиссәси кими көтүрүлсүн.

§ 4. Банах фәзасында гошма операторлар һаггында

Фәрз едәк ки, T оператору X—(B) фәзасында верилмиш хәтти оператордур. Бу операторун $D(T)$ тә'јин областынын X фәзасында сых олдуғуну фәрз едәк, јә'ни $\overline{D(T)} = X$. Фәрз едәк ки, T оператору $D(T)$ областындан $У$—(B) фәзасына тә'сир едир. T-нин гијмәтләр чохлуғуну $R(T)$ илә ишарә едәк. верилмиш фәзаларын ејни әдәдләр мејданында тә'јин олундуғу фәрз олунур. X вә $У$-ин ујғун гошма фәзаларыны X^* вә $У^*$ илә ишарә едәк. Биз һәләлик T үчүн ујғун гошма оператора тә'риф верәркән T-нин мәһдуд олуб олмамасы шәртини гәбул етмәјәчәјик.

Фәрз едәк ки, $y^* \in У^*$ функсионалдыр. Ашағыдакы бәрабәрликлә тә'јин олунан x^* функсионалыны y^* функсионалына гаршы гојаг, јә'ни $x \in D$ олдугда $x^*(x) = y^*[Tx]$. Бу гајда илә көтүрүлмүш x^* функсионалы һаггында ашағыдакы ики хассәни гејд етмәк олар. y^* вә T ејничинсли вә аддитив олдуғу x^* да ејничинсли вә аддитивдир. Лакин x^* һәм мәһдуд, һәм дә гејримәһдуд ола биләр. Ахырынчы һалда x^* функсионалы X^* фәзасына дахил дејилдир.

Тә'риф 6. $y^*(Tx)$ *мәһдуд олдугда мүәјјән гајда үзрә һәр белә* y^**-а гаршы* X^**-ә дахил олан мүәјјән* x^* *гаршы гојулур. Беләликлә,* $D(T^*) \subset У^*$ *чохлуғу* X^*-а *ин'икас олунур. Бу ин'икас* T^* *илә ишарә едәрәк,*

$$x^* = T^* y^* \tag{1}$$

бәрабәрлијини алырыг. Бу һалда T^* T*-ин гошма оператору адланыр.*

T^* операторунун тә'јин областыны D^* илә ишарә едәк. $\overline{D(T)} = X$ олдуғундан, беләликлә, гошма оператор биргијмәтли тә'јин олунур. Доғрудан да, әкәр $x^*(x)$ мәһдуд фәрз олунарса, онда $x^*(x)$-ин јеканә мәһдуд давамы вардыр. Јә'ни, y^*-а ујғун x^* варса, белә функсионал јеканәдир. Гошма операторун тә'рифиндән көрүндүјү кими ола билсин ки, $D(T^*)$-јә јалныз ејнилик кими сыфыр олан функсионал дахилдир. Лакин T мәһдуд олдугда исә $D(T^*) = У^*$.

Теорем 5. ***T^** хәттидир.**

Исбаты. $y_1^*, y_2^* \in У^*$ олсун. Онда $T^* y_1^* = x_1^*$ вә $T^* y_2^* = x_2^*$ олар. Гошма операторун тә'рифинә көрә $x_1^*(x) = y_1^*[T(x)]$ вә $x_2^*(x) = y_2^*[T(x)]$. Бу бәрабәрликләри тәрәф-тәрәфә ҹәмләсәк

$$\left(x_1^* + x_2^*\right)(x) = \left[y_1^* + y_2^*\right][T(x)]$$

олмагла $x_1^* + x_2^* = T^*\left(y_1^* + y_2^*\right)$ буна көрә $T^*\left(y_1^* + y_2^*\right) = T^* y_1^* + T^* y_2^*$ бурадан T^*-нин аддитив олмасы алыныр. $T^* \alpha y^* = x^*$ олсун. Еләҹә дә, $\alpha y^*[T(x)] = x^*(x)$ олдуғундан $y^*[T(x)] = \left(\frac{x^*}{\alpha}\right)(x)$ вә бу бәрабәрликдән $\frac{x^*}{\alpha} = T^* y^*$ олмагла $x^* = \alpha T^* y^* = T^* \alpha y^*$ өдәнилир. Она көрә дә T^* ејниҹинсли олур. Нәһајәт, сонралар биз T мәһдуд олдугда $\| T \| = \| T^* \|$ бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрмәклә һәмчинин T^*-нин мәһдуд олдуғуну көстәрәҹәјик. Бу гајда үзрә X^{**} вә $У^{**}$ гошма фәзалар олдугда мүәјјән шәртләр дахилиндә $y^{**} = T^{**} x^{**}$ тә'јин олунан икинҹи гошма T^{**} операторуну тә'јин етмәк олар. T^{**} операторунун T-нин давамы кими тә'рифини верәк. X^{**}-нын X-лә изоморф вә изометрик һиссәси X_0^{**} олсун. Ејни гајда үзрә $У$-ин бу гајда үзрә тә'јин олунан һиссәсини $У_0^{**}$ илә ишарә едәрәк X_0^{**}-дан $У_0^{**}$-а тә'сир едән ашағыдакы кими $\hat{T}$ операторуну тә'јин едәк. X_0^{**}-дан $\hat{x}$ елементини көтүрәк. X-дан бура ујғун елементи x илә ишарә едәрәк $y = Tx$ барәбәрлијини көтүрәк. y-ә гаршы да $У_0^{**}$-дан мүәјјән бир елемент ујғундур, буну $\hat{y}$-илә ишарә едәк. Демәли, $\hat{x} \in X_0^{**}$ олан һәр бир $\hat{x}$-ә гаршы мүәјјән гајда үзрә $\hat{y} \in У_0^{**}$ олан мүәјјән бир $\hat{y}$ елементинә ујғун олур. Башга сөзлә, елә $\hat{T}$ оператору вар ки, $\hat{y} = T\hat{x}$ бәрабәрлији васитәсилә тә'јин олунур вә бу оператор X_0^{**}-дан $У_0^{**}$-на тә'сир едир. Әкәр T хәтти оператор исә, онда ашкардыр ки, һәмчинин $\hat{T}$ хәтти олар. Әкәр $\hat{T}$-нин X_0^{**}-дан мүәјјән давамы варса, онда бу давам T операторунун X-дән давамы адланыр, белә бир тә'рифи нәзәрдә тутараг ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 6. ***T^{**}. T-нин давамыдыр. Јә'ни истәнилән $\hat{x}\in X_0^{**}$ $\hat{x}$ көтүрәк вә көстәрәк ки, $T^{**}\hat{x}=\hat{T}\hat{x}$ өдәнилир.***

Исбаты. $\hat{x}=x_0^{**}\in X_0^{**}$ олсун $y_0^{**}=T^{**}x_0^{**}$ илә ишарә едәк. Бурада $T^{**}x_0^{**}=x_0^{**}T^{**}$ буну нәзәрә алсаг $y_0^{**}(y^*)=x_0^{**}T^*y^*$, бурадан $(T^{**}x_0^{**})y^*=x_0^{**}T^*y^*$ бәрабәрлијини алырыг. $x^{**}(x^*)=x^*(x)$, бу бәрабәрлијә әсасән $x^{**}(T^*y^*)=(T^*y^*)(x)$ алыныр. T вә T^* оператору арасында $T^*y^*=y^*T$ олдуғуну нәзәрә алсаг, бурадан $x^{**}(T^*y^*)=y^*Tx$ алыныр. Беләликлә дә, нәтичәдә $\left(T^{**}\hat{x}\right)y^*=y^*Tx=\left(\hat{T}\hat{x}\right)y^*$ бәрабәрлији $y^*\in Y^*$ олан истәнилән y^* үчүн доғру олдуғундан теорем исбат олунур. Нәтичә олараг ону гејд едәк ки, хүсуси һалда, әкәр X рефлексив фәза оларса, јә'ни $X^{**}=X$ онда $T^{**}=T$ олур.

Фәрз едәк ки, T_1 вә T_2 операторлар $X-(B)$ фәзасына тә'сир едән хәтти операторлардыр, $(T_1T_2)^*=T_2^*T_1^*$ өдәнилмәсини көстәрәк.

T_1 вә T_2 мәһдуд операторлар олдугларындан T_1^* вә T_2^* вар. $T_1T_2=T$ оларса, онда тә'рифә көрә $x^*\in X^*$ истәнилән x^* үчүн $T^*x^*=x^*T$ олар. T-нин ифадәсини нәзәрә алсаг

$$(T_1T_2)^*x^*=x^*T_1T_2.$$

$T_1^*x^*=x^*T_1^*$ олдуғуну нәзәрә алсаг $(T_1T_2)^*x^*=\left(T_1^*x^*\right)T_2=y^*T_2$, бурада $y^*=T_1^*x^*$. Нәһајәт, $y^*T=T_2^*y^*$ олдуғундан $(T_1T_2)^*x^*=T_2^*T_1^*x^*$. Бу бәрабәрлик истәнилән x^* үчүн өдәнилир. (1) исбат олунур. Асанлыгла $(\alpha T)^*=\alpha T^*$ вә еләчә дә $(T_1+T_2)^*=T_1^*+T_2^*$ бәрабәрликләринин доғрулуғу көстәрилир. E ваһид оператор олдугда E^*-нин ваһид оператор олмасы ашкардыр.

§ 5. ГАПАЛЫ ОПЕРАТОРЛАР

Мәһдуд олмајан операторларын елә бир синфи вар ки, мүәјјән мә'нада кәсилмәз операторлара јахындыр вә белә операторларын мүхтәлиф ријази мәсәләләрин һәлләриндә бөјүк әһәмијјәти вардыр. Фәрз едәк ки, X вә Y ејни бир скалјар Φ мејданында тә'јин олунмуш хәтти тоположи фәзалардыр. Фәрз едәк ки, T, D_T-дән R_T-јә тә'сир едән хәтти оператордур. Белә ки, $D_T\subset X$ вә $R_T\subset Y$.

Тә'риф 7. *Әкәр Т-нин графики јә'ни $[x,\ Tx]$ кими елементләрин чохлуғу тоположи $X\cdot Y$ һасилиндә гапалыдырса, онда Т хәтти оператору гапалы оператор адланыр.*

T-нин гапалы олмасы ашағыдакы кими дә тә'риф олунур.

$x_n \to x$ олдугда, $x_n \in D_T$ һәмчинин $Tx_n \to y$ олмагла $x \in D(T)$ вә $y = Tx$ оларса, T гапалы оператор адланыр. Әкәр T_1 хәтти кәсилмәз оператор исә, онда $x_n \to x$ олмасындан һәмишә $T_1 x_n \to y$ олмагла, $y = T_1 x$ олур. Беләликлә, һәр бир кәсилмәз вә тә'јин областы гапалы олан оператор гапалыдыр. Гапалы операторларын бә'зи хассәләрини вермәздән габаг белә операторлар синфиндән бир мисал көстәрәк.

Мисал. $[0, 1]$ сегментиндә кәсилмәз $\varphi(t)$ функсијалар чохлуғуну X илә ишарә етсәк X-ин хәтти чохлуг олмасы ашкардыр. X-да норма ашағыдакы кими тә'јин олунарса, јә'ни

$$\| \varphi \| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | \varphi(t) | \tag{1}$$

онда X—(B) фәзасы олар. X_0 илә X-дән олан елә алт чохлуғу ишарә едәк ки, $\varphi(t) \in X_0$ һәр бир $\varphi(t)$-нин төрәмәси вар. Бундан сонра ашағыдакы T чевирмәсини тә'јин едәк. $\varphi(t) \in X_0$ олдугда $\varphi(t)$-јә гаршы $\varphi'(i)$-и гаршы гојаг, јә'ни

$$T\varphi(t) = \varphi'(t) \tag{2}$$

олсун.

T-нин аддитив вә ејничинсли вә беләликлә дә хәтти оператор олмасы онун (2) илә тә'јин олунмасындан ајдындыр. Көстәрәк ки, T гејри-мәһдуд оператордур. $y_n(t) = t^n \in X_0$ көтүрәк. Онда $Tt^n \to nt^{n-1}$. Буна көрә

$$\| Tt^n \| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | nt^{n-1} |. \tag{3}$$

Дикәр тәрәфдән

$$\| t^n \| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} | t^n | = 1. \tag{4}$$

Онда елә сабит $M > 0$ әдәди тапмаг олмаз ки, $\varphi \in X_0$ истәнилән φ үчүн

$$\| T\varphi \| < M \| \varphi \|$$

өдәнилсин. Демәли, T мәһдуд ола билмәз. Инди T-нин гапалы олмасыны көстәрәк. Фәрз едәк ки, $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ вә $T\varphi_n \to y$ олсун. $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} | \varphi_n(t) - \varphi(t) | < \varepsilon$ олдуғундан $\varphi'_n(t)$, $\varphi(t)$-јә мүнтәзәм јығылыр. Еләчә дә, $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} | T\varphi'_n(t) - \varphi(t) | < \varepsilon$, јә'ни $\max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} | \varphi'_n(t) - \varphi(t) | < \varepsilon$ олдуғундан $\{\varphi'_n(t)\}$ мүнтәзәм јығылыр. Она көрә $T\varphi(t) = \varphi'(t)$ олмагла $\varphi(t) \in X_0$. Бунунла да T-нин гапалы оператор олмасы исбат олунур.

Теорем 7. Әкәр T тә'јин областы $D(T) \subset X$ олан $(B$-$)$ фәзасында верилмиш мәһдуд хәтти оператор исә, бу операторун гапалы давамы вардыр.

Исбаты. $\overline{D(T)}$ илә $D(T)$-нин гапанмасыны ишарә едәк. $x \in \overline{D(T)}$ x көтүрәк $x_n \to x$ олсун. Онда көстәрәк ки, $\{Tx_n\}$ ардычыллыгда мүәјјән бир y әдәдинә јығылыр. $x_n \to x$ олдуғундан белә ардычыллыг фундаментал олар, јә'ни истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $N(\varepsilon)$ вар ки, $n, m \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда $\| x_n - x_m \| < \varepsilon$. Шәртә көрә T—мәһдуд олдуғундан

$$\| Tx_n - Tx_m \| \leqslant \| T \| \; \| x_n - x_m \| . \tag{5}$$

Беләликлә, n, $m \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда (5)-дән $\| Tx_n - Tx_m \| \leqslant \leqslant \| T \| \varepsilon$ олур. $X - (B)$ фәзасы олдуғундан $\{Tx_n\}$ ардычыллығы мүәјјән бир y елементинә јығылыр. Демәли, $x \in \overline{D}(T)$ һәр бир x елементинә гаршы мүәјјән гајда үзрә y елементи ујғундур. Буну нәзәрә алараг ашағыдакы кими оператор тә'јин едәк:

$$T'x = \begin{cases} Tx, \; x \in D(T) \text{ олдугда}, \\ y, \; x \in \overline{D(T)} \text{ олдугда}. \end{cases}$$

Бу гајда үзрә тә'јин олунан операторларын хәтти вә гапалы олмасы ашкардыр. Бунунла теорем исбат олунур. T'-ин тә'јининдән T үчүн гапалы давам олмасы чыхыр.

Теорем 8. Хәтти мәһдуд T операторунун $D(T)$ тә'јин областы $X - (B)$ фәзасында сых исә, онда T операторунун нормасыны сахламаг шәртилә бүтүн фәзаја давам етдирмәк олар.

Исбаты. $x \in X$ елә елемент көтүрәк ки, $x \bar{\in} D(T)$ өдәнилсин. $\overline{D(T)} = X$ олдуғундан $x_n \in D(T)$ олан елә $\{x_n\}$ ардычыллығы вар ки, x-ә јығылыр. Она көрә дә, белә ардычыллыг фундаментал олур.

$\| Tx_n - Tx_m \| \leqslant \| T \| \; \| x_n - x_m \|$ олдуғуну нәзәрә алсаг $\{Tx_n\}$-нын фундаментал олдуғу алыныр. X фәзасы там олдуғуна көрә $\{Tx_n\}$ ардычыллығы јығыландыр $\lim\limits_{n \to \infty} Tx_n = y$. Көстәрәк ки, y, x-ә јығылан, $\{\widetilde{x_n}\}$ ардычыллығындан асылы дејилдир. Она көрә $\{x_n\}$ ардычыллығынын x-ә јығылдығыны фәрз едәк.

$Tx_n - Tx_n = \tilde{T}(x_n - \widetilde{x}_n)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $x_n - \widetilde{x}_n \to 0$ олдуғундан, $Tx_n - \tilde{T}x_n \to 0$ олмагла y-ин x-ә јығылан $\{x_n\}$-дән асылы олмамасы алыныр.

Беләликлә, һәр бир $x \in \bar{D}(T)$ елементинә гаршы мүәјјән y елементи гаршы гојулур. $x \in D(T)$ олдугда $x, x, \ldots, x, \ldots$ елементләринә $Tx, Tx, \ldots, Tx, \ldots$ операторуну гаршы гојмагла X фәзасында тә'јин олунан елә $y = \tilde{T}x$, оператору гаршы гојулур ки, $x \in D(T)$ олдугда $\tilde{T}x = Tx$. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\| T \| = \| \tilde{T} \|$, $x_n \in D(T)$ $\| Tx_n \| \leqslant \| T \| \| x_n \|$

олдуғундан, бурада лимитә кечсәк $\|\tilde{T}x\| \leqslant \|T\|\,\|x\|$, бурадан $\|\tilde{T}\| \leqslant \|T\|$. Беләликлә, $\tilde{T}$-нин мәһдудлуғуну нәзәрә алараг $\|\tilde{T}x\| \leqslant \|\tilde{T}\|\,\|x\|$ кими јаза биләрик. $x \in D(T)$, $\tilde{T}x = Tx$, бурадан $\|Tx\| \leqslant \|\tilde{T}\|\,\|x\|$ олур вә она көрә $\|T\| \leqslant \|\tilde{T}\|$., Беләликлә, $\|T\| = \|\tilde{T}\|$. Белә бир теореми нәзәрә алараг мәһдуд хәтти операторун варлыг областы, үмумилији позмадан бүтүн фәза көтүрүлүр.

Теорем 9. T^* гапалы оператордур вә T мәһдуд исә онда T^* мәһдуд олмагла $\|T\| = \|T^*\|$.

Исбаты. $\overset{*}{y}_n \in D^*$, $\overset{*}{y}_0$-а јығылан $\{\overset{*}{y}_n\}$ ардычыллығыны көтүрәк. $\overset{*}{x}_n = T^*\overset{*}{y}_n$, $\overset{*}{x}_n \to \overset{*}{x}_0$ олдуғуну фәрз едәк. T^*-нин гапалы олмасы үчүн $\overset{*}{x}_0 = T^*\overset{*}{y}_0$ вә $\overset{*}{y}_0 \in D^*$ олдуғуну көстәрмәк олар. T^*-ун тә'рифиндән $\overset{*}{x}_n(x) = \overset{*}{y}_n[T(x)]$ олур. $\overset{*}{x}_n \to \overset{*}{x}_0$ вә $\overset{*}{y}_n \to \overset{*}{y}_0$ олдуғундан, бурада $\overset{*}{x}_0(x) = \overset{*}{y}_0[T(x)]$, $\overset{*}{x}_0 = T^*\overset{*}{y}_0$ олмагла $\overset{*}{y}_0 \in D^*$. Беләликлә, T^* гапалыдыр. Инди теоремин икинчи һиссәсини исбат едәк. Она көрә дә фәрз едәк ки, T мәһдуддур. Онда гејд етдијимиз кими T^*-илә тә'јин олан x^*-да мәһдуд олар.

Демәли,

$$|x^*(x)| \leqslant \|y^*\| \cdot \|T\| \cdot \|x\| \tag{6}$$

олдуғундан $\|x^*\| \leqslant \|y^*\| \cdot \|T\|$ јахуд $\|T^*y^*\| < \|T\|\,\|y^*\|$ олмагла

$$\|T^*\| \leqslant \|T\| \qquad (7$$

бәрабәрсизлији алыныр.

$\|T\|$-нин тә'рифинә көрә верилмиш истәнилән $\varepsilon > 0$ гаршы елә x_0 вар ки, $\|x_0\| = 1$,

$$\|T(x_0)\| \geqslant \|T\| - \varepsilon. \tag{8}$$

$y_0 = T(x_0)$, $Y - (B)$ фәзасы олдуғундан Хан—Банах теореминдән алынан нәтичәјә көрә $\overset{*}{y}_0 \in Y^*$ олан елә $\overset{*}{y}_0$ функсионалы гурмаг олар ки, $\|\overset{*}{y}_0\| = 1$ олмагла $\overset{*}{y}_0(y_0) = \|y_0\|$ олсун. $\|y_0\| = \|T(x_0)\|$ олдуғундан (8)-дән

$$\|T\| - \varepsilon \leqslant \|y_0\| = |\overset{*}{y}_0(y_0)| = |\overset{*}{y}_0[T(x_0)]|.$$

Әкәр $T^*\overset{*}{y}_0 = \overset{*}{y}_0 T$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда

$$\|T\| - \varepsilon \leqslant |T^*\overset{*}{y}_0(x_0)| \leqslant \|T^*\overset{*}{y}_0\|\,\|x_0\| = \|T^*\overset{*}{y}_0\| \leqslant \|T^*\|\;\|\overset{*}{y}_0\|$$

бәрабәрсизлијини алырыг.

$\|\overset{*}{y}_0\| = 1$ олдуғундан исә $\|T\| - \varepsilon \leqslant \|T^*\|$. Лакин ε истәнилән әдәд олдуғундан

$$\|T\| \leqslant \|T^*\| \tag{9}$$

(7) вә (9) бәрабәрсизликләрини мүгајисә етсәк, $\| T \| = \| T^* \|$. Бунунла да теорем исбат олунур.

Гејд. T^*-нин тә'јин олдуғу D^* областы $У^*$-да сых олса иди, онда T-јә нисбәтән икинчи гошма оператор һаггында ејни мүлаһизәләри тәкрар етмәклә варлығы вә мәһдудлуғу һаггында нәтичә сөјләмәк оларды. Лакин хүсуси мисалларла көстәрмәк олар ки, D^* үмумијјәтлә $У^*$-да сых дејилдир.

Теорем 10. Фәрз едәк ки, T, $\overline{D(T)} = X$ олмагла, X—Банах фәзасына дахил олан $D(T)$-дән $У—(B)$ фәзасына тә'сир едән хәтти оператордур. Бу операторун гијмәтләр чохлуғуну $R(T)$ илә ишарә едәк. T^*-нин тәрси олмасы үчүн $\overline{R(T)} = У$ олмасы һәм зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, $\overline{R(T)} = У$, көстәрәк ки, T^*-нин тәрси вар, јә'ни $T^*(y^*) = 0$-дан јалныз $y^* = 0$ олур. $T^* y^*(x) = y^*[T(x)]$ олдуғундан $T^*(y^*) = 0$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг $x \in D$ истәнилән x үчүн $y^*[T(x)] = 0$, бурадан исә, $y^*[\overline{R(T)}] = y^*(У) = 0$ вә она көрә дә, $y^* = 0$ олур. Беләликлә, T^*-нин тәрси олдуғу алыныр.

Шәртин кафилији. Инди фәрз едәк ки, T^*-нин тәрси вар. Исбат едәк ки, $\overline{R(T)} = У$. Әксини фәрз едәк, јә'ни $R(T) \neq У$ олдуғуну гәбул едәк. Бурада елә y_0 елементи вар ки, $y_0 \in У$ олдугда $y_0 \overline{\in} \overline{R(T)}$. Хан-Банах теореминдән алдығымыз нәтичәјә көрә $y^* \in У^* [\overline{R(T)} \setminus$ елә y^* функционалы гурмаг олар ки, $y^*(y_0) = 1$ оларса, $y^* R(T) = 0$. Јә'ни $x \in D(T)$ истәнилән x үчүн $y^*[T(x)] = 0$ вә $T^* y^* = 0$. Лакин $y^*(y_0) = 1$ олдуғундан көстәрдик ки, елә $y^* \neq 0$ олан y^* функционалы вар ки, $T^* y^* = 0$ бәрабәрлијини өдәјир. Бу исә ону көстәрир ки, T^*-нин тәрси јохдур. Алынан зиддијјәтдән $\overline{R(T)} = У$ олдуғуну алырыг. Бунунла да теорем исбат олунур.

Теорем 11. Фәрз едәк ки, T тә'јин областы $X - (B)$ фәзасына дахил олан $D(T)$-дән гијмәтләр чохлуғу $У - (B)$ фәзасына дахил олан $R(T)$-јә тә'сир едән хәтти оператордур. Белә ки, $\overline{D(T)} = X$ вә $R(T) = У$ онда

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^* \qquad (10)$$

вә T^{-1}-ин мәһдуд олмасы үчүн $(T^*)^{-1}$-ин X^*-да мәһдуд олмасы һәм зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты (10)-нун доғру олдуғуну көстәрмәдән габаг $(T^*)^{-1}$ вә $(T^{-1})^*$ операторларынын варлығыны көстәрәк. T^{-1}-ин тәјин областы $У$-дә сых олдуғундан $(T^{-1})^*$ вардыр. Шәртә көрә $\overline{R(T)} = У$ олдуғундан, бундан габаг исбат етдијимиз теоремә көрә һәмчинин $(T^*)^{-1}$ вар. Инди (10)-нун доғру олдуғуну көстәрәк. y вә y^*-и ујғун олараг T вә T^* операторларынын тәјин областларындан көтүрәрәк $y^*(y) = y^* TT^{-1}(y)$ бәрабәрлијини јазаг. $y^*T = Ty^*$ олдуғуну нәзәрә алсаг бурадан

$$y^*(y) = [T^*y^*]\,(T^{-1}y). \tag{11}$$

$T^*y^* = x^*$ олдуғундан, нәтичәдә $y^* = (T^{-1})^* x^*$. Бу бәрабәрлик көстәрир ки, T^*-нин гијмәтләр чохлуғу $(T^{-1})^*$-ын тәјин областына дахилдир. Јә'ни

$$R(T^*) \subseteq D\left[(T^{-1})^*\right] \tag{12}$$

Дикәр тәрәфдән $y^* \in D(T)$-јә дахил олан истәнилән y^* үчүн

$$(T^{-1})^* T^*y^* = y^*. \tag{13}$$

Јухарыда гејд етдијимиз мүлаһизәләри нәзәрә алсаг, $(T^{-1})^*$ операторунун $(T^*)^{-1}$ үчүн давам олдуғу алыныр

$$x^*\{T^{-1}\;[T\;(x)]\} = \left[(T^{-1})^{**}x\right](Tx). \tag{14}$$

Фәрз едәк ки, $x \in D(T)$ вә $x^* \in D\left[(T^{-1})^*\right]$ олсун.

Ашағыдакы бәрабәрлији көтүрәк

$$x^*(x) = x^*\{T^{-1}[T(x)]\} = \left[(T^{-1})x^*\right]^*(Tx). \tag{15}$$

(14) бәрабәрлијиндән алырыг ки, $(T^{-1})^* x^*$ T^*-нин тәјин областына дахилдир, јә'ни

$$(T^{-1})^* x^* \subset D(T^*)$$

$x^* \in D(T^{-1})^*$ бүтүн x^* үчүн исә $x^* = T^*(T^{-1})^* x^*$. Беләликлә

$$R(T^*) \supseteq D\left[(T^{-1})^*\right]. \tag{16}$$

(12) вә (16)-ны мүгајисә етсәк, $R(T^*) = D\left[(T^{-1})^*\right]$ бәрабәрлијини вә еләчә дә $R(T^*) = D\left[(T^*)^{-1}\right[$ бәрабәрлијини алырыг, демәли, $D\left[(T^{-1})^*\right] = D\left[(T^*)^{-1}\right]$ олмагла $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$ бәрабәрлијинин доғрулуғу исбат олунур. Инди теоремин ахырынчы һөкмүнү көстәрәк. Фәрз едәк ки, T^{-1} мәһдуддур, онда исбат етдијимиз теоремә көрә $(T^{-1})^*$ вә буна бәрабәр олан $(T^*)^{-1}$ мәһдуддур. Инди тәрсини фәрз едәк, $(T^*)^{-1}$ мәһдуддур. Онда $y \in R(T)$ вә $x^* \in X^*$ истәнилән y вә x^* үчүн $x^*\left[T^{-1}(y)\right] = \left[(T^{-1}\right]^* x^*\right]y$ олдуғундан бурадан

$$|\left[(T^{-1})^* x^*\right] y| \leqslant (T^{-1})^*\| \, \|x)^*\| \, \|y\|$$

бәрабәрсизлијини алырыг.

$$x^*\left[T^{-1}(y) = \left[(T^{-1})^* x^*\right] y \qquad \text{олдуғуна көрә}$$

$$|x^*\left[T^{-1}(y)\right] \leqslant \|(T^{-1})^*\| \, \|x^*\| \, \|y\|.$$

Бу бәрабәрсизлик истәнилән x^* үчүн өдәнилир. $\tilde{y}=T^{-1}(y)$ илә ишарә едәк. $\tilde{y}$ елементи үчүн Хан—Банах теореминә көрә нормасы ваһид олан елә x_{y}^* функсионалы вар ки,

$$x_y^*\left(T^{-1}(y)\right)=\left\|T^{-1}(y)\right\|.$$

Ахырынчы бәрабәрсизликдә $x^*=x_y^*$ олдугда, $y\in D(T)$ истәнилән y үчүн нәтичәдә

$$\left\|T^{-1}(y)\right\|\leqslant\left\|\left(T^{-1}\right)^*\right\|\,\|y\|$$

олдуғу алыныр. Бурадан T^{-1}-ин мәһдуд олдуғу алыныр. Беләликлә, теорем исбат олунур.

Теорем 12. $X-(B)$ фәзасындан $У-(B)$ фәзасына тә'сир едән сонлу өлчүлү T оператору

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}x_i^*(x)\,y_i \tag{17}$$

шәклиндә көстәрилир. Бурада, $y_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ вә $x_i^*\left(i=\overline{1,n}\right)$ ујғун олараг $У$ вә X^*-дан көтүрүлмүш мүәјјән хәтти асылы олмајан векторлардыр.

Исбаты. $У$-ин базис векторларыны $y_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ илә ишарә едәк. Хан—Банах теореминә көрә $y_{\text{к}}^*$ функсионаллары гурмаг олар ки, $y_{\text{к}}^*(y_{\text{к}})=1$ олмагла $y_{\text{к}}^*(y_i)=0$. Она көрә дә, $\tilde{y}=\alpha_1y_1+\cdots+\alpha_ny_n$ оларса $y_{\text{к}}^*(\tilde{y})=0$ олар.

$У$ сонлу өлчүлү олдуғуна көрә һәр бир x үчүн елә $\alpha_i=F_i(x)$ әдәдләри вар ки,

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}F_i(x)\,y_i \tag{18}$$

олур. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфинә $y_{\text{к}}^*$ функсионалы васитәсилә тә'сир едәк.

$y_{\text{к}}^*[T(x)]=\sum\limits_{i=1}^{n}F_i(x)\,y_{\text{к}}^*(y_i)$, $y_j^*\left(j=\overline{1,n}\right)$ функсионалын гурулмасына көрә $y_{\text{к}}^*[T(x)]=F_{\text{к}}(x)$ олур.

$$y_{\text{к}}^*[T(x)]=x_{\text{к}}^*(x) \tag{19}$$

ашкардыр ки, $x_{\text{к}}^*\in X^*$. (19)-у нәзәрә алсаг (18)-дән

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}x_i(x)\,y_i. \tag{20}$$

Инди $x_i^*\left(i=\overline{1,n}\right)$ векторларынын хәтти асылы олмадығыны гөстәрәк. Әксини фәрз едән, јә'ни гәбул едәк ки, бу векторлар хәтти асылыдырлар. Она көрә елә $y_i^*(i=\overline{1,m})$ $m<n$ векторлары вар ки, јердә галан векторлар бунларын хәтти комбинасијасы кими көстәрилә биләр. Үмумилији позмадан $y_i^*(i=\overline{1,m})$ векторлары ваһиддән m-ә гәдәр ардычыл нөмрәләнмишдир:

$$x_k^*(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}\, y_j^*(x) \tag{21}$$

олдуғундан

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^*(x)\, y_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj}\cdot y_j^*(x)\, y_k,$$

бурадан

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} y_j^*(x)\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\, y_k\right).$$

Әкәр $\tilde{y}_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\, y_k$ илә ишарә етсәк, онда

$$Tx = \sum_{j=1}^{m} y_j^*(x)\,\tilde{y}_j. \tag{22}$$

Бурадан алырыг ки, $У$-ин өлчүсү $m<n$. Бу исә $У$-ин өлчүсүнү n олмасына зиддир, алынан зиддијјәт $x_j^*(j=\overline{1,n})$ векторларынын хәтти асылы олмадығыны көстәрир. Беләликлә, теорем исбат олунур.

§ 6. (B) ФӘЗАСЫНДА КҮЧЛҮ ВӘ ЗӘИФ ТОПОЛОКИЈА

Тә'риф. *Фәрз едәк ки, X—(B) фәзасы верилмишдир. Ајдындыр ки, X бу фәзада верилмиш норма васитәсилә тоположи фәзаја чеврилир. Белә тополокија күчлү тополокија адланыр вә һәмин тополокија илә X-дә јығылан ардычыллыг күчлү јығылан ардычыллыг адланыр.*

$\{x_n\}$—ардычыллығыны көтүрәк.

$\|x_n - x_0\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ оларса, онда бу ардычыллыг x_0-а күчлү јығылан ардычыллыг адланыр. Инди X-да јени тополокија тә'јин едәк. $\varepsilon > 0$ әдәдини вә гејд олунмуш $x_k^* \in X^*(k=\overline{1,n})$ елементләрини көтүрәк вә $|x_k^*(x-x_0)| < \varepsilon\,(k=\overline{1,n})$ бәрабәрсизлијини өдәјән x нөгтәләри чохлуғуну N илә ишарә едәк. Беләликлә, x_0-ын мүәјјән әтрафыны алырыг. ε вә $x_k^*(k=\overline{1,n})$ функсионалларыны дәјишмәклә x_0-ын әтрафлар һеј'әтини алырыг. Тә'рифдән көрүндүјү кими $N = N(\varepsilon, x_1^*, \dots, x_n^*)$ олур.

Јохламаг олар ки, хәтти фәза бу тополокијаја көрә тоположи фәзаја чеврилир. Белә тополокија зәиф тополокија адланыр.

X-да верилмиш $\{x_{\text{п}}\}$ ардычыллығы x_0-а о заман зәиф јығылан адланыр ки, $x^* \in X^*$ олан истәнилән x^* үчүн $x^*(x_{\text{п}}) \to x^*(x_0)$ олсун.

Теорем 15. Әкәр $\{x_{\text{п}}\}$, x_0-а күчлү јығыларса һәмчинин бу елементә зәиф јығылыр.

Исбаты $\{x_{\text{п}}\}$, x_0-а күчлү јығыларса, онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $N(\varepsilon)$ вар ки, $n \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда $\|x_{\text{п}} - x_0\| < \varepsilon$ олур. $x^* \in X^*$ истәнилән x^* функсионалыны көтүрәк:

$$| x^*(x_{\text{п}}) - x^*(x_0) | \leqslant \| x^* | . \| x_{\text{п}} - x_0 \|$$

олдуғундан $n \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда истәнилән x^* үчүн $| x^*(x_{\text{п}}) - x^*(x_0) | \leqslant \varepsilon \| x^* \|$ олур. Онда $x^*(x_{\text{п}}) \to x^*(x)$.

Бундан әлавә X^*-да X васитәсилә тополокија вермәк олар: Биз көстәрмишдик ки, X, X^{**}-ун мүәјјән һиссәси олан X_0^{**} илә хәтти изоморфизм олмагла һәм дә изометрикдирләр. Она көрә дә функсионаллары $X = X_0^{**}$-дән көтүрмәклә X^* да X васитәсилә тополокија вермәк олур. Башга сөзлә, X^*-дан көтүрүлмүш x^* функсионалын әтрафы X_0^{**} көтүрүлмүш функсионаллар васитәсилә верилир. Бу һалда да хәтти вектору фәза хәтти тоположи фәзаја чеврилир. Белә тополокија X^*-нын X тополокијасы адланыр.

§ 7. ОПЕРАТОРЛАРЫН КҮЧЛҮ ВӘ ЗӘИФ ТОПОЛОКИЈАСЫ

Биз көстәрмишдик ки, $X-(B)$ фәзасындан һәмин фәзаја тә'сир едән мәһдуд хәтти операторлар чохлуғу да мүәјјән чәбри әмәлләр дахил етмәклә (B) чәбринә чеврилир.

Беләликлә, бу чәбрдә олан тополокија норма васитәсилә вериләрәк бу тополокија мүнтәзәм оператор тополокијасы адланыр. Бундан әлавә ендоморфизмләр чәбриндә зәиф вә күчлү оператор тополокијасы анлајышы верилир. T_0 гејд едәрәк бу операторун әтрафы тә'рифини верәк.

Тә'риф 9. $\varepsilon > 0$ *әдәдини вә X-дән x_1, $x_2, \ldots, x_{\text{п}}$ нөгтәләрини гејд едәрәк N илә елә T-ләр чохлуғуну ишарә едәк ки, $\| T(x_{\text{к}}) - T_0(x_{\text{к}}) \| < \varepsilon$ өдәнилсин.*

Беләликлә, T_0-ын гејд олунмуш әтрафыны алырыг. ε вә $x_{\text{к}}$ нөгтәләрини дәјишмәклә $N = N(\varepsilon, x_1, x_2, \ldots, x_{\text{п}})$ кими јазылараг T_0-ын әтрафлар һеј'әтини алырыг. $\varepsilon > 0$, $x_0, \ldots, x_{\text{п}} \in X$ вә $x_1^*, \ldots, x_{\text{п}}^* \in X^*$ гејд олунмуш нөгтәләрини көтүрәрәк N илә елә T-ләр чохлуғуну ишарә едәк ки,

$$\left| x_{\text{к}}^* [T(x_{\text{к}})] - x_{\text{к}}^* [T_0(x_{\text{к}})] \right| < \varepsilon$$

бәрабәрсизлији өдәнилсин. Бу гејд олунмуш әтраф T_0-ын зәиф
тополокијалы әтрафы адланыр. Демәли, ε әдәдини $x_к(к=\overline{1, n})$
вә $x^*_к(к=\overline{1,n})$ нөгтәләри дәјишмәклә T_0-ын әтрафлар һеј'әтини
алырыг.

Бу гејд тополокијаја көрә ендоморфизмләр чәбри тополо-
жи фәзаја чеврилир. Белә тополокијалар васитәсилә ујғун јы-
ғылма анлајышыны верәк. $\{T_n\}$ ендоморфизмләри ардычыл-
лығы о заман күчлү фунтаментал адланыр ки, $x \in X$ истәнилән x
үчүн $n,\ m \geqslant N$ олдугда $\| T_n x - T_m x \| < \varepsilon$ олсун. Һәмин ар-
дычыллыг T_0 ендоморфизминә о заман күчлү јығылан адла-
ныр ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ үчүн $n \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда $\|7_n x - T_0 x\| < \varepsilon$
истәнилән x үчүн әдәнилсин.

Тә'риф 10. $\{T_n\}$ *о заман зәиф фундаментал адланыр ки'*
$\varepsilon > 0$ *олдугда* $n, m \geqslant N$ *үчүн* $\| x^* T_n x - x^* T_m x \| < \varepsilon$ *бәрабәр-*
сизлији $x^* \in X^*$ *вә* $x \in X$ *олан истәнилән* x^* *вә* x *үчүн өдә-*
нилсин.

Һәмин ардычыллыг T_0-а о заман зәиф јығылан ад-
ланыр ки, $\varepsilon > 0$ олдугда $n > N$ үчүн $\| x^* T_n x - x^* T_0 x \| < \varepsilon$ бә-
рабәрсизлији $x^* \in X^*$ вә $x \in X$ олан истәнилән x^* вә x нөг-
тәләри үчүн өдәнилсин. Биз N нөмрәсинин асылы олдуғу әдәд
вә елементләри гејд етмәмәклә ε-дан вә ујғун олараг x вә
x^* елементләриндән асылылығыны нәзәрдә тутуруг. Опе-
раторлар' ардычыллығынын күчлү јығылмасындан зәиф јығыл-
масы, аналожи олараг исбат олунур.

Теорем 14. Әкәр верилмиш

$$\{T_n\}$$

ендоморфизмләр ардычыллығы мүнтәзәм јығылырса, онда (1)
бу ардычыллыг һәмчинин күчлү јығылыр.

Исбаты, (1) мүнтәзәм јығылдығындан $\varepsilon > 0$ олдугда
$n,m \geqslant N(\varepsilon)$ нөмрәләри үчүн

$$\| T_n - T_m \| < \varepsilon$$

лакин (2)

$$\| T_n x - T_m x \| \leqslant \| T_n - 7_m \| \, \| x \|$$

(2) вә (3)-дән (3)

$$\| T_n x - T_m x \| < \varepsilon \| x \|$$

өдәнилир. (1)-ин күчлү јығылдығы алыныр. (4)

§ 8. ХӘТТИ ОПЕРАТОРУН СПЕКТРИ ВӘ ОНУН КОМПОНЕНТЛӘРИ

Тә'риф 11. *Фәрз едәк ки,* X *хәтти вектор фәза-*
сыдыр вә бу фәзада тә'јин областы $D_т \subset X$ *олан хәтти* T
оператору верилмишдир. Белә ки, T $D_т$*-дән* X*-ә тә'сир едир.*
Бурада T *һәм мәһдуд вә һәм дә гејри-мәһдуд ола биләр.*

$$T_\lambda = \lambda E - T \qquad (1)$$

$\rho(T)$ илә (λ) мүстәвисинин елә нөгтәләр чохлуғуну ишарә едәк ки, T_λ-нын мәһдуд тәрси олмагла T_λ^{-1}-ин тәјин областы X-дә сыхдыр. Онда $\rho(T)$, T операторунун резолвент чохлуғу вә $T_\lambda^{-1} = R(\lambda, T)$ исә һәмин операторун резолвенти адланыр. $C\sigma(T)$ илә елә λ-лар чохлуғуну ишарә едәк ки, T_λ-нын тәрси вар, гејри-мәһдуддур вә T_λ^{-1}-ин тәјин областы X-дә сыхдыр. Онда $C\sigma(T)$, T-нин кәсилмәз спекторы адланыр.

$R\sigma(T)$ илә елә λ-лар чохлуғуну ишарә едәк ки, T_λ-нын ја мәһдуд вә јахуд да гејри-мәһдуд тәрси олмагла T_λ^{-1}-ин тә'јин областы X-дә сых дејилдир. Онда $R\sigma(T)$, T-нин дискрет спектору адланыр.

Нәһајәт, $P\sigma(T)$ илә елә λ-лар чохлуғуну ишарә едәк ки, T_λ-нын тәрси јохдур. Бу һалда $P\sigma(T)$, T-нин нөгтәви спектору адланыр. Бу тә'рифләрдән ашкардыр ки, $\rho(T)$, $C\sigma(T)$, $R\sigma(T)$ вә $P\sigma(T)$ гаршылыглы кәсишмәјәрәк бүтүн (λ) мүстәвисини долдурурлар. $C\sigma(T)$, $R\sigma(T)$ вә $P\sigma(T)$ чохлуглары T-нин спекторы адланыр. $\sigma(T) = \{C\sigma(T), R\sigma(T), P\sigma(T)\}$ илә ишарә олунур вә гејд етдијимиз бу үч чохлуглардан һәр бири $\sigma(T)$-нин компоненти адланыр.

Әкәр T васитәсилә олан ин'икас гаршылыглы биргијмәтли дејилсә, јә'ни елә $x_0 \neq 0$ елементи вар ки, $Tx_0 = 0$ олур. Онда дејәчәјик ки, T оператору P_1 хассәлидир. T-нин гијмәтләр чохлуғу X-дә сых дејилсә, дејәчәјик ки, T, P_2 хассәли вә нәһајәт D_T-јә дахил олан вә $\| x_n \| = 1$ олан елә ардычыллыг варса ки, $\| Tx_n \| \to \theta$ олур. Онда дејәчәјик ки, T, P_3 хассәлидир. Бу тәснифатдан сонра розелвент спектор вә онун компонентләри ашағыдакы кими тә'риф олунур. Әкәр T_λ, P_1, P_2 вә P_3 хассәләринин һеч бирини өдәмирсә, $\lambda \in \rho(T)$ олур. Фәрз едәк ки, T_λ, P_1 вә P_2 хассәләрини өдәмир. Лакин P_3 хассәлидир. Онда $\lambda \in C\sigma(T)$ олар. Доғрудан да әкәр T_λ P_1 вә P_2 хассәли дејилсә, T_λ^{-1} вар вә тә'јин областы X-дә сыхдыр. P_3 хассәсинин өдәнилмәси ону көстәрир ки, T_λ^{-1} гејри-мәһдуддур. Әксинә T_λ-нын тәрси мәһдуд олса иди елә сабит $m > 0$ әдәди тапыларды ки, $x \in D_T$ олан истәнилән x үчүн $\| T_\lambda x \| \geqslant m \| x \|$ оларды. Еләчә дә $\| x_n \| = 1$ олан ардычыллыг үчүн өдәниләрди, јә'ни $\| T_\lambda x_n \| \geqslant m \| x_n \|$ олмагла $\| T_\lambda x_n \| \geqslant m > 0$ оларды, бу исә $T_\lambda x_n \neq \theta$ олмасы T_λ-ны P_3 хассәли олмасына зидд олур. Она көрә дә T, P_1 вә P_2 хассәли олмамагла P_3 хассәли исә, онда T_λ^{-1} мәһдуд ола билмәз. Беләликлә, $\lambda \in C\sigma(T)$ олур. T_λ P_1 хассәли олмамагла P_2 хассәли исә, онда $\lambda \in R\sigma(T)$ олур. Доғрудан да, T_λ, P_1 хассәли дејилсә, онда ин'икас гаршылыглы биргијмәтлидир, јә'ни T_λ^{-1} вә T_λ P_2 хассәли олдуғуна көрә $\lambda \in R\sigma(T)$. T_λ, P_1 хассәли исә, $\lambda \in P\sigma(T)$. Әкәр T_λ P_1 хассәли исә ин'икас гаршылыглы биргијмәтли олмајыб T_λ-нын тәрсинин олмадығыны көстәрир, jә'ни $\lambda \in P\sigma(T)$. Демәли, әкәр T_λ бу үч хассәләрдән бирини өдәjирсә, онда $\lambda \in \sigma(T)$ олур.

Тә'риф 12. *Әкәр $\lambda_0 \in P\sigma(T)$ оларса, $\lambda = \lambda_0$, T-нин мәхсуси гиjмәти адланыр.*

$$Tx_0 - \lambda_0 x_0 = 0 \tag{2}$$

тәнлиjинин $x_0 \neq 0$ һәлли исә T-нин мәхсуси вектору адланыр.

Гејд едәк ки, $\lambda_0 \in P\sigma(T)$ исә онда (2)-нин сыфырдан фәргли һәлли вар. Әкс һалда, jә'ни һәмишә $(\lambda_0 T - T)\, x = 0$ тәнлиjиндән $x = \theta$ олса иди, онда $(\lambda_0 E - T)$-нин тәрси олмагла $\lambda_0 \in P\sigma(T)$ шәртинә зидд оларды. (2)-дән көрүндүjү кими еjни λ_0-а уjғун мәхсуси векторлар хәтти чохлуг тәшкил едир. T-нин бүтүн мәхсуси векторларыны өзүндә сахлаjан ән кичик хәтти өртүк T-нин мәхсуси хәтти өртүjү адланыр вә өртүjүн өлчүсү λ_0-ын тәкрарлыг дәрәчәси адланыр.

Теорема 15. Фәрз едәк ки, T_1, T-нин давамыдыр. Jә'ни D_{T_1}, T_1-ин тә'jин областы исә, онда $D_T \subset D_{T_1}$ вә $x \in D_T$ олдугда $T_1 x = Tx$ олур.

$$T_1\lambda = \lambda E - T_1$$

***Оларса,* $(T_1)^{-1}$ варса онда T_λ^{-1}-дә вар вә $(T_{1\lambda})^{-1}$ T_λ^{-1}-ин давамыдыр.**

Исбаты. Ашкардыр ки, T_1 T_1-нин давамы исә, онда $T_{1\lambda}$ да T_λ-нын давамы олар.

Исбаты. Бу мүлаһизә операторун давамынын тә'рифиндән аjдын көрүнүр. Шүбһәсиз T_λ^{-1}-ин варлығындан үмумиjјәтлә $T_{1\lambda}$-нын тәрсинин варлығы чыхмыр. Она көрә дә, әкәр $\lambda_0 \in P\sigma(T)$ исә онда, һәмчинин, $\lambda_0 \in P\sigma(T_1)$ олар (әкс һалда T_λ-нин тәрси оларды). Демәли,

$$P\sigma(T) \subseteq P\sigma(T_1) \tag{3}$$

олур. Әкәр $\lambda \in R\sigma(T)$ исә онда $T_{1\lambda}^{-1}$ олмагла тә'jин областы X-дә сых деjилдир. Jухарыда гејд етдиjимиз кими $T_{1\lambda}^{-1}$-ин варлығындан T_λ^{-1}-ин дә варлығы чыхыр. Дикәр тәрәфдән $T_{1\lambda}^{-1}$-T_λ^{-1}-нын давамы олдуғундан T_λ^{-1}-ин варлыг областы X-дә сых ола билмәз, jә'ни $\lambda \in R\sigma(T)$ беләликлә

$$R\sigma(T_1) \subseteq R\sigma(T) \tag{4}$$

Бурадан да көрүндүjү кими $R\sigma(T)$-дә елә нөгтәләр ола биләр ки, T_1-ин спектир компонентләриндән биринә дахил олсун. Инди

$$C\sigma(T) \subseteq C\sigma(T_1) \cup P\sigma(T_1) \tag{5}$$

өдәнилдиjини көстәрәк, она көрә дә фәрз едәк ки, $\lambda \in C\sigma(T)$.

Онда T_λ-нын гејри-мәһдуд тәрси олмагла тә'јин областы X-дә сыхдыр.

Бурада ики һал ола биләр, ја $T_{1\lambda}^{-1}$ вар вә јахуд да јохдур. $T_{1\lambda}^{-1}$ олдугда бу операторун варлыг областынын мүәјјән һиссәси T_λ^{-1}-нын тә'јин областыдыр. Бу област X-дә сых олдуғундан һәмчинин $T_{1\lambda}^{-1}$-нын варлыг областы X-дә сых олмагла гејри-мәһдуддур. Онда јә'ни $\lambda \in C\sigma(T_1)$. Нәһајәт, $T_{1\lambda}$-нын тәрси олмадыгда $\lambda \in P\sigma(T_1)$. Она көрә дә (5) өдәнилир. Нәһајәт, $\rho(T_1) \subseteq \rho(T) \bigcup P\sigma(T_1)$ олмасыны көстәрәк $\lambda \in \rho(T_1)$ олсун. Инди $T_{1\lambda}^{-1}$ олмагла варлыг областы X-дә сыхдыр. Онда көстәрдијимизә көрә һәмчинин T_λ-нын тәрси олар. Бурада ики һал ола биләр, ја T_λ^{-1}-нын варлыг областы X-дә сыхдыр, јә'ни $\lambda \in \rho(T)$-дир вә јахуд да T_λ^{-1}-нын варлыг областы X-дә сых дејилдир. Она көрә дә $\lambda \in R\sigma(T)$-дир. Беләликлә, $\rho(T_1) \leqslant \rho(T) \bigcup \rho\,\sigma(T_1)$ өдәнилир.

IV ФӘСИЛ

ҺИЛБЕРТ ФӘЗАСЫНДА ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАР ҺАГГЫНДА

§ 1. РИСС ТЕОРЕМИ

H, һилберт фәзғсында скалјар һасилин тә'рифиндән көрүндүјү кими, (x, y) һасилиндә y гејд олунараг $x \in H$ истәнилән елемент олдугда мүәјјән хәтти мәһдуд $x^*(x) = (x, y)$ функсионалыны алырыг. Һилберт фәзасында Риссин ады илә мәшһур олан белә бир теорем исбат олунмушдур.

Теорем 1. H-да верилмиш ихтијари мәһдуд хәтти $x^*(x)$ функсионалы

$$x^*(x) = (x, y) \tag{1}$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, y, x^* функсионалына көрә биргијмәтли тә'јин олунур.

Исбаты. H_0 илә H-дан елә елементләр чохлуғуну ишарә едәк ки,

$$x^*(x) = 0 \tag{2}$$

$x^*(x)$ кәсилмәз олдуғундан H_0 гапалы алт фәза олар. Бурада ики һал ола биләр, ја $H_0 = H$ вә ја $H_0 \neq H$. Биринчи һалда јә'ни истәнилән $x \in H$ үчүн $x^*(x) = 0$ оларса, $y = 0$ көтүрмәклә $x^*(x) = (x, 0)$ кими көстәрмәк олар.

Инди фәрз едәк ки, $H_0 \neq H$ онда елә $x' \in H$ $x' \neq 0$ вар ки,

$x^*(x')\neq 0$ $x^*(x')=\alpha$ ишарә едәрәк $x^*\left(\frac{x'}{\alpha}\right)=1$ кими вә јахуд да $\frac{x'}{\alpha}=x_1$ олдугда

$$x^*(x_1)=1 \tag{3}$$

кими јазаг: $x\in H$ олан x көтүрәрәк

$$\tilde{x}=x-x^*(x)\,x_1 \tag{4}$$

олсун. $\tilde{x}$-ин H_0-а дахил олдуғуну көстәрәк:

$$x^*(\tilde{x})=x^*(x)-x^*(x)\,x^*(x_1)=0$$

$x^*(\tilde{x})=0$ она көрә дә $\tilde{x}\in H_0$ олур. $(x,\ x_1)$ скалјар һасили һесаблајаг:

$$(x,\ x_1)=(\tilde{x}+x^*(x)\cdot x_1,\ x_1)=(\tilde{x},\ x_1)+x^*(x)\cdot(x_1,\ x_1)$$

(4)-дән $x=\tilde{x}+x^*(x)\cdot x_1$ олдуғундан $\tilde{x}\in H_0$ вә $x^*(x)\cdot x_1\in H$ олмасыны нәзәрә алсаг $(\tilde{x},\ x_1)=0$, она көрә

$$(x,\ x_1)=x^*(x)\,(x_1,\ x_1) \tag{5}$$

бурадан исә

$$x^*(x)=\left(x,\ \frac{x_1}{(x_1,x_1)}\right) \tag{6}$$

бәрабәрлији алыныр. $\frac{x_1}{(x_1,x_1)}=y$ ишарә етсәк,

$$x^*(x)=(x,\ y) \tag{7}$$

олмагла теоремин бир һиссәси исбат олунур. Инди көстәрәк ки, y елементи x^* васитәсилә биргијмәтли тә'јин олунур. Онун үчүн әксини фәрз едәк, x^* гаршы $y_1\neq y_2$ олан y_1 вә y_2 елементләри ујғундур. Онда

$$x^*(x)=(x,\ y_1), \tag{8}$$

$$x^*(x)=(x,\ y_2). \tag{9}$$

Она көрә $(x,\ y_1)=(x,\ y_2)$ вә јахуд

$$(x,\ y_1-y_2)=0 \tag{10}$$

(10) истәнилән x үчүн өдәнилдијиндән $x=y_1-y_2$ көтүрмәклә $(y_1-y_2,\ y_1-y_2)=0$ вә јахуд $y_1=y_2$ олдуғу алыныр, јә'ни y-ин x^*-а көрә биргијмәтли тә'јин олундуғу исбат олунур. Рисс теореминдән ашағыдакы нәтичә алыныр.

Нәтичә.

$$\|x^*\|=\|y\| \tag{11}$$

өдәнилдијини көстәрәк: $(x,\ y)=x^*(x)$ бәрабәрлијинә вә Шварс бәрабәрсизлијинә көрә

$$|x^*(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\ \|y\|$$

бурадан,

$$\|x^*\|\leqslant\|y\| \tag{12}$$

$x = y$ олдугда, $(y, y) = x^*(y)$ вә она көрә

$$\|y\|^2 = |x^*(y)| \leqslant \|x^*\| \, \|y\| \tag{13}$$

өдәнилир. (12) вә (13)-ә көрә (11) доғрулуғу алыныр. Рисс теореминдән көрүндүјү кими H фәзасындан олан һәр бир y-ә гаршы H^* фәзасындан мүәјјән бир x елементи вә әксинә H^*-дан олан һәр x^*-а гаршы H-дан мүәјјән бир y елементи ујғундур. Беләликлә, ашағыдакы теорем тә'риф олунур.

Теорем 2. ***H* вә *H^** изоморфдурлар.** Она көрә бу нөгтеји-нәзәрдән бу ики фәза абстракт чохлуглар кими бир-биринә бәрабәр олмагла алырыг ки, H өз-өзүнә гошмадыр. Лакин бу ики фәза, јә'ни H вә H^* хәтти изоморф дејилдир.

Исбаты. Доғрудан да әкәр $\overset{*}{x}_1 \to y_1$ $\overset{*}{x}_2 \to y_2$ исә, онда $\overset{*}{x}_1(x) = (x, y_1)$ вә $\overset{*}{x}_2(x) = (x, y_2)$ бәрабәрликләрдән,

$$\alpha \overset{*}{x}_1(x) + \beta \overset{*}{x}_2(x) = (x, \bar{\alpha} y_1 + \bar{\beta} y_2)$$

алырыг ки, $\alpha \overset{*}{x}_1 + \beta \overset{*}{x}_2 \to \bar{\alpha} y_1 + \bar{\beta} y_2$ хәтти изоморфизм өдәнилмир. H^*-да мүәјјән гајда үзрә скалјар һасил вермәклә бу фәзаны Һилберт фәзасына чевирмәк олар, вә көстәрмәк олар ки, $H^{**} = H$, јә'ни H рәфлексив фәза олур, H^*-дан H-а гаршылыглы биргијмәтли ин'икас етдирән чевирмәни τ илә ишарә едәк $\tau(z^*) = y_1$, $z^*(x) = (x, y_1)$ вә һәмчинин $\tau(x^*) = y_2$ оларса $x^*(x) = (x, y_2)$. Она көрә $(z^* + x^*)(x) = (x, y_1 + y_2)$ бәрабәрлијиндән τ-нын аддитив олдуғу алыныр. Јә'ни

$$\tau(x^* + z^*) = y_1 + y_2 = \tau(x^*) + \tau(z^*) \tag{14}$$

инди (15)-ин өдәнилдијини көстәрәк:

$$\tau(\alpha z^*) = \bar{\alpha} \tau(z^*) \tag{15}$$

$$\tau(z^*) = \frac{y}{\bar{\alpha}} \tag{16}$$

бәрабәрлијини көтүрәк. Она көрә $z^*(x) = \left(x, \frac{y}{\bar{a}}\right) = \frac{1}{\alpha}(x, y)$, бурадан

$$(\alpha z^*)(x) = (x, y) \tag{17}$$

(16) вә (17)-дән (15)-ин өдәнилдији алыныр.

z^*, $x^* \in H^*$ фәрз едәрәк, H^*-да ашағыдакы кими скалјар һасил дүзәлдәк:

$$(z^*, x^*)_1 = (\tau(x^*), \tau(z^*)). \tag{18}$$

Бу гајда үзрә тә'јин олунмуш скалјар һасил H^* фәзасыны Һилберт фәзасына чевирир.

(18)-дән көрүндүјү кими $(x^*, x^*)_1 \geqslant 0$ олур. Сонра әкәр $(x^*, x^*)_1 = 0$ оларса, $\tau(x^*) = 0$ вә она көрә дә $x^* = 0$ олур.

Әксинә, $x^* = 0$ оларса, онда $\tau(x^*) = 0$ вә $(x^*, x^*)_1 = 0$ олур. $(z^*, x^*)_1 = \overline{(x^*, z^*)}$ вә $(z^*, x_1^* + x_2^*)_1 = (z^*, x_1^*)_1 + (z, x_2^*)_1$ бәрабәрликләринин өдәнилмәси (18)-дән ашкардыр:

$$(\alpha z^*, x^*)_1 = (\tau(x^*), \tau(\alpha z^*)) = (\tau(x^*), \bar{\alpha}\tau(z^*)) =$$
$$= \alpha(\tau(x^*), \tau(z^*)) = \alpha(z^*, x^*)_1. \tag{19}$$

Беләликлә, H^* Һилберт фәзасы олур. Рисс теореминә көрә H^{**}-да олан истәнилән $x^{**}(x^*)$ функсионалы

$$x^{**}(x^*) = (x^*, y^*) \tag{20}$$

кими көстәрилир. Бурада y^* **гејд** олунмуш функсионалдыр. Дикәр тәрәфдән исә,

$$(x^*, y^*)_1 = (\tau(y^*), \tau(x^*)) = (y_0, y). \tag{21}$$

Она көрә дә (20) вә (21)-дән $x^{**}(x^*) = y^*(y)$ бәрабәрлијини алырыг. Бурадан H^{**}-дан көтүрүлмүш һәр бир x^* функсионалына H-дан мүәјјән бир елемент ујғундур вә әксинә. Бундан әлавә белә изоморфизм хәттидир, она көрә $H^{**} = H$ олмагла H рефлексив фәзадыр.

§ 2. ҺИЛБЕРТ ФӘЗАСЫНДА ГОШМА ВӘ ӨЗ-ӨЗҮНӘ ГОШМА ОПЕРАТОРЛАР

Фәрз едәк ки, T H Һилберт фәзасында тә'јин олунмуш мәһдуд хәтти оператордур. y-и H-дан гејд едәрәк (Tx, y) скалјар һасилини $x^*(x)$ ишарә едәк. Шварс бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг, асанлыгла көстәрмәк олар ки, $x^*(x) = (Tx, y)$ функсионалы H-да тә'јин олунмуш мәһдуд хәтти функсионалдыр.

Рисс теореминә көрә белә функсионал

$$x^*(x) = (x, u) \tag{1}$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, u y-ә көрә биргијмәтли тә'јин олунур. Беләликлә, H-дан көтүрүлмүш һәр бир y-ә гаршы һәмин фәзадан мүәјјән бир u—елементи гаршы гојулур. Демәли, нәтиҹәдә мүәјјән $u = T^*y$ чевирмәсини алырыг. Һәм T-нин вә һәм дә ујғун функсионалын хәттилији нәзәрә алынарса, онда T^* оператору да хәтти олар. T^* оператору T-јә ујғун гошма оператор адланыр вә T мәһдуд олдугда T^*-да мәһдуд олур. T^*-нын тә'рифиндән көрүндүјү кими T вә T^* операторлары

$$(Tx, y) = (x, T^*y) \tag{2}$$

мүнасибәтилә тә'јин олунур. Әкәр $T = T^*$ оларса, онда T өз-өзүнә гошма оператор адланыр. Мүәјјән әлавә шәртләрлә һәмчинин гејри-мәһдуд T_1 оператору үчүн гошма вә өз-өзүнә анлајышлары вермәк олар. Фәрз едәк ки, T_1 тә'јин областы -да сых олан $D(T_1)$ областында тә'јин олунмуш гејри-мәһ-H дуд хәтти оператордур. H-дан елә y-ләр чохлуғуну көтүрәк ки, ујғун (T_1x, y) функсионалы мәһдуд олсун. Онда јухарыдакы мүлаһизәләримизә көрә

$$(T_1x, y) = \left(x, T_1^* y\right) \tag{3}$$

васитәсилә T_1-ја ујғун T_1^* гошма оператору тә'јин олунур. T_1-ин тә'јин областы H-да сых олдуғундан T_1^*, T_1-ә көрә биргијмәтли тә'јин олунур. T_1^*-нын тә'јин областыны $D\left(T_1^*\right)$ илә ишарә едәк. Әкәр $T_1 = T_1^*$ оларса, T_1 өз-өзүнә гошма оператор адланыр. Демәли, операторун өз-өзүнә гошма олмасы үчүн, әввәлчә $D(T_1) = D\left(T_1^*\right)$ олдуғуну јохламаг лазымдыр. Сонра исә $x, y \in D(T_1)$ верилән x вә y үчүн (3) өдәнилмәлидир. Гејри-мәһдуд оператор үчүн гошма оператор анлајышындан әлавә симметрик оператор анлајышы да вардыр. Әкәр $x, y \in D(T)$ олан истәнилән x вә y елементләри үчүн

$$(T_1^* x, y) = (x, T_1 y) \tag{4}$$

Өдәниләрсә белә T_1 оператору симметрик оператор адланыр. Верилмиш тә'рифләрдән ашкардыр ки, һәр бир өз-өзүнә гошма оператор һәмчинин симметрикдир. Лакин үмумијјәтлә әкси дүз дејилдир. Јә'ни һәр бир симметрик оператор өз-өзүнә гошма олмаја да биләр. Әкәр T_1^*, T_1 симметрик операторунун гошма оператору исә белә операторун тә'јин областы $D\left(T_1^*\right)$ үмумијјәтлә $D(T_1)$-дән кенишдир. Ајдындыр ки әкәр $y \in D(T_1)$ олмагла һәмчинин $y \in D(T_1)$ исә онда $T_1^* = T_1$. Беләликлә, симметрик T_1-ин гошма оператору бу операторун давамыдыр, јә'ни $T_1 \subset T_1^*$ олур. Гејд едәк ки, кәләчәкдә мәһдуд операторлар үчүн өз-өзүнә гошма вә симметрик оператор анлајышлары ејни мә'нада баша дүшүлүр.

§ 3. ҺИЛБЕРТ ФӘЗАЛАРЫНДА ВЕРИЛМИШ ИКИ МҮХТӘЛИФ ГОШМА ОПЕРАТОРЛАР АРАСЫНДА МҮНАСИБӘТ

Биз Һилберт фәзасында верилмиш T операторуна ујғун гошма операторунун хүсуси шәкилдә тә'рифини вердик. Бундан әлавә бизә мә'лумдур ки, үмумијјәтлә гошма оператор ашағыдакы кими тә'риф олунур: Әкәр T, H-да тә'сир едән оператор исә, онда гошма операторун тә'јин областы H^*-а дахил олан елә y^* функсионаллар чохлуғудур ки, $x^* = T^* y^*$ мүнасибәти $y^*[T(x)] = x^*(x)$ бәрабәрлији васитәсилә тә'риф олунур. Белә ки, $x^* \in H^*$. Беләликлә, H-а тә'сир едән вә һәр ики тә'рифә көрә T операторуна мүхтәлиф гошма оператор гаршы гојулур. Инди Рисс теореминдән истифадә едәрәк көстәрәк ки, һәр ики гошма операторлар арасында мүәјјән мүнасибәт вардыр. Она көрә дә фәрз едәк ки, T оператору H Һилберт фәзасындан H_1 Һилберт фәзасына тә'сир едән хәтт оператордур. Фәрз едәк ки, T^* оператору T-нын $y^*[T(x)] =$

$= x^*(x)$ мүнасибәтилә тә'јин олунмуш гошма оператору вә τ^* һәмин операторун $(Tx, y)_1 = (x, \tau^* y)$ мүнасибәти илә тә'јин олунан гошма оператордур. Белә ки, $y^* \in H_1$ олмагла $(Tx, y)_1$ вә $(x, \tau^* y)$ ујғун олараг H_1-дә вә H-да верилмиш скалјар һасилләрдир. Рисс теореминә көрә елә L вә L_1 чевирмәләри вар ки, ујғун олараг H^* вә H_1^* фәзаларына ујғун олараг H вә H_1 фәзаларына ин'икас етдирир. Белә ки,

$$L(x_1^* + x_2) = L(x_1^*) + L(x_2^*), \quad L(\alpha x^*) = \bar{\alpha} L(x^*)$$

вә $\| L(x^*) \| = \| x^* \|$ олур. Һәмчинин L_1 ејни хассәли чевирмәдир. y^*, H_1-дән верилмиш функсионал олдуғундан Рисс теореминә көрә y^* васитәсилә биргијмәтли тә'јин олунан елә $L_1 y^*$ вар ки, $y^*(y) = (y, L_1 y^*)$. Еләчә дә $x^* \in H^*$ олдуғундан, һәмчинин Рисс теореминә көрә x^* васитәсилә тә'јин олунан елә Lx^* вар ки,

$$x^*(x) = (x, Lx^*).$$

Дикәр тәрәфдән $y^*[T(x)] = x^*(x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $(T(x), L_1 y^*) = (x, Lx^*)$ вә $x^* = T^* y^*$ бу ики бәрабәрликдән $(Tx, L_1 y^*) = (x, LT^* y^*)$ олур. L_1 васитәсилә олан ин'икас гаршылыглы биргијмәтли ин'икас олдуғундан L_1-ин тәрси вар, $y^* = L_1^{-1} L_1 y^*$. Она көрә дә

$$(Tx, L_1 y^*) = \left(x, LT^* L_1^{-1} L_1 y^*\right)$$

$L_1 y^* = t$ оларса, сонунчу бәрабәрлији нәзәрә алсаг,

$$(Tx, t) = \left(x, LT^* L_1^{-1} t.\right).$$

Бу бәрабәрликдән көрүндүјү кими $\tau^* = LT^* L_1^{-1}$.

Беләликлә, көстәрдик ки, T^* вә τ^* арасында мүнасибәт вардыр. τ^* H_1-дән H-а тә'сир едән оператордур. Әкәр $H_1 = H$ оларса, онда $\tau^* = LT^* L^{-1}$ H-дан H-а тә'сир едир.

Биз кәләчәкдә дә H-да тә'сир едән гошма оператор дедикдә τ^*-ны гәбул едәчәјик.

Гошма операторларын бир нечә хассәсини көстәрмәк олар: T_1, T_2, H-да тә'сир едән хәтти операторлар исә, онда $(T_1 T_2 x, y) = (x, (T_1 T_2)^* y)$ олур. $(T_1 T_2 x, y) = (T_2 x, T_1^* y) = \left(x, T_2^* T_1^* y\right)$ олдуғундан

1. $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ $(\alpha Tx, y) = (x, (\alpha T)^* y)$, $(\alpha Tx, y) = \left(Tx, \bar{\alpha} y\right) = \left(x, \bar{\alpha} T^* y\right)$ олдуғуна көрә,
2. $(\alpha T)^* = \alpha \bar{T}^*$. Еләчә дә $(Tx, y) = (x, T^* y) = (T^{**} x, y)$ ε,
3. $T^{**} = T$,
4. $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$,
5. $E^* = E$

олмалары ашкардыр.

§ 4. ИЗОМЕТРИК ОПЕРАТОРЛАР

Фәрз едәк ки, T тә'јин областы $D(T)$ вә H Һилберт фәзасындан гијмәтләр чохлуғу $R(T)$ олан H_1 Һилберт фәзасына тә'сир едән хәтти оператордур. H вә H_1-дә скалјар һасилләр үчүн олараг $(\ ,\ )$ вә$(\ ,\ )_1$ илә ишарә олунур.

Тә'риф 1. *Фәрз едәк ки, $D(T)$ T-нин тә'јин областыдыр. Әкәр u_1 вә $u_2\in D(T)$ истәнилән u_1 вә u_2 үчүн*

$$(Tu_1,\ Tu_2)_1=(u_1,\ u_2) \qquad (1)$$

оларса, онда T изометрик оператор адланыр.

$R(T)=H_1$ бәрабәр оларса, онда T изометрик оператору унитар оператор адланыр.

Теорем 3. Әкәр хәтти изометрик T операторунун тә'јин областы H-да сых вә һәмчинин гијмәтләр чохлуғу H_1-дә сых оларса, онда T-ни T' унитар операторуна гәдәр кенишләндирмәк, јә'ни давам етдирмәк олар.

Исбаты. Ашағыдакы оператору тә'јин едәк:

$$T'u=\begin{cases} Tu & u\in D(T) \text{ оларса} \\ \lim\limits_{n\to\infty} Tu_n, & \lim\limits_{n\to\infty} u_n=u,\ u\,\overline{\in}\,D(T) \end{cases}$$

шәртә көрә $D(T)$ H-да сых олдуғундан $u\,\overline{\in}\,D(T)$ H-а дахил олан истәнилән елемент исә, онда $\{u_n\}\in D(T)$ елә ардычыллыг сечмәк олар ки, $u_n\to u$ олмагла $\lim\limits_{n\to\infty} Tu_n$ олсун. Асанлыгла исбат етмәк олар ки, изометрик оператор хәтти вә мәһдуддур. T'-ин тә'јин олунмасындан көрүнүр ки, T', T васитәсилә бир гијмәтли тә'јин олунур вә T'-ин тә'јин областы H-а бәрабәрдир. T'-ин унитар олмасы үчүн $u_1,\ u_2\,\overline{\in}\,D$ вә H-а дахил олан истәнилән u_1 вә u_2 үчүн

$$(T'u_1,\ T'u_2)_1=(u_1,\ u_2) \qquad (2)$$

олмасыны јохламаг кифајәтдир.

Скалјар һасилин вә T' кәсилмәз олдуғундан

$$(T'u_1,\ T'u_2)_1=\left(\lim_{n\to\infty} T'u_{1n},\ \lim_{n\to\infty} T\,u_{2n}\right)_1 \qquad (3)$$

белә ки, $u_{1n}\to u_1$ вә $u_{2n}\to u_2$, еләчә дә $u_{1n},\ u_{2n}\in D(T)$ онда (3)-дән

$$(T'u_1,\ T'u_2)_1=\lim_{n\to\infty}(T'u_{1n},\ T'u_{2n})_1=\lim_{n\to\infty}(Tu_{1n},\ Tu_{2n})_1=$$

$$=\lim_{n\to\infty}(u_{1n},\ u_{2n})=\left(\lim_{n\to\infty}u_{1n},\ \lim_{n\to\infty}u_{2n}\right)=(u_1,\ u_2)$$

беләликлә, (2) өдәнилир. Инди белә бир теорем исбат едәк.

Теорем 4. Фәрз едәк ки, T тә'јин областы $D(T) \in H$ олан $D(T)$-дән H-а тә'сир едән хәтти оператордур. T-нин изометрик олмасы үчүн $u \in D(T)$ истәнилән u үчүн

$$\| Tu \| = \| u \| \tag{4}$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси һәм зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрури олмасы тә'рифдән ашкардыр.

Шәртинин кафилији.

$$\| f_1 + f_2 \|^2 - \| f_1 - f_2 \|^2 + i \| f_1 + if_2 \|^2 - i \| f_1 - if_2 \|^2 = \\ = 4 (f_1, f_2) \tag{5}$$

ејнилијини көтүрәк. (5) дә $f_1 = Tu_1$ вә $f_2 = Tu_2$ нәзәрә алыб (4)-дән истифадә етсәк

$$(Tu_1, Tu_2) = (u_1, u_2). \tag{6}$$

Доғрудан да, (5)-дән

$$4 (Tu_1, Tu_2) = \| T (n_1 + u_2) \|^2 - \| T (u_1 - u_2) \|^2 + \\ + \| T (u_1 + iu_2) \|^2 - i \| T (u_1 - iu_2) \|^2$$

олдуғундан (4) көрә $4 (Tu_1, Tu_2) = \| u_1 + u_2 \|^2 - \| u_1 - u_2 \|^2 - $
$- i \| u_1 + iu_2 \|^2 - i \| u_1 - iu_2 \|^2 = 4 (u_1, u_2)$.

Беләликлә, T-нин изометрик олмасы алыныр. Бунунла теорем исбат олунур.

§ 5. КЕЛИ ЧЕВИРМӘСИ

Теорем 5. Әкәр T тә'јин областы H-дан олан $D(T)$ дән һәмин фәзаја тә'сир едән хәтти симметрик оператор исә онда

$$\| Tu \pm iu \|^2 = \| Tu \|^2 \pm \| u \|^2 \tag{1}$$

бәрабәрлији доғрудур.

Исбаты. Бунун үчүн: $\| Tu \pm iu \|^2$ ифадәсини чевирәк-

$$\| Tu \pm iu \|^2 = (Tu \pm iu, Tu \pm iu) = \| Tu \|^2 \pm \\ \pm (Tu, iu) \pm (iu, Tu) + \| u \|^2,$$

$$(Tu, iu) + (iu, Tu) = 0$$

олдуғундан (1) өдәнилир. (1)-дән алырыг ки, $T_1 u = Tu + u$ вә $T_2 u = Tu - u$ операторларынын тәрси вар. Доғрудан да $T_1 u = 0$ вә јахуд да $T_2 u = 0$ исә, онда (1)-дән $u = 0$ олмагла T_1 вә T_2-нин тәрси олдуғу алыныр.

$$A_{\text{т}} = (T - iE)(T + iE)^{-1} \tag{2}$$

чевирмәси Кели чевирмәси адланыр.

(2)-дән ашкардыр ки, $A_{\text{т}}$ чевирмәсинин варлыг областы $T+iE$-нин гијмәтләр чохлуғудур. Јә'ни, $D(A_{\text{т}})=R(T+iE)$ белә ки, $R(T+iE)$, $T+iE$-нин гијмәтләр чохлуғудур. Әкәр $v==(T+iE)u$ оларса, онда

$$A_{\text{т}}v=(T-iE)\,(T+iE)^{-1}\,(T+iE)\,u=(T-iE)\,u \qquad (3)$$

$$A_{\text{т}}v=(T-iE)\,u. \qquad (4)$$

$(Tu,\ iu)+(iu,\ Tu)=0$ олдуғундан

$$\| Tu-iu \| = \| Tu+iu \|$$

(3)-дән

$$\| A_{\text{т}}v \| = \| v \| . \qquad (5)$$

Бурадан белә бир нәтичәјә кәлирик ки, симметрик T операторунун Кели чевирмәси изометрик оператордур. Инди көстәрәк ки, $A'_{\text{т}}=E-A_{\text{т}}$-нин тәрси вар. Әкәр $v=Tu+iu$ оларса, көстәрдијимиз кими, онда $A_{\text{т}}v=Tu-iu$ олмагла, бурадан $A_{\text{т}}v=Tu+iu-2iu=v-2iu$ бәрабәрлијини алмагла,

$$\frac{1}{2}(v-A_{\text{т}}v)=iu, \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2}(v+A_{\text{т}}v)=Tu \qquad (7)$$

олдуғуну ејни гајда илә көстәрмәк олар.

Инди фәрз едәк ки, $A'_{\text{т}}v=0$. Онда (6)-дән $u=0$ беләликлә, $Tu=0$ алыныр. Она көрә (6) вә (7)-дән ујғун олараг $v-A_{\text{т}}v=0$ вә $v+A_{\text{т}}v=0$ бәрабәрликләрини алмагла бунлардан $v=0$ олур. $A'_{\text{т}}v=0$ олдугда $v=0$, бурадан исә $A'_{\text{т}}$-ин тәрсинин варлығы чыхыр.

T-ни ашағыдакы шәкилдә јазмаг олар

$$Tu=\frac{1}{2}\left(E+A'_{\text{т}}\right)v=\frac{1}{2}\left(E+A'_{\text{т}}\right)\left(E-A'_{\text{т}}\right)u \qquad (8)$$

бу бәрабәрликдән көрүндүјү кими T-ин тәјин областы, јә'ни $D(T)$, $E-A_{\text{т}}$-нин гијмәтләр чохлуғуна, јә'ни $R(E-A_{\text{т}})$-јә бәрабәрдир. Башга сөзлә $D(T)=R(E-A_{\text{т}})$, $D(T)$ H-да сых көтүрүлдүјүндән $A'_{\text{т}}$-нин гијмәтләр чохлуғу да H-да сыхдыр. (8)-дән алыныр ки, изометрик T оператору биргијмәтли олараг изометрик $A_{\text{т}}$ васитәсилә ифадә олунур.

Теорем 6. Фәрз едәк ки, хәтти изометрик T оператору үчүн $R(E-T)$, H-да сыхдыр. Онда T мүәјјән бир симметрик операторун Кели чевирмәсидир.

Исбаты. Әввәлчә көстәрәк ки, $E-T$-нин тәрси вар, башга сөзлә $(E-T)\,u=0$ бәрабәрлијиндән $u=0$ олдуғу алыныр. $h=(E-T)v$ истифадә едәрәк $(E-T)\,u=0$ бәрабәрлијини өдәјән u үчүн $(u, h) = 0$ олдуғуну көстәрәк. (u, h) скалјар hасили ашағыдакы кими јазылыр:

$$(u, h) = (u, v - Tv) = (u, v) - (u, Tv). \qquad (9)$$

Шәртә көрә T изометрик олдуғундан $(u, v) = (Tu, Tv)$ вә она көрә (15)-дән

$$(u, h) = (Tu, Tv) - (u, Tv) = (Tu - u, Tv),$$

$Tu - u = 0$ олдуғундан $(u, h) = 0$ олур. Шәртә көрә $R(E-T)$. H-да сых олдуғундан $(u, h) = 0$ бәрабәрлији $R(E-T)$-јә дахил олан истәнилән h үчүн доғру олдуғундан $(u, h) = 0$, бурадан $u = 0$ олмагла $E-T$-нин тәрси олдуғу алыныр. Буну нәзәрә алараг

$$T_1 = i(E+T)(E-T)^{-1} \qquad (10)$$

операторуну көтүрәк.

T_1-ин симметрик олдуғуну көстәрәк: $u_1, u_2 \in D(T_1) = R(E-T)$ олан u_1 вә u_2 елементләрини көтүрәк, белә ки, $u_1 = (E-T)u$ вә $u_2 = (E-T)v$. Онда (T_1u_1, u_2) скалјар hасили ашағыдакы кими јазылыр:

$$\begin{aligned}(T_1 u_1, u_2) &= (i(E+T)(E-T)^{-1}u_1, u_2) = \\ &= (i(E+T)u, (E-tT)v) = i[(u, v) + (Tu, v) + \\ &\quad + (u, Tv) - (Tu, Tv)].\end{aligned} \qquad (11)$$

T изометрик олдуғундан $(Tu, Tv) = (u, v)$ (17)-дән

$$(T_1u_1, u_2) = i[(Tu, v) - (u, Tv)]$$

олур. T изометрик вә $(u, iv) - (Tu, iTv) = 0$ олдуғундан исә бурадан:

$$(Tu_1, u_2) = (u, iv) + (u, iTv) - (Tu, iv) - (Tu, iTv) \qquad (12)$$

бәрабәрлијини алырыг. (12)-дән

$$(E-T)u = u_1$$

$$i(E+T)v = i(E+T)(E-T)^{-1}u_2 = T_1u_2$$

олдуғундан

$$(T_1u_1, u_2) = ((E-T)u, i(E+T)v)$$

бурадан

$$(T_1u_1, u_2) = (u_1, T_1u_2) \qquad (13)$$

(13) u_1 $u_2 \in D(T)$ истәнилән u_1 вә u_2 үчүн өдәнилдијиндән T_1-ин симметрик олдуғу исбат олунур. Нәhајәт, исбат едәк ки, T_1-ин Кели чевирмәси T-ә бәрабәрдир: $u^* = (E-T)u$ оларса, онда $T_1u^* = i(E+T)u$ бу бәрабәрликләрин көмәјилә ардычыл олараг

$$T_1u^* + iu^* = iu + iTu + iu - iTu = 2iu \qquad (14)$$

вə

$$T_1 u - iu^* = 2iTu \qquad (15)$$

бəрабəрликлəрини алырыг.

Демəли, Кели чевирмəсинин тə'јин областы

$$D(A_{T_1}) = R(T_1 + iE) = \{2iu,\ u \in D(T_1)\}$$

бəрабəрлији илə тə'јин олунур. Башга сөзлə, $D(T) = D(A_{T_1})$ олур. $A_{T_1} = (T_1 - iE)(T_1 + iE)^{-1}$ чевирмəсини (20) вə (15)-и нəзəрə алсаг:

$$A_{T_1}(2iu) = (T_1 - iE)(T_1 + iE)^{-1}(T_1 + iE)u^* =$$
$$= (T_1 u^* - iu^*) = 2iTu$$

аларыг. Бурадан $A_{T_1}u = Tu$ јахуд $A_{T_1} = T$. Белəликлə, теорем исбат олунур.

§ 6. ПРОЈЕКТОРЛАР (ПРОЈЕКСИЈАЛАЈЫЧЫ ОПЕРАТОРЛАР) ҺАГГЫНДА ТЕОРЕМЛƏР

Фəрз едəк ки, H Һилберт фəзасыдыр. Əкəр $M \subset H$ ихтијари алт фəза исə, онда $f \in H$ истəнилəн f, $f = f_1 + f_2$ шəклиндə көстəрилир. Белə ки, $f_1 \in M$, $f_2 \in M^{\perp}$-дир, она көрə дə, f_1 вə f_2 гаршылыглы ортогоналдыр: $(f_1, f_2) = 0$, f_1 f-ə көрə биргијмəтли тə'јин олундуғундан, онда елə P оператору вар ки, $Pf = f_1$ кими тə'јин олунур. P пројексијалајычы оператор вə јахуд пројектор адланыр. Демəли, P васитəсилə H фəзасы M чохлуғуна пројексијаланыр.

Теорем 7. ***P* пројектору хəтти мəһдуд оператордур.**

Исбаты. Əввəлчə P-нин аддитивлијини көстəрəк. Онун үчүн f вə g елементлəрини көтүрəк:

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1, g_1 \in M,$$
$$g = g_1 + g_2, \qquad f_2, g_2 \in M^{\perp}.$$

бурадан $Pf = f_1$, $Pg = g_1$ бəрабəрликлəрини алырыг. $f_2, g_2 \in M^{\perp}$ олдуғундан $f_2 + g_2 \in M^{\perp}$ ејни гајда илə $f_1 + g_1 \in M$, $f + g = f_1 + g_1 + f_2 + g_2$. Онда $P(f + g) = f_1 + g_1 = Pf + Pg$ јахуд $P(f + g) = Pf + Pg$ белəликлə, P-нин аддитив олмасы алыныр.

Көстəрəк ки, P ејничинслидир:

$$f = f_1 + f_2 \text{ олдугда } Pf = f_1\ t,$$

α истəнилəн əдəди үчүн

$$\alpha f = \alpha f_1 + \alpha f_2, \quad \alpha f_1 \in M, \ \alpha f_2 \in M^{\perp}$$

олдугларындан $P\alpha f = \alpha f_1 = \alpha P f$ вə елəчə дə

$$P\alpha f = \alpha P f$$

белəликлə, P ејничинслидир.

Исбат едәк ки, P оператору мәһдуддур:
$f = Pf + f - Pf$, $f = f_1 + f_2$, $f_1 = Pf$, $f_2 = f - Pf$ ишарә едәк $(f_1, f_2) = 0$ олдуғундан $\| f \|^2 = \| f_1 \|^2 + \| f_2 \|^2$ өдәнилир. f_1 вә f_2-нин ифадәләрини нәзәрә алсаг, бурадан

$$\| f \|^2 = \| Pf \|^2 + \| f - Pf \|^2$$

демәли, $\| Pf \| \leqslant \| f \|$ олмагла $\| P \| \leqslant 1$ олдуғу алыныр. Көстәрмәк олар ки, $\| P \| = 1$ олур. Доғруданда $\| Pf \| = \| P^2 f \| = \| PPf \| \leqslant \| P \| \; \| Pf \| \leqslant \| P \|^2 \| f \|$ олдуғундан $\| P \| \leqslant \| P \|$ она көрә дә $\| P \| \geqslant 1$ вә $\| P \| \leqslant 1$ илә мүгајисә етдикдә $\|P\| =$ олур. Бунунла теорем исбат олунур.

Теорем 8. ***P*** **пројектордурса, онда өз-өзүнә гошма оператордур.**

Исбаты. $f = f_1 + f_2$ $g = g_1 + g_2$ олдугда,

$$(Pf, g) = (f_1, g_1 + g_2) = (f_1, g_1) + (f_1, g_2) = (f_1, g_1)$$

еләчә дә $(f, Pg) = (f_1 + f_2, g_1) = (f_1, g_1) + (f_2, g_1) = (f_1, g_1)$ олмагла јухарыдакы бәрабәрликдән

$$(Pf, g) = f, Pg).$$

Бу бәрабәрлик истәнилән f вә g үчүн өдәнилдијиндән бурадан чыхыр ки, P симметрикдир:

Теорем 9. ***A*** **симметрик операторун пројектор олмасы үчүн** $A^2 = A$ **өдәнилмәси зәрури, һәм дә кафи шәртдир.**

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, A пројектордур. Исбат едәк ки, $A^2 = A$ мә'лумдур ки, $f = f_1 + f_2$. A пројектор олдуғуна көрә $Af = f_1$ олур. Бурадан исә $A^2 f = Af_1 = f_1 = Af$ олмагла $A^2 = A$ олдуғу алыныр.

Шәртин кафилији. Фәрз едәк ки, A симметрикдир вә $A^2 = A$ өдәнилир. Исбат едәк ки, A пројекторудур. Көстәрдијимиз кими $A^* = A$ $f \in H$ истәнилән елемент олсун, $Af = g$ илә ишарә едәк, Бурадан:

$$Ag = A^2 f = Af = g.$$

Беләликлә, g A-нын тәрпәнмәз елементидир. $g = Ag + g - Ag$ шәклиндә јазаг. Әкәр $g_1 = Ag$ вә $g_2 = g - Ag$ ишарә етсәк $g = g_1 + g_2$. Исбат едәк ки, g_1, g_2 ортогоналдыр. $(g_1, g_2) = (Ag, g - Ag)$ бәрабәрлијиндә $A = A^*$ вә $A^2 = A$ олмасыны нәзәрә алсаг:

$$(Ag, g - Ag) = (g, A^*(g - Ag)) = (g, Ag - A^2 g) = (g, 0) = 0$$

алырыг ки, A пројектордур. Беләликлә, теорем исбат олунур.

Теорем 10. P_1 вә P_2 проjекторлардырса, онда $P_1P_2=0$ бәрабәрлиjиндән $P_2P_1=0$.

Исбаты. Фәрз едәк ки, $P_1P_2=0$, P_1 вә P_2 проjекторлар олдугларындан симметрикдирләр: jә'ни $P_1^*=P_1$, $P_2^*=P_2$. Она көрә дә $P_1P_2=P_1^*P_2^*$ олдуғуну алырыг. Дикәр тәрәфдән билирик ки, $(P_2P_1)^*=P_1^*P_2^*$ өдәнилир. Буну нәзәрә алсаг:

$$P_1P_2=(P_2P_1)^*.$$

$P_1P_2=0$ олдуғундан, бурадан $(P_2P_1)^*=0$ вә она көрә дә $P_2P_1^*=0$ олур. Теорем исбат олунур.

Теорем 11. Фәрз едәк ки, H һилберт фәзасында H_1 вә H_2 алт фәзалары верилмишдир. H_1 вә H_2 фәзаларынын ортогонал олмасы үчүн онларын проjекторларынын ортогонал олмасы зәрури, һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрурилиjи. Көстәрдиjимизә көрә онда елә P_1 вә P_2 проjекторлары вар ки, H-ы уjғун олараг H_1 вә H_2 алт фәзаларына проjексиjалаjыр. Фәрз едәк ки, H_1 вә H_2 ортогоналдыр. Бу о демәкдир ки, $f_1 \in H_1$ $f_2 \in H_2$ исә истәнилән f, $f=f_1+g_1$ вә $f=f_2+g_2$ кими көстәрилдиjиндән, бурадан $(f_1, f_2)=0$. H-дан олан $f_1=P_1f$, $f_2=P_2f$ олмагла $(P_1f, P_2f)=0$ бәрабәрлиjини алырыг. P_1 симметрик олдуғундан

$$(P_1f, P_2f)=(f, P_1^*P_2f)=(f, P_1P_2f)=0.$$

Беләликлә, истәнилән f үчүн $(f, P_1P_2f)=0$, бурадан $P_1P_2=0$ Беләликлә, зәрури шәрт исбат олунур.

Шәртин кафилиjи. Фәрз едәк ки, P_1 вә P_2 ортогоналдыр. Бу о демәкдир ки, истәнилән f үчүн $(P_1P_2f, f)=0$, P_1 симметрик олдуғундан бу бәрабәрлиjин сол тәрәфи

$$(P_1P_2f, f)=(P_2f, P_1^*f)=(P_2f, P_1f)=(f_2, f_1)$$

шәклиндә јазылдығындан бурадан истәнилән f_1 вә f_2 үчүн $(f_2, f_1)=0$ олмагла H_1-ин H_2-jә ортогонал олмасы алыныр. Беләликлә, кафи шәрт вә теорем исбат олунур.

Теорем 12. P_1 вә P_2 проjекторлары исә, P_1+P_2 проjектор олмасы үчүн $P_1P_2=P_2P_1=0$ олмасы зәрури, һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрурилиjи. Фәрз едәк ки, $P=P_1+P_2$ проjектордур. P проjектор олдуғундан, $P^2=P$ вә jахуд $(P_1+P_2)^2=P_1+P_2$ олур. Бурадан исә, $P^2+P_1P_2+P_2P_1+P_2^2=P_1+P_2$; P_1 вә P_2 проjектор олдуғундан $P_1^2=P_1, P_2^2=P_2$ онда:

$$P_1P_2 + P_2P_1 = 0 \qquad (1)$$

көстәрәк ки, бу чәмдән

$$P_1P_2 = 0 \text{ вә ја } P_2P_1 = 0$$

(1) чәминә сол тәрәфинә P_1 илә тә'сир едәк:

$$P_1^2P_2 + P_1P_2P_1 = 0, \quad P_1P_2 + P_1P_2P_1 = 0. \qquad (2)$$

(2)-јә P_1 илә тә'сир етсәк:

$$P_1P_2P_1 + P_1P_2P_1^2 = 0$$

вә јахуд

$$P_1P_2P_1 + P_1P_2P_1 = 0$$

бурадан

$$P_1P_2P_1 = 0.$$

Онда (2)-дән алырыг ки, $P_1 P_2 = 0$, јәни гајда үзрә $P_2P_1 = 0$ олдуғу исбат олунур.

Шәртин кафилији. Фәрз едәк ки, P_1 вә P_2 пројекторлардыр вә $P_1P_2 = P_2P_1$ бәрабәрлији өдәнилир. Онда билаваситә көстәрмәк олар ки, $P_1 + P_2$ пројектор олар. Бунунла теорем исбат олунур.

Теорем 13. P_1 вә P_2 $P_1P_2 = P_2P_1$ шәртини өдәјән пројекторлар исә, онда $P = P_1 P_2$-дә пројектордур.

Исбаты. $P = P_1P_2$ олдуғуну гәбул едәк. $P^2 = (P_1P_2)^2$. Бурадан

$$P^2 = P_1P_2P_1P_2 = P_1^2P_2^2 = P_1P_2 = P.$$

$P^2 = P$ олдуғуну нәзәрә алсаг, P-нин пројектор олдуғу алыныр. Теорем исбат олунур.

§ 7. МҮСБӘТ ОПЕРАТОРЛАР ВӘ ПРОЈЕКТОРЛАР ҺАГГЫНДА ТЕОРЕМЛӘР

Фәрз едәк ки, A, H фәзасында тә'сир едән хәтти оператордур. Әввәлчә ону гејд едәк ки, бир чох теоремләрин исбатында операторлардан сөһбәт кедәркән һәмин операторларын H-да тә'сир етдикләрини гәбул едәчәјик.

Тә'риф 2. *A оператору H фәзасында о заман мүсбәт оператор адланыр ки, $f \in H$ истәнилән f үчүн $(Af, f) \geqslant 0$ олсун. Онда шәрти олараг $A \geqslant 0$ кими јазылыр. Еләчә дә $((A - B)f, f) \geqslant 0$ истәнилән f үчүн өдәнилирсә, онда $A \geqslant B$ кими јазылыр.*

Тә'риф 3. *A оператору о заман мүсбәт мүәјјән адланыр ки, елә сабит мүсбәт m әдәди олмалыдыр ки, истәнилән f үчүн $(Af, f) \geqslant m \| f \|^2$ бәрабәрсизлији өдәнилсин.*

Теорем 14. Әкәр A мүсбәт исә, онда һәм дә симметрикдир.

Она көрә H-дә олан истәнилән f вә g елементләрини көтүрәрәк $(Af, g)=(f, Ag)$ олдуғуну көстәрәк.

Исбаты. Шәртә көрә $A > 0$ олдуғундан, истәнилән f үчүн $(Af, f) \geqslant 0$ олур. $(A^*f, f) = (f, Af)$ олдуғундан, A-нын мүсбәт олмасы нәзәрә алынарса, онда $(f, Af) = \overline{(Af, f)} = (Af, f)$. Она көрә $(A^*f, f) = (Af, f)$ истәнилән f—үчүн өдәнилдијиндән $A^* = A$. Теорем исбат олунур.

Теорем 15. A. H фәзасында тә'сир едән мүсбәт оператордурса вә тәрси варса, $A^{-1} = B$ исә, онда тәрси дә мүсбәт оператордур.

Исбаты. A-нын тәрси вар, бу о демәкдир ки, $Af = g$ исә, $f = A^{-1}g$ вә ја $f = Bg$. Бурада $B = A^{-1}$ көстәрәк ки, истәнилән g үчүн $(Bg, g) \geqslant 0$ өдәнилир. Онун үчүн $(Bg, g) = (f, Af) = \overline{(Af, f)}$ бәрабәрлијини јазаг.

Шәртә көрә A мүсбәт оператор олдуғундан истәнилән f үчүн $(Af, f) \geqslant 0$ бу о демәкдир ки, истәнилән g үчүн дә $(Bg, g) \geqslant 0$.

Башга сөзлә B вә јахуд A^{-1} мүсбәт оператордур. Бурадан белә бир нәтичә алыныр:

$$(A^*f, f) = (Af, f), \quad A^* \geqslant 0$$

олдуғу чыхыр.

Теорем 16. A оператору илә гошмасынын һасили мүсбәтдир, јә'ни $AA^* \geqslant 0, A^*A \geqslant 0$.

Исбаты. Истәнилән f үчүн $(A^*Af, f) \geqslant 0$ олдуғуну көстәрәк:

Гошма операторун тә'рифинә көрә $(A^*Af, f) = (A^*g, f) = (g, Af)$, бурада $Af = g$ $(A^*Af, f) = (Af, Af) = \| Af\|^2 \geqslant 0$. Беләликлә, алырыг ки, истәнилән f үчүн $(A^*Af, f) \geqslant 0$ өдәнилир. Бу о демәкдир ки, $A^*A \geqslant 0$. $(A^*)^* = A$ Һилберт фәзасында доғру олдуғуна көрә $AA^* = (A^*)^*A^*$ $A^* = B$.

$$AA^* = B^*B$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, исбат етдијимизә көрә $B^*B \geqslant 0$. Бу о демәкдир ки,

$$AA^* \geqslant 0.$$

Нәтичә. A симметрик оператордурса, јә'ни $A = A^*$ исә, онда $AA^* \geqslant 0$, $A^2 \geqslant 0$.

Теорем 17. A мүсбәт оператордурса, истәнилән натурал n үчүн $A^n \geqslant 0$.

Исбаты. Фәрз едәк ки, $n = 2p + 1$ исбат етдијимизә көрә, $A \geqslant 0$ исә $A = A^*$ истәнилән p үчүн $(A^p)^* = (A^*)^p$ өдәниләр. $(A^n f, f)$ скалјар һасилә бахаг:

$$(A^n f,.f) = \left(A^{2p+1} f, f\right) = (AA^{2p} f, f) =$$
$$= (AA^p f, f) = (AA^p f, (A^p)^* f) = (AA^p f, (A^*)^p f).$$

$A = A^*$ нәзәрә алсаг, $(A^n f, f) = (AA^p f, A^p f)$ олар. $A^p f = g$ илә әвәз етсәк, $\left(A^{2p+1} f, f\right) = (Ag, g)$ шәртә көрә, $A \geqslant 0$ олдуғундан, бурадан $(Ag, g) \geqslant 0$ олмагла истәнилән f үчүн $\left(A^{2p+1} f, f\right) \geqslant 0$ олдуғу алыныр. Бурадан $A^{2p+1} \geqslant 0$.

n-ин ҹүт олан һалына бахаг. Фәрз едәк ки, $n = 2p$, онда

$$A^n = A^{2p} = (A^p)^2.$$

$A \geqslant 0$ оларса, $A = A^*$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $B = A^p$ исә, онда $B = B^*$ олар. Бундан әввәлки теоремдән алынан нәтиҹәјә көрә $B^2 \geqslant 0$.

$B^2 = A^{2p}$ олдуғуна көрә $A^{2p} \geqslant 0$ вә јахуд $A^n \geqslant 0$.

Беләликлә теорем исбат олунур. Исбаты ашкар олан бир тәклифин доғрулуғуну көстәрәк. $A_k \geqslant 0$ $\left(k = \overline{1, n}\right)$, $\alpha_k \geqslant 0$ оларса, онда бунларын комбинасијасы да, јә'ни:

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k \geqslant 0,$$

$$\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_k\right) f, f\right) \geqslant 0.$$

олдуғундан, бу о демәкдир ки,

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (A_k f, f) \geqslant 0.$$

Теорем 18. Фәрз едәк ки, $\{A_n\}$ H фәзасында верилмиш мүсбәт операторлар ардычыллығыдыр. $A_n \to A$ зәиф јығыларса, онда $A \geqslant 0$.

Исбаты. $\lim\limits_{n \to \infty} (A_n f, f) = (Af, f)$ бәрабәрлијиндән A_n-ин һамысы H-да мүсбәт олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$(A_n f, f) = \alpha_n \geqslant 0,$$
$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n \geqslant 0.$$

Онда belә чыхыр ки, истәнилән f үчүн $(Af, f) \geqslant 0$. Бу о демәкдир ки, $A \geqslant 0$. Мә'лумдур ки, $\{A_n\}$-ы A-ја күчлү јығыларса, онда һәмчинин зәиф јығылан олар. Она көрә дә бу теорем ардычыллығын күчлү јығылан һалы үчүн дә доғру олур.

Теорем 19. **(Үмумиләшмиш Шварс бәрабәрсизлији)** A, H **фәзасында верилмиш мүсбәт оператордурса, онда бу фәзанын истәнилән** f **вә** g **елементи үчүн ашағыдакы бәрабәрсизлик өдәнилир.**

$$|(Af, g)|^2 \leqslant (Af, f(Ag, g). \qquad (1)$$

Исбаты. Белә бир елементә бахаг

$$h_\lambda = f + \lambda(Af, g)\, g, h_\lambda \in H \qquad (2)$$

λ истәнилән һәгиги әдәд f вә g исә истәнилән елементләрдир. Шәртә көрә A оператору мүсбәт олдуғундан H-а дахил олан истәнилән $\tilde{g}$ үчүн $(A\tilde{g}, \tilde{g}) \geqslant 0$ олмалыдыр. Онда $\tilde{g} = h_\lambda$ јазсаг:

$$(Ah_\lambda, h_\lambda) \geqslant 0, \qquad (3)$$

$$Ah_\lambda = Af + \lambda A\,(Af, g)\, g. \qquad (4)$$

(2) вә (4)-и нәзәрә алараг ашағыдакы бәрабәрлијә бахаг:

$$\begin{aligned}(Ah_\lambda, h_\lambda) &= (Af + \lambda(Af, g)Ag, f + \lambda(Af, g)g) = \\ &= (Af, f) + (Af, \lambda(Af, g)g) + (\lambda(Af, g)\,Ag, f) + \\ &+ (\lambda(Af, g)\,Ag, \lambda(Af, g)g) = (Af, f) + \\ &+ \lambda\overline{(Af, g)}\,(Af, g) + \lambda(Af, g)\,(Ag, f) + \\ &+ \lambda(Af, g)\;\lambda\overline{(Af, g)}(Ag, g),\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\overline{(Af, g)} = (g, Af); \qquad (6)$$

$$(Ag, f) = (g, A^*f) = (g, Af). \qquad (7)$$

(6) вә (7)-ни нәзәрә алсаг (5) ашағыдакы кими јазылар:

$$\begin{aligned}(Ah_\lambda, h_\lambda) &= (Af, f) + \lambda(Af, g)\,(g, Af) + \\ &+ \lambda(Af, g)\,(g, Af) + \lambda^2(Af, g)\,(g, Af)\,(Ag, g).\end{aligned} \qquad (8)$$

Шәртә көрә, $A \geqslant 0$ олдуғундан $(Ah_\lambda, h_\lambda) \geqslant 0$ олмагла (8)-дән

$$0 \leqslant (Ah_\lambda, h_\lambda) = (Af, f) + 2\lambda|(Af, g)|^2 + \lambda^2\,|(Af, g)|^2\,(Ag, g) \qquad (9)$$

бәрабәрсизлијини алырыг. Бурадан белә бир нәтиҹәјә кәлирик ки,

$$p + 2\lambda q + m\lambda^2 \geqslant 0 \qquad (10)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Белә ки,

$$p = (Af, f),$$

$$q = |(Af, g)|^2,$$

$$m = |(Af, g)|^2\,(Ag, g).$$

(10) истәнилән λ үчүн өдәниләрсә, онда $q^2 - pm \leqslant 0$ олмалыдыр. Бурада p, q вә m-ин гијмәтләрини јеринә јазаг:

$$|(Af, g)|^4 - (Af, f)\,|(Af, g)|^2\,(Ag, g) \leqslant 0$$

нәтиҹәдә

$$|(Af, g)|^2 \leqslant (Af, f)\,(Ag, g).$$

Бу, үмумиләшмиш Шварс бәрабәрсизлији адланыр. Бу, мүсбәт мүәјјән операторлар үчүн дә доғрудур.

§ 8. МҮСБӘТ ОПЕРАТОРЛАР АРДЫЧЫЛЛЫҒЫ

Теорем 20. Фәрз едәк ки, *H* һилберт фәзасында мүәјјән мүсбәт монотон.

$$\{A_n\}$$

операторлар ардычыллығы верилир.. (1)

Әкәр (1) ардычыллығы артан вә јухарыдан мәһдуддурса вә јахуд да азалан ашағыдан мәһдуддурса, онда белә ардычыллыг күчлү мә'нада јығылыр. Белә ки, *A* лимит оператордурса, онда *A* өзү дә мүсбәтдир.

Исбаты. Фәрз едәк ки, (1) артандыр вә јухарыдан мәһдуддур.

$$0 \leqslant A_1 \leqslant A_2 \leqslant \cdots \leqslant A_n \leqslant \cdots \leqslant T$$

Үмумилији позмадан фәрз едәк ки, T ваһид оператордур: $T=E$ јәни. $A_n \leqslant E$.

Фәрз едәк ки, $n>m$ олдугда

$$A_{n,m} = A_n - A_m, \quad A_{n,m} \geqslant 0.$$

$(A_{n,m} f\, J) = (A_n f,\, f) - (A_m f,\, f)$ олдуғундан $(A_m f, f) \geqslant 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $(A_{n,m} f,\, f) \leqslant (A_n{}^f, f), \leqslant (f, f)$, бурадан

$$\| A_{n,m} \| \leqslant 1.$$

$A_{n,m} \geqslant 0$ олдуғундан $E - A_{n,m} \geqslant 0$. Буну көстәрмәк үчүн Шварс бәрабәрсизлијини јазаг:

$$(A_{n,m} f, f) \leqslant \| A_{n,m} \| f \| f \| \leqslant \| f \|^2 = (f, f)$$

$(f, f) - (A_{n,m} f, f) \geqslant 0$ вә јахуд истәнилән f үчүн

$$((E - A_{n,m}) f, f) \geqslant 0.$$

Она көрә дә $E - A_{n,m} \geqslant 0$ олур.

Инди $f \in H$ олан f елементи көтүрүб, $\| A_{n,m} f \|^4$-и гијмәтләндирәк:

$$\| A_{n,m} f \|^4 = (A_{n,m} f,\ A_{n,m} f)^2,$$

$A_{n,m} f = \hat{f}$ оларса, онда үмумиләшмиш Шварс бәрабәрсизлијинә көрә

$$\| A_{n,m} f \|^4 = (A_{n,m} f, \hat{f})^2 \leqslant (A_{n,m} f, f)\, (A_{n,m} \check{f}, \hat{f}).$$

Бурадан:

$$(A_{n,m} f, f)\, (A_{n,m} \tilde{f}, \check{f}) = (A_{n,m} f, f)\, (A^2_{n,m} f,\ A_{n,m}\ f,).$$

$(A^2_{n,m} f,\ A_{n,m} f)$ гијмәтләндирәк: (2)

$$g_{n,m} = A_{n,m} f, \quad h_{n,m} = A_{n,m}\, g_{n,m}$$

оларса

$$(A_{n,m}^2 f,\ A_{n,m} f) = (h_{n,m},\ g_{n,m}) \leqslant \|h_{n,m}\| \|g_{n,m}\|, \qquad (3)$$

$\|A_{n,m}\| \leqslant 1$ олдуғундан

$$\|h_{n,m}\| = \|A_{n,m},\ g_{n,m}\| \leqslant \|A_{n,m}\| \|g_{n,m}\| \leqslant \|g_{n,m}\|,$$

$$\|h_{n,m}\| \leqslant \|g_{n,m}\|.$$

Еләчә дә $\|A_{n,m}\| \leqslant 1$ нәзәрә алсаг:

$$\|g_{n,m}\| \leqslant \|A_{n,m}\| \|f\| \leqslant \|f\|$$

өдәнилир. Беләликлә, (3)-дән

$$(A_{n,m}^2 f,\ A_{n,m} f) < \|f\|^2, \qquad (4)$$

бәрабәрсизлијини алырыг.

(4)-ә көрә (2)-дән

$$\|A_{n,m} f\|^4 < \|f\|^2 (A_{n,m} f, f) \qquad (5)$$

сағ тәрәф мүсбәт әдәддир.

$A_{n,m} = A_n - A_m$-и нәзәрә алсаг:

$$\|A_n f - A_m f\|^4 < \|f\|^2 ((A_n f, f) - (A_m f, f)) \qquad (6)$$

$\alpha_k = (A_k f, f)$ оларса, онда истәнилән k үчүн A_k мүсбәт олдуғундан $\alpha_k \geqslant 0$. $n > m$ олдугда исә $\alpha_n \geqslant \alpha_m$ өдәнилир. Бу о демәкдир ки,

$$\{\alpha_k\}, \qquad (7)$$

ардычыллығы азалмајандыр. Көстәрәк ки, f-ин һәр гејд олунмуш гијмәтиндә бу ардычыллыг јухарыдан мәһдуддур. Шварс бәрабәрсизлијинә көрә

$$\alpha_k \leqslant \|A_k f\| \ \|f\| \leqslant \|A_k\| \ \|f\|^2, \quad \|A_k\| \leqslant 1$$

олдуғундан бурадан $\alpha_k \leqslant \|f\|^2$. Беләликлә, (7) ардычыллығы f-ин һәр гејд олунмуш гијмәтиндә азалмајан вә јухарыдан мәһдуд ардычыллыг олдуғундан јығыландыр. Һәр бир јығылан ардычыллыг фундаментал олдуғуна көрә елә $N(\varepsilon)$ вар ки, n, $m > N(\varepsilon)$ олдугда

$$\alpha_n - \alpha_m < \varepsilon, \qquad (8)$$

(6) вә (8)-ә көрә алырыг:

$$\|A_n f - A_m f\|^4 < \varepsilon \|f\|^2. \qquad (9)$$

Бурадан f-ин һәр гејд олунмуш гијмәтиндә $\{A_n f\}$ ардычыллығы фундаменталдыр. Һилберт фәзасы долу олдуғундан һәр бир фундаментал ардычыллыг јығылан ардычыллыгдыр. Јә'ни елә A хәтти оператору вар ки, $n \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда $\|A_n f - Af\| < \varepsilon$ олур. Бу о демәкдир ки, һәр бир f үчүн $\{A_n\}$ ардычыллығы күчлү мә'нада, јә'ни норма мә'насында A-јә јығылыр. Көстәрәк ки, A мүсбәт оператордур. Мә'лумдур ки, $\{A_n f\}$ ардычыллығы әкәр күчлү јығылырса, һәмчинин зәиф јығылыр:

$$(A_n f, f) \to (Af, f).$$

Шәртә көрә A_n операторлары мүсбәт олдуғундан n-нин истәнилән гијмәтиндә $(A_n f, f)$ мүсбәтдир. Она көрә f-ин истәнилән гијмәтиндә $(Af, f) \geqslant 0$. Башга сөзлә A мүсбәтдир. Бунунла теорем исбат олунур.

Теорем 21. Әкәр A, H һилберт фәзасында верилмиш истәнилән мүсбәт оператор исә, онда һәмин фәзада јеканә олан елә мүсбәт X оператору вар ки, $X^2 = A$ олур.

Исбаты: Үмумилији позмадан, $A \leqslant E$ олдуғуну фәрз едәк.

$$E - A = B$$

$$E - X = У$$

ишарә едәк.

A мүсбәт олдуғуна көрә билирик ки, B мүсбәтдир. Фәрз едәк ки, елә X оператору вар ки, $X^2 = A$ бәрабәрлији өдәнилир. Онда $(E - У)^2 = E - B$ вә јахуд

$$E^2 - 2EУ + У^2 = E - B$$

олур. $E - 2У + У^2 = E - B$. Бурадан:

$$2У = У^2 + B \qquad (10)$$

$$У = \frac{У^2 + B}{2}.$$

10) бәрабәрлијиндән истифадә едәрәк (10)-ну өдәјән мүсбәт $У$ операторунун варлығыны исбат едәк. Исбат үчүн ардычыл јахынлашма үсулундан истифадә едәк. Онун үчүн сыфырынчы јахынлашманы сыфыр оператор көтүрәк, јә'ни $У_0 = 0$. Онда (10)-дан ардычыл олараг ашағыдакы бәрабәрлији алырыг:

$$\left.\begin{array}{r} У_1 = \dfrac{B}{2}, \\ У_2 = \dfrac{У_1^2 + B}{2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ У_n = \dfrac{У_{n-1} + B}{2}. \end{array}\right\} \qquad (11)$$

Бу бәрабәрликләрдән көрүндүјү кими, $У_n$ ашағыдакы бәрабәрлик васитәсилә тә'јин олунур:

$$У_n = P_n(B)$$

белә ки, P_n, B-јә көрә мүсбәт әмсаллы n-дәрәчәли мүәјјән полиномдур. $B \geqslant 0$ вә бу полиномун әмсаллары мүсбәт олдуғундан истәнилән n-үчүн

$$У_{п} \geqslant 0,$$

өдәниләр. Башга сөзлә $У_{п}$ операторлары мүсбәт операторлардыр. (10)-дан истифадә едәрәк $У_{п+1} - У_{п}$ фәргини тә'јин едәк:

$$У_{п+1} - У_{п} = \frac{У_{п}^2 + B}{2} - \frac{У_{п-1}^2 + B}{2} = \frac{1}{2}\left(У_{п}^2 -- У_{п+1}^2\right), \quad (12)$$

$$У_{п} = P_{п}(B),$$

$$У_{п-1} = P_{п-1}(B).$$

Ашкардыр ки, белә бир бәрабәрлик өдәнилир:

$$P_{п}(B)\,P_{п-1}(B) = P_{п-1}(B)\,P_{п}(B),$$

она көрә $У_{п}У_{п-1} = У_{п-1}\;У_{п}$ олдуғуну нәзәрә алараг,

$$У_{п}^2 - У_{п-1}^2 = (У_{п} - У_{п-1})\,(У_{п} + У_{п-1}). \quad (13)$$

(12)-ә көрә (11)-дән

$$\left.\begin{aligned} &У_{п+1} - У_{п} = \frac{1}{2}\left(У_{п} - У_{п-1}\right)\left(У_{п} + У_{п-1}\right),\\ n = 1 \text{ оларса,}\quad &У_2 - У_1 = \frac{1}{2}(У_1 - У_0)(У_1 + \;У_0). \end{aligned}\right\} (14$$

Сыфырынчы јахынлашма сыфыр олдуғуна көрә

$$\left.\begin{aligned} &У_2 - У_1 = \frac{1}{2}\,У_1^2,\\ &У_3 - У_2 = \frac{1}{2}(У_2 - У_1)(У_2 + У_1). \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$У_1 = P_1(B)$ олдуғундан $У_2 - У_1$, B-јә көрә чохһәдлидир. (15) бәрабәрликләриндән көрүндүјү кими, истәнилән n үчүн $У_{п+1} - У_{п} = Q_{п}(B)$. Белә ки, $Q_{п}(B)$, B-јә көрә мүсбәт әмсаллы мүәјјән чохһәдлидир. $B \geqslant 0$ исә $У_{п+1} - У_{п} \geqslant 0$ олур. (11)-и нәзәрә алсаг, $\{У_{п}\}$ мүсбәт операторлар ардычыллығынын артан олмасы алыныр. Көстәрәк ки, бу ардычыллыг јухарыдан мәһдуддур.

$У_1 = \frac{B}{2} = \frac{E - A}{2}$ олдуғуна көрә бурадан $(У_1 f, f) = \frac{1}{2}[(f, j) - (Af, f)]$ нәзәрә алсаг, $(У_1 f, f) \leqslant (f, f)$ бәрабәрсизлији өдәнилир. Она көрә дә $У_1 \leqslant E$.

$(У_1 f, f) \leqslant (f, f)$ исә, еләчә дә $\left(У_1^2 f, f\right) \leqslant (f, f)$ олар. Доғрудан да $У_1 > 0$ олдуғундан

$$\left(У_1^2 f, f\right) = (У_1 f,\, У_1 f) \leqslant (f,\, У_1 f) = (У_1 f, f) \leqslant (f, f).$$

Она көрә $Y_2 = \frac{Y_1^2 + B}{2}$ -дән $(Y_2 f,\ f) \leqslant (f, f)$ олараг еjни гаjда илә көстәрмәк олар ки, истәнилән n үчүн $Y_n \leqslant E$. $\{Y_n\}$ ардычыллығы һәм артан вә һәм дә jухарыдан мәһдуд олдуғундан исбат етдиjимиз теоремә көрә белә ардычыллыг мүсбәт Y операторуна jығылыр. Белә операторун варлығы көстәрир ки, елә $X \geqslant 0$ оператору вар ки, $X^2 = A$ өдәнилир. Исбат едәк ки, белә оператор jеканәдир. Әксинә фәрз едәк. Фәрз едәк ки, $X \neq X_1$ олан елә $X_1 \geqslant 0$ вар ки, $X^2 = A$ олмагла һәмчинин $X_1^2 = A$. X, X_1-ин һәр бири мүсбәт оператор олдуғуна көрә исбат етдиjимизә көрә елә мүсбәт Z, Z_1 операторлары вар ки,

$$Z^2 = X, \tag{16}$$

$$Z_1^2 = X_1 \tag{17}$$

бәрабәрликләри өдәнилир. $(X - X_1) f = g$ олсун. Белә бир чәмә бахаг: $\| Zg \|^2 + \| Z_1 g \|^2 = (Zg,\ Zg) + (Z_1 g,\ Z_1 g)$ гошма операторунун тә'рифинә көрә

$$\| Zg \|^2 + \| Z_1 g \|^2 = (Z^* Zg,\ g) + (Z_1^* Z_1 g,\ g).$$

Z вә Z_1 операторлары мүсбәт олдугларына көрә симметрикдир, jә'ни

$$\| Zg \|^2 + \| Z_1 g \|^2 = (Z^2 g,\ g) + (Z_1^2 g,\ g) = (Xg,\ g) + (X_1 g,\ g) =$$
$$= ((X + X_1) g,\ g) = ((X + X_1)(X - X_1) f,\ g).$$

Көстәрдиjимиз кими X вә X_1 операторларынын һәр бири уjғун олараг $P_n(A)$ вә $Q_n(A)$ полиномларынын лимити кими тә'jин олунур.

$P_n(A)\, Q_n(A) = Q_n(A)\, P_n(A)$ олдуғундан $XX_1 = X_1 X$ олур, она көрә дә $(X + X_1)(X - X_1) = X^2 - X_1^2$ өдәнилир. Беләликлә,

$$\| Zg \|^2 + \| Z_1 g \|^2 = \left(\left(X^2 - X_1^2\right) f,\ g\right) = ((A - A) f,\ f) = 0$$

олур. Демәли, истәнилән g үчүн $\| Zg \|^2 + \| Z_1 g \|^2 = 0$ олур. Бурадан исә $\| Zg \| = 0$ вә $\| Z_1 g \| = 0$ олдуғундан:

$Zg = 0$ вә $Z_1 g = 0$, онда (16) вә (17)-jә көрә $Xg = 0$ вә $X_1 g = 0$ бәрабәрликләри өдәнилир.

$$\| (X - X_1) f \|^2 = ((X - X_1) f,\ \ (X - X_1) f) =$$
$$= ((X - X_1)(X - X_1)^* f,\ f),$$

бәрабәрлиjинә бахаг: $X - X_1$ симметрик олдуғуна көрә

$$\| (X - X_1) f \|^2 = ((X - X_1)^2 f,\ f) = ((X - X_1)(X - X_1) f,\ f) =$$
$$= ((X - X_1) g,\ f) = (Xg,\ f) - (X_1 g,\ f) = (0,\ f) - (0,\ f) = 0.$$

Демәли, истәнилән f үчүн $\| (X - X_1) f \|^2 = 0$ олмагла

$(X-X_1) f = 0$; јә'ни, $X = X_1$ өдәнилир вә беләликлә теорем исбат олунур. Бундан сонра $X = A^{\frac{1}{2}}$ ишарә едәчәјик.

Теорем 22. Мүсбәт A вә B операторлары јерләрини дәјиширсә, јә'ни $AB=BA$ исә, онда AB-дә мүсбәтдир.

Исбаты. A мүсбәт олдуғундан бу оператора мүсбәт $A^{\frac{1}{2}}$ операторуну гаршы гојаг. Көстәрдијимиз кими $A^{\frac{1}{2}}$ оператору A васитәсилә

$$A = \lim_{n\to\infty} У_n = \lim_{n\to\infty} P_n(A),$$

кими тә'јин олунмушдур. Она көрә дә A, B илә јерини дәјишдијинә көрә. $A^{\frac{1}{2}}$, B илә јерләрини дәјишир. јә'ни;

$$A^{\frac{1}{2}} B = BA^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

$(ABf, f) \geqslant 0$ олдуғуну көстәрмәк үчүн (18)-дән вә $A^{\frac{1}{2}}$ симметрик олдуғуну нәзәрә алараг (ABf, f) скалјар һасили чевирәк:

$$(ABf, f) = \left(A^{\frac{1}{2}} A^{\frac{1}{2}} Bf, f\right) = \left(A^{\frac{1}{2}} Bf, \left(A^{\frac{1}{2}}\right)^{*} f\right) =$$

$$= \left(BA^{\frac{1}{2}} f,\ A^{\frac{1}{2}} f\right). \tag{19}$$

$A^{\frac{1}{2}} f = g$ оларса, (19)-дан $(ABf, f) = (Bg, g) \geqslant 0$ олур. Беләликлә, $(ABf, f) \geqslant 0$ бәрабәрсизлији истәнилән f үчүн өдәнилдијиндән AB-нин мүсбәт олмасы алынмагла теорем исбат олунур.

Теорем 23. Әкәр A вә B мүсбәт операторлары үчүн $A \geqslant B$ өдәнилирсә вә елә мүсбәт C оператору вар ки, $CA = AC$, $CB = BC$ бәрабәрликләри өдәнилир, онда һәмчинин $AC \geqslant BC$ олур.

Исбаты. $AB - BC$ фәргинә бахаг. $\tilde{C} = A - B$ оларса, онда

$$AC - BC = \tilde{C}C.$$

Шәртә көрә $A \geqslant B$ олдуғуна көрә $\tilde{C} \geqslant 0$. Исбат едәк ки, C илә C јерләрини дәјишир. Јә'ни:

$$\tilde{C}C = C\tilde{C} \tag{20}$$

$$\tilde{C}C = (A - B)C = AC - BC = CA - CB = C(A - B) = C\tilde{C}.$$

Демәли, (20) өдәнилир. Онда бундан габаг исбат етдијимиз теоремә көрә:

$$\tilde{C}C \geqslant 0$$

јахуд да

$$AC - BC \geqslant 0$$

Башга сөзлә $AC \geqslant BC$ өдәнилир. Бунунла теорем исбат олунур.

Теорем 24. ***A*, *H* фәзасына тә'сир едән хәтти оператор исә вә $\| E - A \| < 1$ өдәнилирсә, онда *A* операторунун тәрси вар.**

Исбаты. $A^{-1}A = AA^{-1} = E$ олдуғуну көстәрәк. Бурада A^{-1}, *A*-нын тәрсидир. Буну билаваситә јохлајаг:

$$E + (E - A) + (E - A)^2 + \ldots, \qquad (21)$$

сырасыны көтүрәк. Шәртә көрә $\| E - A \| < 1$ олдуғуна көрә (21) сырасы нормаја көрә јығылан сырадыр. Бу сыранын чәминин A^{-1} бәрабәр олдуғуну көстәрәк:

$$AA^{-1} = [E - (E - A)]\,[(E + (E - A) + (E - A)^2 + \cdots] =$$
$$= E + (E - A) + (E - A)^2 + \cdots - (E - A) - (E - A)^2 - \ldots$$
$$AA^{-1} = E.$$

Ејни гајда илә көстәрмәк олар ки, $A^{-1}A = E$. Бу ики бәрабәрлијин өдәнмәси көстәрир ки, A^{-1}, *A*-нын тәрс оператордур.

Теорем 25. Фәрз едәк ки, *A*, *H* фәзасында тә'сир едән симметрик оператордур вә

$$\| E - A \| < 1 \qquad (22)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Онда

1. $A \geqslant 0$,

2. m вә M, *A*-нын ујғун олараг ашағы вә јухары сәрһәдләри исә, онда $m > 0$ вә $M < 2$ олур.

Исбаты. $f \in H$ олан истәнилән f үчүн

$$m(f, f) \leqslant (Af, f) \leqslant M(f, f) \qquad (23)$$

өдәнилир. 1-ин өдәнилдијини исбат едәк: Көстәрәк ки, (22) өдәнирсә, $A \geqslant 0$.

A симметрик олдуғуна көрә исбат етдијимизә көрә $A^2 \geqslant 0$. Еләчә дә *A* вә *E*-нин симметрик олмасындан $(A - E)^2$ мүсбәт олмасы чыхыр, Јә'ни, $(A - E)^2 \geqslant 0$ өдәнилир.

Белә бир бәрабәрсизлији нәзәрдән кечирәк:

$$0 \leqslant ((A-E)^2 f, f) = (g, f),$$

белә ки, $g = (A-E)^2 f$ Шварс бәрабәрсизлијинә көрә

$$(g, f) \leqslant \| g \| \, \| f \| . \qquad (24)$$

Дикәр тәрәфдән

$$\| g \| = \| (A-E)^2 f \| \leqslant \| (A-E)^2 \| \, \| f \| \leqslant$$

$$\leqslant \| (A-E) \|^2 \| f \| < \| f \| ,$$

олмагла бурадан

$$\| g \| < \| f \| \qquad (25)$$

(24) вә (25) мүгајисә етсәк, $0 \leqslant ((A-E)^2 f, f) < \| f \|^2$, бурадан $0 \leqslant ((A^2 - 2AE + E^2) f, f) < \| f \|^2$, бәрабәрсизлијини вә јахуд $(A^2 f, f) - 2(Af, f) + (f, f) < \| f \|^2$ алыныр. Она көрә дә

$$(A^2 f, f) - 2(Af, f) \leqslant 0$$

вә

$$(Af, f) \geqslant \frac{1}{2} (A^2 f, f)$$

өдәнилир. $A^2 > 0$ олдуғуна көрә истәнилән f үчүн $(A^2, f\, f) \geqslant 0$. Онда ахырынчы бәрабәрсизликдән истәнилән f үчүн $(Af, f) \geqslant 0$. олмагла $A \geqslant 0$ олур. Инди исә 2-нин доғрулуғуну көстәрәк $\| A - E \| \geqslant \| A \| - \| E \|$, бәрабәрсизлијиндән $\| A - E \| \geqslant \geqslant \| A \| - 1$.

Бурадан исә $\| A \| \leqslant 1 + \| A - E \|$. Лакин $\| A - E \| < 1$ олдуғундан $\| A \| < 2$ олдуғу алыныр.

$$\| A \| = \sup_{\|f\|=1} | (Af, f) | = \sup_{\|f\|=1} (Af, f).$$

Она көрә дә $\| f \| = 1$, $(Af, f) < 2$. Јахуд да истәнилән f үчүн $(Af, f) < 2(f, f)$, $M < 2$ олдуғу чыхыр. Инди көстәрәк ки, $m = 0$ ола билмәз. Онун үчүн әксини фәрз едәк. Фәрз едәк ки, $m = 0$. Онда $\| f_n \| = 1$ олан елә $\{f_n\}$ ардычыллығы вар ки, $(Af_n, f_n) \to 0$ олур. $| (A^2 f_n, f_n) |^2$ гијмәтләндирән A симметрик олдуғундан $Af_n = g_n$ ишарә едәрәк үмумиләшмиш Шварс бәрабәрсизлијинә көрә

$$| (A^2 f_n, f_n) |^2 = | (Ag_n, f_n) |^2 < (Ag_n, g_n)(Af_n, f_n),$$

бурада

$(Af_n, f_n) \to 0$ олдуғуна көрә $(Ag_n, f_n) \to 0$ олур вә јахуд $(A^2 f_n, f_n) \to 0$.

A симметрик олдуғуна көрә $(Af_n, Af_n) \to 0$ вә она көрә дә $\| Af_n \| \to 0$ олур.

$\| A - E \| < 1$ олдуғундан исбат етдијимиз теоремә көрә A-ын тәрси вар, $f_n = A^{-1} A f_n$ шәклиндә јаза биләрик. Онда, $\| f_n \| \leqslant \| A^{-1} \| \, \| A f_n \|$. $\| A f_n \| \to 0$ олдуғундан, бурадан $\| f_n \| \to 0$ бу исә $\| f_n \| = 1$ олмасы шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көснин өдәнилдијини көстәрдик. Теорем исбат олунур. Бурадан тәрир ки, $m = 0$ ола билмәз, јә'ни $m > 0$. Беләликлә, 1 вә 2- белә бир нәтичә алырыг ки, $0 < m < M < 2$ олмасы $\| A - E \| < 1$ илә еквивалентдир. Доғрудан да, әкәр $m(f, f), < (Af, f) < 2(f, f)$ оларса, онда бурадан $0 < (Af - f, f) < (f, f)$ $\| A - E \| < 1$олур.

Теорем 26. Симметрик A операторунун ашағы сәрһәди m сыфырдан фәргли исә, онда A-нын тәрси вар.

Исбаты. A-нын ашағы вә јухары сәрһәдини ујғун олараг m вә M илә ишарә етсәк $0 < m < M$. Бунун һәр тәрәфини C мүсбәт әдәдинә вураг: $0 < Cm < CM$; C-ни елә сечәк ки, $CM < 2$ олсун. $M \neq 0$ олдуғундан, бурадан $C < \frac{2}{M}$. $0 < Cm \leqslant$ $\leqslant CM < 2$ бәрабәрсизлијини нәзәрә алараг, $A' = CA$ оларса, m' вә M' ујғун олараг ашағы вә јухары сәрһәд олар. Бурада $m' = Cm$ вә $M' = CM$ оларса, $0 < m' < M' < 2$ олур.

Онда көстәрдијимизә көрә A' оператору үчүн $\| A' - E \| < 1$ өдәниләр. Она көрә дә көстәрдијимиз кими A'-ин тәрси вар вә

$$(A')^{-1} = E + (E - A') + (E - A')^2 + \cdots$$

сырасы васитәсилә тә'јин олунур

$A' = CA$ олдуғундан, бурадан $A^{-1} = C(A')^{-1}$.

Онда

$$A^{-1} = C + C(E - [CA) + C(E - CA)^2 + \cdots,$$

Демәли, бурадан A-нын тәрсинин варлығы алынмагла көстәрилән сыра васитәсилә тә'јин олунур. Беләликлә, теорем исбат олунур. Бурадан, хүсуси һалда A' оператору үчүн мүәјән бәрабәрсизлик аларыг. A оператору үчүн

$$m(f, f) \leqslant (Af, f) \leqslant M(f, f)$$

олдуғуну фәрз етмишик. Демәли,

$$mE \leqslant A \leqslant ME \tag{26}$$

мүнасибәти доғрудур. $A > 0$ исә, $A^{-1} > 0$ олдуғуну исбат етмишик. A^{-1} ахырынчы бәрабәрсизлијә дахил олан һәр бир операторла јерини дәјишдијиндән (26)-дан

$mA^{-1} \leqslant A^{-1} A \leqslant MA^{-1}$ олдуғу алынып вә јахуд $mA^{-1} \leqslant$ $\leqslant E \leqslant MA^{-1}$ олур. Бурада $A^{-1} \geqslant M^{-1} E$ вә $A^{-1} \leqslant m^{-1} E$ нәзәрә алмагла A-нын тәрси үчүн $M^{-1} E \leqslant A^{-1} \leqslant m^{-1} E$ бәрабәрсизлијини алырыг.

Теорем 27. Фәрз едәк ки, A, H фәзасында верилмиш хәтти оператордур. A операторунун тәрсинин олмасы үчүн AA^* вә A^*A операторларынын ашағы сәрһәдләринин сыфырдан бөјүк олмасы зәрури, һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин кафилији. Фәрз едәк ки, AA^* вә A^*A ашағы сәрһәдләри сыфырдан бөјүкдүр. Онда исбат етдијимизә көрә AA^* вә A^*A операторларынын тәрси вар, јә'ни; $AA^*(AA^*)^{-1} = (AA^*)^{-1} AA^* = E$

вә

$$A^*A(A^*A)^{-1} = (A^*A)^{-1} A^*A = E$$

бәрабәрликләри өдәнилир.

Бурадан:

$$AA^*(AA^*)^{-1} = (A^*A)^{-1} A^*A = E. \qquad (27)$$

$A^*(AA^*)^{-1} = B$ вә $(A^*A)^{-1} A^* = C$ илә ишарә етсәк, онда (27) бәрабәрлијиндән

$$AB = E \text{ вә } CA = E.$$

Бу көстәрир ки, B оператору A-нын сағ тәрси вә C исә бу операторун сол тәрсидир. Она көрә дә $C = B = A^{-1}$ олмагла кафи шәрт исбат олунур.

Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, A-нын тәрси вар. Исбат едәк ки, AA^* вә A^*A операторларынын ашағы сәрһәдләри сыфыр ола билмәз. Әксини фәрз едәк, онда $\| f_n \| = 1$ олан елә $\{f_n\}$ ардычыллығы вар ки, $(A^*Af_n, f_n) \to 0$, бурадан $\| Af_n \|^2 \to 0$ олдуғундан $Af_n \to 0$. A-нын тәрси олдуғундан исә бурадан $\| f_n \|^2 \to 0$ бу исә $\| f_n \|^2 \to 1$ шәртинә зидд оларды. Алынан зиддијјәт шәртин зәрури олдуғуну көстәрир. Теорем исбат олунур.

Теорем 28. Фәрз едәк ки, P вә Q операторларынын һәр икиси

$$\| P - Q \| < 1 \qquad (28)$$

шәртини өдәјән вә H-да верилмиш пројекторлардыр. Әкәр D вә D_1 ујғун олараг P вә Q васитәсилә H-ын пројексијаларыдырса, онда елә хәтти оператор вар ки, D-ни D_1-ә хәтти изоморф ин'икас етдирир.

Исбаты. Көмәкчи $T = P(Q - P)P$ операторуну көтүрәк. $\| P \| \leqslant 1$ вә $\| Q - P \| < 1$ олдуғундан

$$\| P(Q - P)P \| \leqslant \| P \| \, \| Q - P \| \, \| P \|$$

бәрабәрсизликләринә көрә $\| T \| < 1$ олур. $\widetilde{T} = E - T$ оларса, $\| T \| < 1$, бурадан

$$\|\widetilde{T}-E\|<1. \qquad (29)$$

Көстәрдијимиз кими $\widetilde{T}$ операторунун тәрси вар.

$\widetilde{T}$-нин ифадәсинә дахил олан P вә Q операторларынын ејни заманда симметрик олдугларыны нәзәрә алсаг $\widetilde{T}$ симметрик олар. Онда һәмчинин исбат етдијимизә көрә (29) шәртиндән $\widetilde{T}\geqslant 0$ олмагла бунун ашағы сәрһәди $m>0$ олур.

Инди көстәрәк ки, $\widetilde{T}P=P\widetilde{T}$ бәрабәрлији доғрудур. $P^3=P^2P=P^2=P$ олдуғуну нәзәрә алараг $\widetilde{T}=E+PQP-P^3$ ифадәсиндән

$$\widetilde{T}=E+PQP-P.$$

Она көрә дә
$$\widetilde{T}P=P+PQP^2-P^2=PQP$$
вә

$$P\widetilde{T}=P+P^2QP-P^2=PQP$$

бу ики бәрабәрликдән

$$\widetilde{T}P=P\widetilde{T}.$$

P проjектор олдуғуна көрә бунун тәрси вар. Һәм $\widetilde{T}$-нин вә һәм дә P-нин тәрси олдугларындан $(\widetilde{T}P)^{-1}=(P\widetilde{T})^{-1}$ јахуд, $\widetilde{T}^{-1}P=P\widetilde{T}^{-1}$.

$\widetilde{T}$-нин мүсбәт олмасындан $\widetilde{T}^{-1}$ мүсбәт олмасы чыхыр. Исбат етмишик ки, P оператору $\widetilde{T}^{-1}$ илә јерини дәјишәндирсә, онда һәмин оператор $\widetilde{T}^{-\frac{1}{2}}$-лә дә јерини дәјишәндир. Она көрә дә $\widetilde{T}^{-\frac{1}{2}}P=P\widetilde{T}^{-\frac{1}{2}}$. Онда $m>0$ олар. Фәрз едәк ки, m, T-нин ашағы сәрһәддир. Она көрә дә $m\|f\|^2\leqslant(\widetilde{T}f,f)$ бәрабәрсизликдән $m^*\leqslant\|\widetilde{T}\|$ олур. $m^{*-\frac{1}{2}}<\|T\|^{-\frac{1}{2}}$ бурадан $m^*\geqslant\|\widetilde{T}^{-\frac{1}{2}}\|$ ола билмәз; әкс һалда $\left\|\widetilde{T}^{-\frac{1}{2}}\right\|\leqslant m^*$ оларды, она көрә дә $m^*<\|\widetilde{T}^{-\frac{1}{2}}\|$ бәрабәрсизлији өдәнилир.

Белә бир һасилә бахаг: $PQQP=PQ^2P=PQP$

$$\widetilde{T}=E+P(Q-P)P$$

олдуғундан,

$$\widetilde{T}P=P+P(Q-P)P^2=P+P(Q-P)P$$

јахуд

$$\widetilde{T}P=P+PQP-P^3=PQP,$$

бурадан

$$PQQP=\widetilde{T}P. \qquad (30)$$

Ашағыдакы кими оператор тә'јин едәк:

$$U = Q\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}P \qquad (31)$$

(31)-ә дахил олан бу үч операторун һәр бири симметрик олдуғундан асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$U^* = P\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}Q = U. \qquad (32)$$

Доғрудан да

$$U^* = P^*\left(Q\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}\right)^* = P^*\left(\left(\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}\right)^* Q^*\right) = P\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}Q$$

бәрабәрлијиндән (32) өдәнилир,

$$U^*U = P\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}\ QQ\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}P.$$

Бәрабәрлијиндән $U^*U = P$ доғру олдуғуну көстәрәк: P илә $\tilde{T}^{-\frac{1}{2}}$ јерини дәјишдијиндән, онда

$$U^*U = \tilde{T}^{-\frac{1}{2}}\ PQQP\tilde{T}.^{-\frac{1}{2}} \qquad (33)$$

(30)-у нәзәрә алараг (33) ашағыдакы кими јазылар:

$$U^*U = T^{-\frac{1}{2}}\tilde{T}P\tilde{T}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{лакин} \quad P\tilde{T}^{-\frac{1}{2}} = \tilde{T}^{-\frac{1}{2}}P$$

олдуғундан, бурадан

$$U^*U = P \qquad (34)$$

өдәнилир. Шәртә көрә P пројектору H фәзасыны D-јә ин'икас етдирдијиндән һәмин оператор D-ни өзү-өзүнә чевирир. Ашкардыр ки. $T^{-\frac{1}{2}}P$ оператору васитәсилә D чохлуғуну H фәзасына хәтти дахил олан H_1 чохлуғуна чевирир. Шәртә көрә Q, H-ы D_1-ә ин'икас етдирдијиндән онда, бу оператор H_1-и D_1-ә дахил олан мүәјјән D_1' чохлуғуна ин'икас етдирәр. Көстәрдијимиз кими $D_1' \subseteq D_1$

Јухарыда көстәрдијимиз мүлаһизәләрдән һәләлик бу нәтиҹәјә кәлирик ки, U васитәсилә D, D_1'-ә хәтти изоморф ин'икас олунур. Теоремин исбатыны тамамламаг мәгсәдилә

$$D_1' = D_1, \qquad (35)$$

олдуғуну көстәрәк. Онун үчүн исбат едәк ки, һәр һансы h вектору, D_1'-ә ортогоналдырса, онда һәмин елемент D_1-дә ортогоналдыр. $h \perp D_1'$ исә, онда $f \in H$ истәнилән f үчүн $(h, Uf) = 0$ олур. Бурадан исә, $U = U^*$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$(Uh, f) = 0,$$

бәрабәрлији алыныр. f истәнилән олдуғундан $f = Uh$ кими сечсәк, онда

$$(Uh, Uh) = 0$$

өдәнилир.

Бурада исә, $\| Uh \|^2 = 0$ јахуд $Uh = 0$ олур. Белә бир бәрабәрлијә бахаг:

$$PQh = \tilde{T}^{-\frac{1}{2}} \tilde{T}^{-\frac{1}{2}} PQh = \tilde{T}^{\frac{1}{2}} P \tilde{T}^{-\frac{1}{2}} Qh = \tilde{T}^{\frac{1}{2}} Uh = 0$$

олдуғундан, бурадан

$$PQh = 0, \tag{36}$$

өдәнилир.

$(Q - P) Qh = - PQh + Q^2 h = Q^2 h = Qh$:

бу бәрабәрликдән:

$$(Q - P) Qh = Qh.$$

$Qh = y$ вә $Q - P = K$ ишарә етсәк, $Ky - y = 0$ јахуд $(K - E)y = 0$ бәрабәрлијини алырыг. $\| K \| < 1$ олдуғундан $(K - E)$ операторунун тәрси вар.

$$(K - E)(K - E)^{-1} = (K - E)^{-1}(K - E) = E, \tag{37}$$

(37) нәзәрдә тутсаг:

$$(K - E)^{-1}(K - E) y = 0,$$

демәли, $y = 0$, бу о демәкдир ки, $Qh = 0$. Көстәрәк ки, доғрудан да $h \perp D_1$. Бунун үчүн фәрз едәк ки, $f \in D_1$ истәнилән елементдир:

$$(h, f) = (h, Qf) = (Qh, f).$$

Бурадан чыхыр ки, $h \perp D_1$, $D_1 \subseteq D_1'$ дикәр тәрәфдән $D_1' \subset D_1$ бурадан $D_1 = D_1'$. Беләликлә, теорем исбат олунур.

Нәтичә. Фәрз едәк ки,

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots, \tag{38}$$

H фәзасынын алт фәзалар ардычыллығыдыр. Мә'лумдур ки, һәр бир M_n-ә гаршы ујғун P_n пројектору гаршы гојулур. Беләликлә, P_n пројектору H-ы M_n-ә ин'икас етдирир. (38) о заман јығылан ардычыллыг адланыр ки, она ујғун олан пројекторлар јығылан олсун:

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots, \tag{39}$$

Фәрз едәк ки, (39) нормаја көрә мүнтәзәм јығылыр. Јә'ни $\varepsilon > 0$ көрә елә $N(\varepsilon) > 0$ вар ки, $n \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда $\| P_n - P \| < \varepsilon$ олур, јахуд

$$\| \breve{P}_n - \breve{P} \| < 1 \tag{40}$$

бурада,

$$\widetilde{P}_{\text{п}} = \frac{P_{\text{п}}}{\varepsilon}, \quad \widetilde{P} = \frac{P}{\varepsilon}$$

$\widetilde{P}_{\text{п}}, \widetilde{P}$ проjекторлар олдуғундан бундан габаг исбат етдијимиз теоремә көрә $n \geqslant N(\varepsilon)$-дән сонра кәлән $M_{\text{п}}$-ләр M-ә хәтти изоморф ин'икас олур. Белә ки, M, P васитәсилә H-ын ин'икасындан алыныр. Демәли, $n \geqslant N(\varepsilon)$ олан n-ләр үчүн $M_{\text{п}}$-ләр һәмчинин өз араларында бир-биринә хәтти вә изометрик ин'икас олурлар.

§ 9. МҮСБӘТ ХӘТТИ СИММЕТРИК ОПЕРАТОРУН МҮСБӘТ ВӘ МӘНФИ ҺИССӘЛӘРИ

Тә'риф 4. *Фәрз едәк ки, K, H фәзасында верилмиш мүсбәт симметрик оператордур. λ-ны һәгиги параметр гәбул едәрәк*

$$\lambda^{+} = \frac{1}{2}(|\lambda| + \lambda) \text{ вә } \lambda^{-} = \frac{1}{2}(|\lambda| - \lambda)$$

бәрабәрликләри илә тә'јин олунарса, онда $\lambda = \lambda^{+} - \lambda^{-}$ олур *белә ки, $\lambda^{+} \geqslant 0$ вә $\lambda^{-} \geqslant 0$. λ^{+} вә λ^{-}, λ-нын ујғун оларағ, мүсбәт вә мәнфи һиссә адланыр. $K \geqslant 0$ олдуғундан, һәмчинин $K^2 \geqslant 0$. Көстәрмишдик ки, $\sqrt{K^2}$ вар. Буна ујғун олан оператору $|K|$ илә ишарә едиб вә ашағыдакы кими оператор тә'јин едәк*:

$$K^{+} = \frac{1}{2}(|K| + K), \tag{1}$$

$$K^{-} = \frac{1}{2}(|K| - K). \tag{2}$$

K^{+}, K^{-} исә K-нын ујғун оларағ мүсбәт вә мәнфи һиссәси адланыр. Көстәрдијимизә көрә $|K|$, K^2-дан асылы полиномларын лимити кими тә'јин олунур. Она көрә K вә $|K|$ јерләрини дәјиширләр, јә'ни $|K|K = K|K|$. Бу бәрабәрлији нәзәрә алараг (1) вә (2)-ин ифадәләринә көрә, $KK^{+} = K^{+}K$ вә һәм дә $K^{-}K = KK^{-}$ доғрудур. Демәли, $|K|$, K^{+} вә K^{-} операторларынын һәр бириси K илә јерини дәјишир. Еләчә дә (1) вә (2)-дән $K^{+}K^{-} = \frac{1}{4}[|K| + K][|K| - K]$ вә $K\|K\| = |K|K$

бәрабәрликләринә көрә $K^{+}K^{-} = K^{-}K^{+} = 0$. N илә H-ын елә елементләр чохлуғуну ишарә едәк ки, $K^{+}f = 0$ олсун. K-нын вә еләчә дә K^{+} хәтти мәһдуд оператор олдуғу нәзәрә алынарса, онда N, H үчүн алт фәза олдуғу алыныр. Она көрә дә елә P проjектору вар ки, $PH = N$; демәли, она көрә дә $K^{+}P = 0$

олур. K^+ вә һәм дә P симметрик олдугларындан $PK^+ = P^*(K^+)^* = (K^+)^* = (K^+P)^* = 0$, еләчә дә $PK^+ = 0$ олдуғу алыныр. K^-f елементләр чохлуғуну H_1 илә ишарә едәк.

$K^+K^-f = 0$ олдуғундан $K^-f \in N$ нәзәрдә тутсаг $PK^-f = K^-f \in H_1$. Демәли, P, H_1-и өз-өзүнә чевирмәклә $PK^- = K^-$ олур. Һәмчинин $K^-P = K^{-*}P^* = (PK^-)^* = (K^-)^* = K^-, K^-P = K^-$. Нәтичәдә K^+, K^- вә P операторлары үчүн ашағыдакы мүнасибәтләрин доғрулуғуну алырыг:

$$PK^+ = K^+P = 0, \tag{3}$$

$$PK^- = K^-P = K^-. \tag{4}$$

(1) вә (2)-дән $K = K^+ - K^-$ вә (3), (4) бәрабәрликләри нәзәрә алынарса

$$PK = KP = -K^-, \tag{5}$$

(1) вә (2)-дән $|K| = K^+ + K^-$ (3) вә (5)-и нәзәрә алсаг

$$P|K| = |K|P = K^-. \tag{6}$$

$|K| \geqslant 0, P \geqslant 0$ вә $E - P \geqslant 0$ нәзәрә алараг $K^+ \geqslant 0$ вә $K^- \geqslant 0$ олдугларыны асанлыгла јохламаг олар. Доғруданда (5)-ә көрә

$$(E - P)K = K - PK = K + K^- = K^+, \tag{7}$$

(3) вә (4)-дән

$$K^- = K^+P + K^-P = (K^+ + K^-)P = KP.$$

$|K| \geqslant 0$ вә һәм $P \geqslant 0$ нәзәрә алсаг (6) бәрабәрлијиндән $K^- \geqslant 0$. $K^+ = |K| - K^-$ вә $|K|P = K^-$ олдуғундан исә $K^+ = |K| - |K|P = (E - P)|K|$ (6)-ја көрә $(E - P)|K| = |K|(E-P)$, $E-P \geqslant 0$ вә $|K| \geqslant 0$, $K^+ \geqslant 0$ доғру олдуғу алыныр. Нәтичәдә исбат етдик ки, $|\lambda|$, λ^+ вә λ^- параметрләринә ујғун олан $|K|, K^+$ K^- вә операторлары мүсбәтдир. Она көрә дә $|K| = K^+ + K^-$, $|K| \geqslant -K + K^-$ вә беләликлә дә, $|K| \geqslant -K$ ејни гајда үзрә $|K| \geqslant +K$. Она көрә

$$|K| \geqslant \pm K \tag{8}$$

$K^+ \geqslant K^+ - K^- = K$ вә $K^- \geqslant K^- - K^+ = -K$ олдугларындан $K^+ \geqslant K$, $K^- \geqslant -K$ олур.

Теорем 29. $|K|$ (8) бәрабәрсизлијини өдәјән вә K оператору илә јерини дәјишән ән кичик оператордур.

Исбаты. T операторунун варлығыны гәбул едәк, беләки $T \geqslant \pm K$ шәртини өдәмәклә $TK = KT$ өдәнилсин. Бу шәртдән истифадә едәрәк, әввәлчә $TP = PT$ олдуғуну көстәрәк:

$$K^+ T = \frac{1}{2}[\,|K|\,T + KT],$$

$$TK^+ = \frac{1}{2}[T\,|K| + TK].$$

Шәртә көрә $TK = KT$ онда, еләчә дә $|K|\,T = T\,|K|$ олдуғундан $TK^+ = K^+T$. Бурадан $K^+TP = TK^+P, K^+P = 0$ нәзәрә алсаг $K^+TP = 0$ олар. Бу бәрабәрлик көстәрир ки, һәр бир TPf елементи N-ә дахилдир. Она көрә $PTP = TP$. $PT = (PT^*) = (PTP)^* = P^*T^*P^* = PTP$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг P вә T операторлары јерләрини дәјишир вә она көрә $(E-P)T = T(E-P)$ олур. $T > K$, $E-P$ фәргинин мүсбәт олмасыны вә бу операторун T, K операторлары илә јерини дәјишдијини нәзәрә алараг, бурадан $(E-P)T \geqslant (E-P)K = K - K^- = K^+$ јә'ни

$$(E-P)\,T \geqslant K^+ \tag{9}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. $PT = TP$ вә $PK = KP$ доғру олдуғундан $T > K, PT > PK$, бурадан,

$$PT \geqslant K^- \tag{10}$$

олдуғу алыныр. (9) вә (10) көрә $T \geqslant |K|$. Беләликлә, јухарыда тә'риф етдијимиз тәклиф исбат олунур.

K-нын K^+ вә K^- компонентләринин гејд етдијимиз хассәләриндән истифадә едәрәк $K_\lambda = K - \lambda E$ олдугда K_λ^+ вә K_λ^- компонентләринин бир нечә хассәләрини көстәрәк. Бурада, λ һәгиги параметрдир. K-нын спектрал ајрылышыны верәк: $\lambda < \mu$ оларса,

$$-\lambda(f, f) \geqslant -\mu(f, f), \quad -\lambda E \geqslant -\mu E$$

бу ики бәрабәрсизликләрдән

$$K_\lambda \geqslant K_\mu. \tag{11}$$

Дикәр тәрәфдән көстәрмишдир ки, $K_\lambda^+ \geqslant K_\lambda$. Бурадан $K_\lambda^+ \geqslant K_\lambda \geqslant K_\mu$ бәрабәрсизлији алыныр. K_λ вә K_μ операторлары үчүн $K_\lambda K_\mu = K_\mu K_\lambda$ бәрабәрлијинин өдәнилмәси ашкардыр. Көстәрәк ки,

$$K_\lambda^+ \geqslant K_\mu^+ \tag{12}$$

өдәнилир.

Јухарыда гејд етдикләримиз мүнасибәтләрә көрә $K_\lambda \geqslant K_f$ бәрабәрсизлијини нәзәрә алараг (11) көрә $f \in H$ истәнилән μ үчүн

$$K_\mu^2 f = K_\mu K_\mu f \leqslant K_\lambda K_\mu f$$

олдуғундан

$$K_\mu^2 f \leqslant K_\mu K_\lambda f, \qquad (13)$$

олур. Еләчә дә, $K_\lambda \geqslant K_\mu$ вә (11) көрә

$$K_\mu K_\lambda f \leqslant K_\lambda K_\lambda f = K_\lambda^2 f,$$

ја'ни,

$$K_\mu K_\lambda f \leqslant = K_\lambda^2 f \qquad (14)$$

өдәнилир.

(13) вә (14)-дән

$$K_\mu^2 \leqslant K_\varkappa^2 \qquad (15)$$

алыныр. (15)-ин өдәнилдијини көстәрдикдә $K_\lambda \geqslant K_\mu$ вә (11)-дән истифадә етмишдик. $K_\lambda \geqslant K_\mu$ вә (15)-дән $K_\lambda^2 \geqslant K_\mu^3$ олдуғуну көстәрмәк олар. Беләликлә

$$K_\mu^n \leqslant K_\lambda^n, \qquad (16)$$

истәнилән n үчүн доғрулуғуну алыныр. Дикәр тәрәфдән мә'лумдур ки, $|K_\lambda|$ вә $|K_\mu|$ операторлары вә беләликлә дә K_λ^+, K_γ^+ ујғун олараг K_λ вә K_μ-дән асылы мүсбәт әмсаллы $P_1(K_\lambda)$ вә $P_2(K_\mu)$ полиномларын лимити кими тә'јин олунур. Она кө- рә дә (11) вә (16) бәрабәрсизликләрини нәзәрә алсаг $P_1(K_\lambda) \geqslant$ $\geqslant P_2(K_\mu)$ бәрабәрсизлијинин өдәнилдијини беләликлә дә (12) бәрабәрсизлијинин доғрулуғу көстәрилир, Фәрз едәк ки, M, m K-нын ујғун олараг јухары вә ашағы сәрһәддәдир. $f \in H$ истәнилән f үчүн

$$m(f, f) \leqslant (Kf, f) \leqslant M(f, f) \qquad (17)$$

өдәнилир. (17)-дән истифадә едәрәк $\lambda < m$ олдугда асанлыгла

$$K_\lambda \geqslant 0 \qquad (18)$$

өдәнилдијини көстәрмәк олар. $\lambda < m$ олдугда (17)-дән $(Kf, f) \geqslant$ $\geqslant \lambda(f, f)$ вә јахуд $((K - \lambda) f, f) \geqslant 0$ олмагла (18) өдәнилир. $\lambda \geqslant M$ олдугда исә һәмин гајда үзрә (17)-дән $K_\lambda \leqslant 0$ алыныр. Демәли, $\lambda < m$ олдугда (18) өдәнмәклә $K_\lambda^+ = K_\lambda$, $\lambda \geqslant M$ ол- дугда исә $K_\lambda \leqslant 0$ олмагла $K_\lambda^+ = 0$. N_λ илә јенә дә елә еле- ментләр чохлуғуну ишарә едәк ки, $K_\lambda^+ f = 0$ олсун. K_λ^+ опера- торунун λ-дан асылы јухарыда гејд етдијимиз хассәләринин нәзәрдә тутараг N_λ- алт фәзасынын, $\lambda < m$ олдугда јалныз сыфыр елементдән ибарәт олдуғуну λ-нын артмасы илә артан олмасыны вә нәһајәт $\lambda \geqslant M$ олдугда исә бүтүн фәза илә үст- үстә дүшмәсини көстәрәк. $\lambda < M$ олсун. (17)-дән $K_\lambda \geqslant (m - \lambda)E$ олмагла $K_\lambda^+ = K_\lambda$ олдугдан $K_\lambda^+ \geqslant (m - \lambda)E$ олур. Бу бәрабәр- сизликдән көрүндүјү кими әкәр мүәјјән бир f үчүн $K_\lambda^+ f = 0$ олурса, онда $f = 0$ олар. Она көрә дә $N_\lambda = \{0\}$ олур. $\lambda < \mu$ олдуғуну фәрз едәк. N_λ-нын λ-нын артмасилә артан олдуғуну көстәрмәк үчүн $K_\lambda^+ f = 0$ олдугда, һәмчинин $K_\mu^+ f = 0$ олдуғуну көстәрмәк кифајәтдир. $\lambda < \mu$ олдугда, $K_\lambda^+ \geqslant K_\mu^+$ олдуғуну билирик, Дикәр тәрәфдән K_μ^+ мүсбәт оператор олмагла K_λ^+ илә һәм дә өзү илә јерини дәјишир. Она көрә дә $K_\lambda^+ K_\mu^+ \geqslant K_\mu^{+2}$ олур. $(K_\mu^+ K_\lambda^+ f, f)$ скалјар һасилини гијмәтләндирәк. Јухарыдакы бәрабәрсизлијә көрә

$$(K_\lambda^+ K_\mu^+ f, f) \geqslant (K_\mu^{+2} f, f) = (K_\mu^+ f, (K_\mu^+)^* f).$$

$(K_\mu^+)^* = K_\mu^+$ олдуғундан исә $(K_\lambda^+ K_\mu^+ f, f) \geqslant \| K_\mu^+ f \|^2$ олмасы өдәнилир. $K_\lambda^+ f = 0$ оларса, $(K_\mu^+ K_\lambda^+ f, f) = 0$ олур вә беләликлә дә, $\| K_\mu^+ f \|^2 = 0$ бурадан $K_\mu^+ f = 0$. Демәли, $K_\lambda^+ f = 0$ олурса, $\lambda < \mu$ олдугда, һәмчинин $K_\mu^+ f = 0$ өдәнилир. Бу исә N_λ алт фәзасынын λ параметрләринин артан олмасы илә артан олдуғуну көстәрир. Нәһајәт $\lambda \geqslant M$ олдугда $K_\lambda = 0$ олдуғундан N_λ алт фәзасы бүтүн фәза илә үст-үстә дүшүр.

Теорем 30. Әкәр *T*, *H* фәзасында тә'сир едән симметрик оператордурса, онда

$$\| T \| = \sup_{\|x\|=1} | (Tx, x) | . \tag{19}$$

Исбаты. (19)-ин доғрулуғуну исбат етмәк үчүн $M = \sup\limits_{\|x\|=1} | (Tx, x) |$ ишарә едәк. Шварс бәрабәрсизлијинә көрә $(Tx, x) | \leqslant \| T \| \; \| x \|^2$ бурадан исә

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} | (Tx, x) | \leqslant \| T \|$$

јә'ни,

$$M \leqslant \| T \|, \tag{20}$$

олар. Инди $\| T \| \geqslant M$ олдуғуну көстәрмәк үчүн ашағыдакы ејнилији көтүрәк:

$$2(Tx, y) + 2(Ty, x) = (T(x+y), (x+y)) - \\ - (T(x-y), (x-y)). \tag{21}$$

Шәртә көрә $T = T^*$ олдуғуна көрә

$$(Tx, y) = (x, T^* y) = (x, Ty)$$

бу бәрабәрлији нәзәрә алараг (21)-дән ашағыдакы бәрабәрсизлијини тә'јин едәк:

$$4 \, | \operatorname{Re}(Tx, y) | \leqslant 4 \, | (Tx, y) | = \| x + y \|^2 \left(\frac{T(x+y)}{\| x+y \|}, \frac{x+y}{\| x+y \|} \right) =$$

$$+ \| x - y \|^2 \left(\frac{T(x-y)}{\| x-y \|}, \frac{x-y}{\| x-y \|} \right) \leqslant M [\| x+y \|^2 + \| x-y \|^2] =$$

$$= 2M [\| x \|^2 + \| y \|^2],$$

демәли,

$$2[(Tx,y)] \leqslant M(\|x\|^2 + \|y\|^2) \tag{22}$$

олур.

Бурадан исә

$$[(Tx,y)] \leqslant \frac{M}{2}\,[\|x\|^2 + \|y\|^2], \tag{23}$$

өдәнилир. Бурадан $y = \frac{Tx}{\|Tx\|}$ оларса, онда

$$\left|\left(Tx, \frac{Tx}{\|Tx\|}\right)\right| \leqslant \frac{M}{2}\,[\,\|x\|^2 + 1] \tag{24}$$

олдуғундан

$$\|Tx\| \leqslant \frac{M}{2}\,[\,\|x\|^2 + 1] \text{ бурадан } \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \leqslant M$$

јахуд

$$\|T\| \leqslant M. \tag{25}$$

(20) вә (25)-и мүгајисә етсәк $\|T\| = M$ олмагла (19)-ун доғрулуғу исбат олунур. Бурадан нәтичә олараг көстәрәк ки, Һилберт фәзасында

$$\|TT^*\| = \|T^*\|^2 = \|T\|^2 \tag{26}$$

бәрабәрлији доғрудур. Ашкардыр ки, $T_0 = TT^*$ оператору үчүн $T_0^* = T_0$ олур. Онда (19)-ә көрә

$$\|T_0\| = \sup_{\|x\|=1} (T_0x, x). \tag{27}$$

Дикәр тәрәфдән

$$(T_0x, x) = (TT^*x, x) = (T^*x, T^*x) = \|T^*x\|^2$$

она көрә дә

$$\sup_{\|x\|=1} (T_0x, x) = \sup_{\|x\|=1} \|T^*x\|^2,$$

демәли,

$$\|T_0\| = \|T^*\|^2 \tag{28}$$

һәмчинин мә'лумдур ки, Һилберт фәзасында тә'сир едән оператору үчүн $\|T^*\| = \|T\|$ өдәнилир. Бу бәрабәрлији вә (28)-и нәзәрә алсаг (26)-нын өдәнилдији исбат олунур. Ашкардыр ки, (26) ашағыдакы

$$\|TT^*\| = \|T\|\,\|T^*\|, \tag{29}$$

шәклиндә јазылыр.

Теорем 31. *H* фәзасында верилмиш мәһдуд хәтти *T* операторунун симметрик олмасы үчүн $f \in H$ истәнилән *f* үчүн (*Tf*, *f*) скалјар һасилинин һәгиги олмасы зәрури һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрурилиjи. Фәрз едәк ки, T симметрикдир. Көстәрәк ки, (Tf, f) һәгигидир. Шәртә көрә $T=T^*$ олдуғундан $(Tf, f) = (f, Tf)$ олар. Дикәр тәрәфдән исә $(f, Tf) = \left(\overline{Tf, f}\right)$, $(Tf, f) = \left(\overline{Tf, f}\right)$ олур. Беләликлә, (Tf, f) һәгиги олдуғу исбат олунур.

Шәртин кафилиjи. Истәнилән f үчүн (Tf, f) скаларjар һасилинин һәгиги олдуғуну гәбул едәрәк истәнилән f вә g үчүн

$$(Tf, g) = (f, Tg)$$

олдуғуну көстәрәк. $M_{f,g}$ илә ашағыдакы бәрабәрлиjи ишарә едәк:

$$M_{f,g} = (T(f+g), f+g) - (T(f-g), f-g) +$$
$$+ i(T(f+ig), f+ig) - i(T(f-ig), f-ig),$$

$$(T(f+g), f+g) - (T(f-g), f-g) = (Tf, f) + (Tf, g) +$$
$$+ (Tg, f) + (Tg, g) - (Tf, f) + (Tf, g) + (Tg, f) - (Tg, g) =$$
$$= 2(Tf, g) + 2(Tg, f), \tag{30}$$

$$i(T(f+ig), f+ig) - i(T(f-ig), f-ig) = 2i(Tf, ig) +$$
$$+ 2i(Tig, f). \tag{31}$$

(30) вә (31) олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$M_{f,g} = 2(Tf, g) + 2(Tg, f) + 2i(Tf, ig) + 2i(Tig, f),$$
$$M_{f,g} = 2(Tf, g) + 2(Tg, f) + 2(Tf, g) - 2(Tg, f),$$

бурадан

$$M_{f,g} = 4(Tf, g). \tag{32}$$

$M_{f,g}$-нин ифадәсиндә g вә f-ин jерләрини дәjишдирәк:

Онда

$$M_{g,f} = 4(Tg, f). \tag{33}$$

$M_{f,g}$ дахил олан скаларjар һасилләрин һәр бириси шәртә көрә һәиггидир. Она көрә дә $M_{f,g}$ дә f вә g-нин jерләрини дәjишдикдә $M_{f,g}$ вә $M_{g,f}$ гаршылыглы гошма комплек әдәдләрдир, jә'ни

$$M_{f,g} = \overline{M}_{g,f}, \tag{34}$$

$(Tf\ g) = (Tg, f)$ вә jахуд $(Tf, g) = (f, Tg)$ бу бәрабәрлик истәнилән f вә g үчүн өдәнилдиjиндән T-нин симметрик олдуғу алыныр. Беләликлә, кафи шәрт вә теорем исбат олунур.

§ 10. ЛАКС—МИЛГРАМ ТЕОРЕМИ

Теорем 32. Фәрз едәк ки, H комплекс һилберт фәзасыдыр. $H' = H \times H$ тоположи һасилиндә тә'jин олунмуш

$B(f, g)$ бифунксионалынын верилдијини вә һәмин функсионалын ашағыдакы шәртләри өдәдијини фәрз едәк. Ихтијари α_1, α_2, β_1, β_2 әдәдләри вә һәмчинин ихтијари f, g, f_1, g_1, f_2, g_2 елементләри үчүн:

1. $B(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 B(f_1, g) + \alpha_2 B(f_2, g)$,

2. $B(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar{\beta}_1 B(f_1 g_1) + \bar{\beta}_2 B(f, g_2)$ бәрабәрликләри өдәнилир!

3. $B(f, g)$ мәһдуддур, јә'ни елә сабит $M_1 > 0$ әдәди вар ки, ихтијари f вә g үчүн $|B(f,g)| \leqslant M_1 \| f \| \| g \|$,

4. $B(f, g)$ мүсбәт мүәјјәндир, јә'ни елә сабит M_2 әдәди вар ки, истәнилән f үчүн $B(f, f) \geqslant M_2 \| f \|^2$ бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу шәртләр дахилиндә H-да тә'јин олунмуш елә мәһдуд хәтти S оператору вар ки,

$$(x, y) = B(x, Sy) \tag{1}$$

өдәнилир. Белә ки, $\| S \| \leqslant M_2^{-1}$ һәмчинин S^{-1} оператору вар вә $\| S^{-1} \| \leqslant M_1$ олур.

Исбаты. Фәрз едәк ки, y-ә гаршы елә y' елементи вар ки, $(x, y) = B(x, y')$ өдәниләр. Көстәрәк ки, y' елементи y-ә көрә биргијмәтли тә'јин олунур. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни, фәрз едәк ки, y-ә гаршы y'-дән фәргли z' елементи ујғундур, јә'ни $(x, y) = B(x, z')$ өдәнилир, онда $B(x, y') = B(x, z')$. 2-ә көрә бурадан $B(x, y' - z') = 0$ бәрабәрлији истәнилән x үчүн өдәнилдијиндән $x = y' - z'$ олдугда $B(y' - z', y' - z') = 0$. 4 нәзәрдә тутуларса, $y' = z'$ олур. Беләликлә, һәр бир y-ә гаршы мүәјјән бир y' гаршы гојулмагла мүәјјән S операторуну алырыг. Белә ки, $Sy = y'$ һәмин скалјар һасилин $(f, \beta_1 g_1 + \beta_2 g_2) = \bar{\beta}_1 (f, g_1) + \bar{\beta}_2 (f, g_2)$ олдуғуну вә һәмчинин 2-нин өдәнилдијини нәзәрә алсаг, S-ин аддитив вә ејничинсли олдуғу алыныр. S-ин тә'јин олдуғу областы $D(S)$ илә ишарә едәк. Ашкардыр ки, $0 \in D(S)$. S-ин $D(S)$ областында мәһдуд олдуғуну көстәрәк:

Мә'лумдур ки, $(x, y) = B(x, Sy)$ бурада x истәнилән олдуғундан $x = Sy$ оларса,

$$(Sy, y) = B(Sy, Sy),$$

4-ә көрә

$$M_2 \| Sy \|^2 \leqslant B(Sy, Sy) = (Sy, y) < \| Sy \| \| y \| .$$

Она көрә $\| Sy \| \leqslant M_2^{-1} \| y \|$, беләликлә, S мәһдуд олмагла $\| S \| \leqslant M_2^{-1}$. Инди S-ин гапалы олдуғуну көстәрәк. Фәрз едәк ки, $y_n \to y$, S мәһдуд олдуғундан $\{Sy_n\}$ ардычыллығы фундаментал олдуғундан јығылыр. $Sy_n \to z$ олсун. S-ин гапалы олмасыны көстәрмәк үчүн $y \in D(S)$ вә $z = Sy$ олдуғуну көстәрәк:

$$B(x, Sy_n) - B(x, z) = B(x, Sy_n - z),$$
$$|B(x, Sy_n) - B(x, z)| \leqslant M_1 \|x\| \ \|Sy_n - z\|.$$
олдуғундан $\lim\limits_{n\to\infty} B(x, Sy_n) = B(x, z)$.

$B(x, Sy_n) = (x, y_n)$ бурадан $\lim\limits_{n\to\infty}(x, y_n) = B(x, z)$, $(x, y) = B(x, z)$. Демәли, $y \in D(S)$, $z = Sy$ бәрабәрлији өдәнилир. S гапалы оператордур, бу хассәдән истифадә едәрәк көстәрәк ки, $D(S) = H$. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни, фәрз едәк ки, $D(S) \neq H$. $D(S)$ алт фәза олдуғундан елә w_0 вар ки, $w_0 \overline{\in} D(S)$ олмагла $w_0 \in D(S)^\perp$ олур. $D(S)^\perp$, $D(S)$-ин ортогонал тамамлајычысыдыр.

$x^*(x) = B(x, w_0)$ гәбул едәк. 1-ә көрә $x^*(x)$ функсионалы аддитив вә еjничинслидир. Һәмчинин 3-ә көрә $|x^*(x)| \leqslant M_1 \|w_0\| \ \|x\|$ олдуғундан $x^*(x)$ мәһдуддур. Рисс теореминә көрә x^*-а уjғун елә јеканә W_0' вар ки,

$$x^*(x) = (x, w_0').$$

Беләликлә, $(x, w_0') = B(x, w_0)$ бәрабәрлијини алырыг. Бурадан исә $w_0' \in D(S)$, $w_0 = S w_0'$, $D(S) \perp D(S)^\perp$ олдуғуна көрә $(w_0, w_0') = 0$, $B(w_0, w_0') = 0$ 4-ә көрә исә $w_0 = 0$ олур, бу исә $w_0 \neq 0$ шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт $D(S) = H$ олдуғуну көстәрир. Нәһајәт, S^{-1}-ин варлығыны вә мәһдудлуғуну көстәрәк. $Sy = 0$ олдуғуну гәбул едәк вә көстәрәк ки, $y = 0$. $Sy = 0$, $B(x, Sy) = 0$ вә $(x, y) = B(x, Sy) = 0$ олмасы шәртиндән истәнилән x үчүн $(x, y) = 0$, $y = 0$ олур. Беләликлә, S-ин S^{-1} тәрс оператору вар. $(x, S^{-1}y) = \hat{B}(x, y)$ истифадә едәрәк S^{-1} мәһдудлуғуну көстәрәк:

3-ә көрә $|(x, S^{-1}y)| \leqslant M_2 \|x\| \ \|y\|$ вә $x = S^{-1}y$ бурадан $S^{-1}y\| \leqslant M_2 \|S^{-1}y\| \ \|y\|$, $\|S^{-1}y\| \leqslant M_2 \|y\|$ јә'ни; $\|S^{-1}y\| \leqslant M_2$. Беләликлә, теорем исбат олунур.

V ФӘСИЛ

ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАРЫН БАНАХ ФӘЗАСЫНДА СПЕКТРАЛ НӘЗӘРИЈЈӘСИ

§ 1. ВЕКТОР ҺОЛОМОРФ ФУНКСИЈАЛАР

Бу фәсилдә әдәди аргументдән асылы вә гијмәти мүәјјә- (B) фәзасына дахил олан бир синиф вектор функсијалары- бә'зи мүһүм хассәләри верилир вә бурада алынан нәтичәләрн дән хәтти операторларын үмуми спектрал нәзәријјәсиндә истифадә едилир.

Фәрз едәк ки, D комплекс (λ) мүстәвисинин мүәјјән областыдыр вә $f\lambda)$ бу областа тә'јин олунмуш биргијмәтли вектор функсијадыр, белә ки, һәр бир λ-ја гаршы $f(\lambda)$-нин гијмәти мүәјјән $X-(B)$ фәзасына дахилдир. X^* илә X-ә ујғун гошма фәзаны ишарә едәк.

Тә'риф 1. *$x^* \in X^*$ истәнилән x^* үчүн әдәди $f_{x^*}(\lambda)=x^*[f(\lambda)]$ функсијасы D-дә Коши мә'нада һоломорф функсија исә онда $f(\lambda)$, D-дә вектор һоломорф функсија адланыр.*

Һоломорф функсијаларын белә тә'риф олунмасы һәмин функсијалар нәзәријјәсинин јаранмасында мүһүм рол ојнајараг демәк олар ки, әдәди һоломорф функсијалар үчүн Коши нәзәријјәсини үмумиләшдирир. Бу нәзәријјә һаггында данышмагдан габаг гејд едәк ки, әкәр C-ја садә, ја һиссә-һиссә һамар хәтт исә вә $f(\lambda)$ бу хәтт үзрә тә'јин олунмуш вә күчлү мә'нада кәсилмәз функсија оларса, онда $\int\limits_C f(\lambda)\,d\lambda$ интегралы вар, һәмин интегралын варлығы һаггында олан теоремин исбаты илә мәшғул олмајаҹағыг. Лакин, кәсилмәз скалјар функсијаларда интегралын варлығы һаггында теоремин исбатыны билмәклә асанлыгла гијмәти X-ә дахил олан вә күчлү кәсилмәз $f(\lambda)$ функсијасы үчүн һәмин теореми ејни гајда үзрә тәкрар етмәк олар. Лакин вектор һоломорф функсијалар үчүн белә интегралла бағлы бә'зи тәклифләрин исбатыны верәҹәјик.

§ 2. КОШИ ТЕОРЕМИ

Теорем 1. Әкәр $f(\lambda)$ гијмәти мүәјјән $X-(B)$ фәзасына дахил олан (λ) мүстәвисинин мәһдуд бир рабитәли D областында һоломорф функсија исә вә C һәмин областа дахил олан истәнилән һамар гапалы хәтдирсә онда

$$\int\limits_C f(\lambda)\,d\lambda = 0 \tag{1}$$

бәрабәрлији доғрудур.

Исбаты. Һоломорф вектор функсијалар үчүн доғру олан бу мүһүм тәклиф Хан—Банах теореминин нәтиҹәсилә асанлыгла исбат олунур. Әдәди функсијалар үчүн Коши теореминин доғрулуғуну нәзәрә алсаг истәнилән x^* үчүн:

$$\int\limits_C f_{x^*}(\lambda)\,d\lambda = 0$$

јахуд да $\int\limits_C x^*[f(\lambda)]\,d\lambda = 0$. Дикәр тәрәфдән x^*-нин хәттилији, интегралын тә'рифи нәзәрдә тутуларса асанлыгла јохламаг олар ки, интеграл вә функсионал јерләрини дәјишир, јә'ни $x^* \int\limits_C = \int\limits_C x^*$ олур. Бу хассәни нәзәрә алсаг, $x^* \left[\int\limits_C f(\lambda)\, d\lambda\right] = 0.$ Бу бәрабәрлик истәнилән x^* үчүн доғру олдуғундан Хан—Банах теореминә көрә (1) өдәнилмәклә Коши теореми исбат олунур. Бу теоремин исбатындан көрүндүјү кими бу теорем мүәјјән типли сонсуз областлар үчүн вә чохрабитәли областлар үчүн өз күчүндә галыр. Бундан сонракы теоремләрин исбатында $f(\lambda)$ һоломорф функсијалары һаггында сөһбәт олдугда фәрз едәчәјик ки, һәмин функсијаларын гијмәти мүәјјән $X-(B)$ фәзасына дахилдир.

§ 3. КОШИ ДҮСТУРУ

Теорем 2. Әкәр $f(\lambda)$ вектор функсијасы бир рабитәли мәһдуд $\bar{D}$ областында һоломорф исә, онда һәмин областын гапалы һамар C контуру үзрә

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-\lambda}, \tag{1}$$

дүстуру доғрудур.

Исбаты. Бурада λ, D-нин истәнилән дахили нөгтәси t исә C үзрә дәјишир. $f_{x^*}(\lambda)$, $\bar{D}$ областында скалјар һоломорф олдуғундан истәнилән $x^* \in X^*$ үчүн мә'лум Коши дүстуруна көрә

$$f_{x^*}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f_{x^*}(t)\,dt}{t-\lambda} \tag{2}$$

доғрудур. $x^* \int\limits_C = \int\limits_C x^*$ бәрабәрлијини вә еләчә дә x^*-ун аддитивлик хассәсинә көрә бурадан истәнилән $x^* \in X^*$ үчүн

$$x^* \left[f(\lambda) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{t-\lambda} \right] = 0$$

бәрабәрлији алыныр. Бурадан Хан—Банах теореминә көрә (1)-ин доғрулуғу алыныр. Бу дүстур Коши дүстуру адланыр. Коши дүстуру һәм мүәјјән типли сонсуз областлар үчүн вә һәм дә чох рабитәли мәһдуд областлар үчүн доғрудур. (2)-дән истифадә едәрәк $f(\lambda)$-нын төрәмәләри үчүн

$$f^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(t)\,dt}{(t-\lambda)^{n+1}} \tag{3}$$

дүстурунун доғрулуғуну көстәрмәк олар. Мә'лумдур ки, 2)-дән истәнилән x^* үчүн

$$f_{x^*}^{(n)}(\lambda) = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f_{x^*}(t)\,dt}{(t-\lambda)^{n+1}} \tag{4}$$

олур. Дикәр тәрәфдән

$$x^*\left[\lim_{n\to 0} \frac{f(\lambda+h)-f(\lambda)}{h}\right] = \lim_{n\to 0} x^*\left[\frac{1}{h}f(\lambda+h)-f(\lambda)\right] =$$

$$= \lim_{n\to 0}\frac{1}{h}\left[f_{x^*}(\lambda+h)-f_{x^*}(\lambda)\right], \tag{5}$$

олдуғундан $x^*\frac{df(\lambda)}{d\lambda} = \frac{df_{x^*}(\lambda)}{d\lambda}$ вә демәли $\frac{df_{x^*}^{(n)}(\lambda)}{d\lambda^n} = x^*\left[\frac{df_{(}^{n)}(\lambda)}{d\lambda^n}\right]$ бәрабәрлиjини вә (4)-ү нәзәрә алсаг (3)-үн доғру олдуғу алыныр.

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(\lambda-\lambda_0)^n \tag{6}$$

Гүввәт сырасыны көтүрәк, белә ки бу, сыранын нормача јығылдығы фәрз олунмагла гиjмәтләри мүәjjән $X-(B)$ фәзасына дахил олсун. Көстәрмәк олар ки, $\varphi(\lambda)$ (6)-нын чәмидирсә, онда бу функсиjа һәмин сыранын топланма даирәсиндә һоломорф функсиjадыр. Әдәди гүввәт сыраларында олдуғу кими асанлыгла көстәрмәк олар ки, (6) $|\lambda| < R = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\|C_n\|}\right)^{-1}$ даирәси дахилиндә јығылыр вә харичиндә исә дағылыр.

Еләчә дә, $\varphi(\lambda)$-нын күчлү мә'нада тәрәмәси вар. Онда һәм-
чин ин X^*-дан олан истәнилән x^* функсионалы үчүн $x^*[\varphi(\lambda)]$-
нын $|\lambda| < R$ даирәсиндә төрәмәси вар. Јә'ни һоломорф функ-
сиjадыр. Онда $\varphi(\lambda)$ һәмин даирә дахилиндә вектор һоломорф
функсиjадыр. Вектор һоломорф функсиjалар үчүн Коши дүс-
турунун бир вә чох рабитәли областлар үчүн доғру олмасы
имкан верир ки, һәмин функсиjаларын һәм гүввәт сырасы вә
һәм дә Лоран сыраларына аjрылышы һаггында мүәjjән мүла-
һизәләр ирәли сүрсүн. Белә аjрылышларын хәтти мәһдуд опе-
раторларын үмуми спектрал нәзәриjjәнин өjрәнилишиндә мү-
һүм әһәмиjjәти вардыр. Бу аjрылышларын исбат гаjдасы та-
мамилә классик гаjда үзрә апарылыр. Башга сөзлә, исбатын
кедишиндә геjд етдиjимиз кими модул әвәзинә норма көтүр-
мәк кифаjәт едир. Вектор һоломорф функсиjаларынын гүввәт
сырасына аjрылышы бу функсиjалар үчүн јеканәлик теореми-
нин асанлыгла исбатына сәбәб олур. Мә'лумдур ки, әдәди һо-
ломорф функсиjалар үчүн Пуассон дүстуру мүәjjән садә че-
вирмәләр васитәсилә Коши дүстуру вә мүәjjән гаjда үзрә ондан
алынан нәтичәнин васитәсилә исбат олунур. Һәмин садә че-
вирмәләр вектор һоломорф функсиjалар үчүн Коши дүстуру
вә ондан алынан нәтичә үзәриндә тәкрар олунарса белә функ-
сиjалар үчүн Пуассон дүстурунун доғру олдуғу алынар вә
хүсуси һалда һәмин дүстурдан

$$\varphi(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\lambda_0 + Re^{i\psi})\, d\psi \tag{7}$$

Шүбһәсиз $\varphi(\lambda)$, λ_0-ын мүәјјән әтрафында һоломорф көтүрүлүр. (7)-дән истифадә едәрәк вектор һоломорф функсијалар үчүн модулун максимум принсипинә ујғун теорем исбат етмәклә үмумиләшдирилир.

Теорем 3. Әкәр $f(\lambda)$—(λ) мүстәвисинин мүәјјән бир рабитәли мәһдуд D областында гијмәти мүәјјән X—(B) фәзасындан олан вә $f(\lambda)$ ејнилик кими сабит бәрабәр олмајан һоломорф функсија исә, онда $f(\lambda)$ өзүнүн максимум гијмәтини D-дә алмыр.

Исбаты. Бу теореми исбат етмәк үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни гәбул едәк ки, $\lambda_0 \in D$ елә нөгтә вар ки, $\| f(\lambda_0) \| = \max\limits_{\lambda} \| f(\lambda) \|$. Радиусу R вә мәркәзи λ_0-да олан елә σ_{λ_0} даирәсини көтүрәк ки, бу даирә тамамилә D-јә дахил олсун. Онда Коши дүстуруна көрә

$$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)\, dt}{t - \lambda_0}, \tag{8}$$

бурада γ, σ_{λ_0}-ын чеврәсидир. $t - \lambda_0 = Re^{i\theta}$ оларса, онда (8)-дән

$f(\lambda_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\lambda_0 + Re^{i\theta})\, d\theta$ олур. Бурадан

$$\| f(\lambda_0) \| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| f(\lambda_0 + Re^{i\theta}) \|\, d\theta \tag{9}$$

$$\| f(\lambda_0) \| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \| f(\lambda_0) \|\, d\theta \qquad (10$$

(9) вә (10)-дан

$$\int_0^{2\pi} [\, \| f(\lambda_0) \| - \| f(\lambda_0 + Re^{i\theta}) \| \,]\, d\theta \leqslant 0. \tag{11}$$

Бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг (11)-ә дахил олан интеграл алты функсија мүсбәт ола билмәз, беләликлә

$$\| f(\lambda_0) \| - \| f(\lambda_0 + Re^{i\theta}) \| \leqslant 0, \tag{12}$$

дикәр тәрәфдән

$$\| f(\lambda_0 + Re^{i\theta}) \| \leqslant \| f(\lambda_0) \|, \tag{13}$$

(12) вә (13)-дән

$$\| f(\lambda_0 \| = \| f(\lambda_0 + Rc^{i\theta}) \|. \tag{14}$$

(14)-ин сағ тәрәфи θ-ја нәзәрән кәсилмәз олдуғундан $\lambda \in D$ истәнилән λ үчүн $\| f(\lambda) \| = \| f(\lambda_c) \|$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $\| f(\lambda) \| \neq \text{const}$ олмасы шәртинә зиддир, алынан зиддијәт теоремин доғрулуғуну көстәрир.

Нәһајәт әдәди һоломорф функсијалар үчүн исбат олунмуш Коши типли интеграл вә бир чох теоремләр вектор һоломорф функсијалар үчүн үмумиләшдирилир. Биз хәтти операторларын үмуми спектрал нәзәријјәсиндә јалныз јухарыда гејд етдијимиз теоремләрдән истифадә етдијимизә көрә бу параграфда белә үмумиләшдирилмәләри гејд етмәклә кифајәтләнирик.

§ 4. ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛАРЫН ҮМУМИ СПЕКТРАЛ НӘЗӘРИЈЈӘСИ

Бу фәсилдә сонлу вә сонсуз өлчүлү комплекс $X-(B)$ фәзасында мәһдуд вә мәһдуд олмајан операторларын үмуми спектрал нәзәријјәси верилир.

Тә'риф 2. *Фәрз едәк ки, T сонлу өлчүлү X фәзасында тә'сир едән мәһдуд хәтти оператордур.*

Верилмиш $P(\lambda) = \sum\limits_{\text{к}=0}^{n} \alpha_{\text{к}} \lambda^{\text{к}}$ полиномуна $\sum\limits_{\text{к}=0}^{n} \alpha_{\text{к}} T^{\text{к}}$ оператору гаршы гојаг, белә ки, $T^0 \equiv E$. Бу полиному ејни характеристика илә ишарә едәк:

$$P(T) = \sum_{\text{к}=0}^{n} \alpha_{\text{к}} T^{\text{к}}. \tag{1}$$

Теорем 4. $P(T)=0$ олмасы үчүн $P(\lambda)$-нын, T операторунун спектринә дахил олан һәр бир μ_i нөгтәсиндә, тәртиби T-нин μ_i-јә ујғун $\nu(\mu_i)$ индексиндән аз олмамаг шәрти илә сыфыр олмасы зәрури, һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин кафилији. Фәрз едәк $P(\lambda) = \rho \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda - \mu_i)^{\lambda_i}$ истәнилән полиномдур. $\lambda_i \geqslant \nu(\mu_i)$ вә μ_i нөгтәләри T-нин спектринә дахилдир. Исбат едәк ки, $P(T) = 0$. Фәрз едәк ки, X $к$-өлчүлү фәзадыр, бу фәзанын базис векторларыны $x_1, x_2, \ldots, x_{\text{к}}$ илә ишарә едәк. Онда

$$x_1,\ Tx_1,\ T^2x_1, \ldots, T^{\text{к}}x_1$$

векторлары хәтти асылы оларлар. Јә'ни һамысы ејни заманда сыфыр олмајан елә β_j $(j = \overline{1, к})$ сабит әдәдләри вар ки,

$$\sum_{j=0}^{к} \beta_j\, T_j\, x_1 = 0. \qquad (2)$$

T хәтти оператор олдуғундан

$$\left[\sum_{j=0}^{к} (\beta_j\, T_j)\right] x_1 = 0, \qquad (3)$$

$$\sum_{j=0}^{к} \beta_j\, T_j = P_1(T) \qquad (4)$$

ишарә етсәк, онда

$$P_1(T)\, x_1 = 0. \qquad (5)$$

Гејд едәк ки, $P_1(T)$ дәрәчәси сыфыр олмајан полиномдур. Ејни гајда үзрә һәр бир x_ν $(\nu = \overline{1, к})$ елементинә ујғун дәрәчәси сыфыр олмајан елә $P_\nu(T)$ полиному гурмаг олар ки,

$$P_\nu(T)\, x_\nu = 0. \qquad (6)$$

Јенә дә T-нин хәттилијинә көрә $\nu \neq \mu$ олан көстәрилән нөмрәли ν вә μ үчүн

$$P_\nu(T)\, P_\mu(T) = P_\mu(T)\, P_\nu(T). \qquad (7)$$

$P_j(T)$ $(j = \overline{1, к})$ операторлары васитәсилә тә'јин олунан

$$P'(T) = \prod_{j=1}^{к} P_j(T) \qquad (8)$$

операторуну дүзәлдәк вә бу операторла x_s елементинә тә'сир едәк:

$$P'(T)\, x_s = \prod_{j=1}^{к} P_j(T)\, x_s,$$

$P'(T)\, x_s$-и ашағыдакы кими јазаг:

$$P'(T)\, x_s = \prod_{j=1}^{к} P_j(T)\, x_s = \left(\prod_{j=1}^{к}{}^{s} P_j(T)\right) P_s(T)\, x_s = 0,$$

бурада $\prod^{s}$ көстәрир ки, бу һасилә $P_s(T)$ дахил дејилдир. $P_s(T)\, x_s = 0$ олдуғундан $P'(T)\, x_s = 0$, $(s = \overline{1, к})$. X-ә дахил олан истәнилән x елементи

$$x = \sum_{s=1}^{к} \gamma_s\, x_s$$

шәклиндә көстәрилдијиндән

$$P'(T)\,x = \sum_{j=1}^{\kappa} \gamma_j\, P'(T)\, x_j = 0.$$

Беләликлә, $P'(T)\,x = 0$ истәнилән x үчүн өдәнилдијиндән $P'(T) = 0$ олур. Инди $P'(T)$-ә ујғун әдәди полином

$$P'(\lambda) = \sum_{j=0}^{\kappa} \omega_j\, \lambda^j \tag{9}$$

олсун. Онда бу полиному өз сыфырлары васитәсилә

$$P'(\lambda) = \beta \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \tag{10}$$

шәклиндә көстәрмәк олар.

(10)-на дахил олан λ_i-ләрин бә'зиләринин спектрә дахил олмамасындан вә спектрә дахил оланларын индексиндән асылы олараг $P'(\lambda)$-ны садәләшдирмәк олар. T-нин спектрини $\sigma(T)$ илә ишарә едәк. Фәрз едәк ки, $\lambda_1 \overline{\in} \sigma(T)$ P' (λ)-ны ашағыдакы шәкилдә јазаг:

$$P'(\lambda) = \beta(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_1} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}. \tag{11}$$

Π^{λ_1} көстәрир ки, бу һасилә $(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}$ дахил дејилдир. (11)-дән

$$P'(T) = \beta(T - \lambda_1 E)^{\alpha_1} \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_1} (T - \lambda_i E)^{\alpha_i} \tag{12}$$

$x \in X$ олан истәнилән x исә, онда (12)-дән

$$P'(T)x = \beta(T - \lambda_1 E)^{\alpha_i} \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_1} (T - \lambda_i E)^{\alpha_i}\, x \tag{13}$$

вә

$$x' = \beta \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_1} (T - \lambda_i E)^{\alpha_i}\, x \tag{14}$$

ишарә етсәк, (13)-дән

$$P'(T)\,x = (T - \lambda_1 E)^{\alpha_i}\, x'.$$

$P'(T)\,x = 0$ олдуғундан, бурадан $(T - \lambda_1 E)^{\alpha i}\, x' = 0$. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $x' = 0$. Доғрудан да, $(T - \lambda_1 E)^{\alpha_1}\, x' = 0$ бәрабәрлијиндә $x'' = (T - \lambda_1 E)^{\alpha_i - 1}\, x'$, $\alpha_1 \geqslant 1$ илә ишарә етсәк, $Tx'' - \lambda_1 x'' = 0$ олмагла $\lambda_1 \overline{\in} \sigma$ (T) олдуғуну нәзәрә алсаг, бурадан $x'' = 0$, онда

$$(T - \lambda_1 E)^{\alpha_1 - 1}\, x' = 0.$$

Ардычыл олараг $(\alpha_1 - 1)$-и азалтмагла

$$Tx' - \lambda_1 x' = 0$$

бәрабәрлијиндән $x' = 0$ олдуғу алыныр, (13)-дән

$$\left[\beta \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_1} (T - \lambda E)^{\alpha_i}\right] x = 0.$$

$P''(T) = \beta \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_1} (T - \lambda_i E)^{\alpha_i} x$ оларса, $P''(T) = 0$ олур. Демәли, $\lambda_1 \overline{\in} \sigma(T)$ олдугда $P'(T) = 0$ ифадәсиндән

$$P'(T) = (T - \lambda_1 E)^{\alpha_1} P''(T) = 0$$

олмагла $P''(T) = 0$ олур. Гејд етдикләримиздән көрүндүјү кими, $P'(\lambda)$-нын $\sigma(T)$-јә дахил олмајан λ_j сыфырлары варса $(T - \lambda_j E)^{\alpha_j}$ шәклиндә вуруглары $P'(T) = 0$ бәрабәрлијиндән атыларса, јердә галан оператор полиному јенә сыфыр олар. Һәмин полиному $Q'(T)$ илә ишарә етсәк, $Q'(T) = 0$. $Q'(T)$-ни ашағыдакы кими јазаг:

$$Q'(T) = \rho \prod_{i=1}^{m'} (T - \mu_i E)^{\alpha_i}. \tag{15}$$

(14)-ә дахил олан μ_i-ләр мүәјјән λ_j-лара ујғун әдәдләрдир.

T-нин μ_i-ләрә ујғун индексләри илә әлагәдар олараг $Q'(T) = 0$ бәрабәрлији үзәриндә бә'зи мүлаһизәләр апармаг мәгсәдилә әввәлҹә T-нин индексинә тә'риф верәк.

Тә'риф 3. $\nu(\mu_i)$ *T-нин μ_i-ә ујғун о заман индекси адланыр ки, елә натурал $\nu(\mu_i)$ әдәди вар ки,*

$$(T - \mu_1 E)^{\nu(\mu_1)+1} x = 0 \tag{16}$$

бәрабәрлијиндән

$$(T - \mu_i E)^{\nu(\mu_i)} x = 0 \tag{17}$$

бәрабәрлији алынмагла X-ә дахил олан ән азы $x' \neq 0$ олан елә нөгтә вар ки, $(T - \mu_i)^{\nu(\mu_1)-1} x' \neq 0$ олур.

(15)-ә дахил олан $(T - \mu_\nu E)^{\alpha_\nu}$ вуруғуну көтүрәк вә фәрз едәк ки, $\alpha_\eta \geqslant \nu(\lambda_\nu)$ онда

$$\alpha_\nu = \nu(\mu_\nu) + \delta(\mu_\nu) \tag{18}$$

шәклиндә көстәриләр. Белә ки, $\delta(\mu_\nu) \geqslant 0$.

$$Q'(T) = (T - \mu_\nu E)^{\alpha_\nu} \rho \prod_{i=1}^{m'}{}^{\alpha_\nu} (T - \mu_i E)^{\alpha_i} \tag{19}$$

шәклиндә јазараг

$$Q_1'(T) = \rho \prod_{i=1}^{m'}{}^{\alpha_\nu} (T - \mu_i E)^{\alpha_i}$$

ишарə едəк.

$Q'(T)x = (T - \mu_\nu E)^{\alpha_\nu} x'$ бəрабəрлиjини алырыг, бурада $x' = Q_1'(T)x$, она көрə дə

$$Q'(T)x = (T - \mu_\nu E)^{\alpha_\nu} x' = (T - \mu_\nu E)^{\nu(\mu_\nu) + \delta(\mu_\nu)} x' \qquad \text{олар}$$

$Q'(T)x = 0$ олдуғуну нəзəрə алсаг, $(T - \mu_\nu E)^{\nu(\mu_\nu)+\delta(\mu_\nu)} x' = 0$. Шəртə көрə $\nu(\mu_\nu)$, μ_ν-ə уjғун индекс олдуғундан

$$(T - \mu_\nu E)^{\nu(\mu_\nu)} x' = 0. \tag{20}$$

Бурадан белə бир нəтичəjə кəлирик ки, əкəр

$$\beta_i = \min(\alpha_i, \nu(\mu_i))$$

илə ишарə етсəк, онда $Q'(T) = 0$-дан $Q''(T) = 0$ олан оператор полиномуну сечмəк олар:

$$Q''(T) = \rho \prod_{i=1}^{m''} (T - \mu_i E)^{\beta_i}. \tag{21}$$

(21)-ə дахил олан $Q''(T)$-ə уjғун $Q''(\lambda)$ полиному белə jазылыр:

$$Q''(\lambda) = \rho \prod_{i=1}^{m''} (\lambda - \mu_i)^{\beta_i}. \tag{22}$$

Фəрз едəк ки, $P(\lambda) = \rho \prod\limits_{i=1}^{m} (\lambda - \mu_i)^{\gamma_i}$ олан $\gamma_i \geqslant \nu_i(\mu_i)$ истəнилəн полиномдур. Һəр бир $P(\lambda)$, $Q''(\lambda)$-jа бөлүнəн вə $Q''(T) = 0$ олдуғундан $P(T) = 0$ олур.

Шəртин зəрурилиjи. Фəрз едəк ки, елə $P(\lambda)$ полиному вар ки,

$$P(T) = 0 \tag{23}$$

олур. Онда исбат едəк ки, $P(\lambda) = 0$ шəртини өдəjəн һəр бир λ^i сыфры $\sigma(T)$-jə дахил олмагла белə сыфрын тəртиби уjғун индекс- дəн əз деjил.

$$P(\lambda) = \beta \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \tag{24}$$

кими jазаг. Əввəлчə көстəрəк ки, $\sigma(T)$-нин һəр бир нөгтəси $P(\lambda)$-нын сыфрыдыр, башга сөзлə, $\lambda_1 \in \sigma(T)$ оларса, онда λ_1 (24)-ə дахилдир. Она көрə дə фəрз едəк ки, $\lambda_1 \in \sigma(T)$ олсун.

Онда елә $x \neq 0$ елементи вар ки, $\lambda_1 x - Tx = 0$ вә јахуд да (24)-дән $Tx = \lambda_1 x$, бурадан исә истәнилән m үчүн

$$T^m x = \lambda_1^m x. \tag{25}$$

$P(\lambda)$-ны

$$P(\lambda) = \sum_{\kappa=0}^{n} \alpha_\kappa \lambda^\kappa \tag{26}$$

шәклиндә јазаг. (25)-и нәзәрә алсаг,

$$P(\lambda_1)\, x = P(T)\, x \tag{27}$$

шәклиндә јазылар. $P(T) = 0$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг, (27)-дән $P(\lambda_1)x = 0$, лакин $x \neq 0$ охудуғундан $P(\lambda_1) = 0$ олур. Еләчә $P(\lambda)$ үчүн сыфыр олдә $\sigma(T)$-јә дахил олан һәр бир μ_i-нин дуғу көстәрилир. Инди көстәрәк ки, (24)-ә дахил олан λ_i-нин α_i тәртиби, $\alpha_i \geqslant \nu\ (\lambda_1)$ бәрабәрсизлијини өдәјир. Онун үчүн әксини фәрз едәк $\alpha_i < \nu(\lambda_i)$ $\nu(\lambda_i)$, λ_i-јә ујғун T-нин индекси олдуғундан $x \neq 0$ олан елә x вар ки,

$$(T - \lambda_i E)^{\alpha_i + 1} x = 0 \tag{28}$$

өдәнмәклә

$$(T - \lambda_i E)^{\alpha_i} x \neq 0, \tag{29}$$

әкс һалда $\nu(\lambda_i)$-нин тә'рифинә көрә $\alpha_i \geqslant \nu(\lambda_i)$ оларды. $y = (T - \lambda_i E)^{\alpha_i} x$ олсун, онда $y \neq 0$ олур. Она көрә

$$(T - \lambda_i E)\,(T - \lambda_i E)^{\alpha_i} x = 0 \tag{30}$$

бәрабәрлијиндән

$$Ty = \lambda_i y \tag{30}$$

бәрабәрлији алынып. $P(\lambda)$-ны

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} \rho \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_i} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}$$

шәклиндә көстәрәрәк

$$\rho \prod_{i=1}^{m}{}^{\lambda_i} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i} = Q(\lambda)$$

ишарә етсәк:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i}\, Q(\lambda),$$

вә јахуд

$$P(T) = (T - \lambda_i E)^{\alpha_i}\, Q(T) = Q(T)\,(T - \lambda_i E)^{\alpha_i}.$$

Бурадан исә

$$P(T) = Q(T)(T - \lambda_i E)^{\alpha_i}.$$

Ашкардыр ки, $Q(\lambda_i) \neq 0$ вә $y \neq 0$ нәзәрә алсаг, $Q(T)y = Q(\lambda_i)y$ бәрабәрлијинә көрә $Q(T)y \neq 0$ өдәнилир.

$$P(T)x = Q_1(T)(T - \lambda_i E)^{\alpha_i} x$$

бәрабәрлијиндән

$$P(T)x = Q(T)y. \tag{31}$$

$y \neq 0$ вә $Q(\lambda_i) \neq 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (31)-дән $Q(T)y \neq 0$ өдәнилир. Еләчә дә, $P(T)x \neq 0$. Бу исә $P(T) = 0$ шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\alpha_i \geqslant \nu(\lambda_i)$ олур. Беләликлә, теорем исбат олунур. Бурадан ашағыдакы ики нәтичә алыныр.

1. Сонлу өлчүлү фәзада тә'јин олунмуш вә һәмин фәзаја тә'сир едән хәтти вә мәһдуд операторун спектри сонлу вә мәһдуддур.

2. Фәрз едәк ки, $P(T)$ вә $Q(T)$ T-јә гаршы гојулмуш оператор полиномлардыр. $P(\lambda)$ вә $Q(\lambda)$-нын ујғун әдәди полиномларыны көтүрәрәк $R(\lambda) = P(\lambda) - Q(\lambda)$ олсун, $\nu(\lambda_i)$ илә λ_i-јә ујғун T-нин индексини ишарә едәк. $P(T) = Q(T)$ олмасы үчүн T-нин спектринә дахил олан һәр бир λ_i нөгтәсиндә $R^{(к)}(\lambda_i) = 0$ $(к = \overline{0, \nu(\lambda_i) - 1})$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир. Әкәр $R(\lambda)$-нын λ_i нөгтәсиндә тәртиби α_i оларса, онда ашкардыр ки, $\alpha_i \geqslant \nu(\lambda_i)$ олар. Она көрә дә исбат етдијимиз теоремә әсасән $R(T) = 0$ вә јахуд да $P(T) = Q(T)$ олмасы үчүн көстәрилән шәртин зәрури вә кафи олмасы алыныр. Биз бурада T-дән асылы олан полином операторларын бә'зи хассәләрини арашдырдыг. Инди белә операторлардан асылы мүәјјән синиф оператор функсијаларыны тәдгиг едәк.

Тә'риф 4. *$\sigma(T)$-ни өз дахилиндә сахлајан мәһдуд областларда аналитик олан функсијалар синфини $\Phi(T)$ илә ишарә едәк.*

Бу тә'рифдән ајдын олдуғу кими, $\Phi(T)$-јә дахил олан һәр бир функсијанын мүәјјән тә'јин областлары вар вә бә'зән белә област әлагәли олмаја да биләр. $f(\lambda) \in \Phi(T)$ олсун, $f(\lambda)$-ја мүәјјән бир $P(\lambda)$ полиному гаршы гојаг, белә ки, $\lambda_i \in \sigma(T)$ олан истәнилән λ_i-дә

$$f^{(к)}(\lambda_i) = P^{(к)}(\lambda_i), \tag{32}$$

$$0 \leqslant к \leqslant \nu(\lambda_i) - 1.$$

Бу гајда үзрә тә'јин олан $P(\lambda)$ полиномуна гаршы гојула оператор полиному $P(T)$ илә ишарә едәрәк, $P(T)=f(T$ олдуғуну гәбул едәк. Демәли, $f(\lambda)\in\Phi(T)$ һәр бир $f(\lambda)$-j мүәјјән бир $f(T)$ гаршы гојулур. Асанлыгла көстәрмә олар ки, $f(T)$, $f(\lambda)$ васитәсилә биргијмәтли тә'јин олунур Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни ејни $f(\lambda)$-ја мүхтәлиф $f(T)$ вә $g(T)$ оператор функсијаларынын гаршы гојулдуғуну фәрз едәк. Тә'рифдән ашкар олдуғу кими, әкәр $f(T$ вә $g(T)$ ујғун олараг $P(\lambda)$ вә $Q(\lambda)$ полиномлары васитәсил тә'јин олурса, онда $Q^{(к)}(\lambda_i)=P^{(к)}(\lambda_i)$, $0\leqslant к\leqslant\nu(\lambda_i)-1$ өдәнилмәлидир. Исбат етмишдик ки, бу шәрт дахилиндә $Q(T)=$ $=P(T)$ олар. Она көрә дә $f(T)=g(T)$ олдуғу алыныр. Еләчә дә, $f(T)=0$ олмасы үчүн $\lambda_i\in\sigma(T)$ олан истәнилән λ_i нөгтәсиндә $f^{(к)}(\lambda_i)=0$, $0\leqslant к\leqslant\nu(\lambda_i)-1$ олмасы зәрури в кафи шәртдир.

Инди $f(T)$ функсијалар синфинин бир нечә хассәсин көстәрәк

1. Әкәр $f(\lambda)$, $g(\lambda)\in\Phi(T)$ вә α, β ихтијари әдәдләр ис онда

$$(\alpha f+\beta g)\,T=\alpha f(T)+\beta g(T) \tag*{(33}$$

вә онун үчүн

$$F(\lambda)=\alpha f(\lambda)+\beta g(\lambda) \tag*{(34}$$

олсун. Бурадан алынан

$$F^{(к)}(\lambda_i)=\alpha f^{(к)}\ \lambda_i)+\beta g^{(к)}(\lambda_i),\quad 0\leqslant к\leqslant\nu(\lambda_i)-1$$

бәрабәрлијини нәзәрдән кечирәк.

$0\leqslant к\leqslant\nu(\lambda_i)-1$ оларса, $f^{(к)}(\lambda_i)=P^{(к)}(\lambda_i)$ олдуғунда $f(T)=P(T)$ вә $g^{(к)}(\lambda_i)=Q^{(к)}(\lambda_i)$ алыныр вә $g(T)=Q(T$ олур. Беләликлә, $0\leqslant к\leqslant\nu(\lambda_i)-1$ нәзәрә алсаг,

$$F^{(к)}(\lambda_i)=\alpha f^{(к)}(\lambda_i)+\beta g^{(к)}(\lambda_i)=\alpha P^{(к)}(\lambda_i)+\beta Q^{(к)}(\lambda_i),$$

бурадан

$$F^{(к)}(\lambda_i)=\lambda P^{(к)}(\lambda_i)+\beta Q^{(к)}(\lambda_i)$$

бәрабәрлијиндән

$$F(T)=\alpha P(T)+\beta Q(T).$$

$F^{(к)}(\lambda_i)=[\alpha P(\lambda_i)+\beta Q(\lambda_i)]^{(к)}$ бу бәрабәрликдән көрүндүј кими, $\alpha P(\lambda)+\beta Q(\lambda)$ полиномуна гаршы $\alpha f(\lambda)+\beta g(\lambda)$ гојулмагла (33)-үн доғру олмасы алыныр.

2. $(fg)\,T=f(T)\,g(T)=g(T)\,f(T)$ олдуғуну көстәрәк $F_1(\lambda)=f(\lambda)\,g(\lambda)$ оларса, бурадан $F^{(к)}(\lambda_i)=[f(\lambda)\,g(\lambda)]_{\lambda_i}^{(к)}=$ $=[P(\lambda)\,Q(\lambda)]_{\lambda_i}^{(к)}$ өдәнилир. $P(\lambda)Q\ (\lambda)=R(\lambda)$ ишарә етсәк $F_i^{(к)}(\lambda_i)=R^{(к)}(\lambda_i)$ олар.

$$(f\cdot g)\,T=R(T)=P(T)\,Q(T)=Q(T)\,P(T).$$

$$f(T)g(T) = g(T)f(T)$$

бәрабәрлијиндән 2 өдәнилир.

3. $P(\lambda) = \sum\limits_{\kappa=0}^{n} \alpha_\kappa \lambda_\kappa$ олдугда, $P(T) = \sum\limits_{\kappa=0}^{n} \alpha_\kappa T^\kappa$ васитәсилә тә'јин олдуғуну көстәрәк. Әввәлҹә ашкардыр ки, $P(\lambda)$ бүтүн мүстәвидә аналитик олдуғундан $P(\lambda) \in \Phi(T)$, дикәр тәрәфдән исә, әкәр $Q(\lambda)$, $P^{(\kappa)}_{(\lambda i)} = Q^{(\kappa)}_{(\lambda i)}$ $0 \leqslant \kappa \leqslant \nu(\lambda_i) - 1$ бәрабәрлијини өдәмәклә $P(\lambda)$-ја гаршы гојулурса, онда $P(\lambda) = Q(\lambda)$ олмагла 3-үн өдәнилдији алыныр.

§ 5. *X*-ФӘЗАСЫНЫН АЈРЫЛЫШЫ

$\Phi(T)$-јә дахил олан мүәјјән функсијалар васитәсилә пројекторлар тә'јин етмәклә X фәзасынын мүәјјән ајрылышыны көстәрәк.

$\lambda = \lambda_0$-ы (λ)-мүстәвисинин гејд олунмуш нөгтәси фәрз едәрәк

$$e_{\lambda_0}(\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda \in \sigma_{\lambda_0} \\ 0, & \sigma(T) \bigcap \{\lambda_0\}'\text{-дән олан} \\ & \text{истәнилән нөгтәнин мүәјјән әтрафында} \end{cases} \qquad (1)$$

функсијасыны көтүрәк, σ_{λ_0} бурада λ_0-ын мүәјјән әтрафыдыр.

(1)-ин тә'јининдән көрүндүјү кими, $e_{\lambda_0}(\lambda)$ мүәјјән әлагәсиз областларда тә'јин олунмуш аналитик функсијадыр. $e_{\lambda_0}(\lambda) \in \Phi(T)$ олдуғундан, көстәрдијимиз гајда үзрә $e_{\lambda_0}(\lambda)$-ја $e_{\lambda_0}(T)$ оператор функсијасыны гаршы гојаг.

Теорем 5. $e_{\lambda_0}(T) \neq 0$ өдәнилмәси үчүн $\lambda_0 \in \sigma(T)$ олмасы зәрури, һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин кафилији. Фәрз едәк ки, $\lambda_0 \in \sigma(T)$, онда $e_{\lambda_0}(T) \neq 0$ олдуғуну көстәрәк. Бунун үчүн әксини гәбул едәк, јә'ни $e_{\lambda_0}(T) = 0$ олсун. Әкәр $\sigma(T)$-нин λ_j нөгтәси бу полином үчүн тәртиби $\nu(\lambda_j)$-дан аз олмајан сыфыр исә, онда исбат етдијимиз кими, $P(T) = 0$ оларды. Лакин онда $e_{\lambda_0}(\lambda)$-ја ујғун олан елә $P(\lambda)$ полиному вар ки, $\sigma(T)$-нин һәр бир λ_j-да, $0 \leqslant \kappa \leqslant \nu(\lambda_j) - 1$ оларса, $P^{(\kappa)}(\lambda_j) = e^{(\kappa)}_{\lambda_0}(\lambda_j)$ тә'јин олдуғундан $e_{\lambda_0}(\lambda_0) = 1$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг, онда $P(\lambda_0) = 1$ олар. Бу исә $P(T) = 0$ олмасы шәртинә зидд олар. Демәли, $\lambda_i \in \sigma(T)$ олдугда $e_{\lambda_0}(T) \neq 0$ олур.

Шәртин зәрурилији. Инди $e_{\lambda_0}(T) \neq 0$ олдугда $\lambda_0 \in \sigma(T)$ олдуғуну көстәрәк. Әксини фәрз едәк: $\lambda_0 \in \overline{\sigma}(T)$. Онда $e_{\lambda_0}(\lambda)$-нын тә'јининдән көрүндүјү кими, $\lambda_i \in \sigma(T)$ олан спектрин λ_j нөгтәләри үчүн $e_{\lambda}^{({}_0\kappa)}(\lambda_j) = 0$ $(\kappa = \overline{0, \infty})$ олар. Она көрә дә $e_{\lambda_0}(\lambda)$-ја ујғун олан $P(\lambda)$-да һәмчинин $0 \leqslant \kappa \leqslant \nu(\lambda_j)$ гијмәтләриндә $P^{(\kappa)}\gamma_j = 0$ олур вә она көрә $e_{\lambda_0}(T) = 0$, бу исә $e_{\lambda_0}(T) \neq 0$ шәртинә зиддир, демәли, $e_{\lambda_0}(T) \neq 0$ олдугда $\lambda_0 \in \sigma(T)$ олур. Бунунла теорем исбат олунур.

$\sigma(T)$-јә дахил олан һәр бир λ_j ујғун $e_{\lambda j}(T)$ вектор функсијасыны дүзәлдәрәк бунларын бир нечә хассәләрини көстәрәк. $e_{\lambda_0}(T) = E(\lambda_0)$ ишарә едәк.

$$E^2(\lambda_0) = E(\lambda_0) \tag{2}$$

олдуғуну көстәрәк:

$$e^2_{\lambda_0}(\lambda) = e_{\lambda_0}(\lambda)\, e_{\lambda_0}(\lambda) = e_{\lambda_0}(\lambda) \tag{3}$$

олдуғундан 2-чи хассәјә көрә

$$e^2_{\lambda_0}(T) = e_{\lambda_0}(T) \cdot e_{\lambda_0}(T) = e_{\lambda_0}(T)$$

олдугда (3) өдәнилир. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ олдугда

$$E(\lambda_1)\, E(\lambda_2) = E(\lambda_1) \cdot E(\lambda_2) = 0. \tag{4}$$

Бу хассә исә ашағыдакы бәрабәрликдән алыныр:

$$e_{\lambda_1}(\lambda)\, e_{\lambda_2}(\lambda) = e_{\lambda_2}(\lambda)\, e_{\lambda_1}(\lambda) = 0. \tag{5}$$

Ашағыдакы кими $F(\lambda)$ функсијасыны тә'јин едәк:

$$F(\mu) = \sum_{\lambda \in \tau(T)} e_{\nu}(\mu) = \sum_{i=1}^{n} e_{\lambda_i}(\mu) \tag{6}$$

$F(\mu)$-јә гаршы гојулан $F(T)$ оператор функсијасы

$$F(T) = \sum_{\lambda \in \tau(T)} E(\lambda) \tag{7}$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур.

$F(\lambda)$-ја ујғун $F(T)$-ни билаваситә тә'јин едәк.

$e_\lambda(\mu)$-нин тә'рифиндән көрүндүјү кими, λ-нын елә δ_λ әтрафы вар ки, $\mu \in \delta_\lambda$ олдугда, $e_\lambda(\mu) = 1$ вә $\mu \in \{\lambda\}' \cap \sigma(T)$ истәнилән μ үчүн $e_\lambda(\mu) = 0$ олур.

$F(\mu)$-нин тә'јининдән көрүндүјү кими, $F(\mu) \in \Phi(T)$ олмагла $\sigma(T)$-јә дахил олан һәр бир нөгтәнин мүәјјән әтрафында ваһидә бәрабәр олмагла көстәрилән ујғун әтрафларда сыфырдыр. $F\cdot(T)$-ни тә'јин етмәк үчүн $F(\mu)$-јә ујғун полиному $P(\mu)$ илә ишарә етсәк,

$$F^{(\kappa)}(\lambda_i) = P^{(\kappa)}(\lambda_i),\ 0 \leqslant \kappa \leqslant \nu(\lambda_i) - 1$$

олар. $F(\mu)$-нин хассәсинә көрә, $P(\lambda)$ полиному $\sigma(T)$-јә дахил олан λ_i нөгтәләриндә ваһид олмагла $\kappa = \overline{1,\ \nu(\lambda_i) - 1}$ олдугда $P^{(\kappa)}(\lambda_i) = 0$. $P(\lambda)$-нын бу хассәләрини нәзәрә алсаг, бу полиному

$$P(\lambda) = 1 + \delta \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i)^{\alpha_i},\ \alpha_i \geqslant \nu(\lambda_i) \tag{8}$$

шәклиндә јаза биләрик. (8)-дән исә

$$F(T) = P(T) = T^{\circ} + \delta \prod_{i=1}^{n} (T - \lambda_i E)^{\alpha_i} \tag{9}$$

$\alpha_i \geqslant \nu(\lambda_i)$ шәрти өдәдијиндән $\prod\limits_{i=1}^{n} (T - \lambda_1 E)^{\alpha_i} = 0$ бәрабәрлији алынмагла

$$F(T) = T^{\circ} = E,$$

бу бәрабәрлијә көрә (9)-дан

$$E = \sum_{\lambda \in \sigma(\sigma)} E(\lambda) \tag{10}$$

олдуғу алыныр. Башга сөзлә, E-ваһид оператору $E(\lambda)$ проjекторлары илә (10) шәклиндә көстәрилир. $E(\lambda_i) X = X_i \ (i = \overline{1, n})$ ишарә етсәк, $X_i \subseteq X$ олар. (10)-дан

$$X = \sum_{\lambda_i \in \tau(\tau)} E(\lambda_i) X = \sum_{i=1}^{n} E(\lambda_i) X = \sum_{i=1}^{n} X_i, \tag{11}$$

әкәр $\sigma(T) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ оларса,

$$\sum_{\lambda_i \in \tau(\tau)} E(\lambda_i) X = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{12}$$

Беләликлә

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n. \tag{13}$$

(13)-дән алырыг ки, сонлу өлчүлү X фәзасы $X_1 \left(i = \overline{1, n}\right)$ алтфәзаларынын ҹәми кими көстәрилир. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, T, X_i-дән X_i-јә тә'сир едир. Һәм $TX_i = TE(\lambda_i) X$ вә һәм дә $TE(\lambda_i) = E(\lambda_i) T$ олдуғундан, бурадан $TE(\lambda_i) X = E(\lambda_i) TX$, она көрә $TX_i = E(\lambda_i) TX \subseteq X_i$. Беләликлә, $TX_i \subseteq X_i$, јә'ни T, X_i-дән X_i-јә тә'сир едир.

Теорем 6.

$$\boldsymbol{(T - \lambda_i E)^{\nu(\lambda_i)} E(\lambda_j) = 0} \tag{14}$$

олдуғуну исбат едәк.

Исбаты. $\lambda_i \in \sigma(T)$ олдугда $E(\lambda_i) \neq 0$ олур. $E(\lambda_i)$-јә ујғун олан полиному $P(\lambda)$ илә ишарә едәк. $(T - \lambda_i E)^{\nu(\lambda_i)}$-јә ујғун олан полином исә $(\lambda - \lambda_i)^{\nu(\lambda_i)}$ оларса,

$$(T - \lambda_i E)^{(\lambda_i)} E(\lambda_i) \to (\lambda - \lambda_i)^{\nu(\lambda_i)} P(\lambda)$$

олар.

$$Q(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{\nu(\lambda_i)} P(\lambda) \tag{15}$$

илә ишарә едәк. Бурадан көрүндүјү кими истәнилән, $\lambda_i \in \sigma(T)$ λ_i нөгтәси (14)-үн сыфры олмагла α_i, λ_i-нин тәртиби исә, онда $Q(\lambda_i) = 0$ олмагла $\alpha^i \geqslant \nu(\lambda^i)$ олар. Она көрә дә $Q(T) = 0$ вә беләликлә дә (14) өдәниләр.

Теорем 7. (14) өдәнилирсә, онда $E(\lambda)\,X$, $(T - \lambda E)^{\nu(\lambda)}x = 0$ олан нөгтәләр чохлуғудур. Јә'ни $E(\lambda)X = M_{\nu(\lambda)}$

$$M_{\nu(\lambda)} = \{x \in X;\ (T - \lambda E)^{\nu(\lambda)} x = 0\}. \tag{16}$$

Исбаты. $E(\lambda)\,X = M_{\nu(\lambda)}$ олдуғуну көстәрәк. Бурада $\lambda \in \sigma(T)$ олдуғуну фәрз едирик. (14)-ә көрә истәнилән $x \in X$ үчүн

$$(T - \lambda E)^{\nu(\lambda)} E(\lambda)\, x = 0. \tag{17}$$

$M_{\nu(\lambda)}$-нын тә'рифиндән көрүндүјү кими $E(\lambda)\,X$, $M_{\nu(\lambda)}$-нын алтчохлуғудур. Башга сөзлә, $E(\lambda)\,X \subseteq M_{\nu(\lambda)}$ олар.

Инди исә

$$M_{\nu(\lambda)} \subseteq E(\lambda)\,X \tag{18}$$

олдуғуну исбат едәк. Әввәлчә, $\lambda \neq \mu$ олдугда, $M_{\nu(\lambda)} \cap M_{\nu(\mu)} = \{\theta\}$ доғрулуғуну јохлајаг: $\nu(\lambda)$, λ-ја ујғун индекс олдуғундан, елә $x \neq 0$ вар ки, $z = (T - \lambda E)^{\nu(\lambda)-1} x \neq 0$, $x \in M_{\nu(\lambda)} \cap M_{\nu(\mu)}$ олсун $(T - \lambda E)^{\nu(\lambda)} \; x = 0$ олдуғундан $(T - \lambda E)^{\nu(\lambda)} \; x = (T - \lambda E) \times \times (T - \lambda E)^{\nu(\lambda)-1} x$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг, z-ин ифадәсинә көрә $Tz = \lambda z$ олар. Бурадан

$$(T - \mu E)\, z = (\lambda - \mu)\, z, \tag{19}$$

бу бәрабәрлијә $(T - \mu E)$-нин ардычыл итерасијалары илә тә'сир едәрәк

$$(T - \mu E)^{\nu(\lambda)} z = (\lambda - \mu)^{\nu(\lambda)} z$$

бәрабәрлијини алырыг. $\lambda \neq \mu$ вә $z \neq 0$ олдуғундан

$$(T - \mu E)^{\nu(\mu)} z \neq 0 \tag{20}$$

олур. Ашағыдакы бәрабәрлији көтүрәк. Шәртә көрә $x \in M_{\nu(\mu)}$ олдуғундан $(T - \mu E)^{\nu(\mu)} x = 0$ вә еләчә дә $(T - \lambda E)^{\nu(\lambda)-1} \times \times (T - \mu E)^{\nu(\mu)} x = 0$ бәрабәрлији нәзәрә алынарса,

$$(T - \lambda E)^{\nu(\lambda)-1} (T - \mu E)^{\nu(\mu)} x = (T - \mu E)^{\nu(\mu)} (T - \lambda E)^{\nu(\lambda)-1} x = \\ = (T - \mu E)^{\nu(\mu)} z = 0.$$

Бурадан

$$(T - \mu E)^{\nu(\mu)} z = 0, \tag{21}$$

Бу исә (20)-јә зиддир. Алынан зиддијјәтдән $M_{\nu(\lambda)}$ вә $M_{\nu(\mu)}$ чохлугларынын јалныз сыфыр үзрә кәсишдикләри алыныр, јә'ни $M_{\nu(\lambda)} \bigcap M_{\nu(\mu)} = \{0\}$ олур. $E = \sum\limits_{\nu\in\sigma(T)} E(\lambda)$ олдуғундан көстәрдијимиз кими, $X = \sum\limits_{\nu\in\sigma(T)} E(\lambda) X$, $E(\lambda) X \subseteq M_{\nu(\lambda)}$ олмагла (18)-ә көрә (16) өдәнилир.

Теорем 8. ***$\Phi(T)$*-јә дахил олан истәнилән *$f(\lambda)$*-ја ујғун олан *$f(T)$***

$$f(T) = \sum_{\lambda\in\sigma(T)} \sum_{i=1}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(T-\lambda E)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda) E(\lambda) \tag{22}$$

шәклиндә көстәрилир.

Исбаты. Ашағыдакы көмәкчи функсијаны көтүрәк:

$$g(\mu) = \sum_{\lambda\in\sigma T)} \sum_{i=1}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(\mu-\lambda)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda) e_\lambda(\mu), \tag{23}$$

$$(\mu-\lambda)^i \in \Phi(T), \quad f_\lambda(\mu) \in F(T)$$

олдуғундан $g(\mu) \in F(T)$. $g(\mu) \to g(T)$ гаршы гојулмуш оларса ујғун оператор функсијасы

$$g(T) = \sum_{\lambda\ni\sigma(T)} \sum_{i=1}^{\nu(\lambda)-1} \frac{(T-\lambda E)^i}{i!} f^{(i)}(\lambda) E(\lambda) \tag{24}$$

бәрабәрлији васитәсилә тә'јин олунур. (23)-дән көрүндүјү кими

$$g^{(\kappa)}(\lambda) = f^{(\kappa)}(\lambda), \ \lambda\in\sigma(T), \quad 0 \leqslant \kappa \leqslant \nu(\lambda) - 1.$$

Онда исбат етдијимиз теоремә көрә $f(T) = g(T)$ олмагла, (22) өдәнилир.

Теорем 9. **Истәнилән *$f(\lambda) \in \Phi(T)$* үчүн**

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C (\lambda E - T)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda E - T} \tag{25}$$

дүстуру доғрудур. Бурада *C* *$\sigma(T)$*-ни әһатә едән *g* областынын контурудур вә *$f(\lambda)$*, *$\bar{g}$* исә областында аналитикдир.

Исбаты. (25)-нын доғрулуғуну исбат еләмәк үчүн $\lambda\in\sigma(T)$ гәбул етмәклә

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\lambda - \xi} \tag{26}$$

көмәкчи функсијасыны көтүрәк. $\lambda \overline{\in} \sigma(T)$ олдуғундан $\varphi(\xi)$,

$\sigma(T)$-ни әһатә едән $\bar{g}$ областында аналитик функсиїадыр. (26)-дан

$$\varphi^{(j)}(\xi) = \frac{j!}{(\lambda-\xi)^{j+1}}. \qquad (27)$$

(26)-ја көрә

$$\varphi(T) = (\lambda E - T)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{\nu(\lambda_i)-1} \frac{(T-\lambda_i E)^j}{j!} \cdot \frac{j!}{(\lambda-\lambda_j)^{j+1}} E(\lambda_i) \qquad (28)$$

олар. (28)-ин тәрәфини $f(\lambda)$-ја вуруб C үзрә интегралласаг:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda E - T)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{\nu(\lambda_i)-1} \frac{(T-\lambda_i E)^j}{j!} \cdot \frac{j!}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{(\lambda-\lambda_j)^{j+1}}\right) E(\lambda_i). \qquad (29)$$

$f(\lambda)$, $\bar{g}$-дә аналитик олдуғундан Коши дүстуруна көрә

$$f(\mu) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\lambda-\mu}, \qquad (30)$$

бурадан исә

$$f^{(i)}(\lambda_i) = \frac{j!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{(\lambda-\lambda_i)^{i+1}} \qquad (31)$$

өдәнилир. (21)-ә көрә (29)-дан

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C (\lambda E - T)^{-1} f(\lambda)\, d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\nu(\lambda_i)-1} \frac{(T-\lambda_i E)^j}{j!} f^{(j)}(\lambda_i) E(\lambda_i). \quad (32)$$

(22) вә (32)-јә көрә (25) өдәнилир. Биз сонралар көстәрәҹәјик ки, сонсуз өлчүлү (B) фәзаларында тә'јин олунмуш мәһдуд хәтти операторлардан асылы олан оператор функсијалар үчүн (25) кими тә'јин олунур.

§ 6. СОНСУЗ ӨЛЧҮЛҮ ФӘЗАДА ВЕРИЛМИШ ОПЕРАТОРДАН АСЫЛЫ ОПЕРАТОР ФУНКСИЈАНЫН ТӘ'ЈИНИ

Фәрз едәк ки, T сонсуз өлчүлү X— (B) фәзасында тә'јин олунмуш мәһдуд хәтти оператордур. $R(\lambda, T)$ илә T-нин резолвентини ишарә едәк. Көстәрдијимиз кими, T-нин спектри, јә'ни $\sigma(T)$ мәһдуд чохлугдур. $\sigma(T)$-ни өз дахилинә олан областларда аналитик олан функсијалар синфини $\Phi(T)$ илә ишарә едәк.

Тә'риф 5. *$f(\lambda) \in \Phi(T)$ оларса, онда һамар C контуру олан вә $\sigma(T)$-ни әһатә едән елә g областы вар ки, $f(\lambda)$ да $\bar{g}$-дә аналитик олар. $f(\lambda)$-ја мүәјјән $f(T)$ оператор функсијасыны гаршы гојаг. $R(\lambda, T) f(\lambda)$, C үзрә күчлү кәсилмәз олдуғундан $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\lambda, T) f(\lambda)\, d\lambda$ вар. Бу интеграл $f(T)$ илә ишарә олунараг $f(\lambda)$-ја гаршы гојулур:*

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\lambda, T) f(\lambda)\, d\lambda. \tag{1}$$

Көстәрәк ки, $f(\lambda)$-ја гаршы гојулан $f(T)$ оператор функсијасы биргијмәтли тә'јин олунур. Онун үчүн g-јә дахил олан ејни типли контуру C_1 илә ишарә едәрәк

$$f_1(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1} R(\lambda, T) f(\lambda)\, d\lambda$$

олдуғуну гәбул едәк. Фәрз едәк ки, C_1, C-јә нәзәрән харичи контурдур. Мүрәккәб контуру $\Gamma = C_1 + C^-$ олан областы G_0 илә ишарә едәк. $f(\lambda)$ вә $R(\lambda, T)$, $\bar{G}_0$-дә аналитик олдуғундан $R(\lambda, T) f(\lambda)$ вектор функсијасы да аналитик олар, онда Коши теореминә көр:

$$\int\limits_{C_1+C^-} R(\lambda, T) f(\lambda)\, d\lambda = 0 \quad \text{ифадәсиндән } f(T) = f_1(T).$$

$\Phi(T)$ синфиндән олан оператор функсијаларын бир нечә хассәсини көстәрәк:

1. $f(\lambda), g(\lambda) \in \Phi(T)$ олмасындан $(\alpha f + \beta g) T = \alpha f(T) + \beta g(T)$ бәрабәрлијинин доғру олдуғуну көстәрәк. Ашкардыр ки,

$$\alpha f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\lambda, T)\, \alpha f(\lambda)\, d\lambda, \tag{2}$$

$$\beta g(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\lambda, T)\, \beta g(\lambda)\, d\lambda. \tag{3}$$

(2) вә (3)-дән

$$\alpha f(T) + \beta g(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\lambda, T)\, [\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)]\, d\lambda.$$

$\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda) \in F(T)$ олдуғундан

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\lambda, T)\, [\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda)]\, d\lambda = (\alpha f + \beta g)(T).$$

Беләликлә, 1-ин доғрулуғу алыныр.

2. $(f\cdot g)\,T = f(T)\cdot g(T)$ өдәнилдијини көстәрәк:

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} R(\lambda, T) f(\lambda)\, d\lambda, \tag{4}$$

$$g(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} R(\mu, T)\, g(\mu)\, d\mu. \tag{5}$$

$f(\lambda)$ вә $g(\lambda)$-нын аналитик олдугу ујғун областлары $\overline{G}_C$ вә $\overline{G}_C$ илә ишарә едәрәк $G_C \subset G_{C'}$ олдуғуну фәрз едәк.

(4) вә (5)-ә көрә $f(T)\cdot g(T)$ композисијасыны тә'јин едәк јә'ни

$$f(T)\,g(T) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C}\int\limits_{C'} R(\lambda, T)\, R(\mu, T)\, f(\lambda)\, g(\mu)\, d\lambda\, d\mu \tag{6}$$

λ вә μ нөгтәләри $\sigma(T)$-јә дахил олмадыгларындан, $\lambda, \mu \in \rho(T)$ јә'ни резолвент чохлуға дахил олурлар. Резолвентин биринчи тәнлијинә көрә

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda, T)\, R(\mu, T)$$

вә јахуд

$$R(\lambda, T)\, R(\mu, T) = \frac{R(\lambda, T) - R(\mu, T)}{\mu - \lambda}. \tag{7}$$

(7)-јә көрә (6)-дан

$$f(T)\,g(T) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int\limits_{C}\int\limits_{C'} \frac{R(\lambda, T) - R(\mu, T)}{\mu - \lambda} f(\lambda)\, g(\mu)\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} f(\lambda)\, R(\lambda, T)\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu - \tag{8}$$

$$- \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} g(\mu)\, R(\mu, T)\, d\mu\, \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda}\, d\lambda$$

бәрабәрлијини алырыг.

$g(\lambda)$ да $\overline{G}_{C'}$-дә аналитик олдуғундан

$$g(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \frac{g(\mu)\, d\mu}{\mu - \lambda}, \tag{9}$$

еләчә дә $f(\lambda)$ да $\overline{G}_C$-дә аналитик функсија олдуғундан, μ-нун G'_C-јә нәзәрән харичи нөгтә олдуғуну нәзәрә алсаг, Коши теореминә көрә

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C} \frac{f(\lambda)\, d\lambda}{\mu - \lambda} = 0 \tag{10}$$

олар. (9) вә (10) бәрабәрликләринә көрә (8)-дән

$$f(T)\,g(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\lambda)\,g(\lambda)\,R(\lambda, T)\,d\lambda \qquad (11)$$

$f(\lambda)\,g(\lambda) \in \Phi\,(T)$ (11)-ин сол тәрәфи $(f\cdot g)\,(T)$ олмагла 2-чи хассә исбат олунур.

3. $f(\lambda) \in \Phi\,(T)$ олмагла

$$f(\lambda) = \sum_{\text{n}=0}^{\infty} a_{\text{к}}\,\lambda^{\text{к}} \qquad (12)$$

шәклиндә көстәрилирсә, онда

$$f(T) = \sum_{\text{к}=0}^{\infty} a_{\text{к}}\,T^{\text{к}}. \qquad (13)$$

$f(\lambda)$ шәртә көрә $\sigma(T)$-ни өз дахилинә алан областда аналитик функсијадыр. $r(T)$ илә T-нин спектриал радиусуну ишарә едәк (бах § 10) $|\lambda| \leqslant r(T) + \varepsilon$ даирәсини нәзәрдән кечирәк вә (12)-нин бу даирә дахилиндә өдәнилдијини фәрз едәк. $f(T)$-нин тә'рифинә көрә

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\lambda, T)\left(\sum_{\text{к}=0}^{\infty} a_{\text{к}}\,\lambda^{\text{к}}\right) d\lambda, \qquad (14)$$

бурада C, $|\lambda| = r(T) + \varepsilon$ чеврәсидир. Дикәр тәрәфдән мә'лумдур ки, $R(\lambda, T)$ спектриал радиусун харичиндәки област јығылмагла

$$R(\lambda, T) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n}}{\lambda^{n+1}} \qquad (15)$$

шәклиндә көстәрилир. C-нин радиусу $r(T)$-дән бөјүк олдуғундан

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^{n}}{\lambda^{n+1}} \qquad (16)$$

сырасы C үзрә јығылан олур. (14) вә (15)-дән

$$f(T) = \sum_{\text{к}=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{\text{к}}\,T^{n}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{\lambda^{\text{k}}}{\lambda^{n+1}}\,d\lambda \qquad (17)$$

олур. $p \neq -1$ олан истәнилән p үчүн

$$\int\limits_C \lambda^{p}\,d\lambda = 0 \qquad (18)$$

олмагла $p = -1$ олдугда

$$\int_C \lambda^{-1}\, d\lambda = 2\pi i. \tag{19}$$

Беләликлә, бу бәрабәрликләри нәзәрә алсаг, (17)-дән (13)-үн доғрулуғу алыныр.

Мүәјјән шәртләрлә ејни гајда үзрә мәһдуд хәтти T операторунун логарифмини тә'јин етмәк олар. Фәрз едәк ки, T-нин $\sigma(T)$, спектри $\lambda = 0$ нөгтәсини әһатә едир. Һәмчинин $\lambda = 0$, $\sigma(T)$-јә дахил дејилдир. (λ) мүстәвисини $\lambda = 0$ вә $\lambda = \infty$ нөгтәләрини бирләшдирән кәсилмәз һамар L хәтти үзрә кәсәк. Белә ки, һәмин хәтт $\sigma(T)$-дән кәнарда олсун. Онда мә'лумдур ки, $\ln\lambda$ функсијасы алынан областда биргијмәтли аналитик функсија олур. Әкәр g областы, $\sigma(T)$-ни өз дахилинә алан вә контуру L-и кәсмәјән ихтијари биррабитәли област исә, онда $\ln T$ оператору

$$\ln T = \frac{1}{2\pi i}\int_C R(\lambda; T)\ln\lambda\, d\lambda$$

дүстуру васитәсилә тә'јин олунур. Белә ки, $R(\lambda; T)$, T-нин резолвенти C исә g областынын контурудур.

§ 7. СПЕКТРИН ИН'ИКАСЫ

Биз $\Phi(T)$-дән һәр бир $f(\lambda)$-ја көстәрдијимиз гајда үзрә $f(T)$ оператор функсијасыны гаршы гоја биләрик. Бурадан белә бир мәсәлә, јә'ни T илә $f(T)$-нин спектрләри арасындакы һансы мүнасибәтин олмасы тәбии олараг мејдана чыхыр.

Белә бир мәсәлә илә әлагәдар олараг ашағыдакы мүһүм тәклифин исбаты верилир.

Теорем 10. $f(\lambda) \in \Phi(T)$ оларса, онда бу функсија васитәсилә T-нин спектри $f(T)$-нин спектринә ин'икас олунур, јә'ни

$$f[\sigma(T)] = \sigma[f(T)]. \tag{1}$$

Исбаты $\lambda \in \sigma(T)$ оларса, онда ашкардыр ки, $f(\lambda) \in f[\sigma(T)]$ олур. Әввәлчә көстәрәк ки,

$$f[\sigma(T)] \in \sigma[f(T)] \tag{2}$$

олур.

$$F(\xi) = \frac{f(\xi) - f(\lambda)}{\xi - \lambda} \tag{3}$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунан $F(\xi)$ функсијасы һәр бир $\xi \neq \lambda$ нөгтәсиндә аналитикдир. Әкәр $F(\lambda) = \lim_{\xi \to \lambda} F(\xi)$ кими гәбул олунарса, онда $F(\xi)$, $\sigma(T)$-ни өз дахилинә алан областда аналитик олар. Она көрә дә, $F(\xi) \in \Phi(T)$. (3)-дән

$$f(\xi) - f(\lambda) = (\xi - \lambda) F(\xi)$$

бәрабәрлијини јазаг; $f(\xi)$, $F(\xi)$ вә $\xi - \lambda$ функсијаларынын һәр бири $\Phi(T)$-јә дахил олдуғундан исбат етдијимиз 1 вә 2 хассәләринә көрә

$$f(T) - f(\lambda)E = (T - \lambda E)F(T). \qquad (4)$$

Бу бәрабәрликдән истифадә едәрәк (2)-нин доғрулуғуну көстәрәк. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни $f(\lambda) \bar{\in} \sigma[f(T)]$ гәбул едәк. Онда $f(\lambda)$, $f(T)$-нин резолвент чохлуғуна дахил олар: $f(\lambda) \in \in \rho\ [f(T)]$. Онда $f(T) - f(\lambda)E$ операторунун тәрси вар. Бу операторун резолвентини $\widetilde{R}(\lambda; f(T))$ ишарә едәк:

$$\widetilde{R}(\lambda, f(T)) = (f(T) - f(\lambda)E)^{-1}. \qquad (5)$$

(4) вә (5)-дән

$$E = (T - \lambda E)F(T)\widetilde{R}(\lambda, f(T)) \qquad (6)$$

вә јахуд

$$E = \widetilde{R}(\lambda, f(T))(T - \lambda F)F(T) = \widetilde{R}(\lambda, f(T))F(T)(T - \lambda E) \qquad (7)$$

мүнасибәтләри өдәнилир. Бурада исә $F(T)$ вә $(T - \lambda E)$ операторларынын јердәјишмәләрини нәзәрә алсаг:

$$\widetilde{R}(\lambda, f(T))F(T)(T - \lambda E) = \widetilde{R}(\lambda, f(T))(T - \lambda E)F(T),$$

олур. (7) вә һәм дә (6)-дан

$$\widetilde{R}(\lambda, f(T))F(T) = (T - \lambda E)^{-1}$$

олдуғу алыныр. Башга сөзлә, $\widetilde{R}(\lambda, f(T))F(T))$ $(T - \lambda E)$-нин тәрси олур. Демәли, $\lambda \in \rho(T)$, башга сөзлә, $\lambda \bar{\in} \sigma(T)$. Бу исә $\lambda \in \sigma(T)$ шәртинә зидд олмагла фәрзијјәмизин дүз олмадығыны көстәрир, јә'ни $f(\lambda) \in \sigma[f(T)]$ өдәнилдији алыныр. Нәтичәдә исә

$$f[\sigma(T)] \subseteq \sigma[f(T)] \qquad (8)$$

өдәнилдијини көстәрдик. Инди тәрсинә

$$\sigma[f(T)] \subseteq f[\sigma(T)] \qquad (9)$$

өдәнилдијини көстәрәк. Она көрә дә $\mu \in \sigma[f(T)]$ олдуғуну фәрз едиб, ејни заманда μ-нин $f[\sigma(T)]$-јә дахил олдуғуну көстәрәк. Онун үчүн әксини фәрз едиб $\mu \bar{\in} f[\sigma(T)]$ гәбул едәк

$$F_0(\xi) = \frac{1}{f(\xi) - \mu} \qquad (10)$$

функсијасыны нәзәрдән кечирәк.

$\mu \bar{\in} f[\sigma(T)]$ олдуғундан вә еләчә дә $f(\xi)$, $\sigma(T)$-нин әтрафында аналитик олдуғундан (10) илә тә'јин олунан $F_0(\xi)$ функсијасы $\sigma(T)$-нин әтрафында аналитик олмагла $F_0(\xi) \in \Phi(T)$ олар. Һәмчинин $f(\xi) - \mu \in \Phi(T)$ олдуғундан

$$F_0(\xi)[f(\xi)-\mu] \in \Phi(T).$$

Она көрә (10)-дан

$$F_0(\xi)[f(\xi)-\mu]=\xi^0$$

бәрабәрлији, бурадан исә

$$F_0(T)[f(T)-\mu E]=E \qquad (11)$$

вә

$$[f(T)-\mu E)]F_0(T)=E \qquad (12)$$

мүнасибәтләри өдәнилмәклә $F_0(T)$-нин $f(T)-\mu E$ үчүн тәрс олдуғу алыныр. Јә'ни:

$$F_0(T)=[f(T)-\mu E]^{-1},$$

она көрә дә, $\mu \in \rho[f(T)]$ олмагла $\mu \overline{\in} \sigma[f(T)]$, алынан зиддијјәт (9)-ун өдәнилдијини көстәрир. (8) вә (9)-у мүгајисә етмәклә (1)-ин өдәнилдији алыныр вә беләликлә дә теорем исбат олунур.

Теорем 11. Фәрз едәк ки, $f(\lambda) \in \Phi(T)$ вә $g(\mu) \in \Phi[f(T)]$, белә ки, $g[f(\lambda)]$ тә'јин олунмушдур. Әкәр

$$F(\lambda)=g[f(\lambda)] \qquad (13)$$

исә, онда

$$F(T)=g[f(T)] \qquad (14)$$

олар.

Исбаты. $f(\lambda)$, $g(\mu)$ функсијаларынын аналитик олдуглары) областлары $\bar{g}$ вә $\bar{g}'$ вә ујғун һамар контурларыны исә C вә C' илә ишарә едәк. Елә λ әдәдини көтүрәк ки, C үзрә $f(\xi)-\lambda \neq 0$ олсун. $f(\xi) \in \Phi(T)$ олдуғундан, еләчә дә, $f(\xi)-\lambda \in \Phi(T)$, Она көрә дә,

$$\tilde{f}(\xi)=[\lambda-f(\xi)]^{-1} \in \Phi(T). \qquad (15)$$

Демәли, $\tilde{f}(T)$ оператор функсијасы

$$f(\widetilde{T})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C R(\xi, T)\tilde{f}(\xi)\,d\xi \qquad (16)$$

илә тә'јин олунур. (15) бәрабәрлијиндән

$$\tilde{f}(\xi)[\lambda-f(\xi)]=[\lambda-f(\xi)]\tilde{f}(\xi)=1 \qquad (17)$$

олдуғу, $f(\xi) \in \Phi(T)$ вә $\tilde{f}(\xi) \in \Phi(T)$ нәзәрә алынарса, онда (17)-дән

$$\tilde{f}(T)[\lambda E-f(T)]=[\lambda E-f(T)]\hat{f}(T)=E \qquad (18)$$

алынмагла $\tilde{f}(T)$-нин $\lambda E-f(T)$ үчүн резолвент олдуғу алыныр. Беләликлә,

$$\tilde{f}(T) = R(\lambda, f(T)). \tag{19}$$

Буну нəзəрə алараг (§ 6, 16)-дан

$$R(\lambda, f(T)) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{R(\xi, T)\, d\xi}{\lambda - f(\xi)}, \tag{20}$$

дикəр тəрəфдəн исə

$$g[f(T)] = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} g(\lambda)\, R(\lambda, f(T))\, d\lambda \tag{21}$$

олур. (20) вə (21) бəрабəрликлəриндəн $g[f(T)]$ үчүн ашағыдакы бəрабəрлиjи jаза билəрик:

$$g[f(T)] = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{C'}\int_C \frac{g(\lambda)\, R(\xi, T)\, d\lambda\, d\xi}{\lambda - f(\xi)} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C R(\xi, T)\, d\xi\, \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{g(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - f(\xi)}.$$

$g(\lambda)$, $\overline{g}'$-дə аналитик олдуғундан Коши дүстуруна көрə

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{g(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - f(\xi)} = g[f(\xi)]$$

олар. Она көрə (21)-дəн

$$g[f(T)] = \frac{1}{2\pi i}\int_C g[f(\xi)]\, R(\xi, T)\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\xi)\, R(\xi, T)\, d\xi = F(T)$$

олмагла (§ 6, 14) өдəнилир вə белəликлə, теорем исбат олунур.

Теорем 12. Фəрз едəк ки, $f(\lambda) \in \Phi(T)$ вə $g(\lambda) \in \Phi(T)$. $f(T) = g(T)$ олмасы үчүн ашағыдакы шəртлəрин өдəнилмəси зəрури, һəм дə кафи шəртдир.

1. $\sigma(T)$-ни өз дахилинə алан D областынын сонлу $\lambda_j (j = \overline{1, n})$ нөгтəлəри мүстəсна олмагла һəмин областын истəнилəн λ нөгтəсиндə $f(\lambda) = g(\lambda)$,

2. $\lambda_j (j = \overline{1, n})$, $R(\lambda, T)$ үчүн тəртиби $n(\lambda_j)$ олан полјусдур.

3. $\lambda_j (j = \overline{1, n})$,

$$F(\lambda) = g(\lambda) - f(\lambda) \tag{22}$$

үчүн тəртиби $m(\lambda_j) \geqslant n(\lambda_j)$ олан сыфырдыр.

Фəрз едəк ки, 1, 2, 3 өдəнилир.

Исбаты. Шəртин зəрурилиjи. $F(\lambda) \in \Phi(T)$ олдуғундан

$$F(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_C F(\lambda)\,R(\lambda, T)\,d\lambda \qquad (23)$$

өдәнилир. Бурада C, D областынын контуру олмагла D, $\sigma(T)$-ни өз дахилинә алыр. (23)-дән истифадә едәрәк $F(T) \equiv 0$ олдуғуну көстәрәк. Фәрз едәк ки, $C_j\,(j=\overline{1, n})$ гаршылыглы кәсишмәјән ујғун олараг $\lambda_j\,(j=\overline{1, n})$ нөгтәләрини әһатә едән вә тамамилә D-нин дахилиндә олан һамар гапалы контурлардыр. Мүрәккәб контуру $C + \sum\limits_{j=1}^{n} C_j$ илә, областы исә $\overline{D}'$ илә ишарә едәк. $F(\lambda)\,R(\lambda, T)$ вектор функсијасы D'-дә һоломорф олдуғундан Коши теореминә көрә

$$\int_C F(\lambda)\,R(\lambda, T)\,d\lambda = \sum_{j=1}^{n}\int_{C_j} F(\lambda)\,R(\lambda, T)\,d\lambda. \qquad (24)$$

Она көрә $F(T) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C F(\lambda)\,R(\lambda, T)\,d\lambda$ олмагла

$$F(T) = \sum_{j=1}^{n-1} 2\pi i \int_{C_j} F(\lambda)\,R(\lambda, T)\,d\lambda \qquad (25)$$

бәрабәрлијини алырыг. Шәртә көрә $\lambda = \lambda_j$, $F(\lambda)$-нын сыфры олмагла тәртиби $n(\lambda_j)$-дан аз олмадығындан $F(\lambda)\,R(\lambda, T)$ функсијасы C_j-у әһатә едән гапалы областда аналитик олар. Она көрә $\int\limits_{C_j} F(\lambda)\,R(\lambda, T)\,d\lambda = 0$ өдәнилир вә (25)-дән $F(T) = 0$ олмагла шәртин зәрури олмасы исбат олунур.

Шәртин кафилији. Јә'ни фәрз едәк ки, $F(T) = 0$ өдәнилир. Спектрин ин'икасында исбат етдијимиз теоремә көрә $F[\sigma(T)] = \sigma[F(T)]$. Шәртә көрә $F(T) = 0$ олдуғундан $\sigma[F(T)] = 0$ вә она көрә дә $F[\sigma(T)] = 0$ олар.

Исбат етмишдик ки, мәһдуд хәтти операторун спектри гапалы вә мәһдуддур. Онда Борел леммасына көрә елә сонлу сајда $S_j\,(j = \overline{1, r})$ әтрафлары көстәрмәк олар ки, бу әтрафлар $\sigma(T)$-ни өртсүн. Әкәр белә S_j әтрафлары ичәрисиндә елә S_j' варса ки, бу әтрафа дахил олан спектр нөгтәләри сонсуздур, $F[\sigma(T)] = 0$ олмасыны нәзәрә алсаг, онда бу нөгтәләрдә $F(\lambda) = 0$ олмагла аналитик функсијаларынын јеканәлик теореминә көрә $F(\lambda)$, S_j'-да ејнилик кими сыфра бәрабәр олар. Бахылан област вә еләҹә дә әтрафлар чохлуғу рабитәсиз област олдуғундан үмумијјәтлә бурадан $F(\lambda) \equiv 0$ олмасы чыхмыр.

$S_j\,(j=\overline{1,\ r})$ дахил олан S'_j кими әтрафлары атараг, галанларыны үмумилији позмадан јенә $S_j\,(j=\overline{1,\ i})$ илә ишарә едәк вә фәрз едәк ки, бу әтрафа јалныз λ_j дахилдир. Шәртә көрә $F(\lambda_j)=0\,(j=\overline{1,\ i})$ олмагла һәр бир λ_j сыфрынын тәртиби сонлудур. Бу тәртиби $n(\lambda_j)\,(j=\overline{1,\ i})$ илә ишарә едәк. λ_1-и гејд едәрәк

$$F_0(\lambda)=\frac{(\lambda-\lambda_1)^{n(\lambda_1)}}{F(\lambda)} \qquad (26)$$

ишарә етсәк, ашкардыр ки, $F_0(\lambda), \lambda=\lambda_1$ нөгтәсинин әтрафында аналитик олар. Белә бир функсија сечәк:

$$e_{\lambda_1}(\lambda)=\begin{cases}1 & \lambda=\lambda_1 \text{ нөгтәсинин мүәјјән әтрафында}\\ 0 & j\neq 1 \text{ олан истәнилән } \lambda_j\,(j=\overline{1,\ i}) \text{ нөгтәсинин}\\ & \text{мүәјјән әтрафында.}\end{cases}$$

(26)-дан

$$F_0(\lambda)\,e_{\lambda_1}(\lambda)\,F(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n(\lambda_1)}e_{\lambda_1}(\lambda)$$

бәрабәрлијини јазаг. $\widetilde{F}(\lambda)=F_0(\lambda)\cdot e_{\lambda_1}(\lambda)$ ишарә етсәк, онда

$$\widetilde{F}(\lambda)\;F(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n(\lambda_1)}e_{\lambda_1}(\lambda) \qquad (27)$$

олар. (27)-јә дахил олан функсијаларын һамысы $\Phi(T)$-јә дахил олдугларындан

$$(T-\lambda_1E)^{\nu(\lambda_1)}e_{\lambda_1}(T)=\widetilde{F}(T)\cdot F(T) \qquad (28)$$

олар. Шәртә көрә $F(T)=0$ олдуғундан

$$(T-\lambda_1E)^{n(\lambda_1)}e_{\lambda_1}(T)=0. \qquad (29)$$

$\lambda_j\,(j=\overline{1,\ i})$ нөгтәләри елә сечилмишдир ки, бунлар $R(\lambda,\ T)$-нин изолә едилмиш мәхсуси нөгтәләридир. Она көрә $R(\lambda,\ T)$-ни Лоран сырасына ајырмаг олар:

$$R(\lambda,\ T)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n(\lambda-\lambda_1)^n, \qquad (30)$$

бурада $b_n\,(n=\overline{-\infty,\ +\infty})$ әмсаллары ашағыдакы дүстурла тә'јин олунур:

$$b_n=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}\frac{R(\lambda,\ T)\,d\lambda}{(\lambda-\lambda_1)^{n+1}}\;\;(n=\overline{0,\ \pm 1,\ \pm\infty})$$

белә ки, C_1—мәркәзи λ_1-дә олан чеврәдир. n әвәзинә,—$(n+1)$ көтүрмәклә

$$b_{-(n+1)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_1}(\lambda-\lambda_1)^n R(\lambda,\ T)\,d\lambda. \qquad (31)$$

λ_1-ин әтрафында $e_{\lambda_1}(\lambda) = 1$ олдуғундан (31)-и ашағыдакы кими јаза биләрик:

$$b_{-(n+1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} (\lambda - \lambda_1)^n R(\lambda, T)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} (\lambda - \lambda_1)^n e_{\lambda_1}(\lambda) R(\lambda, T)\, d\lambda = -(\lambda_1 E - T)^n e_{\lambda_1}(T).$$

(29)-а көрә $(\lambda_1 E - T)^k e_{\lambda_1}(T) = 0$ истәнилән $k \geqslant n(\lambda_1)$ үчүн өдәнилдијиндән $b_{-(n+1)} = 0$ олмагла (30)-дан $\lambda = \lambda_1$-ин $R(\lambda, T)$ үчүн тәртиби $n(\lambda_1)$-дән бөјүк олмајан полјус олмасы чыхыр. Eләчә дә $\lambda_j \ (j = \overline{2, i})$ нөгтәләринин $R(\lambda, T)$ үчүн тәртиби $n(\lambda_j)$-дан бөјүк олмајан полјуслар олдугларыны көстәрмәк оларды. Бунунла да шәртин кафилији исбат олунур.

§ 8. ГАПАЛЫ ОПЕРАТОРЛАР ҮЧҮН ҮМУМИ СПЕКТРАЛ НӘЗӘРИЈЈӘ

Фәрз едәк ки, T, тә'јин областы D, $X - (B)$ фәзасына дахил олан гапалы хәтти оператордур вә T, $D(T)$-дән X-ә тә'сир едир. Белә операторларын спектрал нәзәријјәсинин тәдгигинә башламаздан; белә операторлар үчүн псевдорезолвент анлајышыны верәк. Биз хәтти операторлар үчүн резолвент анлајышы верәрәк онун бир нечә мүһүм хассәләрини көстәрмишдик.

Тә'риф 6. *Әкәр T, $X - (B)$ фәзасында тә'јин областы $D(T)$ олан гапалы оператордурса, $T_\lambda = \lambda E - T$ операторунун тәрси бүтүн X-дә тә'јин олунмуш елә мәһдуд $R(\lambda, T)$ операторуна дејилир ки, ашағыдакы бәрабәрликләр өдәнилсин:*

$$(\lambda E - T) R(\lambda, T) x = x \quad x \in X, \tag{1}$$

$$R(\lambda, T)(\lambda E - T) x = x \quad x \in D. \tag{2}$$

Хәтти мәһдуд вә гапалы оператор үчүн $R(\lambda, T)$-нин тә'јин олунмасындан көрүнүр ки, $R(\lambda, T)$ бүтүн фәзада тә'јин олунмагла мәһдуддур. Јә'ни һәр ики оператор үчүн ејни хассәләрдир. Лакин буна бахмајараг гапалы операторлар үчүн $R(\lambda, T)$-нин (1) вә (2) илә тә'јин олунмасы нөгтеји-нәзәрдән резолвентин үмумиләшмәси кими бахмаг олар. (1) вә (2) илә тә'јин олунан $R(\lambda, T)$-јә T-нин псевдорезолвенти дејилир. Һәмчинин асанлыгла $R(\lambda, T)$ үчүн Һилберт ејнилијинин доғрулуғуну көстәрмәк олар. Фәрз едәк ки, λ, μ һәр икиси T-нин резолвент чохлуғуна дахилдир. $(\mu E - T) R(\mu, T) x = x$ истәнилән $x \in X$ үчүн өдәнилир:

$$R(\lambda, T) x = R(\lambda, T)(\mu E - T) R(\mu, T) x \tag{3}$$

олдуғундан

$$R(\lambda, T)x = R(\lambda, T)[(\lambda E - T) + (\mu - \lambda)E]R(\mu, T)x =$$

$$= R(\lambda, T)(\lambda E - T)R(\mu, T)x + R(\lambda, T)(\mu - \lambda)R(\mu, T)x \quad (4)$$

бәрабәрлиjини алырыг. $R(\lambda, T)(\lambda E - T)R(\mu, T)x = R(\mu, T)$ олдуғундан (4) бәрабәрлиjиндән

$$R(\lambda, T) - R(\mu, T) = -(\lambda - \mu)R(\lambda, T)R(\mu, T) \quad (5)$$

еjнилиjини алырыг.

Беләликлә, гапалы операторлар үчүн тә'jин олунмуш псевдорезолвент үчүн Һилберт еjнилиjинин доғрулуғу көстәрилди. Биз Банах ҹәбрләриндә резолвентин биринҹи тәнлиjинин һәлләринин даһа бир нечә хассәсини көстәрәҹәjик.

Бу хассәләр һәмчинин хәтти операторларын резолвенти вә псевдорезолвентинә аид олур. Гапалы операторларын спектрләри мүхтәлиф структура маликдирләр. Аjры-аjры мисалларла көстәрмәк олар ки, гапалы операторларын спектри бош чохлуг, һәм дә бүтүн мүстәви олмагла мәһдуд вә геjри-мәһдуд ола биләр. Дикәр тәрәфдән, исбат етмишик ки, беlә операторлара уjғун резолвент чохлуг бош олмадыгда $\lambda = \infty$ нөгтәси T-нин спектринә дахилдир. Биз бурада фәрз едәҹәjик ки, T-нин спектри бош деjилдир. $\lambda \neq \infty$-дан фәрґли олан спектр чохлуғуну $\sigma(T)$ илә вә $\sigma'(T) = \sigma(T) \bigcup \{\infty\}$ ишарә едәк. Биз гапалы операторларын үмум спектрал нәзәриjјәсинин тәдгигиндә мәһдуд операторлар үчүн доғру олан уjғун теоремләрдән истифадә едәҹәjик. Шәртә көрә $\rho(T)$ бош олмадығындан мүәjjән $\alpha \in \rho(T)$ нөгтәсини геjд едәрәк

$$\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha} = L(\lambda) \quad (6)$$

хәтти чевирмәсини нәзәрдән кечирәк. (6)-дан көрүндүjү кими α-нын мүәjjән әтрафы $\mu = \infty$ нөгтәсинин мүәjjән әтрафына ин'икас олунмагла $\lambda = \infty$ нөгтәсинә $\mu = 0$ нөгтәси уjғун олур. (6)-jа уjғун тәрс чевирмәни $L^{-1}(\mu)$ илә ишарә едәк:

$$\lambda = L^{-1}(\mu). \quad (7)$$

$$A = (T - \alpha E)^{-1} \quad (8)$$

тә'jин олунан A операторуну тәдгиг едәк. A-нын тә'jининдән ашкардыр ки, A мәһдуд оператордур. Инди исбат едәк ки, $\sigma(A)$ илә $\sigma'(T)$ арасында гаршылыглы биргиjмәтли уjғунлуг вардыр. Онун үчүн әввәлҹә фәрз едәк ки, $\lambda \in \rho(T)$. Онда көстәрәк ки, (2) илә тә'jин олунан μ нөгтәси $\rho(A)$-jа дахилдир, jә'ни $\mu \in \rho(A)$. A-нын тә'jин олма областы бүтүн X фәзасы олдуғундан ашағыдакы бәрабәрликләрин өдәнилмәси геjри-мәһдуд оператор үчүн тәрс операторун варлығындан алыныр.

$$(T-\alpha E)(T-\alpha E)^{-1}x=x;\quad x\in X, \tag{9}$$

$$(T-\alpha E)^{-1}(T-\alpha E)x=x,\quad x\in D(T). \tag{10}$$

A-нын ифадәсини нәзәрә алсаг (4)-дән

$$(T-\alpha E)Ax=x,$$

бурадан

$$TAx=\alpha Ax+x,\quad x\in X \tag{11}$$

бәрабәрлијини алырыг. Ејни гајда илә (§ 7, 22)-дән

$$A(T-\alpha E)x=x,$$

јахуд да

$$ATx=A\alpha x+x,\quad x\in D(T) \tag{12}$$

олдуғу алыныр.

$\alpha\in\rho(T)$ олдуғундан λ-ны елә сечәк ки, һәмчинин $\lambda\in\rho(T)$ олсун. Она көрә дә

$$(T-\alpha E)(T-\lambda E)^{-1}=\left[(T-\lambda E)(T-\alpha E)^{-1}\right]^{-1}=$$
$$=[(T-\lambda E)A]^{-1} \tag{13}$$

бәрабәрлији алыныр. (§ 7,18)-дән

$$\lambda=\alpha+\frac{1}{\mu}, \tag{14}$$

она көрә дә (13)-үн сол тәрәфи ашағыдакы кими чеврилир:

$$(T-\alpha E)(T-\lambda E)^{-1}=\left[\left(T-\alpha E-\frac{E}{\mu}\right)A\right]^{-1}=$$
$$=\left[(T-\alpha E)A-\frac{A}{\mu}\right]^{-1}.$$

$(T-\alpha E)A=E$ олдуғу нәзәрә алынарса:

$$(T-\alpha E)(T-\lambda E)^{-1}=\left(E-\frac{A}{\mu}\right)^{-1}=\mu(\mu E-A)^{-1} \tag{15}$$

вә јахуд

$$(T-\alpha E)(T-\lambda E)^{-1}=\mu(\mu E-A)^{-1}. \tag{16}$$

Инди (16)-нын сол тәрәфинә дахил олан һасили ашағыдакы кими чевирәк:

$$(T-\alpha E)(T-\lambda E)^{-1}=\left(T-\lambda E+\frac{E}{\mu}\right)(T-\lambda E)^{-1}, \tag{17}$$

бурадан исә

$$(T-\alpha E)(T-\lambda E)^{-1}=E+\frac{(T-\lambda E)^{-1}}{\mu}. \tag{18}$$

(15) вə (18) бəрабəрликлəрини мүгајисə етсəк:

$$\mu(\mu E - A)^{-1} = E + \frac{(T - \lambda E)^{-1}}{\mu}, \qquad (19)$$

белəликлə,

$$(T - \lambda E)^{-1} = \mu^2 (\mu E - A)^{-1} - \mu E.$$

Бурадан көрүндүјү кими, $\lambda \in \rho(T)$ олдугда $\mu \in \rho(A)$ олур вə

$$(\mu E - A)^{-1} = \frac{\mu E + (T - \lambda E)^{-1}}{\mu^2}$$

бəрабəрлији васитəсилə тə'јин олунур. Инди əксини, јə'ни $\mu \in \rho(A)$ олдугда $\lambda \in \rho(T)$ олдуғуну көстəрəк. Биз бу һалы билаваситə (19)-дан истифадə едəрəк көстəрə билмəрик. Она көрə ки, (19)-ун доғрулуғу $\lambda \in \rho(T)$ олдугда алынмышдыр. Јə'ни бу һөкмүн доғрулуғу ајрыча исбат едилмəлидир. Онун үчүн $\mu \in \rho(A)$ фəрз едəрəк $\lambda \in \rho(T)$ олдуғуну көстəрəк. $\mu \in \rho(A)$ олдуғундан:

$$(\mu E - A)^{-1} A = \left[A^{-1} (\mu E - A)\right]^{-1} =$$

$$= (\mu \cdot A^{-1} - E)^{-1} = \frac{1}{\mu}\left[\left(A^{-1} - \frac{E}{\mu}\right)\right]^{-1}. \qquad (20)$$

$A = (T - \alpha E)^{-1}$, бурадан $A^{-1} = T - \alpha E$ олур. (20)-дəн

$$\frac{1}{\mu}\left(A^{-1} - \frac{E}{\mu}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}\left(T - \alpha F - \frac{E}{\mu}\right)^{-1} = \frac{1}{\mu}(T - \lambda E)^{-1} \qquad (21)$$

бəрабəрлијини нəзəрə алсаг, (20)-јə көрə

$$(T - \lambda E)^{-1} = \mu(\mu E - A)^{-1}$$

өдəнилмəклə $\mu \in \rho(A)$ олдугда, $\lambda \in \rho(T)$ олдуғу алыныр.

Бу нəтичəлəрдəн алырыг ки, (1) васитəсилə тə'јин олунан $\lambda \in \sigma(T)$ исə, онда она ујғун μ-дə $\sigma(A)$-ја дахил олар вə əксинə. Демəли, $\sigma(T)$ илə $\sigma(A)$-нын арасында гаршылыглы биргијмəтли ујғунлуг вар. Гапалы хəтти оператор вə она ујғун мəһдуд хəтти операторун спектрлəринин арасында олан мүнасибəт, гапалы хəтти операторлар нəзəријјəсинин спектрал мəсəлəлəринин өјрəнилмəсиндə хүсуси əһəмијјəтə маликдир. $F'(T)$ илə $\sigma'(T)$-нин əтрафында аналитик олан функсијалар синфини ишарə едəк. Биз мəһдуд хəтти операторун спектринин мəһдуд олмасындан истифадə етдик. Инди биз гејри-мəһдуд гапалы хəтти оператордан асылы оператор функсијасыны тə'јин етдикдə $F'(T)$-јə дахил олан функсијалар васитəсилə верəчəјик.

$f(\lambda) \in F'(T)$ функсијаны көтүрəк, $f(\lambda)$ вə $\lambda = L^{-1}(\mu)$ функсијалары васитəсилə $\varphi(\mu)$ функсијасыны тə'јин едəк:

$$f(\lambda) = f\left[L^{-1}(\mu)\right] = \varphi(\mu). \qquad (22)$$

Бу бәрабәрлик васитәсилә тә'јин олунан $\varphi(\mu)$, $\Phi(A)$-ја дахилдир. Биз (22) бәрабәрлији васитәсилә көстәрдик ки, $F'(T)$-јә дахил олан һәр бир $f(\lambda)$-ја гаршы $\Phi(A)$-ја дахил олан $\varphi(\mu)$функсијасы ујғундур. Белә ки, A оператору T-јә көрә биргијмәтли тә'јин олунур.

Тә'риф 7. *Фәрз едәк ки,* $f(\lambda) \in F'(T)$, *онда (22) васитәсилә тә'јин олунан* $\varphi(\mu)$ функсијасы $\Phi(A)$-ја дахил *олар.* A *мәһдуд оператор олдуғундан көстәрдијимиз кими,* $\varphi(A)$ *тә'јин олунмушдур. Бу оператор функсијасына* $f(T) = \varphi(A)$ *бәрабәрлији илә тә'јин олунан* $f(T)$ *оператор функсијасы гаршы гојулур.*

$f(\lambda)$ вә $\varphi(\mu)$-нин аналитик олдуглары гапалы областлары ујғун олараг $\bar{g}$ вә $\bar{g}'$ һамар контурларыны исә C вә C' илә ишарә едәк.

$$-R(T, \lambda) = \mu^2 R(\mu, A) - \mu E \qquad (23)$$

олдуғуну нәзәрә алараг $\int\limits_C R(\lambda, T) f(\lambda)\, d\lambda$ интегралыны ашағыдакы кими чевирәрәк

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\lambda) R(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \varphi(\mu)\left[\mu E - \mu^2 R(\mu, A)\right]\left(-\frac{d\mu}{\mu_2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \varphi(\mu) R(\mu, A)\, d\mu - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \frac{\varphi(\mu)\, d\mu}{\mu} \qquad (24)$$

бәрабәрлијини јаза биләрик. Һәм $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \varphi(\mu) R(\mu, A)\, d\mu = \varphi(A) = f(T)$ вә һәм дә $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C'} \frac{\varphi(\mu)}{\mu}\, d\mu = \varphi(0) = f(\infty)$ бәрабәрликләрини нәзәрә алмагла (24)-дән $f(T)$ үчүн

$$f(T) = f(\infty) E + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\lambda) R(\lambda, T)\, d\lambda, \qquad (25)$$

бәрабәрлијини алырыг. Беләликлә, T гејри-мәһдуд хәтти гапалы оператор олдугда $F'(T)$-јә дахил олан һәр бир $f(\lambda)$-ја гаршы гојулмуш $f(T)$ оператору үчүн (25) дүстуру доғрудур.

§ 9. ГАПАЛЫ ОПЕРАТОРДАН АСЫЛЫ ПОЛИНОМЛАР ВӘ БУНЛАРЫН БӘ'ЗИ ХАССӘЛӘРИ

Гапалы операторларын үмуми спектрал нәзәријјәсинин өјрәнилмәсиндә белә операторлардан асылы полиномларын мүәјјән хассәләринин тәдгиги мүһүм әһәмијјәтә маликдир. Бу параграфда биз белә полиномларын мүәјјән хассәләрини өјрәнмәклә ујғун оператор үчүн гурулмуш функсијалар илә мүәјјән әлагәләрин доғру олдуғуну көстәрәҹәјик. Онун үчүн дә фәрз едәк ки, T оператору тә'јин областы D_1 олан вә мүәјјән $X-(B)$ фәзасына дахил олан гапалы оператордур.

Тәбии олараг гапалы T операторунун n-чи интеграсијасы ашағыдакы кими тә'јин олунур. Мәсәлән, T^2-ын тә'јин олдуғу D_2 областы X фәзасынын елә x-ләр чохлуғундан ибарәтдир ки, $Tx \in D_1$. Ејни гајда үзрә T^n-нин тә'јин областы D_n елә x-ләр чохлуғундан ибарәтдир ки, $T^{n-1}x \in D_{n-1}$. Ашкардыр ки, $D_n \subseteq D_{n-1}$. Она көрә дә $P_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k$ полиному верилдикдә T операторундан асылы полином ашағыдакы кими тә'јин олунур: бүтүн $x \in D_n$ үчүн

$$P_0(T)\,x = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T^k x \qquad (1)$$

бәрабәрлијини көтүрүрүк. Биз гапалы операторларын спектрал нәзәријјәсинин тәдгигиндә мүәјјән хәтти чевирмәләр васитәсилә белә операторлардан асылы функсијаларла ујғун мәһдуд операторлардан асылы функсијалар арасында мүәјјән асылылыг јаратмагла, мәһдуд операторлардан асылы функсијаларын үмуми спектрал нәзәријјәсиндән истифадә едирдик. Һәмчинин (1)-ин бә'зи хассәләрини өјрәнмәк мәгсәдилә белә хәтти чевирмәләрдән истифадә едәҹәјик вә һәм дә гапалы T оператору илә ујғун мәһдуд оператор арасындакы мүнасибәти вермәклә мәһдуд оператордан асылы полиномларын мүәјјән хассәләрини нәзәрә алаҹајыг. Онун үчүн дә фәрз едәк ки, λ_0, T-нин регулјар нөгтәсидир.

$$\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} \qquad (2)$$

хәтти чевирмәсинә бахаг. T-нин резолвентини $R(\lambda_0, T)$ илә ишарә едәк:

$$A = (T - \lambda_0 E)^{-1} = -R(\lambda_0, T). \qquad (3)$$

A-нын тә'јининдән көрүндүјү кими, O, X-дә тә'јин олунмагла мәһдуд хәтти оператордур.

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (\lambda - \lambda_0)^{n-k} \qquad (4)$$

полиному көтүрәк.

Теорем 13. **T гапалы оператор оларса, онда (4) илә тә'јин олунан $P(T) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (T - \lambda_0 E)^{n-k}$ оператору да гапалыдыр.**

Исбаты. (2)-јә көрә

$$\sum_{\kappa=0}^{n} \alpha_{\kappa} (\lambda - \lambda_0)^{n-\kappa} = \mu^{-n} \sum_{\kappa=0}^{n} \alpha_{\kappa} \mu^{\kappa}.$$

Бурада $q(\mu) = \sum_{\kappa=0}^{n} \alpha_{\kappa} \mu^{\kappa}$ илә ишарә етсәк:

$$P(\lambda) = \mu^{-n} q(\mu). \tag{5}$$

Она көрә, T вә A операторлары $P(\lambda)$ вә $q(\mu)$ полиномлары васитәсилә ашағыдакы мүнасибәтлә бағланыр:

$$P(T) = (T - \lambda_0 E)^{n} q(A). \tag{6}$$

A мәһдуд хәтти оператор олдуғундан гапалыдыр.

$(T - \lambda_0 E)$ оператору да мәһдуд вә еләчә дә гапалы A^{n} операторунун тәрси олдуғундан гапалыдыр. $P(T)$-нин гапалы олдуғуну исбат етмәк үчүн T^{n}-нин вә еләчә дә $P(T)$-нин тә'јин областыны D_n илә ишарә едәк. Гејд етдијимиз кими, T^{n}-нин тә'јин областы D_{n-1}-ин елә x елементләри чохлуғундан ибарәтдир ки, $Tx \in D_{n-1}$. Көстәрәк ки, $x_j \to x$ вә $P(T) x_j \to y$ олдугда $x \in D_n$, $y = P(T) x$ олур. (3)-ү нәзәрә алсаг, $x \in D(T) = D_1$ үчүн $E = A(T - \lambda_0 E) x = (T - \lambda_0 E) Ax$.

$x_j \to x$ олдуғундан $q(\mu)$-нин ифадәсинә көрә

$$q(A) x_j = \sum_{\kappa=0}^{n} \alpha_{\kappa} A^{\kappa} x_j, \tag{7}$$

бурадан

$$q(A) x = \sum_{\kappa=0}^{n} \alpha_{\kappa} A^{\kappa} x.$$

$A = (T - \lambda_0 E)^{-1}$ оларса, истәнилән $\kappa = \overline{1, n}$ үчүн $A^{\kappa} x \in D_{\kappa}(T^{\kappa}) \in D_1(T)$ вә һәм дә $q(A) x \in D_n(T^{n}) \subset D_1(T)$. (7)-дә $\alpha_0 x$ вә беләликлә дә, $x \in D_1$. Индуксија үсулундан истифадә едәрәк $x \in D_n$ олдуғуну исбат едәк. Фәрз едәк ки, $x \in D_m$. Онун үчүн $1 \leqslant m \leqslant n$ гәбул едәрәк,

$$P(A)(T - \lambda_0 E)^{m} x = \alpha_0 A^{n} (T - \lambda_0 E)^{m} x + \alpha_1 A^{n-1} (T = \lambda_0 E)^{m} x +$$

$$+ \cdots + \alpha_n (T - \lambda_0 E)^{m} x.$$

Бу бәрабәрликдә $\alpha_0 (T - \lambda_0 E)^{m} x$ ифадәсиндән башга бүтүн галан ифадәләрин һамысы D_1-ә дахил олур. $\alpha_0 (T - \lambda E)^{m} x \in$ $\in D_1$ вә $x \in D_{m+1}$ олдуғу алыныр. Демәли, $x \in D_m$ олдугда

$x \in D_{m+1}$ $x_1 \in D_1$ олдуғуну көстәрдијимиз үчүн индуксија үсулундан алынып ки, $x \in D_n$ олур вә беләликлә дә, $P(T)$-нин гапалы оператор олдуғу исбат олунур. $x \in D_1$ олдугда

$$AT = TA, \tag{8}$$

она көрә истәнилән k үчүн $A^k T = T A^k$ өдәнилир. A, $(T - \lambda_0 E)^n$ үчүн резолвент олдуғундан $x \in D_n$ $A^m T^n = T^n A_m$ олдуғуну асанлыгла көстәрмәк олар. A-нын тә'рифиндән көрүндүјү кими, A оператору X-дән D_1-ә тә'сир едир. Она көрә A, D_1-и D_1-ә дахил олан чохлуға ин'икас етдирир. Көстәрәк ки, A^m васитәсилә D_n областы D_{n+m}-ә ин'икас олунур. Фәрз едәк ки, $x \in D_1$. $TAx = ATx$ олдуғундан гејд етдијимиз кими $ATx \in D_1$. Она көрә $TAx \in D_1$. Мә'лумдур ки, D_2 елә x-ләрдән ибарәтдир ки, $Tx \in D_1$. Она көрә дә $x' = Ax$ оларса, $Tx' \in D_1$, $x' \in D_2$. Демәли, $x' = Ax$ васитәсилә D_1, D_2-јә ин'икас олунур. Еләчә дә, $T^n A^m = A^m T^n$ бәрабәрлијиндән истифадә едәрәк A^m васитәсилә D_n-нин D_{n+m}-ә ин'икас олундуғу көстәрилир.

$q(A)$-нын вә һәм дә $(T - \lambda_0 E)^n$-нин гапалы олдугларыны нәзәрә алсаг $x_j \to x$,

$$\lim_{n \to \infty} (T - \lambda_0 E)^n q(A) x_j = (T - \lambda_0 E)^n q(A) x$$

олдуғу ашкардыр.

§ 10. СПЕКТРАЛ РАДИУС

Фәрз едәк ки, T, $X - (B)$ фәзасында тә'сир едән мәһдуд хәтти оператордур. Һәр бир белә оператор үчүн мүәјјән бир даирә вар, бу операторун спектри һәмин даирәнин дахилиндә олур. Бу даирәнин радиусу T-нин спектрал радиусу адланыр. Бу радиусун тапылмасы илә мәшғул олмадан габаг $\lambda x - Tx = y$ тәнлијинә бахаг, бурадан $\lambda \neq 0$ гәбул едәрәк $x - \frac{1}{\lambda} Tx = \frac{y}{\lambda}$ олар. λ-ны елә сечәк ки, $\left\| \frac{1}{\lambda} \right\| < 1$ олсун. Онда мә'лумдур ки, Банах операторлар чәбриндә $(E - \frac{1}{\lambda} T)$-нин тәрси вар, демәли, $|\lambda| > \|T\|$ олан һәр бир λ нөгтәси T-нин $\rho(T)$ резолвент чохлуғуна дахилдир. Она көрә дә T-нин спектри варса, $|\lambda| < \|T\|$-јә дахилдир. Спектрал радиусун тә'јини белә бир даирәни тамамилә дәгигләшдирир. Инди һәмин радиусун тә'јини илә мәшғул олаг.

Теорем 14. Һәр бир мәһдуд оператор үчүн $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \| T_n \|^{\frac{1}{n}}$ вар.

Исбаты. $T \equiv 0$ олдугда белә лимитин олмасы ашкардыр, она көрә $T \not\equiv 0$ гәбул едәк

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \| T^{n} \|^{\frac{1}{n}} \tag{1}$$

ишарә едәрәк һәмин лимитин варлығыны көстәрәк. Она көрә

$$\inf \| T^{n} \|^{\frac{1}{n}} = r' \tag{2}$$

олсун. Онда истәнилән $\varepsilon > 0$ әдәди үчүн елә ујғун m әдәди вар ки,

$$\| T^{m} \|^{\frac{1}{m}} \leqslant r' + \varepsilon \tag{3}$$

өдәнилир. Истәнилән n әдәди

$$n = pm + q,\ 0 \leqslant q \leqslant m - 1$$

шәклиндә көстәрилә биләр:

$$\| T^{к} T^{m} \| \leqslant \| T^{к} \| \cdot \| T^{m} \| \leqslant \| T \|^{к} \cdot \| T \|^{m}$$

бәрабәрсизлијиндән ,

$$\| T^{n} \|^{\frac{1}{n}} = \| T^{pm} \cdot T^{q} \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \| T^{m} \|^{\frac{p}{n}} \| T \|^{\frac{q}{n}} \tag{4}$$

олур. Лакин $\| T^{m} \| \leqslant (r' + \varepsilon)^{m}$ бәрабәрсизлијинә көрә исә (4)-дән

$$\| T^{n} \|^{\frac{1}{n}} \leqslant (r' + \varepsilon)^{m \cdot \frac{p}{n}} \| T \|^{\frac{q}{n}} \tag{5}$$

бәрабәрсизлији алыныр.

$n \to \infty$ олдугда $\frac{q}{n} \to 0$. $n = mp + q$ бәрабәрлијиндән $1 = \frac{pm}{n} + \frac{q}{n}$, $n \to \infty$ олдугда, исә $\frac{pm}{n} \to 1$ олур.

Демәли, (27)-дән $n \to \infty$ олдугда

$$\| T^{n} \|^{\frac{1}{n}} \leqslant r' + \varepsilon \tag{6}$$

олдуғу алыныр. ε истәнилән мүсбәт әдәд оларса, бурадан

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| T^{n} \|^{\frac{1}{n}} \leqslant r'. \tag{7}$$

$r' = \inf\limits_{n\geqslant 1} \| T \|^{\frac{1}{n}}$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$r' \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \| T^{n} \|^{\frac{1}{n}} \tag{8}$$

олар. Нәһајәт,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} \tag{9}$$

өдәнилдији алыныр. Дикәр тәрәфдән мә'лумдур ки,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

Беләликлә, $\lim\limits_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$ варлығы исбат олунур. (1) васитәсилә тә'јин олунан $r(T)$, T-нин спектрал радиусу адланыр.

Теорем 15. **$T^к$-нын спектрал радиусу $r(T^к)$ исә,**

$$\sigma(T^к) = \ (T)^к.$$

Исбаты. Доғрудан да,

$$r(T^к) = \lim_{n\to\infty} \| T^{nк} \|^{\frac{1}{n}} = \left[\lim_{n\to\infty} \| T^{nк} \|^{\frac{1}{nк}} \right]^к = r(T)^к. \tag{10}$$

$r(T)$-нин тә'рифиндән көрүндүјү кими $r(T) \leqslant \| T \|$.

$r(T) = \| T \|$ олмасы $\| T^2 \| = \| T \|^2$ өдәнилмәси үчүн һәм зәрури вә һәм дә кафи шәртдир. $r(T) = \| T \|$ исә, онда (10)-дан $\| T \|^2 = \| T^2 \|$ ашкардыр. $\| T^2 \| = \| T \|^2$ олсун. Онда истәнилән $n \geqslant 1$ үчүн $\| T \| = \| T^{2^n} \|^{2^{-n}}$ олмагла лимитә кечсәк, $r(T) = \| T \|$ олдуғу алыныр. Спектрал радиусун көмәји илә ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 16.

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{T^n}{\lambda^{n+1}} \tag{11}$$

илә тә'јин олунан оператор функсијасы $|\lambda| > r(T)$ областында јығылыр.

Исбаты. Онун үчүн

$$|\lambda| \geqslant r(T) + \varepsilon \tag{12}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән λ нөгтәләрини көтүрәк. ε-на көрә елә $N(\varepsilon)$ сечмәк олар ки, $n \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда

$$\| T^n \|^{\frac{1}{n}} < r(T) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

өдәнилсин. (12)-дән исә

$$|\lambda^{-n}| \leqslant (r(T) + \varepsilon)^{-n} \tag{14}$$

алыныр. Һәмчинин (13)-дән

$$\| T^{n} \| < \left(r(T) + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{n} \tag{15}$$

бәрабәрсизлијини алмагла (14) вә (15)-ин көмәјилә

$$|\lambda^{-n} T^{n}\| < \left(\frac{r(T) + \frac{\varepsilon}{2}}{r(T) + \varepsilon} \right)^{n} \tag{16}$$

өдәнилир. Бурадан $\|\lambda^{-n} T^{n}\| < q^{n}$. Белә ки,

$$q = \frac{r(T) + \frac{\varepsilon}{2}}{r(T) + \varepsilon} < 1.$$

Беләликлә, $|\lambda| > r(T)$ олдугда (11)-ин јығылан олдуғу алыныр. Бунунла да теорем исбат олунур. Билаваситә јохламаг олар ки, $F(\lambda)$, T-нин $|\lambda| > r(T)$ бәрабәрсизлијини өдәјән λ-лар үчүн резолвентдир. Доғрудан да, (11)-ә көрә

$$(\lambda E - T) F(\lambda) = (\lambda E - T) \left(\frac{E}{\lambda} + \frac{T}{\lambda^{2}} + \frac{T^{2}}{\lambda^{3}} + \cdots \right) =$$

$$= \left(E + \frac{T}{\lambda} + \frac{T^{2}}{\lambda^{2}} + \cdots \right) - \left(\frac{T}{\lambda} + \frac{T^{2}}{\lambda^{2}} + \frac{T^{3}}{\lambda^{3}} + \cdots \right) = E.$$

Демәли, $(\lambda E - T) F(\lambda) = E$; ејни гајда үзрә $F(\lambda)[\lambda E - T] = E$ олдуғуну јохламаг оларды. Демәли, көстәрдик ки, $F(\lambda)$, T-нин резолвентидир, јә'ни $F(\lambda) = R(\lambda, T)$. Бу бәрабәрликдән мүһүм бир нәтичә алыныр.

Нәтичә. $|\lambda| > r(T)$-ни өдәјән истәнилән λ-нын T үчүн регулјар гијмәт олдуғу алыныр. Демәли, хәтти мәһдуд операторун резолвент чохлуғу, јә'ни $\rho(T)$ бош дејилдир.

Икинчи мүһүм нәтичә ондан ибарәтдир ки, $\sigma(T)$, $|\lambda| < r(T)$-нин дахилиндә олдуғундан хәтти мәһдуд операторун спектри мәһдуддур. Нәһајәт, көстәрәк ки, $\sigma(T)$ бош дејилдир. Әксини фәрз едәк, јә'ни $\sigma(T)$-нин бош олдуғуну гәбул едәк. Онда T-нин резолвенти $R(\lambda, T)$ бүтүн мүстәвидә аналитик олар. $\lambda = \infty$, $R(\lambda, T)$-нын регулјар нөгтәси олдуғундан $R(\lambda, T)$, (λ)-да мәһдуд олур. Она көрә дә вектор функсијалар үчүн доғру олан Лиувилл теореминә көрә $R(\lambda, T) \equiv \text{const}$, $R(\infty, T) = 0$ олдуғундан исә $R(\lambda, T) = 0$ олур, дикәр тәрәфдән $(\lambda E - T) R(\lambda, T) = R(\lambda, T)(\lambda E - T) = E$ олдуғундан зиддијјәт алыныр. Алынан зиддијјәт $\sigma(T)$-нин бош олмадығыны көстәрир. Спектрал радиусун тә'јини үчүн даһа башга бир бәрабәрлијин доғрулуғуну көстәрәк.

Теорем 16а.

$$r(T) = \sup |\sigma(T)| = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda| \tag{17}$$

бәрабәрлијинин доғрулуғуну исбат едәк.

Исбаты. Әввәлчә гејд едәк ки, $r(T) \geqslant \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = \lambda'$ өдәнилмәси (11)-ин јығылан олмасындан билаваситә алыныр. Доғрудан да, әкс һалда (11)-ин јығылмасына көрә λ' регулјар гијмәт аларды. Инди

$$r(T) \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| \tag{18}$$

өдәнилмәсини көстәрәк. (11)-ин јығылан олмасындан алырыг ки, $|\lambda| \geqslant \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| T_n \lambda^{-n} \| = 0$ олур. n-ләри елә сечмәк олар ки, $\| T^n \| \leqslant \left(\varepsilon + \sup\limits_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|\right)^n$ өдәнилсин. Бурадан исә

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|,$$

јә'ни

$$r(T) \leqslant \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda|$$

олур. (17) вә (18)-ин мүгајисәсиндән (17)-нин өдәнилдији алыныр. Беләликлә, спектрал радиус ашағыдакы бәрабәрликләр васитәсилә тә'јин олунур:

$$r(T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = \lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}.$$

Биз көстәрмишдик ки, $|\lambda| > r(T)$ олдугда (11) сырасы јығыландыр. Инди $|\lambda| < r(T)$ олдугда һәмин сыранын дағылдығыны көстәрәк. r_0 илә ән кичик елә мүсбәт әдәди ишарә едәк ки, $|\lambda| > r_0$ олдугда (11) јығылан олсун. Онда $|\lambda| > r_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \| \lambda^{-n} T_n \| = 0$ олар. Онда (40) бәрабәрсизлијинин исбатында олдуғу кими, $\lim\limits_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant r$, јә'ни, $r_0(T) \leqslant r$ олар. Она көрә $|\lambda| < r(T)$ олдугда (11) дағылыр. $r(T)$ илә бағлы олан бир нечә хассәни көстәрәк:

$$r(\alpha T) = |\alpha|\, r(T)$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси ашағыдакы бәрабәрликдән алыныр:

$$r(\alpha T) = \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\alpha\lambda| = |\alpha| \| \sup_{\lambda\in\sigma(T)} |\lambda| = |\alpha \| r(T).$$

Теорем 17. **T_1 вә T_2, $X-(B)$ фәзасында**

$$T_1 T_2 = T_2 T_1 \tag{19}$$

шәртини өдәмәклә тә'сир едән хәтти мәһдуд операторлар исә, онда $T_1 + T_2$ вә $T_1\,T_2$ операторлары үчүн ашағыдакы бәрабәрсизликләр доғрудур:

$$R_{T_1 T_2} \leqslant R_{T_1} \cdot R_{T_2}, \tag{20}$$

$$R_{T_1+T_2} \leqslant R_{T_1} + R_{T_2}. \tag{21}$$

Исбаты. R_{T_1}, R_{T_2}, $R_{T_1T_2}$ вә $R_{T_1+T_2}$-јә ујғун олараг T_1, T_2, T_1T_2 вә T_1+T_2 операторларынын спектрал радиуслары олсун. Әввәлчә (20)-нин доғрулуғуну көстәрәк;

$$R_{T_1T_2} = \lim_{n\to\infty} \| (T_1T_2)^n \|^{\frac{1}{n}} \tag{22}$$

бәрабәрлијини көтүрәк. (19)-а көрә (22)-дән

$$R_{T_1T_2} = \lim_{n\to\infty} \|T_2^n T_1^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{23}$$

Дикәр тәрәфдән

$$\|T_2^n T_1^n\| \leqslant \|T_2^n\|\cdot\|T_1^n\|$$

сонунчу бәрабәрсизлији нәзәрә алсаг, (23)-дән

$$R_{T_1T_2} \leqslant \lim_{n\to\infty} \|T_2^n\|^{\frac{1}{n}}\cdot \lim_{n\to\infty}\|T_1^n\|^{\frac{1}{n}} = R_{T_1}R_{T_2}.$$

Беләликлә, (20) өдәнилир. (21)-ин доғрулуғуну көстәрмәк үчүн $(T_1+T_2)^n \|$ ифадәсини гијмәтләндирәк:

$$(T_1+T_2)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} T_1^j T_2^{n-j} \tag{24}$$

вә јахуд

$$\|(T_1+T_2)^n\| \leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\|T_1^j\|\cdot\|T_2^{n-j}\| \tag{25}$$

өдәнилир.

$\gamma > R_{T_1}$ вә $\gamma_2 > R_{T_2}$ бәрабәрсизликләрини өдәјән γ_1 вә γ_2 ихтијари әдәдләрини көтүрәк, онда R_{T_1} вә R_{T_2}-нин тә'рифинә көрә елә N әдәди көстәрмәк олар ки, $n \geqslant N(\gamma_1, \gamma_2)$-ни өдәјән бүтүн n-ләр үчүн

$$\|T_1^n\|^{\frac{1}{n}} < \gamma_1, \tag{26}$$

$$\|T_2^n\|^{\frac{1}{n}} < \gamma_2 \tag{27}$$

бәрабәрсизликләри өдәнилсин.

Әкәр $\|T_1\| = t_1$ вә $\|T_2\| = t_2$ илә ишарә етсәк, истәнилән n үчүн

$$\|T_1^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant t_1, \tag{28}$$

$$\|T_2^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant t_2 \tag{29}$$

бәрабәрсизликләри өдәнилир. (24)-ү ашағыдакы кими көстәрәк:

$$(T_1+T_2)^n=\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}T_1^j\,T_2^{n-j}+\sum_{j=m}^{n-m}\binom{n}{j}T_1^j\,T_2^{n-j}+$$

$$+\sum_{j=n-m+1}^{n}\binom{n}{j}T_1^j\,T_2^{n-j}=J_1+J_2+J_3. \tag{30}$$

Бурада

$$J_1=\sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}T_1^j\,T_2^{n-j},$$

$$J_2=\sum_{j=m}^{n-m}\binom{n}{j}T_1^j\,T_2^{n-j},$$

$$J_3=\sum_{j=n-m+1}^{n}\binom{n}{j}T_1^j\,T_2^{n-j}.$$

$m>2N$ олдугда J_1-ә дахил олан T_2-ләрин үстләри N-дән бөјүк олдуғундан (51) вә (52)-ни нәзәрә алсаг, J_1-ин ифадәсиндән ашағыдакы бәрабәрсизлији алырыг:

$$\| J_1 \| < \sum_{j=0}^{m-1}\binom{n}{j}t_1^j\,\gamma_2^{n-j}, \tag{31}$$

Һәмчинин $n>2m$ олдугда J_2-нин ифадәсинә дахил олан T_1 вә T_2-нин үстләри N-дән бөјүкдүр. Она көрә дә (26) вә (27) бәрабәрсизликләринә көрә

$$\| J_2 \| \leqslant \sum_{j=m}^{n-m}\binom{n}{j}\gamma_1^j\,\gamma_2^{n-j}. \tag{32}$$

Нәһајәт, n вә m үчүн көстәрдијимиз J_3-ә дахил олан T_1-ләрин үстләри N-дән бөјүк олдуғундан

$$\| J_3 \| < \sum_{j=n-m+1}^{n}\binom{n}{j}\gamma_1^j t_2^{n-j} \tag{33}$$

өдәнилир. (31), (32), (33)-ә көрә (30)-дан

$$\| (T_1 + T_2) \|^n \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \binom{n}{j} t_1^j \gamma_2^{n-j} + $$

$$+ \sum_{j=m}^{n-m} \binom{n}{j} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} + \sum_{j=n-m+1}^{n} \binom{n}{j} \gamma_1^j t_2^{n-j},$$

олмагла бурадан

$$\| (T_1 + T_2) \|^n \leqslant \sum_{j=0}^{m-1} \binom{n}{j} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} \left(\frac{t_1}{\gamma_1}\right)^j + $$

$$+ \sum_{j=m}^{n-m} \binom{n}{j} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} + \sum_{j=n-m+1}^{n} \binom{n}{j} \gamma_1^j \gamma_2^{n-j} \cdot \left(\frac{t_2}{\gamma_2}\right)^{n-j} \tag{34}$$

бәрабәрлиjини алырыг. (34)-дән

$$\| (T_1 + T_2)^n \| \leqslant \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \gamma_1^j \gamma_2^j \left[\max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \left(\frac{t_1}{\gamma_2}\right)^j + \right.$$

$$\left. + \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \left(\frac{t_2}{\gamma_2}\right)^j + 1 \right] \tag{35}$$

олар.

$$M = \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \left(\frac{t_1}{\gamma_1}\right)^j + \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} \left(\frac{t_2}{\gamma_2}\right)^j + 1; \tag{36}$$

ишарә етсәк, (35) вә (36)-jа көрә

$$\| (T_1 + T_2)^n \| \leqslant M (\gamma_1 + \gamma_2)^n, \tag{37}$$

бәрабәрсизлиjи өдәнилир. Бурадан

$$\| (T_1 + T_2)^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant M^{\frac{1}{n}} (\gamma_1 + \gamma_2). \tag{38}$$

$\gamma_1 = R_{T_1} + \varepsilon$ вә $\gamma_2 = R_{T_2} + \varepsilon$ бәрабәрликләрини тә'jин едәк.

Онда

$$\| (T_1 + T_2)^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant M^{\frac{1}{n}} (R_{T_1} + R_{T_2} + 2\varepsilon),$$

бурадан

$$\lim_{n \to \infty} \| (T_1 + T_2)^n \|^{\frac{1}{n}} \leqslant R_{T_1} + R_{T_2}$$

вә jахуд

$$R_{T_1 + T_2} \leqslant R_{T_1} + R_{T_2} + 2\varepsilon.$$

Бурада ε ихтиjари мүсбәт әдәд олдуғундан (21) өдәнилир.

ТАМАМ КӘСИЛМӘЗ ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ ОНЛАРЫН СПЕКТРАЛ НӘЗӘРИЈЈӘСИ

§ 1. ТАМАМ КӘСИЛМӘЗ ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘРИН АНАЛИТИК НӘЗӘРИЈЈӘСИ

Фәрз едәк ки, K, H фәзасындан H_0-а тә'сир едән тамам кәсилмәз оператордур. Һәләлик тамам кәсилмәз операторун ашағыдакы тә'рифини верәк.

K о заман тамам кәзилмәз оператор адланыр ки, $\{\ _n\}$, H-дан олан истәнилән мәһдуд ардычыллыг исә $\{Kf_n\}$-дән јығылан $\{Kf_{n_i}\}$ алтардычыллығы сечмәк мүмкүн олсун.

$$\lambda x - Kx = y \tag{1}$$

тәнлијинә бахаг. Бурада биз (1) тәнлијинин аналитик үсулла һәлләрини тәдгиг едәчәјик. K сонсуз өлчүлү олдугда бу оператор әлверишли олан елә операторларла апраксимасија олунур ки, белә апраксимасија (1) тәнлијинин аналитик үсулла дәгиг өјрәнилмәсинә сәбәб олур. K операторунун сонлу өлчүлү вә сонсуз өлчүсүз һалларыны ајры-ајры тәдгиг едәчәјик.

Фәрз едәк ки, K сонлу өлчүлүдүр. Онда

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \tag{2}$$

кими көтүрүрләр. Бурада $x_1, x_2, \ldots, x_n - H_0$ базиз векторлары олмагла ортонормал көтүрүлүр. (2)-дән

$$(\ x, x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i, x_i)$$

олур. Көстәрилән векторларын ортонормаллыг шәртинә көрә исә бурадан $\alpha_j = (Kx, x_j)$ олмагла (2)-дән

$$Kx = \sum_{i=1}^{n} (Kx, x_i)\, x_i. \tag{3}$$

Бу бәрабәрликдән истифадә едәрәк K^* оператору үчүн ујғун көстәрилиш алына биләр. K^*, K-ја гошма фәрз олдуғундан $(K^*z, x) = (z, Kx)$ олар. Она көрә

$$(K^*z, x) = \left(z, \sum_{j=1}^{n} (Kx, x_j)\, x_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (x_j, Kx)(z, x_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (K^*x_i, x)(z, x_i) = \sum_{i=1}^{n} (y_i, x)(z, x_i).$$

Она көрә дә

$$(K^*z, x) = \sum_{i=1}^{n} (y_i, x)(z, x_i).$$

Белә ки, $y_i = K^*x_i$. Демәли,

$$(K^*z, x) = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i (z, x_i), x\right).$$

Бу бәрабәрлик истәнилән x үчүн өдәнилдијиндән,

$$K^*z = \sum_{i=1}^{n} (z, x_i) y_i$$

јазылышынын симметриклик нөгтеји-нәзәриндән $z = x$ оларса:

$$K^*x = \sum_{i=1}^{n} (x, x_i) y_i.$$

(3) бәрабәрлији ашағыдакы кими чеврилир:

$x_к^*(x) = (Kx, x_к)$ функсионалы H-да тә'сир едән мәһдуд хәтти функсионал олдуғундан, Рисс теоремине көрә һәр $x_к^*(x)$-ә $(к = \overline{1, n})$ гаршы елә јеканә $y_к$ $(к = \overline{1, n})$ елементи вар ки, $x_к^*(x) = (x, y_к)$. Она көрә дә (3)

$$Kx = \sum_{к=1}^{n} (x, y_к) x_к \tag{4}$$

шәклиндә олур. Демәли, K, H-да тә'сир едән сонлу өлчүлү оператор исә, онда бу оператор (4) шәклиндә көстәрилир.

K операторунун белә ифадәси (1) тәнлијинин һәлләринин тәдгигини сонлу чәбри тәнликләр системинин һәллинә кәтирир. Демәли, K сонлу өлчүлү олдугда (4) тәнлијинин һәлләринин варлығы вә јеканәлији һаггындакы теоремләр ујғун сонлу чәбри тәнликләр системинин һәлләрини характеризә едән теоремләрлә бағланыр. K сонсуз өлчү олдугда бу схем сонсуз чәбри тәнликләр системи илә бағланараг тәдгиг олунма гајдасы олдугча чәтинләшир. Лакин мүәјјән синиф операторлар вар ки, бунлар мүәјјән дәгигликлә сонлу өлчүлү операторларла јахынлашдырылыр. Она көрә белә операторлар үчүн (1)-ин тәдгиг олунмасы мәсәләсинин мүәјјән үсулу алыныр. Һәмин үсулун әсасыны тәшкил едән ашағыдакы теоремин исбатыны верәк.

Теорем 1. Фәрз едәк ки, K H-да тә'сир едән тамам кәсилмәз хәтти оператор вә $x_к$ $(к = \overline{1, \infty})$. Бу фәзанын ортонормал тәшкил едән базис векторларды

$$K_n = P_n K P_n \tag{5}$$

олсун, Белә ки,

$$P_п x = \sum_{к=1}^{п} (x, x_к) x_к \tag{6}$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур. Көстәрәк ки, $K_п$, K-ја күчлү јығылыр.

Исбаты. Онун үчүн әввәлчә $P_п$ операторунун бир нечә мүһүм хассәләрини көстәрәк.

1. $P_п$ проjектордур. Доғрудан да, (6) ифадәсини нәзәрә алараг:

$$P_п^2 x = \sum_{к=1}^{п} (P_п x, x_к) x_к = \sum_{к,\, j=1}^{п} (x, x_j)(x_j, x_к) x_к.$$

Системин ортонормал олдуғундан ахырынчы бәрабәрликдән

$$P_п^2 x = \sum_{к=1}^{п} (x, x_к) x_к = P_п x. \tag{7}$$

Беләликлә, $P_п$-ин проjектор олмасы алыныр.

2. $P_п^* = P_п$ олмасы ашкардыр,

3. $P_п$—проjектор олдуғундан $\| P_п \| \leqslant 1$.

4. $(E - P_п)^2 = E - P_п$ олдуғундан $\| E - P_п \| \leqslant 1$.

5. $f \in H$ олан һәр бир елемент H-да јеканә олараг $f = \sum_{i=1}^{п} (f, x_i) x_i$ шәклиндә көстәрилә билдијиндән $P_п \to E$ олур.

$K_п$-нин K-ја күчлү јығылдығыны көстәрмәк үчүн лазым олан мүәјјән бир бәрабәрлијин өдәнилдијини көстәрәк. Онун үчүн $KP_п x = y$ илә ишарә едәк. Онда (6)-ја көрә

$$K_п x = P_п y_п = \sum_{к=1}^{п} (y_п, x_к) x_к \tag{8}$$

бәрабәрлијини көтүрәк. Еләчә дә (6)-ја көрә $y_п$

$$y_п = \sum_{j=1}^{п} (x, x_j) K x_j \tag{9}$$

кими јазылыр. (8) вә (9) бәрабәрликләринә көрә

$$K_п x = \sum_{к,\, j=1}^{п} (x, x_j)(K x_j, x_к) x_к. \tag{10}$$

Јери кәлмишкән гејд едәк ки, бу параграфда (10)-дан истифадә едәрәк мүһүм бир тәклифин доғрулуғуну көстәрәчәјик.

$K_п$-нин K-ја күчлү јығылмасыны көстәрмәк үчүн әксини фәрз едәк. Она көрә, $x_п \in H$ олан вә $\| x_п \| = 1$-и өдәјән елә сонсуз $\{x_п\}$ ардычыллығы вар ки,

$$\| (K - K_п) x_п \| \geqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Бурада ε, n-дән асылы олмајан мүәјјән мүсбәт әдәддир. Шәртә көрә K тамам кәсилмәз вә $\| x_п \| = 1$ олдуғундан $\{Kx_п\}$-дән јығылан вә лимити x олан

$$\{Kx_{п_к}\} \tag{12}$$

ардычыллығыны сечмәк олар. (11)-дән Ејни гајда үзрә

$$\|(K - K_{п_к}) x_{п_к}\| \geqslant \varepsilon. \tag{13}$$

$P_п$ мәһдуд олдуғундан $(KP_п,\ K - KP_п)$-дә таман кәсилмәз олдуғундан, $\{(K - KP_п) x_п\}$ ардычыллығындан јығылан алт ардычыл

$$\{(K - KP_{п_к}) x_{п_к}\} \tag{14}$$

лығыны сечмәк олар. (14)-ә дахил олан $x_{п_к}$-лар (12)-дә олдуғу кими сечилир. (14)-ин лимитини x' илә ишарә едәк:

$$K - K_{п_к} = K - P_{п_к} K P_{п_к} = K - P_{п_к} K + P_{п_к} K - \tag{15}$$
$$- P_{п_к} K P_{п_к} = (E - P_{п_к}) K + P_{п_к} K (E - P_{п_к}).$$

Белә бир ејнилијә бахаг:

$$(E - P_{п_к}) Kx_{п_к} = (E - P_{п_к}) Kx_{п_к} - (E - P_{п_к}) Kx + (E - P_{п_к}) Kx$$

вә

$$(E - P_{п_к}) Kx_{п_к} = (E - P_{п_к}) (Kx_{п_к} - K) + (E - P_{п_к}) Kx \tag{16}$$

бәрабәрлији алыныр. $\| E - P_п \| \leqslant 1$ олдуғундан (16)-дан

$$\|(E - P_{п_к}) Kx_{п_к}\| \leqslant \| Kx_{п_к} - Kx \| + \|(E - P_{п_к}) Kx\| \tag{17}$$

бәрабәрсизлији алыныр. $x_{п_к} \to x$ вә $E \to P_{пк}$ олдуғундан (17)-ни нәзәрә алсаг:

$$\|(E - P_{п_к}) Kx_{п_к}\| \xrightarrow[к \to \infty]{} 0. \tag{18}$$

Ејни гајда үзрә $\| P_п \| \leqslant 1$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$\|P_п K (E - P_{п_к}) x_{п_к}\| \leqslant \|K (E - P_{п_к}) x_{п_к}\| \to \| x' \|. \tag{19}$$

(x', x') скалјар һасилини гијмәтләндирәк: $E^* = E$ вә $P_п$ проjектор олдуғундан $P_п^* = P_п$ беләликлә,

$$(x', x') = \lim_{к \to \infty} (K (E - P_{п_к}) x_{п_к},\ x') =$$
$$= \lim_{к \to \infty} (x_{п_к},\ K^* (E^* - P_п^*) x') = \lim_{к \to \infty} (x_{п_к},\ K^* (E - P_{п_к}) x'). \tag{20}$$

$\| x_{п_к} \| = 1$ олдугда $(x_{п_к},\ K^* (E - P_{п_к}) x')$ скалјар һасилинә Шварс бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк, (20)-дән

$$(x', x') \leqslant \lim_{\text{к} \to \infty} \left\|\left(E - P_{\text{п}_\text{к}}\right) K^* x' \right\| . \qquad (21)$$

$P_{\text{п}_\text{к}} \xrightarrow[\text{к}\to\infty]{} E$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда $\left\|\left(E - P_{\text{п}_\text{к}}\right) K^* x' \right\| \to 0$ олмагла (21)-дән $x' \to 0$ олур. Беләликлә дә (19) бәрабәрсизлијиндән

$$\left\| P_\text{п} K \left(E - P_\text{п}\right) x_{\text{п}_\text{к}} \right\| \to 0 \qquad (22)$$

олур.

Нәһајәт, (21), (18) вә (22)-ни нәзәрә алараг (15)-дән

$$\left\|\left(K - K_{\text{п}_\text{к}}\right) x_{\text{п}_\text{к}} \right\| \leqslant \left\|\left(E - P_{\text{п}_\text{к}}\right) K x_{\text{п}_\text{к}} \right\| + \left\| P_{\text{п}_\text{к}} K \left(E - P_{\text{п}_\text{к}}\right) x_\text{к} \right\|. \qquad (23)$$

Беләликлә, $\left\|\left(K - K_{\text{п}_\text{к}}\right) x_{\text{п}_\text{к}} \right\| \to 0$ олдуғуну алырыг. Лакин бу мүнасибәт (13) бәрабәрсизлијинә зидд олур. Алынан зиддијјәт $\| K - K_\text{п} \| \to 0$ олдуғуну көстәрир. Теорем исбат олунур. Бу теорем Һилберт фәзасында (1) тәнлијинин тәдгигиндә олдугча мүһүм әһәмијјәтә маликдир. Белә ки, бу тәнлијин көмәјилә Һилберт фәзасында (1) тәнлијинә ујғун Фредголмун алтернативи үмумиләшдирилир. Лакин биз сонралар (1) тәнлијини үмуми Банах фәзасында һәндәси үсул васитәсилә тәдгиг етдијимиздән бу теоремлә кифајәтләнирик.

§ 2. ТАМАМ КӘСИЛМӘЗ ОПЕРАТОРЛАР

Тә'риф 1. *X — (B) фәзасындан $У$ — (B) фәзасына тә'сир едән хәтти T оператору о заман тамам кәсилмәз адланыр ки: 1. X_0, X-дә истәнилән мәһдуд компакт чохлуг олдугда TX_0-дан күчлү мә'нада јығылан $\{T x_\text{п}\}$ ардычыллығыны сечмәк мүмкүн олсун.*

Бу тә'рифдән хүсуси һалда алыныр ки, $\{x_\text{п}\}$, X-дә истәнилән мәһдуд ардычыллыг исә, $\{T x_\text{п}\}$-дан јығылан $\{T x_{\text{п}_\text{к}}\}$ алт-ардычыллығыны сечмәк мүмкүн олсун. H фәзасында тамам кәсилмәз операторларын мүәјјән мүһүм мәсәләләрин һәлләринин тәдгигләриндә, јухарыда гејд олунмуш 1-чи тә'риф илә еквивалент олан тә'рифләриндән дә истифадә олунур, биз бу тә'рифләри бурада шәрһ етмәклә һәмин тә'рифләрин еквивалент олдугларыны чөстәрәк.

2. $\{f_\text{п}\}$ вә $\{g_\text{п}\}$ ардычыллыглары ујғун олараг f вә g-јә зәиф јығылдыгда $(T f_\text{п}, g_\text{п})$ скалјар һасили (Tf, g)-јә јығылсын.

3. T оператору истәнилән зәиф јығылан ардычыллығы күчлү јығылан ардычыллыға ин'икас етдирсин.

4. Истәнилән сонсуз мәһдуд $\{f_\text{п}\}$ ардычыллығындан елә $\{f_{\text{п}_\text{к}}\}$ алт ардычыллығы сечмәк мүмкүндүрсә, $n_\text{к} \to \infty$, $m_\text{к} \leftarrow \leftarrow \infty$ олдугда $\left(T\left(f_{\text{п}_\text{к}} - f_{\text{m}_\text{к}}\right), f_{\text{пк}} - f_{\text{m}_\text{к}}\right) \to 0$ олсун.

Теорем 2. Тамам кәсилмәз операторларын дөрд тә'рифи еквивалентдир.

Исбаты. 1-дән 2-чи шәртин алындығыны көстәрәк: әксинә фәрз едәк ки, 1 өдәнилдији һалда 2 өдәнилмир, јә'ни $\{f_n\}$-ы f-ә, $\{g_n\}$-и исә g-јә зәиф јығылдығы һалда елә сонсуз сајда n нөмрәләри вар ки,

$$|(Tf_n, g_n) - (Tf, g)| \geqslant \varepsilon \tag{1}$$

өдәнилир; бурада ε мүәјјән мүсбәт әдәддир.

$\{f_n\}$, f-ә зәиф јығылдығындан $\{f_n\}$ мәһдуддур. Она көрә 1 шәртинә көрә T тамам кәсилмәз олдуғундан $\{Tf_n\}$-дан күчлү мә'нада јығылан

$$\{Tf_{n_k}\} \tag{2}$$

алтардычыллығы сечмәк олар. Дикәр тәрәфдән исә $\{Tf_{n_k}\}$ ардычыллығынын Tf-ә зәиф јығылдығы ашағыдакы бәрабәрликдән ајдындыр:

$$\left(Tf_{n_k}, g\right) = \left(f_{n_k}, T^*g\right) \to (f, T^*g) = (Tf, g), \tag{3}$$

$$\left(Tf_{n_k}, g_{n_k}\right) - (Tf, g) = \left(Tf_{n_k}, g_{n_k}\right) - (Tf, g_{n_k}) +$$
$$+ (Tf, g_{n_k}) - (Tf, g).$$

Бурадан

$$\left|\left(Tf_{n_k}, g_{n_k}\right) - (Tf, g)\right| \leqslant \left|\left(Tf_{n_k} - Tf, g_{n_k}\right)\right| + \left|(Tf, g_{n_k} - g)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \| Tf_{n_k} - Tf \| \cdot \| g_{n_k} \| + \left|(Tf, g_{n_k} - g)\right|. \tag{4}$$

g_{n_k}-нын g-јә зәиф јығылмасы вә $\{Tf_{n_k}\}$-ны Tf-ә күчлү јығылмасындан алырыг ки, $\left|\left(Tf_{n_k}, g_{n_k}\right) - (Tf, g)\right| \to 0$, бу исә 1-ә зидд олмагла 1-дән 2-нин алындығыны көстәрир.

2-дән 3-чү шәртин алындығыны көстәрәк: $\{f_n\}$-нин зәиф јығылдығыны фәрз едәк. Онда, $\tilde{f}_n = f_n - f \to 0$ олмагла 3-ә көрә f_n зәиф јығылдығындан $\tilde{g}_n = Tf_n - Tf \to 0$ зәиф јығылыр. $\| T(f_n - f)) \|^2 = (T(f_n - f), T(f_n - g)) = (\tilde{g}; \tilde{T}, \tilde{f}_n)$ бәрабәрлијини көтүрәк, f_n вә g_n-нин сыфра зәиф јығылмасындан $\left(\tilde{g}_n, T\tilde{f}_n\right) \to 0$. Беләликлә, $\| T(f_n - f \|^2 \to 0$ 3-үн өдәнилдијини көстәрир. 3-дән 4-үн алындығыны көстәрмәк үчүн $\{f_n\}$-нын мәһдуд олдуғуну фәрз едәк. Мә'лумдур ки, белә ардычыллыгдан зәиф јығылан $\{f_{n_k}\}$ алтардычыллығыны сечмәк олар. $\| f_{n_k} \| < M$, бу бәрабәрсизликдә M мүәјјән мүсбәт әдәддир. Шварс бәрабәрсизлијинә көрә

$$\left(Tf_{n_k} - f_{m_k}\right), f_{n_k} - f_{m_k}\right| < 2M \| T(f_{n_k} - f_{m_k}) \|.$$

3-ә көрә $\| T(f_{n_k} - f_{m_k}) \| \to 0$ олдуғундан, беләликлә, бурадан $T(f_{nk} - f_{m_k}), (f_{n_k} - f_{m_k})| \to 0$; 4-үн өдәнилдији алыныр. 4-дән 1-ин алындығыны көстәрсәк бүтүн дөрд тә'рифин бир-бири илә еквивалент олдугларыны исбат етмиш олуруг. Она көрә дә 4-үн өдәнилдијини гәбул едәрәк 1-ин өдәнилдијини исбат едәк. Фәрз едәк ки, $\{f_n\}$ мәһдуд ардычыллыгдыр. Һәмчинин, T мәһдуд олдуғундан $f_{jn} = f_n + jTf_n$; $(j = 1, -1, i, -i)$, онда $(f_{jn}\}$ ардычыллығы да мәһдуд олар. Она көрә дә елә f_{jn_k} $(j = \overline{1, 4})$ алтардычыллыгларыны сечмәк олар ки, $\underline{4\text{-ү}}$ нәзәрә алсаг $\underset{n_k \to \infty}{\left(T\left(f_{jn_k} - f_{jm_k}\right)\right.}, \underset{m_k \to \infty}{\left.\left(f_{jn_k} - f_{jmk}\right)\right)}$ ифадәси $j = \overline{1, 4}$ гијмәтләри үчүн сыфра јахынлашыр. Билаваситә јохламаг олар ки,

$$\begin{gathered}\left(T\left(f_{1nk} - f_{1m_k}\right), f_{1n_k} - f_{1m_k}\right) - \\ - \left(T\left(f_{2n_k} - f_{2m_k}\right), \left(f_{2n_k} - f_{2m_k}\right)\right) + \\ + i\left(T\left(f_{3n_k} - f_{3m_k}\right), f_{3n_k} - f_{3m_k}\right) - i\left(T\left(f_{4n_k} - f_{4m_k}\right), f_{4n_k} - f_{km_4}\right) = \\ = 4\left(T\left(f_{n_k} - f_{m_k}\right), T\left(f_{n_k} - f_{m_k}\right)\right) \qquad (5)\end{gathered}$$

бәрабәрлији өдәнилир.

4-ә көрә (5)-ин сол тәрәфинә дахил олан һәр бир топланан сыфра јахынлашдығындан бурадан $\|Tf_{n_k} - Tf_{m_k}\|^2 \to 0$. Беләликлә, (1) өдәнилир вә еквивалентликләринин исбаты тамамланыр.

§ 3. ҺИЛБЕРТ ФӘЗАСЫНДА СИММЕТРИК ТАМАМ КӘСИЛМӘЗ ОПЕРАТОРЛАРЫН МӘХСУСИ ГИЈМӘТЛӘРИ ҺАГГЫНДА

Теорем 3. Фәрз едәк ки, T,H һилберт фәзасында тә'сир едән симметрик вә тамам кәсилмәз хәтти оператордур, онда белә операторун сыфырдан фәргли ән азы бир мәхсуси әдәди вардыр.

Исбаты. Биз әввәлчә, јалныз симметрик операторларла әлагәдар бир нечә хассәләри көстәрәк. Бунун үчүн әввәлчә көмәкчи

$$\lambda\varphi - T_1\varphi = 0 \qquad (1)$$

тәнлијинә бахаг. Белә ки, T_1H-да тә'сир едән мәһдуд симметрик оператордур. Көстәрәк ки, (1) тәнлијинин тәгриби һәлли вар вә ашағыдакы схем үзрә гурулур. Көстәрдијимиз кими T_1 оператору үчүн

$$\sup_{\|f\|=1}|(T_1f.f)| = \|T_1f\|_{\|f\|=1} = \|T_1\| \qquad (2)$$

өдәнилир. Онда $\|f_n\| = 1$ олан елә $\{f_n\}$ардычыллығыны гурмаг олар ки, $\lim\limits_{n\to\infty}|(T_1f_n, f_n)| = \|T_1\|$.

$|(T_1f_n, f_n)|$-нын лимитинин варлығындан, һәмчинин (T_1f_n, f_n) лимитинин варлығы чыхыр, бу лимити λ_1 илә ишарә едәк: $\gamma_1 = \lim\limits_{n\to\infty}(T_1f_n, f_n)$ $n \to \infty$ шәртиндә

$$\lambda_1 f_{\text{п}} - T_1 f_{\text{п}} \to 0 \tag{3}$$

олмасыны көстәрәк. T_1 симметрик олдуғундан λ_1 һәгигидир вә $|\lambda_1| = \|T_1\|$ олмасы ашкардыр. Ашағыдакы бәрабәрлији көтүрәк:

$$\|T_1 f_{\text{п}} - \lambda_1 f_{\text{п}}\|^2 = (T_1 f_{\text{п}} - \lambda_1 f_{\text{п}},\ T_1 f_{\text{п}} - \lambda_1 f_{\text{п}}) =$$

$$= \|T_1 f_{\text{п}}\|^2 - \lambda_1 (T_1 f_{\text{п}}, f_{\text{п}}) - \lambda_1 (f_{\text{п}}, T_1 f_{\text{п}}) + \lambda_1^2 \|f_{\text{п}}\|^2. \tag{4}$$

T_1 симметрик олдуғундан $(T_1 f_{\text{п}}, f_{\text{п}}) = (f_{\text{п}}, T_1 f_{\text{п}})$, она көрә

$$0 \leqslant \|T_1 f_{\text{п}} - \lambda_1 f_{\text{п}}\|^2 = \|T_1 f_{\text{п}}\|^2 - 2\lambda_1 (T_1 f_{\text{п}}, f_{\text{п}}) + \lambda_1^2$$

бәрабәрсизлији алыныр.

$\|T_1 f_{\text{п}}\|^2 \leqslant \|T_1\|^2 = \lambda_1^2$ олдуғуна көрә, бурадан

$$0 \leqslant \|T_1 f_{\text{п}} - \lambda_1 f_{\text{п}}\|^2 \leqslant 2\lambda_1^2 - 2\lambda_1 (T_1 f_{\text{п}}, f_{\text{п}}). \tag{5}$$

$(T_1 f_{\text{п}}, f_{\text{п}}) \to \lambda_1$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (5)-ин сағ тәрәфи сыфра јахынлашдығындан (3)-үн өдәнилдији алыныр. Демәли λ_1 јухарыдакы гајда үзрә сечилдикдә (1)-ин тәхмини һәллини верир. Гејд едәк ки, (1) тәнлијинин бу гајда үзрә тәхмини һәллинин гурулмасында T_1-ин тамам кәсилмәзлији лазым олмамагла $T_1^* = T_1$ олмасы кифајәтдир. Бундан сонра T_1 әвәзинә T көтүрәк. Бу операторун симметрик вә тамам кәсилмәз олдуғуну фәрз едәк. $T^* = T$ олдуғундан λ_1-и (5) васитәсилә сечәрәк (1)-ин ејни гајда үзрә тәхмини һәллини гура биләрик. Она көр1ә дә $\lambda_1 f_{\text{п}} - T f_{\text{п}} \to 0$ олдуғуну көстәрмишдик. T тамам кәсилмәз олдуғундан $\{T f_{\text{п}}\}$ ардычыллығындан јығылан $\{T f_{\text{п}_{\text{к}}}\}$ алтардычыллығыны сечмәк олар.

$$\lambda_1 f_{\text{п}_{\text{к}}} = T f_{\text{п}_{\text{к}}} \tag{6}$$

олмасындан алыныр ки, $\{f_{\text{п}_{\text{к}}}\}$ ардычыллығы да мүәјјән бир f елементинә јығылыр. Она көрә дә (6)-дан лимитә кечмәклә

$$\lambda_1 f - T f = 0 \tag{7}$$

алыныр. Белә ки, $\|f\| = 1$. Беләликлә, көстәрдик ки, T симметрик вә тамам кәсилмәз олдугда $\varphi - \lambda T \varphi = 0$ тәнлијинин һеч олмаса бир мәхсуси әдәди вар.

$(T'f', f')$ максимумуну мүәјјән бир f-дә алырса, јә'ни $\|(Tf', f')\,| = \|Tf'\| = \|T\|$ олурса, бу елемент T операторунун $|\lambda'| = \|T\|$ олан λ' мәхсуси гијмәтинә ујғун мәхсуси векторудур. $\|Tf' - \lambda' f'\|^2$-на (5) бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк,

$$\|Tf' - \lambda' f'\|^2 \leqslant 2\lambda'^2 - 2\lambda'^2 = 0$$

олмагла $Tf' - \lambda' f' = 0$. Бурадан о нәтичәјә кәлирик ки, $\|f\| = 1$ сферасында $|\,Tf,\, f)\,|$-ә максимум верән һәр бир вектор T-нин ујғун мәхсуси әдәдинә ујғун олан вектордур.

Теорем 4. Хәтти T операторунун спектри сонсуз олдугда, бу спектр һесаби олмагла лимит нөгтәси сыфра бәрабәрдир.

Гејд. Биз $(E-\lambda T)x=0$ тәнлијини тәдгиг едәркән тамам кәсилмәз операторларын спектри һаггында теорем исбат етмишдик. Лакин һилберт фәзасында тамам кәсилмәз операторларын спектринин нәинки варлығынын характеристикасыны һәтта мүәјјән гајда үзрә гурулмасыны көстәрмәклә јухарыда гејд етдијимиз теоремин башга гајда үзрә исбатыны веририк.

Исбаты. λ_1 мәхсуси әдәдинә ујғун f_1, $\|f_1\|=1$ векторуну көтүрәк H-дан бу елементә ортогонал олан елементләр чохлуғуну H_1 илә ишарә едәк. $\tilde{f}\in H_1$ олсун.

$$(T\tilde{f}, f_1)=(\tilde{f}, T^{*}f_1)=(\tilde{f}, Tf_1)=(\tilde{f}, \lambda_1 f_1)=\lambda_1(\tilde{f}, f_1)=0 \quad .(8)$$

бәрабәрлијиндән алыныр ки, T васитәсилә H_1 өз-өзүнә чеврилир. Дикәр тәрәфдән скалјар һасилин кәсилмәмәзлијинә көрә H_1 алтфәзадыр. Онда исбат етдијимиз гајда үзрә елә λ_2 мәхсуси әдәди вар ки, буна H_1-дән олан $\|f_2\|=1$ мәхсуси f_2 вектору ујғундур. Белә ки, $|\lambda_2|$, T-нин H_1-дәки нормасына бәрабәрдир. Инди H_2 илә H-ын елә елементләр чохлуғуну ишарә едәк ки, $(f, f_1)=(f, f_2)=0$ олсун. $\tilde{f}\in H_2$ оларса, онда

$$(T\tilde{f}, f_1)=(\tilde{f}; T^{*}f_1)=(\tilde{f}, \lambda_1 f_1)=\lambda_1(\tilde{f}, f_1)=0$$

ејни гајда илә

$$(\tilde{T}f, f_2)=(\tilde{f}, T^{*}f_2)=(\tilde{f}, \lambda_2 f_2)=\lambda_2(\tilde{f}, f_2)=0.$$

T васитәсилә H_2 алт фәзасы өзүнә чеврилир, онда елә λ_3 мәхсуси әдәди вар ки, буна H_2-дән T-нин $\|f_3\|=1$ олан мүәјјән мәхсуси f_3 вектору ујғундур. Бу гајда үзрә просеси давам етдирәрәк

$$H\supseteq H_1\supseteq H_2\supseteq\ldots \quad (9)$$

елә $H_i\,(i=\overline{0,\infty})$ алтфәзалары ардычыллығы гурмаг олар ки, һәр бир H_i-дә $\lambda_{i+1}\,(i=\overline{0,\infty})$ мәхсуси әдәдинә гаршы T-нин мәхсуси f_{i+1} вектору ујғундур. Белә ки, $H_0=H_1$ һәр бир $|\lambda_i|$ ујғун H_{i-1} фәзасында T-нин нормасына бәрабәр олдуғундан

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \quad (10)$$

мәхсуси әдәдләр ардычыллығындан

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3| \geqslant\cdots$$

кими јаза биләрик. Бу әдәдләрә ујғун мәхсуси векторлар исә

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots \quad (11)$$

шәклиндә јазылыр. Һәр бир мәхсуси әдәдә сонлу сајда мәхсуси векторлар ујғун олар. Она көрә, фәрз едәк ки, (11)-дә һәр бир мәхсуси әдәд тәртиби гәдәр јенидән нөмрәләнмәклә дахил едилмиш вә һәм дә ујғун векторлар јенидән нөмрәләнмәклә (11)-ә дахил едилмишдир. Үмумилији позмадан (11)-и ортогонал фәрз етмәк олар. Бундан сонра $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$ олдуғуну көстәрәк. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=\alpha\neq 0$. Дикәр тәрәфдән (10)-ун гурулмасындан ашкардыр ки, әкәр $\|T\|$, T-нин H-дакы нормасыдырса, онда истәнилән n үчүн $|\lambda_n|\leqslant\|T\|$ олур. Јә'ни (10) ардычыллығы мәһдуддур. $\frac{f_n}{\lambda_n}=\varphi_n$ исә, еләчә дә, $\{\varphi_n\}$ мәһдуд ардычыллыгдыр. Доғрудан да, $\|\varphi_n\|=\frac{\|f_n\|}{|\lambda_n|}=\frac{1}{|\lambda_n|}$ бәрабәрлијиндән $\{\varphi_n\}$-нын мәһдуд олмасы алыныр.

T-нин тамам кәсилмәз олдуғу нәзәрә алынарса, онда $T\varphi_n$-дән јығылан $\{T\varphi_{n_k}\}$ алтардычыллыг сечмәк олар. $f_{n_k}=T\varphi_{n_k}$ олдуғундан $\{f_{nk}\}$ јығылан ардычыллыгдыр. $\{f_n\}$ системи ортонормал олдуғундан $\|f_n-f_{n_k}\|^2=2$ олмагла зиддијјәт алыныр. Она көрә дә

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0.$$

Теорем 5. T симметрик вә тамам кәсилмәз исә, онда T оператору өз мәхсуси векторларына көрә

$$Tf=\sum_{i=1}^{\infty}(Tf,f_i)f_i$$

шәклиндә көстәрилир.

Исбаты. $f\in H$ истәнилән елемент олсун. T-нин ортонормал мәхсуси векторларыны $f_i\,(i=\overline{1,\infty})$ илә ишарә едәк. Ашағыдакы бәрабәрлији көтүрәк:

$$\tilde{f}_n=f-\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)f_i. \tag{12}$$

f_n, λ_{n+1}-ә ујғун мәхсуси вектор олдуғундан $\lambda_{n+1}\tilde{f}_n=T\tilde{f}$. (12)-дән

$$(\tilde{f}_n,f_k)=(f,f_k)-\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)(f_i,f_k)=$$

$$=(f,f_k)-(f,f_k)=0,\quad (k=\overline{1,n}).$$

Она көрә дә $\tilde{f}_n\in H$ олмагла

$$\left\|\frac{Tf_n}{\|f_n\|}\right\|\leqslant|\lambda_{n+1}| \tag{13}$$

(12)-дән $\widetilde{f}_n$ ифадәсини нәзәрә алараг $(\widetilde{f}_n, \widetilde{f}_n)$ скалјар һасилини ашағыдакы кими чевирәк:

$$\|\widetilde{f}_n\|^2=(\widetilde{f}_n,\widetilde{f}_n)=\left(f-\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)f_i,\ f-\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)f_i\right)=$$

$$=\|f\|^2-\left(f,\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)f_i\right)-\left(\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)f_i,f\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(f,f_i)\,(f_j,f)\,(f_i,f_j). \qquad (14)$$

$\{f_i\}$ ортонормал систем олдуғундан (14)-дән

$$\|\widetilde{f}_n\|^2=\|f\|^2-\sum_{i=1}^{n}|(f,f_i)|^2\leqslant\|f\|^2.$$

Бурадан

$$\|\widetilde{f}_n\|\leqslant\|f\|.$$

Беләликлә, $\{\widetilde{f}_n\}$ ардычыллығынын мәһдуд олмасы көстәрилир. (13)-дән

$$\|T\widetilde{f}_n\|\leqslant|\lambda_{n+1}|\,\|\widetilde{f}_n\| \qquad (15)$$

олмагла

$$\lim_{n\to\infty}T\widetilde{f}_n=0. \qquad (16)$$

(12)-дән $T\widetilde{f}_n=Tf-\sum_{i=1}^{n}(f,f_i)Tf_i$ бәрабәрлијинин алынмасыны вә $Tf_i=\lambda_i f_i$ олдуғуну нәзәрдә тутсаг:

$$T\widetilde{f}_n=Tf-\sum_{j=1}^{n}\lambda_i(f,f_i)f_i. \qquad (17)$$

$n\to\infty$, $T\widetilde{f}_n\to 0$ нәзәрә алсаг, (17)-дән

$$Tf=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_i(f,f_i)f_i \qquad (18)$$

олдуғундан исә (18)-дән

$$Tf=\sum_{=}^{\infty}(Tf,f_i)f_i. \qquad (19)$$

Беләликлә, теорем исбат олунур. Гејд едәк ки, (19)-а һәр бир мәхсуси әдәд өз тәртиби гәдәр дахил олур. Доғрудан да, әкәр белә олмазса, мүәјјән мәхсуси әдәдә ујғун елә мәхсуси $f' \neq 0$ вектору оларды ки, бу вектор үчүн $(f', f_i) = 0$ $(i = \overline{1, \infty})$ олмагла (19)-ә көрә исә $Tf' = 0$ оларды. Бу исә f' мәхсуси вектор олмасы шәртинә зидд оларды.

Теорем 6. Һәр бир $g \in H$ вектору үчүн $\sum_{i=1}^{\infty}(g, f_i)f_i$ сырасы јығылдыгда g илә биргијмәтли тә'јин олунан елә g' вектору вар ки,

$$g = g' + \sum_{i=1}^{\infty} (g, f_i) f_i . \tag{20}$$

кими көстәрилир, белә ки, f_i мәхсуси вектордур.

Исбаты. (20)-јә дахил олан сыранын јығылдығыны гәбул едәрәк ҹәмини f илә ишарә едәк:

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} (g, f_i) f_i . \tag{21}$$

бурадан $\sum_{i=1}^{\infty} (g, f_i) Tf_i$ сырасынын јығылан олдуғуну нәзәрә алараг (21)-дән

$$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} (g, f_i) Tf_i \tag{22}$$

бәрабәрлији алыныр. $Tf_i = \lambda_i f_i$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (g, f_i) f_i . \tag{23}$$

Дикәр тәрәфдән (18)-ә көрә

$$Tg = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (g, f_i) f_i . \tag{24}$$

(23) вә (24)-ү мүгајисә етмәклә $Tf = Tg$, $T(f - g) = 0$. $g - f = g'$ оларса, $Tg' = 0$ вә $g = f + g'$. (21)-и нәзәрә алсаг, бу бәрабәрликдән (20)-нин өдәнилмәси алыныр.

Беләликлә, биз көстәрдик ки, һәр $g \in H$ үчүн (21) јығылдыгда (20) доғрудур, белә ки, $Tg' = 0$ олмагла g', g-јә көрә биргијмәтли тә'јин олунур.

Теорем 7. Әкәр һәр һансы H-да тә'сир едән хәтти T оператору ортонормал $\{g_n\}$ системинә көрә (18) шәклиндә көстәрилирсә вә $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = 0$ олурса, онда T тамам кәсилмәз симметрик оператордур.

Исбаты. Јухарыдакы шәртләр дахилиндә (18)-нин доғрулуғуну гәбул едәк. Јә'ни

$$Tf = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f, g_i) g_i. \tag{25}$$

(25)-дән T-нин симметрик олмасы ашкардыр. Инди T-нин тамам кәсилмәз олдуғуну көстәрәк. мәһдуд $Q \subset H$ чохлуғундан зәиф јығылан $\{f_i\}$ ардычыллығыны көтүрәк вә (25)-дә f әвәзинә $\tilde{f}_{n,m} = f_n - f_m$ јазсаг, онда

$$T\tilde{f}_{n,m} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f_n - f_m, g_i) g_i. \tag{26}$$

$\{g_i\}$ ортонормал олдуғундан, бурадан

$$\| T\tilde{f}_{n,m} \|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \mid (f_n - f_m, g_i) |^2. \tag{27}$$

Шәртә көрә $\lambda_i \xrightarrow[i \to \infty]{} 0$ олдуғундан верилмиш ихтијари $\varepsilon > 0$ әдәдинә гаршы елә $N(\varepsilon)$ нөмрәси вар ки, $n \geqslant N(\varepsilon)$ олдугда $|\lambda_i| < \varepsilon$ олур. Буну нәзәрә алараг (27)-ни ашағыдакы кими јазаг:

$$\| T\tilde{f}_{n,m} \|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 |(f_n - f_m, g_i)|^2 + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2 \mid (f_n - f_m, g_i) \mid^2. \tag{28}$$

$$V = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i^2 \mid (f_n - f_m, g_i) \mid^2 \tag{29}$$

оларса, онда $V \leqslant \varepsilon^2 \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \mid (f_n - f_m, g_i) \mid^2$. Һесаби ортонормал $\{g_i\}$ системи үчүн Бессел бәрабәрсизлијини јазсаг:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mid (f_n - f_m, g_i) \mid \leqslant \| f_n - f_m \|,$$

бурадан

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \mid (f_n - f_m, g_i) \mid^2 \leqslant \| f_n - f_m \|^2$$

олур. (29)-дан исә

$$V \leqslant \varepsilon^2 \| f_n - f_m \|^2 \tag{30}$$

бәрабәрсизлијинин өдәнилдији чыхыр. Шәртә көрә $\{f_n\}$ мәһдуд олдуғундан елә сабит M әдәди вар ки,

$$V \leqslant 4M^2 \varepsilon^2 \tag{31}$$

еләчә дә, һәмчинин $\{f_i\}$ зәиф јығылдығындан елә $N'(\varepsilon)$ нөмрәси вар ки, $n, m \geqslant N'(\varepsilon)$ олдугда һәр бир g_i үчүн

$$\mid (f_n - f_m, g_i) \mid < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n} \lambda_i}. \tag{32}$$

Она көрә

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \mid (f_n - f_m, g_i) \mid^2 < \varepsilon^2 \tag{33}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. (30) вә (32) бәрабәрликләринә көрә

$$\| Tf_{n,m} \|^2 < \varepsilon^2 + 4M^2\varepsilon^2, \tag{34}$$

$$\| Tf_{n,m} \| < \varepsilon \sqrt{1+4M^2}.$$

Бурадан исә $\| Tf_n - Tf_m \| < \varepsilon \sqrt{1+4M^2}$.

Она көрә дә $\{Tf_n\}$-нын күчлү јығылмасы алыныр. Демәли T тамам кәсилмәз олмагла теорем исбат олунур.

Теорем 8. ***T*, *H*-да тә'сир едән тамам кәсилмәз оператор исә, онда бу операторун спектри, јә'ни $\sigma(T)$, ја сонлу чохлуг вә ја да мүстәвинин сонлу һиссәсиндә лимит нөгтәси олмајан һесаби чохлугдур (јени исбат).**

Исбаты. Әксини фәрз едәк, јә'ни $\sigma(T)$ мәһдуд сонсуз чохлугдур. $\sigma(T)$-дән һесаби сајда

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots \tag{35}$$

мәхсуси әдәдләри көтүрәрәк λ_j-лары мүхтәлиф гәбул етмәк олар. Мә'лумдур ки, һәр бир $\lambda=\lambda_n$-ә гаршы мүәјјән бир мәхсуси φ_n елементи ујғундур, јә'ни

$$\varphi_n - \lambda_n T \varphi_n = 0 \tag{36}$$

бәрабәрлији өдәнилир. Инди

$$\{\varphi_n\} \tag{37}$$

(37)-јә дахил олан векторларын хәтти асылы олмадығыны исбат едәк. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни гәбул едәк ки, (37)-јә дахил олан елә φ_m елементи вар ки, хәтти асылы олмајан $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$-ин хәтти комбинасијасы кими көстәрилир, демәли:

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{m-1} C_k \varphi_k, \tag{38}$$

$$\varphi_m = \lambda_m T \varphi_m. \tag{39}$$

(38)-и нәзәрә алсаг:

$$\varphi_m = \lambda_m \sum_{k=1}^{m-1} C_k T \varphi_k = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_m C_k T \varphi_k, \tag{40}$$

$$T\varphi_k = \frac{\varphi_k}{\lambda_k} \tag{41}$$

олдуғундан (40)-дан

$$\varphi_m = \sum_{k=1}^{m-1} \lambda_m C_k \frac{\varphi_k}{\lambda_k} \tag{42}$$

вә јахуд да

$$\sum_{\kappa=1}^{m-1} C_\kappa\left(1-\frac{\lambda_m}{\lambda_\kappa}\right)\varphi_\kappa = 0. \tag{43}$$

Шәртә көрә $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{m-1}$ хәтти асылы олмадыгларындан (43)-дән $C_\kappa = 0$ $(\kappa = \overline{1, m-1})$ олмагла $\varphi_m = 0$ олур. Јә'ни λ_m, T-нин регулјар гијмәтидир. Алынан зиддијјәт фәрзијјәмизин дүз олмадығыны көстәрир. Јә'ни (37)-јә дахил олан функсијалар системи хәтти асылы дејилдир. $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ елементләринин хәтти өртүјүнү дүзәлдәрәк E_n илә ишарә едәк. (37) хәтти асылы олмадығындан

$$E_{n-1}\subset E_n \subset E_{n+1}\subset\cdots, \tag{44}$$

$$g_n = C_{n1}\varphi_1 + C_{n2}\varphi_2+\cdots+C_{nn}\varphi_n \tag{45}$$

шәклиндә дүзәлмиш

$$g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n \tag{46}$$

ортонормал системини дүзәлдәк. Шәртә көрә (35) мәһдуд вә $\| g_n \| = 1$ олдуғундан $\{\lambda_n g_n\}$ ардычыллығы мәһдуд олар.

$$g_{n,m} = g_n - \lambda_n T_n + \lambda_m T_m \tag{47}$$

ишарә едиб $g_n - \lambda_n T g_n$ фәргини ашағыдакы кими чевирәк:

$$\begin{aligned} g_n - \lambda_n T g_n &= C_{n1}\varphi_1 + C_{n2}\varphi_2 + \cdots + C_{nn}\varphi_n - \\ &- \lambda_n (C_{n1} T\varphi_1 + C_{n2} T\varphi_2 + \cdots + C_{nn} T\varphi_n) = \\ &= C_{nn}\varphi_n - \lambda_n C_{nn} T\varphi_n + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \varphi_j. \end{aligned} \tag{48}$$

Бурада γ_j $(j = \overline{1, n-1})$ мүәјјән әдәдләрдир. $\varphi_n = \lambda_n T\varphi_n$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$C_{nn}\varphi_n - \lambda_n C_{nn} T\varphi_n = 0. \tag{49}$$

Она көрә

$$g_n - \lambda T_n g_n = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \varphi_i \tag{50}$$

еләчә дә, $m < n$ үчүн

$$\lambda_m T g_m = \sum_{i=1}^{p} p_i \varphi_j,\ \ p < n-1 \tag{51}$$

олдуғуну көстәрмәк олар. (50) вә (51)-ә көрә

$$g_{n,m} = g_n - \lambda_n T\varphi_n + \lambda_m T\varphi_m = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \varphi_j. \tag{52}$$

Бурада α_i, γ_i вә p_i-дән асылы олан мүәјјән әдәдләрдир. $g_{n,m} \in E_{n-1}$ вә $g_n \in E_n$, онда $g_{n,m} \perp g_n$

$$\lambda_n T\varphi_n - \lambda_m T\varphi_m = g_n - g_{n,m} \tag{53}$$

нәзәрә алараг

$$\|\lambda_n T\varphi_n - \lambda_m T\varphi_m\|^2 = (g_n - g_{n,m},\ g_n - g_{n,m}) =$$
$$= \|g_n\| + \|g_{n,m}\|^2 = 1 + \|g_{n,m}\|^2 \geqslant 1 \qquad (54)$$

олдуғу алыныр. Беләликлә,

$$\|\lambda_n T\varphi_n - \lambda_m T\varphi_m\|^2 \geqslant 1 \qquad (55)$$

бәрабәрсизлијини алырыг.

$\{\lambda_n \varphi_n\}$ мәһдуд вә T тамам кәсилмәз олдуғундан $\{T\lambda_n\varphi_n\}$-дән јығылан алт ардычыллыг сечмәк олар. Јә'ни елә $\{T\lambda_{n_k}\varphi_{n_k}\}$-ны сечмәк олар ки, јығылан олсун, онда ε истәнилән әдәд олдугда

$$\left\|\lambda_{n_k} T\varphi_{n_k} - \lambda_{m_k} T\varphi_{m_k}\right\| < \varepsilon \qquad (56)$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бу исә (55) бәрабәрсизлији илә зиддијјәт тәшкил едир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, (35)-ә дахил олан мәхсуси әдәдләр мәһдуд ола билмәз. Исбатдан көрүндүјү кими, $\sigma(T)$ јалныз дискрет олмагла мүстәвинин сонлу нөгтәсиндә лимит нөгтәси ола билмәз. Әкс һалда, һәмишә (35)-дән мәһдуд мәхсуси әдәдләр ардычыллығы дүзәлтмәк олар ки, бу да бизи зиддијјәтә кәтирди. Бунунла теорем исбат олунур.

Теорем 9. Фәрз едәк ки, T, H һилберт фәзасында тә'сир едән хәтти оператордур. Әкәр $T\ T^*$ мәһдуд вә тамам кәсилмәз оператор исә, онда T тамам кәсилмәз олар.

Исбаты. H-дан мәһдуд истәнилән $\{x_n\}$ ардычыллығыны көтүрәк вә көстәрәк ки, $\{Tx_n\}$-дан јығылан алтардычыллыг сечмәк олар. Әввәлчә ону гејд едәк ки, T мәһдуд олдуғундан T^*, H-да тә'сир едир. Шәртә көрә TT^* тамам кәсилмәз олдуғундан $\{TT^*x_n\}$-дән јығылан

$$\{TT^*x_{n_k}\} \qquad (57)$$

алтардычыллығыны сечмәк олар. $\left\|Tx_{n_k} - Tx_{m_k}\right\|$ гијмәтләндирәк:

$$\left\|Tx_{n_k} - Tx_{m_k}\right\|^2 = \left(Tx_{n_k} - Tx_{m_k},\ Tx_{n_k} - Tx_{m_k}\right) =$$
$$= \left(T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{m_k},\ x_{n_k} - x_{m_k}\right). \qquad (58)$$

Шварс бәрабәрсизлијинә көрә

$$\left\|Tx_{n_k} - Tx_{m_k}\right\|^2 \leqslant \left\|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{m_k}\right\| \cdot \left\|x_{n_k} - x_{m_k}\right\| \qquad (59)$$

алыныр. $\left\|x_{n_k} - x_{m_k}\right\| < M$-дән вә $\{T^*Tx_{n_k}\}$ јығылан олдуғундан:

$$\left\|T^*Tx_{n_k} - T^*Tx_{m_k}\right\| < \varepsilon. \qquad (60)$$

Она көрә дә

$$\left\|Tx_{n_k} - Tx_{m_k}\right\| < M\varepsilon. \qquad (61)$$

H там олдуғундан јығылан $\{Tx_{n_k}\}$ алтардычыллығыны сечмәк олар. Беләликлә, T-нин тамам кәсилмәз олдуғу алынмагла теорем исбат олунур. Бурадан ашағыдакы нәтичә алыныр.

Нәтичә (**Шаудер теореми**). **T тамам кәсилмәз исә, онда T^* да тамам кәсилмәз олар.**

Исбаты. Фәрз едәк ки, T тамам кәсилмәздир. T мәһдуд олдуғундан мә'лумдур ки, T^*-да мәһдуд олар.

$$TT^* = (T^*)^* T^* \tag{62}$$

T^* мәһдуд вә T тамам кәсилмәз олдуғундан TT^* да тамам кәсилмәз олар. Онда исбат етдијимиз теоремә көрә (62)-нин сағ тәрәфиндән көрүндүјү кими, T^* тамам кәсилмәз олар. Гејд едәк ки, бу нәтичәнин тәрси дә доғрудур.

§ 4. ТАМАМ КӘСИЛМӘЗ ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘР НӘЗӘРИЈЈӘСИ

Фәрз едәк ки, K X Банах фәзасындан һәмин фәзаја тә'сир едән тамам кәсилмәз оператордур. Кәләчәкдә T оператору верилмиш фәзадан һәмин фәзаја тә'сир едирсә, онда садәчә олараг дејәчәјик ки, һәмин T оператору бу фәзада тә'сир едир. Биз бу фәсилдә

$$T\varphi = f \tag{1}$$

тәнлијини тәдгиг едәчәјик.

$$T\varphi = 0 \tag{2}$$

тәнликләринин һәлләрини характеризә едән бир нечә үмуми теоремләрин исбаты илә мәшғул олачағыг. Бурада $T = E - K$ тәнлијин тәдгигинин H фәзасында исбат схеминин еффектив олдуғуну нәзәрә алараг (1) вә (2) тәнликләринин H фәзасында өјрәниб, бу параграфын сонунда алынан нәтичәләрин үмуми Банах фәзасында доғру олдуғуну көстәрәчәјик.

§ 5. X_n^0 ФӘЗАЛАРЫ ВӘ ОНЛАРЫН БӘЗИ ХАССӘЛӘРИ

X фәзасынын

$$T^n\varphi = 0$$

бәрабәрлијини өдәјән φ елементләри чохлуғуну X_n^0 илә ишарә едәк. $T^\circ \equiv E$ ејнилик оператор гәбул олунур. T мәһдуд хәтти оператор олдуғундан, асанлыгла көстәрмәк олар ки, $X_n^0 (n=\overline{0,\infty})$ X_n^0-нин алтфәзаларыдыр. Дикәр тәрәфдән, истәнилән n үчүн

$$X_{\mathrm{n}}^{0} \subseteq X_{\mathrm{n+1}}^{0}.$$

Белә ки, $X_0^0 = (0)$

Теорем 10. Һәр бир X_{n}^{0} сонлу өлчүлү фәзадыр.

Исбаты. Әксинә, фәрз едәк ки, гејд олунмуш X_{n}^{0} сонсуз өлчүлү фәзадыр. Онда һәмин фәзада ортонормал

$$\{\varphi_{\mathrm{m}}\} \tag{3}$$

сонсуз ардычыллығыны гурмаг олар. (1)-ә көрә

$$T^{\mathrm{n}}\varphi_{\mathrm{m}} = 0, \tag{4}$$

$$T_1 = T^{\mathrm{n}} = (E - K)^{\mathrm{n}} = E - K_1 \tag{5}$$

шәклиндә көстәрилдијиндән K тамам кәсилмәз олдуғундан K_1 дә тамам кәсилмәз олар. Онда (4) бәрабәрлији

$$\varphi_{\mathrm{m}} - K_1\varphi_{\mathrm{m}} = 0 \tag{6}$$

шәкилиндә јазылыр. K_1 тамам кәсилмәз олдуғундан (8)-дән јығылан $\{K_{1\mathrm{m}_{\mathrm{к}}}\}$ алт ардычыллығыны сечмәк олар. Бу ардычыллыг ортонормал олдуғундан

$$\|\varphi_{\mathrm{m}_{\mathrm{к}}} - \varphi_{\mathrm{m}_l}\|^2 = \|\varphi_{\mathrm{m}_{\mathrm{к}}}\|^2 - (\varphi_{\mathrm{m}_{\mathrm{к}}}, \varphi_{\mathrm{m}l}) - (\varphi_{\mathrm{m}_l}, \varphi_{\mathrm{m}_{\mathrm{к}}}) + \|\varphi_{\mathrm{m}_l}\|^2 = 2.$$

Бу исә $\{K_1\varphi_{\mathrm{m}_k}\}$ ардычыллығынын јығылмасына зиддир. Алынан зиддијјәт X_{n}^{0}-ын сонлу өлчүлү фәза ордуғуну көстәрир. X_{n}^{0}-ын өлчүсүнү $к(n)$ илә ишарә едәк, көстәрәк ки, n-нин артмасы илә $к(n)$ сонсуз артмыр.

Теорем 11. n-нин мүәјјән ν нөмрәси вар ки, $n \geqslant \nu$ олдугда $X_{\mathrm{n}}^{0} = X_{\nu}^{0}$ олур. Бу бәрабәрлији көстәрмәк үчүн әввәлчә гејд едәк ки, әкәр мүәјјән бир n нөмрәсиндә $X_{\mathrm{n}}^{0} \neq X_{\mathrm{n+1}}^{0}$ оларса, истәнилән $m < n$ үчүн $X_{\mathrm{m}}^{0} \neq X_{\mathrm{m+1}}^{0}$. Фәрз едәк ки, $\varphi \in X_{\mathrm{n+1}}^{0}$ $\varphi \overline{\in} X_{\mathrm{n}}^{0}$.

$$T^{\mathrm{m+1}}\, T^{\mathrm{n-m}}\varphi = T^{\mathrm{n+1}}\varphi = 0, \tag{7}$$

$$T^{\mathrm{m}}\, T^{\mathrm{n-m}}\varphi = T^{\mathrm{n}}\varphi \neq 0 \tag{8}$$

бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг, алырыг ки, $\psi_{\mathrm{n,m}} = T^{\mathrm{n-m}}\varphi$ елементи $X_{\mathrm{m+1}}^{0}$-ә дахил олдуғу һалда X_{m}^{0}-ә дахил дејилдир. Јә'ни истәнилән $m < n$ үчүн $X_{\mathrm{m+1}}^{0} \neq X_{\mathrm{m}}^{0}$. Беләликлә, ја бүтүн X_{n}^{0}-ләр мүхтәлифдирләр вә јахуд да мүәјјән бир ν нөмрәсиндән сонра бүтүн X_{n}^{0} -ләр бир-биринин үстүнә дүшәрләр. Көстәрәк ки, биринчи һал ола билмәз, әксини фәрз едәк, јә'ни X_{n}^{0}-нин мүхтәлиф олдугларыны гәбул едәк. Онда һәр бир X_{n}^{0}-ә дахил олан елә бир φ_{n} елементи вар ки, $\|\varphi_{\mathrm{n}}\| = 1$ олмагла бу елемент $X_{\mathrm{n-1}}^{0}$ -ә ортогонал олар. $m < n$ олдуғуну фәрз едәрәк $K\varphi_{\mathrm{n}} - K\varphi_{\mathrm{m}}$ фәргинин нормасыны гијмәтләндирәк.

$\{\varphi_n\}$ ардычыллығы мәһдуд олдуғундан $\{K\varphi_n\}$ ардычылығындан јығылан алтардычыллыг сечмәк олар:

$$K\varphi_n - K\varphi_m = \varphi_n - (\varphi_m + T\varphi_n - T\varphi_m) = \varphi_n - \varphi_{n,m}, \tag{9}$$

бурада

$$\varphi_{n,m} = \varphi_m + T\varphi_n - T\varphi_m. \tag{10}$$

Асанлыгла јохламаг олар ки, $\varphi_{n,m} \in X^0_{n-1}$. Доғрудан да,

$$T^{n-1}\varphi_{n,m} = T^{n-1}\varphi_m + T^n\varphi_n - T^n\varphi_m,$$

бурадан $T^n\varphi_n = 0$, $m < n$ нәзәрә алсаг: $T^n\varphi_m = 0$ вә $T^{n-1}\varphi_m = 0$, онда $T^{n-1}\varphi_{n,m} = 0$, јә'ни $\varphi_{n,m} \in X^0_{n-1}$. Дикәр тәрәфдән φ_n. X^0_{n-1} ортогонал олдуғундан һәмчинин $\varphi_{n,m}$-ә ортогонал олар. Она көрә

$$\| K\varphi_n - K\varphi_m \|^2 = \| \varphi_n \|^2 + \| \varphi_{n,m} \|^2 \geqslant 1. \tag{11}$$

Бу бәрабәрлик көстәрир ки, $\{K\varphi_n\}$ ардычыллығындан јығылан алтардычыллыг сечмәк олмаз. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, елә бир ν нөмрәси вар ки, $n \geqslant \nu$ олдугда $X^0_n = X^0_\nu$. Беләликлә, X^0_n алтфәзаларынын ашағыдакы ики хассәсини көстәрдик, һәр бир X^0_n сонлу өлчүлүдүр вә мүәјјән ν нөмрәсиндән сонра бүтүн X^0_n-ләр X^0_ν илә үст-үстә дүшүр.

§ 6. X_n ФӘЗАЛАРЫ ВӘ ОНЛАРЫН ХАССӘЛӘРИ

X фәзасынын

$$\psi = T^n\varphi \tag{1}$$

шәклиндә көстәрилән ψ елементләри чохлуғуну X_n илә ишарә едәк. $T^\circ \equiv E$ олдуғундан, $X_0 = H$. $\psi = T^{n-1}T\varphi$ шәклиндә јазылдығындан истәнилән n үчүн

$$X_{n-1} \supseteq X_n. \tag{2}$$

T хәтти оператор олдуғундан X_n-ләрин хәтти чохлуг олдуғу ашкардыр.

Теорем 12. ***X_n-ләр гапалы чохлуглардыр.***

Исбаты. Онун үчүн фәрз едәк ки, $\{\psi_k\}$ ардычыллығы X_n-дән олмагла истәнилән јығылан ардычыллыгдыр.

$$\psi_k = T_1\varphi_k \tag{3}$$

олсун. T_1, (5) илә тә'јин олунур:

$$\varphi_k = \varphi'_k + \varphi''_k. \tag{4}$$

Белә ки, $\varphi'_k \in X^0_n$ олмагла φ''_k, X^0_n-а ортогоналдыр. Онда (3)-дән

$$\psi_k = T_1\varphi''_k \tag{5}$$

олар. Исбат едәк ки, $\{\varphi''_{\text{к}}\}$ ардычыллығы мәһдуддур. Онун үчүн әксини фәрз едәк. Үмумилији позмадан $\|\varphi''_{\text{к}}\| \to \infty$ вә $\frac{\varphi''_{\text{к}}}{\|\varphi''_{\text{к}}\|} = \omega_{\text{к}}$ олдуғуну гәбул едәк. Онда

$$T_1\omega_{\text{к}} = \frac{T_1\varphi''_{\text{к}}}{\|\varphi''_{\text{к}}\|} = \frac{\psi_{\text{к}}}{\|\varphi''_{\text{к}}\|}.$$

$\{\psi_{\text{к}}\}$-нын мәһдуд олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$T_1\omega_{\text{к}} \to 0.$$

Дикәр тәрәфдән $\{\omega_{\text{к}}\}$ мәһдуд вә K_1 тамам кәсилмәз олдуғундан $\{K_1\omega_{\text{к}}\}$-дан јығылан алт $\{K_1\omega_{\text{к}_i}\}$ ардычыллығыны сечмәк олар. $\{K_1\omega_{\text{к}_i}\}$ вә $\{T_1\omega_{\text{к}_i}\}$ ардычыллығынын јығылан олмасыны нәзәрә алсаг:

$$\omega_{\text{к}_i} = T\omega_{\text{к}_i} + K_1\omega_{\text{к}i} \tag{6}$$

бәрабәрлијиндән алырыг ки, $\{\omega_{\text{к}_i}\}$ ардычыллығы јығыландыр. Бу ардычыллығын лимитини ω^* илә ишарә едиб вә $\lim\limits_{n\to\infty} T_1\omega_{\text{к}_i} = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $T_1\omega^* = 0$. Бу исә ону көстәрир ки, $\omega^* \in X^0_n$. $\varphi_{\text{к}i}$ беләликлә, $\omega_{\text{к}}$ X^0_n-ә ортогонал олдуғундан $\omega_{\text{к}}$-да ω^*-а ортогонал олур. Дикәр тәрәфдән исә

$$\|\omega_{\text{к}}l - \omega^*\|^2 = \|\omega_{\text{к}i}\|^2 + \|\omega^*\|^2 \geqslant 1$$

бәрабәрлији вә беләликлә дә $\|\omega_{\text{к}_i} - \omega^*\|^2 \geqslant 1$ олмасы ω^*-ун $\{\omega_{\text{к}_i}\}$-ы үчүн лимит олмасы шәртинә зиддир, алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\{\varphi''_{\text{к}}\}$ ардычыллығы мәһдуддур. K_1 тамам кәсилмәз олдуғуна көрә $\{K_1\varphi''_{\text{к}}\}$-дан јығылан алтардычыллығыны сечмәк олар. Ашағыдакы кими бәрабәрлик көтүрәк:

$$\varphi''_{\text{к}_i} = K_1\varphi''_{\text{к}_i} + T_1\varphi''_{\text{к}_i} = K_1\varphi''_{\text{к}_i} + \psi''_{\text{к}_i} \tag{7}$$

бурада

$$\psi''_{\text{к}_i} = T_1\varphi''_{\text{к}_i}. \tag{8}$$

Шәртә көрә $\{\psi_{\text{к}}\}$-ы јығылан олдуғундан $\{\psi'_{\text{к}_i}\}$ ардычыллығы дајығыландыр, бу ардычыллығын лимитини ψ^* ишарә едәк, (7)-дән көрүндүјү кими, һәмчинин $\{\varphi''_{\text{к}_i}\}$ јығыландыр, бунун лимитини φ^* илә ишарә етсәк, онда $\psi^* = T_1\varphi^*$.

ψ^*-ун бу гајда илә көстәрилиши көстәрир ки, $\{\psi_{\text{к}}\}$-нын лимити олан $\psi^* \in X_n$-дир. Бишга сөзлә, X_n гапалы вә алтчохлугдур. X_n-нин гурулмасындан ајдындыр ки, T_1 васитәсилә X_n, X_{n+1}-ә ин'икас олунур. Она көрә $X_n = X_{n+1}$ оларса, онда и$^{\text{с}}$тәнилән $m > n$ үчүн $X_m = X_n$ олар.

Исбаты. Фәрз едәк ки, $X_n = X_{n+1}$, $X_{n+2} = TX_{n+1}$; онда $X_{n+2} = TX_n = X_{n+1}$ истәнилән $m > n$ үчүн $X_m = X_n$. Бурада да ики һал ола биләр, ја бүтүн X_n-ләр мүхтәлифдир вә јахуд да мүәјјән бир μ нөмрәси вар ки, истәнилән $m \geqslant \mu$ олан m үчүн $X_m = X_\mu$. Көстәрәк ки, биринчи һал ола билмәз, онун үчүн дә әксини фәрз едәк, јә'ни гәбул едәк ки, X_n-нин һамысы мүхтәлифдир. Онда X_n-ә дахил вә $\| \varphi_n \| = 1$ өдәјән елә φ_n елементи вар ки, һәмин елемент X_{n+1}-ә ортогоналдыр.

$\{\varphi_n\}$ мәһдуд олдуғундан K-нын тамам кәсилмәзлијинә көрә $\{K\varphi_n\}$-дан јығылан алтардычыллыг сечмәк олар. $m > n$ олдуғуну фәрз едәрәк $K\varphi_m - K\varphi_n$ фәргинин нормасыны гијмәтләндирәк:

$$K\varphi_m - K\varphi_n = \varphi_m - (\varphi_n + T\varphi_m - T\varphi_n) = \varphi_n - \varphi_{m,n}$$

belә ки, $\varphi_{m,n} = \varphi_n + T\varphi_m - T\varphi_n$.

$\varphi_{m,n} \in X_{m+1}$ олдуғуну көстәрәк. $m < n$ олдуғундан $\varphi_n \in X_{m+1}$ дикәр тәрәфдән $T\varphi_m$ вә $T\varphi_n$-ин һәр икиси X_{m+1}-ә дахилдир. Она көрә дә $\varphi_{m,n}$, X_{m+1}-ә дахилдир. Беләликлә, φ_m вә $\varphi_{m,n}$ ортогоналдырлар. Она көрә

$$\| K\varphi_m - K\varphi_n \|^2 = \| \varphi_m \|^2 + \| \varphi_{m,n} \|^2 \geqslant 1.$$

Бу бәрабәрсизлик исә K-нын тамам кәсилмәси шәртинә зиддир. Јә'ни елә бир μ нөмрәси вар ки, $m > \mu$ олан бүтүн m-ләр үчүн $X_m = X_\mu$ олур. Беләликлә дә, нәтичәдә X_n-нин алтфәзалар олдуглары исбат олунмагла көстәрдик ки, елә бир μ нөмрәси вар ки, бундан сонра кәлән бүтүн алтфәзалар X_μ илә үст-үстә дүшүр. Нәһајәт, исбат едәк ки, $\nu = \mu$, бу тәклифи исбат етмәк үчүн ашағыдакы лемманы исбат едәк.

Лемма. $k \geqslant 1$ олдугда X_μ-јә дахил олан истәнилән ψ үчүн

$$T^k\varphi = \psi \tag{9}$$

тәнлијинин јеканә һәлли вар. Башга сөзлә,

$$T^k\varphi = 0 \tag{10}$$

тәнлијинин X_μ фәзасында јалныз сыфыр һәлли вардыр.

Исбаты. Әксини фәрз едәк, јә'ни гәбул едәк ки, (10)-нун сыфырдан фәргли φ_1 һәлли вардыр. φ_1, X_μ-јә дахил олдуғундан $\varphi_1 = T^\mu\omega$ олар. Дикәр тәрәфдән $X_{k+\mu}$ алтфәзасы истәнилән $k \geqslant 1$ үчүн X_μ илә үст-үстә дүшдүјүндән $\varphi_1 = T^kT^\mu\omega$, $T^\mu\omega = \varphi_2$. Бурадан

$$T^k\varphi_2 = \varphi_1. \tag{11}$$

Ејни гајда үзрә ардычыл олараг

$$T^k\varphi_0 = \varphi_p \tag{12}$$

тәнлијинин һәллини φ_{p+1} илә ишарә едәк. (12)-дән ардычыл олараг:

$$T^{(n-1)k} \varphi_n = \varphi_1 \tag{13}$$

вә

$$T^{kn} \varphi_n = 0. \tag{14}$$

Әкәр $\varphi_1 \neq 0$ олса иди, онда φ_n, T^k операторунун тә'јин етдији ујғун X^{0k}_{n-1} алтфәзасына дахил олмаз иди. Дикәр тәрәфдән исә (14)-ә көрә φ_n, T^k-нын тә'јин етдији X^{0k}_n алтфәзасына дахилдир. n истәнилән олдуғундан зиддијјәт алыныр. Алынан зиддијјәт ону көстәрир ки, јалныз $\varphi_1 = 0$ олмалыдыр. Нәтиҹәдә исбат етдик ки, (9) тәнлијинин истәнилән ψ үчүн X_n фәзасында јеканә һәлли вардыр. Бу лемманын көмәји илә исбат едәк ки, $\nu = \mu$. Бунун үчүн әввәлчә фәрз едәк ки, $\varphi \in X^0_{\mu+1}$, она көрә дә,

$$T^{\mu+1} \varphi = 0, \tag{15}$$

бурадан исә

$$TT^{\mu}\varphi = 0. \tag{16}$$

$T^{\mu}\varphi = f$ бәрабәрлији илә тә'јин олан f-ин X_{μ}-јә дахил олдуғуну нәзәрә алсаг, исбат етдијимиз леммаја көрә (16)-дән $T^{\mu}\varphi = 0$ олур, беләликлә дә, $\varphi \in X^0_{\mu}$, биз көстәрдик ки, елә μ нөмрәси вар ки, $X^0_{\mu+1} \subseteq X^0_{\mu}$ олур. Дикәр тәрәфдән исә $X^0_{\mu} \subseteq X^0_{\mu+1}$, она көрә дә, $X^0_{\mu} = X^0_{\mu+1}$, биз X^0_i фәзаларынын

$$X^0_{\nu} = X^0_{\nu+1}$$

олмаларыны ν нөмрәсиндә көстәрмишдик, она көрәдә $\mu \geqslant \nu$ олур. Хүсуси һалда, $\mu = 0$ олдугда $\nu = 0$ олур.

Инди $\mu \geqslant 1$ гәбул едәрәк елә $f = T^{\mu-1} g$ елементини көтүрәк ки, $f \overline{\in} X_{\mu}$.

$$T^{\mu}\mu = h \tag{17}$$

тәнлијини көтүрәк, бурада $h = T^{\mu}g$, $h \in X_{\mu}$ олдуғундан (17) тәнлијинин јеканә $\varphi = \varphi'$ һәлли вар, јә'ни $T^{\mu}\varphi' = h$, она көрә $T^{\mu}(\varphi' - g) = 0$. Демәли, $\varphi' - g \in X^0_{\mu}$, һәмчинин

$$T^{\mu-1}(\varphi' - g) = T^{\mu-1}\varphi' - T^{\mu-1}g = T^{\mu-1}\varphi' - f$$

бәрабәрлијинә көрә $T^{\mu-1}\varphi' \in X_{\mu}$ вә $f \overline{\in} X_{\mu}$ олмасыны нәзәрә алсаг $T^{\mu}(\varphi - g) \neq 0$. Она көрә дә, $\varphi' - g \overline{\in} X^0_{\mu-1}$, $\varphi' - g \in X^0_{\mu}$ мүгајисә олунарса, $X^0_{\mu-1} \neq X^0_{\mu}$. Бурадан исә $\mu \leqslant \nu$ олдуғу алыныр. Бу бәрабәрсизлик $\mu \geqslant \nu$ илә мүгајисә олунарса $\mu = \nu$ олур. Нәһајәт көстәрәк ки, H-а дахил олан истәнилән f елементи јеканә олараг

$$f = u + v \tag{19}$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, $u \in X^0_{\nu}$ вә $v \in X_{\nu}$, $\tilde{f} = T^{\nu} f$ елементини көтүрәрәк

$$T^{2\nu}\varphi = \tilde{f} \tag{19}$$

тәнлијини тәдгиг едәк, $\tilde{f} \in X_\nu$ олдуғундан (19) тәнлијинин јеканә, $\varphi = \varphi'$ һәлли вар. $T^\nu \varphi' = \varphi''$ илә ишарә етсәк, $T^\nu(f - \varphi'') = 0$ һәмчинин $T^\nu f = \bar{f}$ олдуғундан $T^\nu(f - \varphi'') = 0$ олур. Башга сөзлә, $f - \varphi'' \in X^0_\nu$.

$\varphi'' \in X_\nu$ вә $u = f - \varphi''$, $v = \varphi''$ олдуғуну гәбул етсәк, (19)-ун доғрулуғу исбат олунур. Көстәрилишин јеканә олдуғуну көстәрәк, јә'ни һәмчинин $f = u_1 + v_1$ олдуғуну фәрз едәк, онда $u - u' = v' - v$, белә ки, $u - u' \in X^0_\nu$ вә $v' - v \in X_\nu$, X^0_ν вә X_ν-ин ортаг елементләри јалныз сыфыр олдуғундан $u = u'$ вә $v = v'$. Беләликлә, јеканәлик исбат олунур.

§ 7. ν-ДӘН АСЫЛЫ ОЛАРАГ (§ 6,1) ТӘНЛИЈИНИН ТӘДГИГИ

$\nu = 0$ олан һал. Исбат етдијимиз леммаја көрә $f \in H = X_0$ истәнилән f үчүн (§ 6,1) тәнлијинин јеканә һәлли вар.

T хәтти оператор олдуғундан T^{-1} һәм аддитив вә һәм дә ејничинслидир. T^{-1}-ин мәһдуд олдуғуну көстәрәк. Онун үчүн әксини фәрз едәк, онда елә $\{f_n\}$ ардычыллығы сечмәк олар ки, $\frac{\|\varphi_n\|}{\|f_n\|} \to \infty$. Бурада $f_n = T\varphi_n$. Ашағыдакы кими ω_n елементини сечәк:

$\omega_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$, $\|\omega_n\| = 1$, $\{\omega_n\}$ мәһдуд вә K тамам кәсилмәз олдуғундан $\{K\omega_n\}$-дан $\{K\omega_{n_k}\}$ алтардычыллығыны сечмәк олар

$$T\omega_n = \frac{T\varphi_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{f_n}{\|\varphi_n\|} \to 0$$

$\{T\omega_{n_k}\}$ вә $\{K\omega_{n_k}\}$ јығылан олдуғундан $\omega_{n_k} = T\omega_{n_k} + K\omega_{n_k}$ бәрабәрлијиндән $\{\omega_{n_k}\}$ ардычыллығынын јығылан олдуғу алыныр. $\omega_{n_k} \to \omega^*$ оларса, онда $\omega^* = K\omega^*$ вә јахуд да $T\omega^* = 0$. $T\varphi = 0$ тәнлијинин H-да јалныз сыфыр һәлли олдуғундан $\omega^* = 0$. Дикәр тәрәфдән $\|\omega_n\| = 1$ олдуғундан, һәмчинин, $\|\omega^*\| = 1$, бу исә $\omega^* = 0$ олма шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт T^{-1}-ин мәһдуд олдуғуну көстәрир. T^{-1}-ин көстәрилән хассәси, һәмчинин хәттилији көстәрир ки, $(E - K)$-ын тәрси вар вә беләликлә дә, $\lambda = 1$, K-нын регулјар әдәдидир.

§ 8 $\nu \geqslant 1$ ОЛАН ҺАЛ

Әкәр (§ 6,1) тәнлијинә H фәзасында бахсаг, бу тәнлијин үмумијјәтлә јеканә һәлли јохдур, јә'ни ејничинсли тәнлијин сыфырдан фәргли һәлли вардыр. Мәсәлән: $T\varphi = 0$ тәнлијинин һәллини $\varphi = T^{\mu-1}\psi$ бәрабәрлији васитәсилә тә'јин етмәк олар, белә ки, $\psi \in X^0_\mu$ вә $\psi \bar{\in} X^0_{\mu+1} \cdot \psi \in X^0_\mu$ олдуғундан $\varphi = T^{\mu-1}\psi$,

$T\varphi = 0$ тәнлијинин һәллидир вә $\psi \bar{\in} X^0_{\mu-1}$ исә $\varphi \neq 0$ олур. Јал-
ныз (§ 6,1) тәнлијинә X_ν-дә бахыларса, һәмин тәнлијин истә-
нилән сағ тәрәф үчүн јеканә һәлли вардыр. Исбат олунан лем-
маја көрә бу тәклиф ашкардыр. Тәрс операторун бу фәзада
мәһдудлуғу јухарыдакы исбат гајдасы үзрә көстәрилир.

Гејд етдикләримизи нәзәрә алсаг, (§ 6,2) ашағыдакы тәклиф-
исбат олунур. $\nu \geqslant 1$ олдугда (§ 6,2) тәнлијинин X_ν-дә јалныз
сыфыр вә беләликлә дә (§ 6,1) тәнлијинин истәнилән $f \in X_\nu$-да
јеканә һәлли вардыр. (§ 6,1) вә (§ 6,2) тәнликләри һаггында
олан мүлаһизәләр $\lambda = \lambda_0$ гејд олунмуш гијмәтиндә $E - \lambda_0 K$
оператору илә тә'јин олан оператор тәнликләри үчүн өз ку-
ҹүндә галыр. Бу оператора ујғун индекси $\nu(\lambda_0)$ илә ишарә ет-
сәк (§ 6,1) тәнлијинә H-да бахыларса $\nu(\lambda_0) = 0$ олдугда $\lambda = \lambda_0$
K-нын регулјар гијмәти вә $\nu(\lambda_0) \geqslant 1$ олдугда исә $\lambda = \lambda_0$-ын мәх-
суси гијмәтидир.

§ 9. *T* ОПЕРАТОРУНУН МҮӘЈЈӘН АЈРЫЛЫШЫ

Фәрз едәк ки, $\lambda = \lambda_0$, K-нын мәхсуси гијмәтидир. $E - \lambda_0 K$
васитәсилә ујғун алтфәзалары X^0_ν вә X_ν илә ишарә едәк.
$E - \lambda_0 K$, K-нын $\lambda = \lambda_0$ ујғун индексини $\nu(\lambda_0)$ илә ишарә
едәк. Исбат етдијимиз теоремә көрә истәнилән $f \in H$
јеканә олараг $f = u + v$ шәклиндә көстәрилир. Ашағыдакы
кими T_1 вә T_2 операторларыны тә'јин едәк: $T_1 f = u$; $T_2 f = v$,
олсун, ашкардыр ки, T_1 вә T_2 операторлары биргијмәтли тә'-
јин олунурлар. T_1 вә T_2-нин тә'јин олунма гајдалары көстә-
рир ки, T, X^0_ν-нин һәр бир елементи өзүнә чевирмәклә X_ν-дә
сыфра чеврилир вә тәрсинә T_2, X_ν-нин һәр бир елементини
өзүнә чевирмәклә X^0_ν дә сыфра чеврилир. Она көрә дә $T_1 T_2 =$
$= T_2 T_1 = 0$ олур. Бундан әлавә, $E = T_1 + T_2$. K, T_1 вә T_2 опе-
раторлары васитәсилә $T_3 = KT_1$, $T_4 = KT_2$ операторларыны тә'-
јин едәк.

T_3 вә T_4 операторларынын мәһдуд олдугларыны исбат едәк.
Онун үчүн әввәлҹә T_1 вә T_2-нин мәһдуд олдуғуну көстәр-
мәк кифајәтдир. Гејд етмишдик ки, X_ν-дә T-нин тәрси вар вә
она көрә X_ν-јә дахил олан истәнилән f үчүн $\| f \| \leqslant C \| Tf \|$
олур. Бурада C мүәјјән сабит әдәддир. Мә'лумдур ки, $f \in X_\nu$
оларса, ν-дән сонра олан нөмрәләр үчүн ујғун алтфәзалар
үст-үстә дүшдүјүнә көрә истәнилән n үчүн $T^n f \in X_\nu$, $\| f \| \leqslant$
$\leqslant C \| Tf \|$ бәрабәрсизлијинә көрә $\| T^n f \| \leqslant C \| T^{n+1} f \|$ вә ар-
дычыл бәрабәрсизликләри тәтбиг едәрәк $\| f \| \leqslant C^n \| T^n f \|$ ол-
дуғуну алырыг вә $\| v \| \leqslant C^n \| T^n v \|$ бәрабәрсизликдә $n = \nu$
олдуғуну нәзәрә алсаг, онда $\| v \| \leqslant C^\nu \| T^\nu v \|$ $f = u + v$, она
көрә дә, $T^\nu f = T^\nu u + T^\nu v = T^\nu v$ олдуғундан ахырынчы бәра-
бәрсизликдән $\| v \| \leqslant C^\nu \| T^\nu f \|$. Һәмчинин $u = f - v$ бәрабәр-
лијинә көрә $\| u \| \leqslant \| f \| + C^\nu \| T^\nu f \|$. Нәһајәт, T-нин мәһдуд

олдуғуну нәзәрә алсаг елә M_1 вә M_2 сабитләри вар ки, $\|v\| \leqslant M_1 \| f \|$ вә $\| u \| < M_2 \| f \|$ олур. $u = T_1 f$, $v = T_2 f$ олдугларыны нәзәрә алсаг, $\| T_1 f \| < M_1 \| f \|$, $\| T_2 f \| < M_2 \| f \|$. Бу бәрабәрсизликләр исә T_1 вә T_2 операторларынын мәһдуд олдугларыны көстәрир. K-нын мәһдудлуғу нәзәрә алынарса, бурадан T_3 вә T_4 операторларынын мәһдуд олдуглары алыныр.

Исбат едәк ки, T_1 вә T_2 операторлары K илә јерләрини дәјишир, јә'ни $T_1 K = K T_1$ вә $T_2 K = K T_2$ $\varphi \in X_\nu^0$ исә, онда $\varphi' = T\varphi$ олдугда $\varphi' \in X_\nu^0$. Бу $T^\nu \varphi' = T^{\nu+1} \varphi = 0$ бәрабәрлијиндән ајдындыр. Демәли, T васитәсилә X_ν^0 өзү өзүнә ин'икас олунур. Ејни гајда үзрә, әкәр $\psi = T^\nu \omega$ оларса вә $\psi' = T\psi$ ишарә етсәк, онда $\psi' = T^\nu T \omega$ кими көстәрилдијиндән $\psi \in X_\nu$ олдугда, һәмчинин $\psi' \in X_\nu$. Демәли, T оператору да X_ν-ни өзүнә ин'икас етдирир. Она көрә $K = E - T$ оператору ејни хассәјә маликдир. $f \in H$ фәрз едәрәк $K T_1 = T_1 K$ олдуғуну көстәрәк. Сыфыр елемент үчүн бу бәрабәрлијин өдәнилмәси ашкардыр. Әввәлчә фәрз едәк-ки, $f \in X_\nu^0$ јухарыда гејд етдијимиз хассәјә көрә $Kf \in X_\nu^0$. Дикәр тәрәфдән T_1 васитәсилә X_ν^0-нин һәр бир елементи тәрпәнмәз олур. Беләликлә, $T_1 K f = K f$ вә $T_1 f = f$ олдуғундан $K T_1 f = K f$ олур. Демәли, $f \in X_\nu^0$ олдугда $K T_1 = T_1 K$ олур. Инди $f \in X_\nu$ олсун. T_1 исә X_ν үзрә сыфырдыр, она көрә дә $K T_1 f = 0$ вә $T_1 K f = 0$ олур. Демәли, $f \in X_\nu$ олан истәнилән f үчүн $K T_1 = T_1 K$. Беләликлә, истәнилән $f \in H$ үчүн $T_1 K = K T_1$. Ејни гајда үзрә $T_2 K = K T_2$ олдуғу алыныр. Бу хассәләри нәзәрә алараг $T_3 T_4 = T_4 T_3$ олдуғуну да көстәрәк:

$$T_3 T_4 = K T_1 K T_2 = K T_1 T_2 K = 0.$$

Ејни гајда үзрә $T_4 T_3 = 0$. T_3 вә T_4 ифадәләринә көрә $K = T_3 + T_4$ кими көстәрилир.

Теорем 13. $\lambda = \lambda_0$, **T_4-үн регулјар гијмәти, T_3-үн исә мәхсуси гијмәтидир.**

Исбаты. $T_4 T_3 = T_3 T_4$ вә $K = T_3 + T_4$ олдуғундан бурадан

$$(E - \lambda_0 T_3)(E - \lambda_0 T_4) = (E - \lambda_0 T_4)(E - \lambda_0 T_3) = E - \lambda_0 K \quad (1)$$

$\nu' = \nu'(\lambda_0)$, T_4 операторунун ујғун индексидирсә көстәрәк ки, $\nu' = 0$. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни $\nu' \geqslant 1$ олсун. Онда $\varphi - \lambda_0 T_4 \varphi = 0$ тәнлијинин сыфырдан фәргли һәлли вардыр. Јә'ни $\varphi \neq 0 \cdot \varphi - \lambda_0 T_4 \varphi = 0$ олдуғундан φ ујғун $X_\nu = X_{\nu\lambda_0}$ алтфәзасына дахил олур. Јә'ни $\varphi \in X_{\nu\lambda_0}$ олур. (1)-дән исә

$$\varphi - \lambda_0 K \varphi = (E - \lambda_0 T_3)(E - \lambda_0 E_4) \varphi = 0$$

вә беләликлә дә X_ν λ_0-а дахил олан $\varphi \neq 0$ үчүн $\varphi - \lambda_0 K \varphi = 0$. Лакин мә'лумдур ки, X_0-да бу тәнлијин јалныз сыфыр һәлли вардыр. Алынан зиддијјәт $\nu' = 0$ олдуғуну көстәрир. Бу исә $\lambda = \lambda_0$ -ын T_4 операторунун регулјар гијмәти олдуғуну һөкм едир.

$T_3T_4 = T_4T_3 = 0$ олдуғундан һәмчинин истәнилән m вә n үчүн $T_1^m T_2^n = T_2^n T_1^m = 0$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$(E - \lambda_0 K)^n = (E - \lambda_0 T_3)^n (E - \lambda_0 T_4)^n, \tag{2}$$

бәрабәрлијини алырыг. Көстәрдијимиз кими, $(E - \lambda_0 T_4)^{-1}$ оператору вар. Әкәр $(E - \lambda_0 T_3)^{-1}$ олса иди, онда $(E - \lambda_0 K)^{-1}$ операторунун варлығы чыхарды, бу исә $\lambda = \lambda_0$,-ын K оператору үчүн мәхсуси гијмәт олмасы шәртинә зидд оларды. Демәли $\lambda = \lambda_0$, T_3 операторунун мәхсуси гијмәтидир. T операторунун T_3 вә T_4-ә көрә ајрылышы ашағыдакы шәклидә шәрһ олуна биләр. λ_0, T-нин мәхсуси гијмәти олдугда $T = T_3 + T_4$ шәклиндә көстәрилир. $T_3T_4 = T_4T_3 = 0$ олмагла K оператору X_0^ν-дә T_3 илә, X_ν-дә исә K оператору T_4 илә үст-үстә дүшүр. Нәһајәт, λ_0 T_4-үн регулјар гијмәти олмагла λ_0 T_3-үн мәхсуси гијмәти олур. Бу параграфын сонунда ашағыдакы нәтичәни гејд едәк. Биз көстәрмишдик ки, K операторунун мәхсуси әдәди олдугда бу әдәд T_3 операторунун да мәхсуси әдәдидир.

Нәтичә. Истәнилән $\lambda \neq \lambda_0$, T_3 операторунун регулјар гијмәтидир. Онун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни $\lambda \neq \lambda_0$ әдәди T_3-үн мәхсуси гијмәтидир. Онда $\varphi \neq 0$ олан елә φ вар ки, $\varphi - \lambda T_3 \varphi = 0$ бәрабәрлијини өдәјир. $T_3 = T_1K$ олдуғундан $\varphi = \lambda T_1 T \varphi$. T_1-ин хассәсини нәзәрә алсаг, $\varphi \in X_\nu^0$ олур. Она көрә

$$\varphi = \lambda T_1 K \varphi = \lambda K T_1 \varphi = \lambda K \varphi,$$

беләликлә дә, $\varphi = \lambda K \varphi$ алыныр. $\lambda = \lambda_0$ олдуғуну нәзәрә алараг ахырынчы бәрабәрлик

$$\frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0}(E - \lambda_0 K)\varphi = \varphi \tag{3}$$

шәклиндә јазылыр. $K_\nu^0 = \frac{\lambda}{\lambda - \lambda_0}(E - \lambda_0 K)$ ишарә етсәк $K_\nu^0 \varphi = \varphi$ олар. (3)-ә K_ν^0-ын ардычыл итерасијалары илә тә'сир етсәк:

$$(E - \lambda_0 K)^\nu \varphi = \left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}\right)^\nu \varphi \neq 0.$$

Бу исә φ-нин X_ν^0-јә дахил олмасы шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\lambda \neq \lambda_0$ олан истәнилән λ әдәди T-нин регулјар гијмәтидир.

§ 10. H ФӘЗАСЫНЫН МҮӘЈЈӘН АЈРЫЛЫШЫ

Фәрз едәк λ_0, K-нын мәхсуси әдәдидир. Биз (§ 6, 1) вә (§ 6,2) тәнликләринин X_ν фәзасында һәлләринин варлыглары вә јеканәлији һаггында мүәјјән теоремләри гејд етдик. Бу параграфда X_ν^0-нин мүәјјән алтфәзалара ајрылышы вериләчәк. X_ν васитәсилә H-ын мүәјјән ајрылышы верилир. $X_{\nu-1}^0$-ә көрә

X^0_ν-нин мүәјјән ајрылышыны јазмаг олар. $X^0_{\nu-1} \subseteq X^0_\nu$ олдуғундан X^0_ν-ы $X^0_{\nu-1}$-ә көрә ашағыдакы кими јаза биләрик:

$$X^0_\nu = X^0_{\nu-1} + У_\nu . \tag{1}$$

Белә ки, $У_\nu$, X^0_ν-нүн елә елементләриндән дүзәлмишдир ки, бунлар $X^0_{\nu-1}$-ә ортогоналдыр.

Исбаты. (1)-дән $\tilde{У}_\nu = TУ_\nu = TX^0_\nu - TX^0_{\nu-1}$ олсун. Бурадан $T^{\nu-1}\tilde{У}_\nu = T^\nu X^0_\nu - T^\nu X^0_{\nu-1} = 0$. Демәли, $\tilde{У}_\nu \in X^0_{\nu-1}$. Еләчә дә,

$$T^{\nu-2}\tilde{У}_\nu = T^{\nu-1}X^0_\nu - T^{\nu-1}X^0_{\nu-1} = T^{\nu-1}X^0_\nu$$

бәрабәрлијини нәзәрә алсаг: $X^0_{\nu-1} \neq X^0_\nu$ олдуғундан $T^{\nu-1}X^0_\nu \neq 0$, јә'ни $T^{\nu-2}\tilde{У}_\nu \neq 0$, башга сөзлә, $\tilde{У}_\nu \bar{\in} X^0_{\nu-2}$. Һәм X^0_ν, $X^0_{\nu-1}$-ын хәтти олмалары вә һәмчинин T-нин хәттилијиндән алырыг ки, $\tilde{У}_\nu$ чохлуғу алтфәзадыр. Онда һәмчинин $\tilde{У}_\nu + X^0_{\nu-2}$ алтфәза олар. $X^0_{\nu-1}$ вә X^0_ν-нин $\nu \geqslant 1$ олдугда фәргли олдуғуну гејд етсәк, онда $\tilde{У}_\nu$ алтфәзасынын өлчүсү сыфырдан фәргли олар. Инди $X^0_{\nu-1}$ вә $\tilde{У}_\nu + X^0_{\nu-2}$-јә көрә ајыраг:

$$X^0_{\nu-1} = \tilde{У}_\nu + X^0_{\nu-2} + У_{\nu-1}, \tag{2}$$

јә'ни $У_{\nu-1}$, $X^0_{\nu-1}$-ин елә елементләриндән дүзәлмишдир ки, бунлар $\tilde{У}_\nu + X^0_{\nu-2}$-јә ортогонал олсун. $\tilde{У}_{\nu-1} = TУ_{\nu-1}$, $T^{\nu-2}\tilde{У}_{\nu-1} = T^{\nu-1}X^0_{\nu+1} - T^{\nu-1}X^0_{\nu-2} - T^{\nu-1}У_\nu = 0$. Јә'ни $\tilde{У}_{\nu-1} \in \tilde{X}_{\nu-2}$ вә $T^{\nu-2}\tilde{У}_{\nu-1} = T^{\nu-2}X^0_{\nu-1} - T^{\nu-2}X^0_{\nu-2} - T^{\nu-2}У_\nu = T^{\nu-2}X^0_{\nu-1} - T^{\nu-2}У_\nu$

$У_{\nu-1}$-нин өлчүсүнү сыфырдан фәргли һесаб едириксә, онда $T^{\nu-1}\tilde{У}_{\nu-1}$, јә'ни $\tilde{У}_{\nu-1} \in X^0_{\nu-2}$ олмагла $\tilde{У}_{\nu-1} \bar{\in} X^0_{\nu-3}$. Бу гајда үзрә $X^0_j\,(j = \overline{1, \nu})$ алтфәзаларынын аналожи ајрылышларыны јазсаг:

$$\begin{aligned} X^0_\nu &= X^0_{\nu-1} + У_\nu, \\ X^0_{\nu+1} &= X^0_{\nu-2} + TУ_\nu + У_{\nu-1}, \\ &\\ X^0_{\nu-2} &= X^0_{\nu-3} + T^2У_\nu + TУ_{\nu-1} + У_{\nu-2}, \\ X^0_1 &= X^0_0 + T^{\nu-1}У_\nu + T^{\nu-2}У_{\nu-1} + \cdots + TУ_2 + У_1. \end{aligned} \tag{3}$$

Бурадан исә

$$X^0_\nu = \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} \overset{\kappa}{T} У_\nu + \sum_{\kappa=0}^{\nu-2} T^\kappa У_{\nu-1} + \cdots + \sum_{\kappa=0}^{1} T^\kappa У_2 + У_1. \tag{4}$$

(4)-ә дахил олан $\tilde{T}\, У_i$ алтфәзалары хәтти асылы дејилдирләр. $H = X^0_\nu + X_\nu$ олдуғуну вә (4)-ү нәзәрә алсаг,

$$H = X_{\nu} + \sum_{\kappa=0}^{\nu-1} T^{\kappa} У_{\nu} + \sum_{\kappa=0}^{\nu-2} T^{\kappa} У_{\nu-1} + \ldots + \sum_{\kappa=0}^{1} T^{\kappa} У_{2} + У_{1} \qquad (5)$$

X_{ν} вә $T^{j}У_{i}$ алтфәзалары бирликдә хәтти асылы дејилдир. Нәтичәдә биз H фәзасыны хәтти асылы олмајан алтфәзаларын чәми кими көстәрдик. (§ 6,1) тәнлијинин X_{ν}-дә һәлли олдуғуну билирик. Инди (§ 6,1) вә (§ 6,2) тәнликләринин (5)-ә дахил олан галан алтфәзаларында һәлләр һаггында мүәјјән мүлаһизәләри гејд едәк. (4)-ү

$$H = X_{\nu} + \sum_{j=0}^{\nu-1} \sum_{\kappa=0}^{\nu-(j+1)} T^{\kappa} У_{\nu-j} \qquad (6)$$

шәклиндә јазаг, $У_{\mu} \neq 0$ фәрз едәрәк бу алтфәзаја дахил олан $\varphi^{0}_{\mu_i}(i = \overline{1,\ r_{\mu}})$ хәтти асылы олмајан елементләри көтүрәк вә

$$\widetilde{\varphi}^{(j)}_{\mu_i} = \left(-\frac{T}{\lambda_0}\right)^{j} \varphi^{(0)}_{\mu_i} \qquad (7)$$

илә ишарә едәк $\left(j = \overline{1,\ \mu - 1}\right)$. Көстәрәк ки, $\varphi^{(j)}_{\mu_i}\left(i = \overline{1, r_{\mu}}\right)$ елементләри дә хәтти асылы дејилдир. Она көрә дә фәрз едәк ки, $\sum_{j=1}^{r_{\mu}} C_i \varphi^{(j)}_{i_{\mu i}} = 0$ вә $\omega = \sum_{i=1}^{r_{\mu}} C_i \varphi^{(0)}_{i_{\mu}}$ олсун, (7)-ни нәзәрә алсаг, јухарыдакы бәрабәрлијә көрә $T^{j}\omega = 0$. Беләликлә, $\omega \in X^{0}_{\mu}$ вә $\omega \in X^{0}_{\mu-1}$ дикәр тәрәфдән исә $\omega \in У_{\mu\nu}$, онда $У_{\mu}$-нин елементләри $X^{0}_{\mu-1}$-ә ортогонал олдуғундан ω јалныз сыфыр ола биләр. Јә'ни $\omega = 0$. Беләликлә дә $\sum_{i=1}^{r_{\mu}} C_i \varphi^{(0)}_{i\mu} = 0$, бурадан исә $C_i = 0\ \left(i = \overline{1, r_{\mu}}\right)$ олур, јә'ни $\varphi^{(j)}_{\mu_i}\left(i = \overline{1, r_{\mu}}\right)$ хәтти асылы дејилдирләр. $T^{j}У_{\mu}$ алтфәзасы бу функсијалар васитәсилә гурулур. Нәһајәт, X^{0}_{ν} фәзасы хәтти асылы олмајан $\varphi^{(j)}_{\mu}\left(j = \overline{1, \mu - 1}\right)\left(\mu = \overline{1, \nu},\ i = \overline{1, r_{\mu}}\right)$ функсијалары васитәсилә гурулур. (7)-дән

$$\varphi^{(j+1)}_{\mu_i} = \left(-\frac{1}{\lambda} T\right)^{i+1} \varphi^{(0)}_{\mu_i} = \left(-\frac{1}{\lambda_0} T\right)\left(-\frac{1}{\lambda_0} T\right)^{j} \varphi^{(0)}_{\mu_i};$$

беләликлә, $\varphi^{(j+1)}_{\mu_i} = -\frac{1}{\lambda_0} T\varphi^{(j)}_{\mu_i}$; $T = E - \lambda_0 K$ олдуғундан

$$\varphi^{(j)}_{\mu_i} - \lambda_0 T\varphi^{(j)}_{\mu_i} = -\lambda_0 \varphi^{(j+1)}_{\mu_i}\left(j = \overline{0,\ \mu - 2},\ \mu = \overline{1, \nu},\ i = \overline{1, r_{\mu}}\right), \qquad (8)$$
$$j = \mu - 1$$

олдуғуну нәзәрә алсаг

$$\varphi^{(\mu-1)}_{\mu i} = \left(-\frac{1}{\lambda_0}\right)^{\mu-1} T^{\mu-1} \varphi^{(0)}_{\mu_i}. \qquad (9)$$

$y^{(0)}_{\mu_i} \in У_{\mu}$; $\varphi^{(0)}_{\mu} \in X^{0}_{\mu}$. Беләликлә, $T^{\mu} \varphi^{(0)}_{\mu_i} = 0$ вә $T\varphi^{(\mu-1)}_{i} =$

јә'ни

$$=) E - \lambda_0 K) \varphi_{\mu i}^{(\mu-1)} = 0,$$

$$\varphi_{\mu_i}^{(\mu-1)} = \lambda_0 K \varphi_{\mu_i}^{(\mu-1)} \quad \left(\mu = \overline{1, \nu},\ i = \overline{1, r_\mu}\right). \qquad (10)$$

Алынан нәтичәләр ашағыдакы теорем шәклиндә ифадә олунур.

Теорем 14. **λ_0, K операторунун мәхсуси әдәдидирсә, H фәзасы (6) шәклиндә көстәрилир, белә ки, (§ 6, 1) тәнлијинин X_ν-јә дахил олан истәнилән f үчүн јеканә һәлли вар. $T^j Y_\mu \left(j = \overline{0, \mu - 2},\ \mu = \overline{1, \nu}\right)$ алтфәзасында хәтти асылы олмајан елә $\varphi_{\mu_i}^{(j)} \left(j = \overline{1, r_\mu}\right)$ елементләр вар ки, (8) бәрабәрликләрини өдәмәклә бирчинсли олмајан тәнлијин һәлләрини характеризә едир. $T^{\mu-1} y_\mu \left(\mu = \overline{1, \nu}\right)$ алтфәзасында исә елә $\varphi_{\mu_i}^{(\mu-1)} \left(i = \overline{1, r_\mu}\right)$ елементләр вар ки, (10)-у өдәмәклә бирчинсли тәнлијин һәлләрини характеризә едир.**

Биз бу параграфда (§ 6,1) тәнлијини јалныз Һилберт фәзасында тәдгиг етдик. Һәмин тәдгиг заманы Һилберт фәзасында скалјар һасил вә ортогонал елементләрин скалјар һасил васитәсилә тә'јини бә'зи теоремләрин исбат гајдаларынын садә шәкилдә верилмәсинә сәбәб олурду. Инди биз үмуми Банах фәзасында ујғун лемманын исбатыны вермәклә көстәрәк ки, (§ 6,1) тәнлији үчүн Һилберт фәзасында алынан нәтичәләр ејни схем үзрә үмуми Банах фәзасына көчүрүлә биләр.

Лемма. **Әкәр E, Банах фәзасында верилмиш сонсуз өлчүлү алтфәза исә, онда $\delta > 0$ әдәди верилдикдә, $\| f_i \| = 1$ олан елә $\{f_i\}$ ардычыллығы гурмаг олар ки, $i \neq m$ олдугда $\| f_i - f_m \| > \delta$ олсун.**

Исбаты. Шәртә көрә E сонсуз өлчүлү олдуғундан елә гапалы $E_\kappa \left(\kappa = \overline{1, \infty}\right)$ алтчохлуглары гурмаг олар ки, $E_1 \subset E_2 \subset \subset E_3 \subset \cdots$; олар. $E_1 \subset E_2$ олдуғундан $f' \in E_2$ вә $f' \overline{\in} E_i$ олан истәнилән f' елементини көтүрәк. f' илә E_1 арасында олан мәсафәни d илә ишарә едәк. E_1 гапалы олдуғундан $d \neq 0$ олур. $\delta < 1$ олан δ әдәдини көтүрәк, $\delta < 1$ олдуғундан $\frac{d}{\delta} > d$ олар. E_1 гапалы олдуғу үчүн елә g^* елементи тапмаг олар ки, $d = = \| f' - g^* \|$. Она көрә $\| f' - g^* \| < \frac{d}{\delta}$ гәбул етмәк олар. $f = \frac{f' - g^*}{\|f' - g^*\|}$ олсун. Ашкардыр ки, $f \in E_2$ вә $\| f \| = 1$, $g \in E_1$ истәнилән g елементини көтүрүб $\| f - g \|$-ни гијмәтләндирәк:

$$\| f - g \| = \left\| \frac{f - g^*}{\|f - g^*\|} - g \right\| = \frac{1}{\|f - g^*\|} \left\| f - g^* - g \| f - g^* \| \right\|$$

Онда $g^* \in E$ вә $g \in E_1$ олдугда $g^* + g \| f - g^* \| \in E_1$ олар. $f \in E_2$, d-нин тә'рифинә көрә

$$\| f - g^* - g \| f - g^* \| \| \geq d. \qquad (11)$$

Һәмчинин, $\| f - g^* \| < d < \frac{d}{\delta}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (11)-дән истәнилән $g \in E_1$ үчүн $\| f - g \| > \delta$ өдәнилдији алыныр. $g = f_1$ вә $f_2 = g$ илә ишарә етсәк, ашағыдакы нәтичә алыныр: $f_1 \in E_1$ вә $f_2 \in E_2$ олан елә елементләр вар ки, $\| f_1 - f_2 \| > \delta$ өдәнилир. Бу гајда үзрә көстәрмәк олар: елә $f_3 \in E_3$ елементи вар ки, E_2-јә дахил олан истәнилән $\tilde{f}_2$ елементи үчүн $\|f_3 - \tilde{f}_2\| < \delta$ олсун. $\tilde{f}_2$-ни гејд едәрәк $\tilde{f}_2 = f_2$ илә ишарә етсәк, онда $\|f_3 - f_2\| > \delta$. Еләчә дә, хүсуси һалда, $\tilde{f}_2 = f_1$ кими сечилә биләр. Она көрә $\| f_1 - f_3 \| > \delta$ өдәниләр. Демәли, ејни заманда $\| f_2 - f_1 \| > \delta$, $\| f_2 - f_3 \| > \delta$ вә $\| f_1 - f_3 \| > \delta$ өдәнилдикләри алыныр. Бу схеми ардычыл олараг давам етдирәрәк $\| f_i \| = 1$ шәртини өдәјән елә $\{f_i\}$ ардычыллығы гурмаг олар ки, $i \neq m$, $\| f_i - f_m \| > \delta$. Беләликлә дә, лемма исбат олунур. Биз Һилберт фәзасында тамам кәсилмәз операторла бағлы олан тәнликләрин өјрәнилмәсиндә бир нечә тәклифләрин исбатында әкс фәрзијјәләрдән истифадә едирдик. Лакин Һилберт фәзасынын структурундан асылы олараг мүәјјән зиддијјәтләр алырдыг. Биз Банах фәзаларында верилмиш тәнлији арашдыраркән бу фәзаларда һәмин зиддијјәтләри төрәдән ујғун мүлаһизәләр сөјләмәк олар. Мәсәлән, Һилберт фәзасында $\| f_i \| = 1$ олан елә ортонормал $\{f_i\}$ системи сечирдик ки, бу системлә әлагәдар олараг $\|\tilde{f}_i - \tilde{f}_m\| \geqslant 1$ бәрабәрсизлији өдәнилирди. Банах фәзасында һәмин тәнликләри тәдгиг едәндә ујғун теоремләри исбат етмәк үчүн $\| f_i - f_m \| \geqslant 1$ шәртини $\|f_i' - f_m'\| > \delta$ шәртилә әвәз етмәк кифајәтдир.

$X_{\text{п}}$-ин гапалы олмасынын исбатында исә јығылан $\{\psi_{\text{к}}\}$ ардычыллығыны көтүрмәклә исбат едирдик ки, бу ардычыллығын лимити олан ψ^*, $\psi^* = T_1\varphi^*$ шәклиндә көстәрилир. Бу тәклифин исбатында исбат етдијимиз теоремә көрә

$$\varphi_{\text{к}} = \varphi'_{\text{к}} + \varphi''_{\text{к}},$$

бәрабәрлијиндән истифадә едирдик. Белә ки, $\varphi_{\text{к}} \in X^0_{\text{п}}$, $\varphi''_{\text{к}}$ исә $X^0_{\text{п}}$-ә ортогоналдыр, белә ортогоналлыг шәртиндән истифадә едәрәк $\varphi''_{\text{к}}$-нын мәһдуд олдуғуну исбат едирдик. Бундан сонра исә X-нин гапалы олмасы көстәрилирди. Кичик бир факты гејд етмәклә $\{\varphi''_{\text{к}}\}$-нын мәһдуд олмасыны ејни гајда үзрә үмуми Банах фәзасында исбат етмәк олар. $\varphi_{\text{к}}$ верилдикдә елә $\varphi'_{\text{к}} \in X^0_{\text{п}}$ елементи көтүрәк ки, $\varphi''_k = \varphi_{\text{к}} - \varphi'_{\text{к}}$ олсун. $\varphi_{\text{к}}$ вә $X_{\text{п}}$ арасындакы мәсафәни $d_{\text{к}}$ илә ишарә едәк. Онда

$$\|\varphi_k'\| \leqslant \|\varphi_k\| + 2d_k.$$

Бу бәрабәрсизлик ујғун исбатда лазым олан фикри әвәз едир

§ 11. ҺӘГИГИ ЕЈНИЧИНСЛИ АДДИТИВ ОПЕРАТОРЛАР ҺАГГЫНДА

Биз китабын сонракы һиссәләриндә, һәм регулјар вә һәм дә сингулјар оператор тәнликләринин һәлләрини инволјусијалы Банах фәзаларында верәчәјик. Она көрә дә әкәр верилмиш X фәзасы комплекс әдәдләр мејданында верилирсә вә бу фәзада әлавә инволјусија варса, онда X-дә тә'сир едән операторлара ујғун оператор инволјусија васитәсилә тә'јин олунараг бир нечә хассәләри көстәрилир. Белә операторларын көстәрилән хассәләри инволјусијалы фәзаларда верилмиш аддитив операторлу тәнликләринин арашдырылмасыны асанлашдырыр. Биз бу параграфда даһа кениш синиф тәшкил едән операторларын бир нечә хассәләрини көстәрәчәјик. Фәрз едәк ки, X, Φ мејданында верилмиш хәтти фәзадыр. T исә X-дә верилмиш аддитив вә расионал ејничинсли оператордур. Јә'ни $x, y \in X$ истәнилән x, y үчүн

$$T(x+y) = Tx + Ty. \tag{1}$$

$\in \Phi$ истәнилән расионал әдәд олдугда $T(\alpha x) = \alpha Tx$. Белә операторлар чохлуғуну X_0 илә ишарә едәк. Асанлыгла јохламаг олар ки, X_0, Φ һиссәси үзәриндә тә'јин олунмуш ваһид елементли хәтти чәбрдир. Φ мејданында тә'јин олунмуш хәтти операторлар чохлуғуну X_1 илә ишарә едәк, ашкардыр ки, $X_1 \subset X_0$. X_0-а дахил олан

$$A^2 = -E \tag{2}$$

шәрти өдәјән A операторунун варлығыны фәрз едәк. Бурада E ејнилик оператордур. A вә T операторлары васитәсилә

$$T_1 = \frac{1}{2}[T - ATA] \tag{3}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}[T + ATA] \tag{4}$$

операторларыны тә'јин едәк. Белә ки, $T \in X_0$. T_1 вә T_2 операторларынын тә'јин олдугларындан көрүндүјү кими, бунлар X_0-а дахилдирләр. (3)-дән алырыг ки:

$$AT_1 = \frac{1}{2}[AT - A^2TA] \tag{5}$$

вә

$$T_1A = \frac{1}{2}[TA - ATA^2]. \tag{6}$$

$A^2 = -E$ олдуғундан, бурадан

$$AT_1 = T_1A, \qquad (7)$$

$$AT_2 = -T_2A \qquad (8)$$

олар. (3) вә (4)-дән алырыг ки:

$$T = T_1 + T_2. \qquad (9)$$

Демәли, T, (9) шәклиндә көстәрилир. Белә ки, A, T_1 вә T_2 (7) вә (8) бәрабәрликләрини өдәјир. A-нын гејд олундуғуну фәрз едәрәк, (7)-ни өдәјән T_1 операторлар чохлуғуну r_A вә (8)-и өдәјән T_2 операторлар чохлуғуну R_A илә ишарә едәк. Беләликлә, һәр бир $T \subset X_0$ оператору (9) васитәсилә көстәрилир. Бурада, $T_1 \in r_A$ вә $T_2 \in R_A$. Она көрә дә,

$$X_0 = r_A \oplus R_A \qquad (10)$$

өдәнилир. (7), (8) вә (9) бәрабәрликләриндән (3) вә (4)-үн өдәнилдикләри алыныр. Она көрә дә, $T \subset X_0$ олан T оператору јеканә олараг (9) шәклиндә көстәрилир. r_A вә R_A синифләринин тә'јин олмаларындан көрүндүјү кими, әкәр $T \in r_A$ оларса, $T_1 = T$ вә $T_2 = 0$ вә еләчә дә r_A оларса, $T_1 = 0$ вә $T_2 = T$. Она көрә дә, $r_A \cap R_A = \{0\}$, r_A расионал әдәдләр мејданында верилмиш ваһид елементли чәбр, R_A исә Ф-дә верилмиш ваһид елементли чәбрдир. Әкәр A хәтти оператор исә онда r_A вә R_A, Φ мејданында тә'јин олунан ујғун ваһид елементли чәбрләрдир. Әкәр $A' \subset X_0$ олан (2) шәртини өдәјән оператор исә онда $T = T_1 + T_2'$ олар. Она көрә дә $X_0 = r_{A'} \oplus R_{A'}$ нәтичәдә

$$r_A \oplus R_A = r_{A'} \oplus R_{A'}. \qquad (11)$$

T-нин (9) ифадәсини нәзәрә алараг M_A вә S_A пројекторларыны тә'јин едәк:

$$M_AT = T_1, \qquad (12)$$

$$S_AT = T_2. \qquad (13)$$

Бурада, M_A хәтти оператор олмагла $M_A \subset R_A$ вә S_A хәтти оператор олмагла $S_A \subset R_A$ олур. (12) вә (13)-дән алырыг ки,

$$M_A + S_A = E, \qquad (14)$$

һәмчинин асанлыгла ашағыдакы

$$M_AS_A = S_AM_A = 0, \qquad (15)$$

$$M_A^2 = M_A, \ S_A^2 = S_A \qquad (16)$$

бәрабәрликләринин өдәнилдијини јохламаг олар. $B \subset X$ вә $B^2 = -E$ шәртини өдәјән оператор көтүрәрәк T вә A илә тә'јин олунан ујғун компонентләри T_A' вә T_A'' илә, T вә B илә тә'јин олунан ујғун компонентләри T_B' вә T^B илә ишарә едәк.

Нәһајәт, B илә әлагәдар ујғун пројекторлары M_B вә S_B илә ишарә етсәк

$$T'_B = M_B(T'_A + T''_A),$$
$$T''_B = S_B(T'_A + T''_A),$$
$$T'_A = M_A(T'_B + T''_B),$$
$$T''_A = S_A(T'_B + T''_B)$$

бәрабәрликләринин билаваситә өдәнилдикләри алыныр. Бу бәрабәрликләр r_A, R_A илә r_B вә R_B фәзалары арасында олан әлагәләри көстәрир.

Фәрз едәк ки, $T_1T_2 = T_2T_1$, онда (3) вә (4)-ә көрә

$$(T - ATA)(T + ATA) = (T + ATA)(T - ATA), \qquad (17)$$

она көрә дә

$$(TAT)A = A(TAT). \qquad (18)$$

P_A илә X_0-дан олан вә (8)-и өдәјән T операторлар чохлуғуну ишарә едәк. (17) вә (18) бәрабәрликләриндән көрүндүјү кими, $T \in X_0$ вә (18)-и өдәјән оператор исә, онда $T_1T_2 = T_2T_1$,. $r_A \cup R_A \subset P_A$. Инди

$$T_1T_2 = T_2T_1 \qquad (19)$$

олдуғуну гәбул едәк. Онда

$$T_1T_2 = (T + ATA)(T - ATA) = T^2 + TATA - ATAT - ATAATA.$$

(19)-у вә $T_1T_2 = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, $T^2 + AT^2A = 0$, бурадан исә $A^2 = -E$ олдуғуна көрә

$$T^2A = AT^2 \qquad (20)$$

өдәнилир. Тәрсинә, (18) вә (20)-дән (19) өдәнилдији алыныр. Q_A илә X_0-а дахил олан (18) вә (19) илә тә'јин олунан T операторлар чохлуғуну ишарә едәк. Онда

$$r_A \cup R_A \subset Q_A \subset P_A.$$

Әкәр $T \in Q_A$ вә T^{-1} варса, $T_R^{-1} \in Q_A$ олур. Она көрә дә,

$$\tilde{T} = T^{-1}AT^{-1} \qquad (21)$$

илә ишарә едәк. Әввәлчә

$$A\tilde{T} = \tilde{T}A \qquad (22)$$

олдуғуну көстәрәк. (20)-дән $A = T\tilde{T}T$ олар. Әкәр $A_0 = TAT$ илә ишарә етсәк, онда $A = T^{-1}T_0T^{-1}$. (18)-ә көрә $T^{-1}T_0T^{-1} = T\tilde{T}T$; беләликлә дә, $\tilde{T} = T^{-2}T_0T^{-2}$ олар. Һәм T^2, T_0 вә һәм дә T^{-2} операторлары A илә јерләрини дәјишдијиндән (22) өдәнилир. Беләликлә, $T^{-1} \in Q_A$ олур. Бу мә'нада P_A синфи гапалы дејилдир.

Әкәр A (2)
Бир нечә кәлмә гошма операторлар һаггында:
шәртини өдәјирсә, онда $A^{**} = -E^*$ олур. Она көрә дә ејни гај-
да үзрә $P^*{}_{A^*}$ вә Q_{A^*} синифләрини дүзәлтмәк олар. $T \in P_A$ олар-
са $T \in P_{A^*}$ вә $T \in Q_{A^*}$ исә, онда $T^* \in Q_{A^*}$ олур:

$$T^* = T_1^* + T_2^*. \tag{23}$$

Белә ки, $A^* T_1^* = T_1^* A^*$ вә $A^* S_2^* = -A^* T_2^*$. Бунлардан сонра ке-
ниш тәдбиги олан бир синиф операторларын бир нечә хассә-
ләрини верәк. Фәрз едәк X комплекс әдәдләр мејданында ве-
рилмишдир. Хүсуси һалда, $A = i$ операторуну тә'јин едәк.
i васитәсилә һәр бир x, ix-ә чеврилир.
X_0 илә X-дә тә'јин олунмуш һәгиги ејничинсли вә адди-
тив операторлар чохлуғуну ишарә едәк, онда $T \in X_0$ олан һәр
бир T оператору

$$T = T_1 + T_2 \tag{24}$$

кими көстәриләр. Белә ки, T_1 хәтти ејничинсли аддитив опе-
ратор, T_2 исә аддитив олмагла $\alpha \in \Phi$ олан һәр бир α үчүн

$$T_2 \alpha x = \bar{\alpha} T_2 x. \tag{25}$$

Көстәрдијимиз кими, $T_1 T_2 = T_2 T_1$ олмасы үчүн

$$i(TiT) = (TiT)i \tag{26}$$

олмасы зәрури вә һәм дә кафидир. Еләчә дә, $T_1 T_2 = T_2 T_1 = 0$

$$iT^2 = T^2 i \tag{27}$$

олмасы зәрури вә һәм дә кафидир. Нәтичәдә X_0 фәзасы аша-
ғыдакы кими көстәрилир:

$$X_0 = X_1 \oplus X_2. \tag{28}$$

Белә ки, X_1 ејничинсли аддитив операторлар чохлуғу, X_2 исә
ејничинсли вә (25) шәртини өдәјән операторлар чохлуғудур.
Фәрз едәк ки, T комплекс X-дә верилмиш мәһдуд аддитив
оператордур. Онда көстәрдијимиз кими $T = T_1 + T_2$ вә $T_j (j =$
$= 1, 2)$ операторларыны нәзәрә алараг

$$R_\alpha(\lambda) = \lambda E - T_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2) \tag{29}$$

илә ишарә едәк.
$T_1 \lambda x = \lambda T_1 x$ вә $T_2 \bar{\mu} T_2 x$ олдугларыны нәзәрә алсаг, спектр-
лә әлагәдар олан бир нечә кичик нәтичәләри гејд етмәк олар.
T_1 вә T_2-нин јухарыдакы хассәләрини нәзәрә алараг аша-
ғыдакы бәрабәрликләрин доғрулуғу асанлыгла алыныр:

$$P_2(\lambda) P_1(\mu) - P_1(\mu) P_2(\lambda) = 2\mu i T_2, \tag{30}$$

$$P_2(\lambda) P_1(\mu) - P_2(\mu) P_1(\lambda) = (T_1 - T_2)(\mu - \lambda)) \tag{31}$$

$$P_2(\lambda) P_1(\mu) - P_1(\lambda) P_2(\mu) = \lambda(T_2 - T_1) + (T_1 - T_2)^\mu. \tag{32}$$

Бурада, $P_1(\lambda) = \lambda E - T_1$, $P_2(\lambda) = \lambda E - T_2$. Белә ки, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$,

$\mu = \mu_1 + i\mu_2$. Нәһајәт $iT = i(T_1 + T_2)$ вә $(T_1 + T_2)i = i(T_1 - T_2)$. Әкәр μ һәгиги әдәд исә,

$$P_2(\lambda) \cdot P_1(\mu) = P_1(\mu) P_2(\lambda). \qquad (33)$$

Демәли, μ һәгиги олдугда (32) истәнилән λ үчүн өдәнилир' Беләликлә, (33) симметрикдир.

$$P_1(\mu) P_2(\lambda) = P_2(\lambda) P_1(\mu) \qquad (34)$$

вә

$$T_1 - T_2 = -iTi \qquad (35)$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, (32)-дән

$$P_2(\lambda) P_1(\mu) - P_1(\lambda) P_2(\mu) = i(\lambda T - T\mu)i, \qquad (36)$$

бурадан исә $\mu = \lambda$ оларса,

$$P_2(\lambda) P_1(\lambda) - P_1(\lambda) P_2(\lambda) = i(\lambda T - T\lambda) i, \qquad (37)$$

лакин

$$P_2(\lambda) P_1(\lambda) = P_1(\lambda) P_2(\lambda)$$

олдуғундан $T\lambda = \lambda T$ вә беләликлә, $T = T_1$ олмагла $T_2 = 0$ олур. Инди $\lambda = \mu$ фәрз едәрәк (29)-дан

$$P_2(\lambda) P_1(\lambda) - P_1(\lambda) P_2(\lambda) = 2\lambda_2 iT_2 \qquad (38)$$

олар. Бурада λ—комплекс әдәддир. (37) вә (38)-ә көрә $(\lambda T - T\lambda)i = 2\lambda_2 T_2$, бурадан исә

$$\lambda T - T\lambda = 2\lambda_2 T_2 i,$$

$Ti = i(T_1 - T_2)$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$P_1(\lambda) - P_2(\lambda) = iTi, \qquad (39)$$

$\alpha = \mu - \lambda$ оларса,

$$P_2(\lambda) - P_1(\mu) = i(\alpha E - T) i. \qquad (40)$$

(40)-ын доғрулуғуну көстәрмәк олар. Фәрз едәк $\alpha_0 \neq 0$, T-нин мәхсуси әдәдидир. Онда елә $x_0 \neq 0$ вектору вар ки, ашағыдакы бәрабәрлик өдәнилир:

$$\alpha x_0 = T x_0.$$

$\alpha = \mu - \lambda$ вә $T = T_1 + T_2$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$P_2(\lambda) x_0 = P_1(\mu) x_0 \qquad (41)$$

олар.

$$P_1(\mu) x = M_1(\mu), \qquad (42)$$

$$P_2(\lambda) x = M_2(\mu), \qquad (43)$$

$$M(\mu, \lambda) = M_1(\mu) \cap M_2(\lambda). \qquad (44)$$

λ-ја ујғун $T_j(\lambda) x = 0$ олан x елементләр чохлуғуну $X_\lambda^{(j)}$ илә ишарә едәк. Фәрз едәк ки, $\lambda \neq 0$ T_2 операторунун мәхсуси ədədidir, μ isə сырф хəјали əдəддир. Беләликлə, $x \in X_j^{(2)}$ вə $x \neq 0$, онда $T_2 x = \lambda x \neq 0$, бу һалда

$$P_2(\lambda) P_1(\mu) x \neq 0, \tag{45}$$

она көрə дə $x \overline{\in} X_\mu^{(1)}$ вə $P_1(\mu) x \overline{\in} X_\lambda^{(2)}$. Беләликлə, $Jm\mu \neq 0$ оларса, $X_\lambda^{(2)} \bigcap X_\mu^{(1)} = 0$. Инди μ-нү һəгиги əдəд вə λ-ны T_2-нин сыфырдан фəргли мəхсуси əдəди һесаб етсəк, онда $P_1(\mu) X_\lambda^{(2)} \subset \subset X_\lambda^{(2)}$.

T_1 вə T_2 үчүн $T_1 T_2 = T_2 T_1 = 0$ олдуғуну фəрз етсəк, онда $T^{\text{п}} = T_1^{\text{п}} + T_2^{\text{п}}$. n чүт олдугда $T^{\text{п}}$ ејничинсли олар. Она көрə

$$\left(\lambda E - T_1^{\text{п}}\right)\left(\lambda E - T_2^{\text{п}}\right) = \left(\lambda E - T_1^{\text{п}}\right)\left(\lambda E - T_2^{\text{п}}\right) = \lambda\left(\lambda E - T^{\text{п}}\right). \tag{46}$$

Бурадан алырыг ки, əкəр $\lambda \in \sigma(\mathrm{T}^{\text{п}})$ исə, онда ја $\lambda \in \sigma\left(T_1^{\text{п}}\right)$ вə јахуд да $\lambda \in \sigma\left(T_2^{\text{п}}\right)$. Тəрсинə, əкəр $\lambda \in \sigma\left(T_1^{\text{п}}\right)$ вə јахуд да $\lambda \in \sigma\left(T_2^{\text{п}}\right)$ исə, онда $\lambda \in \sigma\left(T^{\text{п}}\right)$. Она көрə дə $\lambda \in \rho\left(T_1^{\text{п}}\right)$ вə $\lambda \in \rho\left(S_2^{\text{п}}\right)$ оларса онда $\lambda \in \rho(T^{\text{п}})$ олмагла

$$R(\lambda, T) \in R\left(\lambda, T_1^{\text{п}}\right) + R\left(\lambda, T_2^{\text{п}}\right). \tag{47}$$

$\sigma(-iTi) = \sigma(T)$ олдуғу исə билавасилə јохланылыр:

$$(\lambda E - T_2)(\lambda E - T_1) = (\lambda E - T)\lambda, \tag{48}$$

$$(\lambda E - T_1)(\lambda E - T_2) = \lambda(\lambda E - T). \tag{49}$$

(48) вə (49) T_1 вə T_2-нин ортогоналлыг шəртиндəн алыныр. Она көрə дə $\lambda \in \sigma(T)$ оларса, ја $\lambda \in \sigma(T_2)$ вə јахуд да $\lambda \in \sigma(T_1)$ олур. Əкəр $\lambda \in \sigma(T_2)$ оларса, онда $\lambda \in \sigma(T)$ олар. Əкəр λ һəгиги оларса, $\lambda \in \sigma(T_1)$-дəн $\lambda \in \sigma(T)$ олдуғу алыныр. Əкəр $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \neq 0$ олмагла $\lambda \in \sigma(T_1)$ исə, онда $\lambda^2 \in \sigma(\lambda_1 T + \lambda_2 Ti)$ олар. Елəчə дə, əкəр $\lambda^2 \in \sigma(\lambda_1 T + \lambda_2 Ti)$ оларса, онда ја $\lambda \in \sigma(T_1)$ вə јахуд да $\lambda \in \sigma(T_2)$ олур:

$$(\lambda E - T_2)\left(\overline{\lambda} E - T_1\right) = \lambda\left(\overline{\lambda} E - T\right). \tag{50}$$

$\overline{\lambda} \in \sigma(T)$ вə буна ујғун мəхсуси вектору x илə ишарə едəк. Онда $\overline{\lambda} x - Tx = 0$, бурадан исə $\overline{\lambda} x - T_1 x = T_2 x$ $T_2 x = 0$ оларса, онда $\lambda \in \sigma(T_1)$ олар.

§ 12. ТАМАМ КƏСИЛМƏЗ АДДИТИВ ОПЕРАТОРЛУ ТƏНЛИКЛƏРИН ТƏДГИГИ

Фəрз едəк ки, X инволјусијалы Банах фəзасында

$$(E - K)\varphi = g \tag{1}$$

тəнлији верилир. Белə ки, K, X-дə верилмиш һəгиги ејничинсли аддитив тамам кəсилмəз оператордур. (1)-дəн $T\varphi = g$ олур.

Белә ки, $T = E - K$ илә ишарә олунур. Бу параграфда биз билдијимиз мә'нада хәтти олмајан операторлар үчүн верилмиш Рисс нәзәријјәсинин нә гајда үзрә тәтбиг едилмәси һаггында мүәјјән бир схемин гыса шәрһини веририк. T верилдикдә бу оператора ујғун комплекс гошма оператору тә'јин едәк, $\overline{T}\varphi = \overline{T\overline{\varphi}}$ кими гәбул едәрәк $\overline{T}$, T-нин комплекс гошмасы адланыр. Ахырынчы бәрабәрликдән φ, $\overline{\varphi}$ илә әвәз олунарса, $\overline{T}\,\overline{\varphi} = \overline{T\varphi}$. Инволјусијалы фәзаларын хассәләри васитәсилә комплекс гошма операторларын бир нечә хассәсини көстәрмәк олар:

$$\overline{\overline{T}} = \overline{T},\ T_0\,\overline{T} = \overline{T}_0 \cdot \overline{T},\ \overline{\alpha T} = \overline{\alpha}\,\overline{T},\ \overline{T + T_0} = \overline{T} + \overline{T}_0.$$

X-дә тә'сир едән һәр бир T аддитив оператору јеканә олараг ашағыдакы кими көстәрилир:

$$T\varphi = T_1\varphi + T_2\overline{\varphi}, \tag{2}$$

белә ки, T_1 вә T_2 ујғун олараг φ вә $\overline{\varphi}$ елементләри үзәриндә тә'сир едән хәтти операторлардыр. T-нин (2) шәклиндәки көстәрилиши она имкан верир ки, тамам кәсилмәз хәтти операторлу тәнликләрин нәзәријјәси, мүәјјән гајда үзрә (1) тәнликләринә тәтбиг олунсун; (2)-нин доғру олмасы ашағыдакы ики мүнасибәтдән алыныр:

$$T_1\varphi = \frac{iT\varphi + Ti\varphi}{2i}, \tag{3}$$

$$T_2\overline{\varphi} = \frac{iT\varphi - Ti\varphi}{2i}. \tag{4}$$

(2)-ни нәзәрә алараг (1) тәнлији

$$T_1\varphi + T_2\overline{\varphi} = g \tag{5}$$

шәкилдә јазылыр. (5)-ин һәр тәрәфиндән гошма алмагла

$$\overline{T}_1\overline{\varphi} + \overline{T}_2\varphi = \overline{g} \tag{6}$$

бәрабәрлијини алырыг. Ашағыдакы кими операторлу тәнликләр системини көтүрәк:

$$\left.\begin{aligned} T_1\varphi_1 + T_2\varphi_2 &= g, \\ \overline{T}_2\varphi_1 + \overline{T}_1\varphi_2 &= \overline{g}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Ашкардыр ки, (5)-ин һәлли варса φ, $\overline{\varphi}$ (7) системинин һәллидир. Инди фәрз едәк ки, φ_1, φ_2 (7) системинин һәллидир. Онда билаваситә јохламаг олар ки, $\frac{\varphi_1 + \overline{\varphi_2}}{2} = \varphi$ (2) тәнлијинин һәлли олар, бу мүлаһизә нөгтеји-нәзәриндән (5) вә (7) еквивалентдирләр.

$$T' = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ \overline{T_2} & \overline{T_1} \end{pmatrix}, \ (\varphi_1, \ \varphi_2) = \varphi' \text{ вә } (g, \overline{g}) = g'$$

илә ишарә етсәк, онда (7) системи

$$T'\varphi' = g' \tag{8}$$

шәклиндә јазылыр. Бурада T' хәтти оператордур. (2)-дән вә (3), (4)-ү нәзәрә алсаг, T-нин тамам кәсилмәз олмасы үчүн T_1 вә T_2-нин тамам кәсилмәз олмалары һәм зәрури вә һәм дә кафи шәртдир. T' оператору да өз компонентләринин һесабына тамам кәсилмәз олар. Бүтүн јухарыдакы шәрһ схеми ону көстәрир ки, аддитив тамам кәсилмәз операторлу (1) тәнлијинин тәдгиги, хәтти тамам кәсилмәз операторлу T'-ин тәнлијинин һәллинә кәтирилир. (1) тәнлији $T_\lambda\varphi = g$ шәклиндә оларса, белә ки, $T_\lambda = E - \lambda T$, онда T' әвәзинә

$T'_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda T_1 & \lambda T_2 \\ \lambda \overline{T_2} & \overline{\lambda}\, \overline{T_1} \end{pmatrix}$ көтүрүлүр. T_λ-нын ифадәсини нәзәрә алсаг,

$$T'_\lambda = E' - \begin{pmatrix} \lambda K_1 & \lambda K_2 \\ \overline{\lambda}\, \overline{K_2} & \overline{\lambda}\, \overline{K_1} \end{pmatrix}$$

кими јазыла биләр: онда

$$E' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \text{ вә } T'\varphi' = \varphi' - K_1\varphi = g'.$$

Әкәр ваһид $K_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda K_1 & \lambda K_2 \\ \overline{\lambda}\, \overline{K_2} & \overline{\lambda}\, \overline{K_1} \end{pmatrix}$ операторунун регулјар әдәдидирсә, онда λ, K-нын регулјар әдәди, нәһајәт, ваһид K_λ-нын мәхсуси әдәдидирсә, онда λ, K-нын мәхсуси әдәди олаҹаг.

Биз (1) тәнлијини бундан габагкы параграфда олдуғу кими билаваситә тәдгиг едә билмәдик. K вә еләҹә дә T оператору ејниҹинсли олмадығындан бу оператора ујғун X_v^0 вә X_v алтфәзаларынын структуруну өјрәнмәк көстәрилән схем үзрә мүмкүн олмазды. Лакин (§ 1)-ин нәтиҹәләрини, јә'ни исбат олунан теоремләрини (8) тәнлији үчүн ифадә едиб, алынан еквивалентлији нәзәрә алсаг, (1) тәнлијинин һәлләрини характеризә едән теоремләри ифадә етмәк оларды

VII ФӘСИЛ

БАНАХ ҸӘБРЛӘРИ

§ 1. БАНАХ ҸӘБРЛӘРИ

Бә'зән верилмиш X чохлуғунда ҹәбри әмәлләр бир вә ики јох, даһа чох верилир. Фәрз едәк ки, X хәтти фәзасында даһа башга бир φ ин’икасы верилир. Белә ки, x вә $y \in X$-ә гаршы һәмин фәзаја дахил олан вә бунларын һасили адланан мүәјјән xy елементи гаршы гојулур ки, бу ин’икасда истәнилән x, y вә z елементләри үчүн ашағыдакы аксиомлар өдәнилир,

1. $(xy)z = x(y, z)$,
2. $x(y + z) = xy + xz$,
3. $(y + z)x = yx + zx$,
4. $\alpha x \cdot \beta y = \alpha\beta \cdot xy$.

Тә’риф 1. *Бу шәртләр дахилиндә X чохлуғу чәбр вә јахуд һәлгә адланыр.*

X-дә мүәјјән тополокија верилмишдирсә, онда X тоположи чәбр адланыр. Елә чәбрләр вар ки, онлар ваһид елементлидир, јә’ни ваһид елемент адланан вә X-ә дахил олан елә e елементи вар ки, истәнилән $x \in X$ үчүн $xe = ex = e$ олур.

Әввәлчә белә һәлгәләрин тәснифатыны вермәклә бир нечә тә’рифи гејд едәк.

Тә’риф 2. *R о заман тоположи һәлгә адланыр ки:*

1. *R—һәлгәдир,*
2. *Локал габарыг хәтти тоположи фәзадыр,*
3. *xy һасили һәр бир аргументә көрә икинчи гејд олдугда кәсилмәз функсијадыр.*

Тә’риф 3. R, о заман нормалашмыш һәлгә адланыр ки:

1. *R һәлгәдир,*
2. *R нормалашмыш фәзадыр,*
3. *$x, y \in R$ ихтијари x, y үчүн $\| xy \| \leqslant \| x \| \, \| y \|$,*
4. *Әкәр e, R-ин ваһиди исә, онда $\| e \| = 1$.*

Гејд. Әкәр әлавә олараг R Банах фәзасы оларса, онда Банах һәлгәси адланыр.

Тә’риф 4. *R һәлгәсиндә әлавә олараг инволјусија верилмишдирсә, онда белә һәлгә симметрик һәлгә адланыр.*

Тә’риф 5. *R о заман нормалашмыш симметрик һәлгә адланыр ки:*

1. *R нормалашмыш һәлгә олсун,*
2. *R симметрик һәлгә олсун,*
3. $\| x \| = \| x^* \|$.

R һәлгәсиндә норма скалјар һасил васитәсилә вериләрсә, онда белә һәлгә унитар һәлгә адланыр. Беләликлә, R Һилберт һәлгәсиндә ашағыдакы шәртләр өдәнилир.

1. *R—Банах симметрик һәлгәдир,*
2. *R—Һилберт фәзасыдыр.*

3. *R-дә верилмиш норма ујғун Һилберт фәзасынын нормасы кими тә'јин олунур.*

4. $x, y, z \in R$ истәнилән елементләри үчүн $(xy, z) = (y, x^*z)$.

5. $x \neq 0$ олдугда $x^*x \neq 0$.

Идеал тә'риф 6. *Фәрз едәк ки, R һәлгәси верилмишдир. J_1, R-ин о заман сол идеалы адланыр ки:*

1. $R \neq J_1$ олсун.

2. J_1, R-ин алтфәзасы олсун,

3. $x \in J_1$, $a \in R$ олан истәнилән елементләр олдугда $ax \in J_1$ олсун,

Еләчә дә, J_2, R-ин о заман сағ идеалы адланыр ки:

1. $J_2 \neq R$ олсун,

2. J_2, R-ин алтфәзасы олсун,

3. $x \in J_2$, $a \in R$ олан истәнилән x вә a үчүн $xa \in J_2$ олсун.

Тә'риф 7. *J, R-ин о заман икитәрәфли идеалы адланыр ки, J, R-ин һәм сол вә һәм сағ идеалы олсун.*

Әкәр R-ин ваһиди варса, бу ваһид, јә'ни e һеч бир сол вә һеч бир сағ идеала дахил олмаз. Мәсәлән: $e \in J_1$ оларса, онда $a \in R$ олан истәнилән елемент исә $ae = a \in J_1$ олмагла $J_1 = R$. Бу исә 1 шәртинә зиддир. Еләчәдә, e-нин J_2-јә дахил олмамасы көстәрилир.

Тә'риф 8. *R-ин сол идеалы J_1 бу һәлгә үчүн о заман сол максимал идеал адланыр ки, R-ин һеч бир сол идеалына дахил олмасын. Һәмчинин R-ин сағ идеалы J_2 бу һәлгә үчүн о заман сағ максимал идеал адланыр ки, R-ин һеч бир сағ идеалына дахил олмасын.*

R-ин икитәрәфли J идеалы о заман максимал адланыр ки, бу идеал R-ин һеч бир икитәрәфли идеалына дахил олмасын.

§ 2. ЧӘБРИН РЕГУЛЈАР ЕЛЕМЕНТЛӘРИ

Фәрз едәк ки, X ваһид елементли (B) чәбридир. Биз бу параграфда белә чәбрин бир нечә мүһүм хассәләрини өјрәнәчәјик. (B) фәзасында бүтүн мәһдуд операторлар (B) чәбри тәшкил етдијиндән һәмин хассәләрин хәтти операторлар нәзәријјәсинин өјрәнилишиндә мүһүм әһәмијјәтә малик олдуғуну көстәрәчәјик. Регулјар елемент, јә'ни тәрс елемент анлајышындан башга сағ тәрс вә сол тәрс елемент анлајышы да вардыр. Верилмиш x үчүн сағ вә сол тәрс елементләр ујғун олараг елә z вә y елементләри адланыр ки, $xz = e$ вә $yx = e$ бәрабәрликләри өдәнилсин. Верилмиш елемент үчүн сағ вә сол елементләр варса, онда $y = x$ олмагла x-ин тәрсинин олмасы алыныр. Доғрудан да, бу $yxz = y = z$ бәрабәрлијиндән ашкардыр. x-ин тәрси олдугда белә елемент регулјар адланыр.

x вә y-ин һәр бири регулјардырса, xy регулјар олмагла

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \tag{1}$$

бәрабәрлији өдәнилир. $xy = t$ олсун, бурадан $yy^{-1} = y^{-1}x^{-1}t = e$ олур. Ејни гајда үзрә $xy = t$-дән $x = ty^{-1}$, бурадан исә $e = ty^{-1}x^{-1}$. Демәли, t-нин регулјар олмасы алынмагла (1) өдәнилир.

Теорем 1.

$$\| x - e \| < 1$$

олан нөгтәләр чохлуғу регулјардыр.

Исбаты. $S = \{x, \| x - e \| < 1\}$ олсун, $x \in S$ көтүрәрәк x^{-1}-ин варлығыны көстәрәк.

$$e + \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n \tag{2}$$

сырасы нормаја көрә јығылыр. Бу сыранын ҹәмини y илә ишарә едәк:

$$y = e + \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n.$$

$y = x^{-1}$ олдуғуну көстәрәк, бунун үчүн

$$xy = [e - (e - x)]\, y = [e - (e - x)] \left[e + \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n \right] =$$

$$= e + \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n + (e - x) \sum_{n=0}^{\infty} (e - x)^n - (e - x) = e,$$

беләликлә, $yx = e$, еләчә дә, $xy = e$ олдуғуну бу гајда үзрә исбат етмәк оларды. Демәли,

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e$$

олмагла теорем исбат олунур.

Теорем 2. Регулјар елементләр чохлуғу ачыгдыр.

Исбаты. x_0-ын регулјар елемент олдуғуну фәрз едәрәк

$$\| x - x_0 \| \leqslant \| x_0^{-1} \|^{-1} \tag{3}$$

бәрабәрсизлији илә тә'јин олунан һәр бир x-ин регулјар олдуғуну көстәрәк. Бунун үчүн $y = xx_0^{-1}$ илә ишарә етсәк,

$$\| y - e \| = \left\| xx_0^{-1} - x_0x_0^{-1} \right\| \leqslant \| x - x_0 \| \cdot \| x_0^{-1} \|$$

бәрабәрсизлијини алырыг. (3)-ә көрә $\| y - e \| < 1$ олдуғундан исбат етдијимизә көрә y регулјар олмагла

$$y = (x x_0^{-1})^{-1} = e + \sum_{n-1}^{\infty} (e - x x^{-1})^n$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунур.

$$x^{-1} = [(x x^{-1}) x_0]^{-1} = x_0^{-1} (x \cdot x_0^{-1})^{-1}$$

олдуғундан исә

$$x^{-1} = x_0^{-1} \left(e + \sum_{n=1}^{\infty} (e - x x_0^{-1})^n \right) \qquad (4)$$

олмагла x-ин регулјар олмасы алыныр. Беләликлә, x_0-ын дахили елемент олдуғуну көстәрдик, она көрә дә регулјар елементләр чохлуғу ачыгдыр. Инди $x^{-1}(x)$ асылылығындан x^{-1}-ин x-дән асылы кәсилмәз олдуғуну көстәрәк. (4) бәрабәрлијиндән

$$x^{-1} - x_0^{-1} = x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} [(x_0 - x) x_0^{-1}]^n$$

мүнасибәтләрини көтүрәк. Бурадан

$$\| x^{-1} - x^{-1}_{0} \| \leqslant \| x^{-1} \| \cdot \| (x_0 - x) x_0^{-1} \| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \| (x_0 - x) x^{-1} \|^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| (x - x_0) x_0^{-1} \|^n = [1 - \| (x - x_0 \| \, \| x_0^{-1} \|]^{-1}. \qquad (5)$$

(5)-дән

$$\| x^{-1} - x^{-1}_{0} \| \leqslant \| x_0^{-1} \|^2 \| x - x_0 \| \, [1 - \| x - x_0 \| \, \| x_0^{-1} \|]^{-1}.$$

Бурадан $x \to x_0$ оларса, һәмчинин $x^{-1} \to x_0^{-1}$. Беләликлә, $x^{-1}(x)$-ин кәсилмәз олдуғу алыныр. $a \in X$ олдуғуну фәрз едәрәк $a_\lambda = \lambda e - a$ ишарә едәк. Бурада, λ үмумијјәтлә, комплекс әдәддир, әкәр a_λ регулјар елемент исә, онда $a_\lambda^{-1} = R(\lambda, a)$-нын резолвенти вә ујғун λ әдәди a-нын регулјар гијмәти адланыр. Белә λ-лар чохлуғу, $\rho(a)$ илә ишарә олунараг a-нын резолвент чохлуғу олур.

§ 3. РЕЗОЛВЕНТИН БИРИНЧИ ВӘ ИКИНЧИ ТӘНЛИЈИ

Теорем 3. Әкәр $\lambda, \mu \in \rho(a)$ исә, онда

$$R(\lambda, a) - R(\mu, a) = (\mu - \lambda) R(\lambda, a) R(\mu, a). \qquad (1)$$

Исбаты. $(\mu e - a) R(\mu, a) = e$ олдуғундан

$$R(\lambda, a) = R(\lambda, a)(\mu e - a) R(\mu, a)$$

өдәнилир, бурадан исә

$$R(\lambda, a) = R(\lambda, a)\,[\mu e - \lambda e + \lambda e - a) R(\mu, a) =$$
$$= R(\lambda, a)\,[(\mu - \lambda) e + (\lambda e - a)]\, R(\mu, a) =$$
$$= R(\lambda, a)(\mu - \lambda) R(\mu, a) + R(\lambda, a)(\lambda e - a) R(\mu, a).$$

Демәли,

$$R(\lambda. a) = R(\lambda, a)(\mu - \lambda) R(\mu, a) + R(\mu, a).$$

Бахдығымыз ҹәбр хәтти олдуғундан бурадан (1)-ин өдәнилдији алыныр.

(1) резолвентин биринҹи тәнлији вә јахуд да Һилберт ејнилији адланыр.

Теорем 4. Әкәр $\lambda \in \rho(x)$ вә $\lambda \in \rho(y)$ исә, онда

$$R(\lambda, x) - R(\lambda, y) = R(\lambda, x)(x - y) R(\lambda, y) \qquad (2)$$

бәрабәрлији өдәнилир.

Исбаты. $R(\lambda, x)(\lambda e - y) R(\lambda, y) = R(\lambda, x)$ бәрабәрлијини ашағыдакы кими чевирәк:

$$R(\lambda, x) = R(\lambda, x)(\lambda e - y) R(\lambda, y) =$$
$$= R(\lambda, x)(\lambda e - x + x - y) R(\lambda, y) =$$
$$= R(\lambda, y) + R(\lambda, x)(x - y) R(\lambda, y).$$

Беләликлә, (2)-нин өдәнилдији алыныр. (7) резолвентин икинҹи тәнлији адланыр.

§ 4. МҮСБӘТ ФУНКСИОНАЛЛАР

Тә'риф 9. *Фәрз едәк ки, симметрик R Банах ҹәбриндә хәтти $f(x)$ функсионалы верилмишдир. Әкәр $f(x)$, R-ә дахил олан истәнилән x ермит елементиндә һәгиги оларса, онда белә функсионал һәгиги функсионал адланыр.*

R-дә верилмиш һәр бир хәтти $g(x)$ функсионалы

$$g(x) = f_1(x) + i f_2(x) \qquad (1)$$

шәклиндә көстәрилир. Бурада

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[g(x) + \overline{g(x^*)}\right], \qquad (2)$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2i}\left[g(x) - \overline{g(x^*)}\right]. \qquad (3)$$

(2) вә (3)-дән көрүндүјү кими, $f_1(x)$ вә $f_2(x)$ һәгиги функсионаллардыр. Әкәр $h(x)$ һәгиги хәтти функсионалдырса, онда $h(x) = \overline{h(x^*)}$; доғрудан да,

$$h(x^*) = h(x_1 - i x_2) = h(x_1) - i h(x_2) = \overline{h(x_1) + i h(x_2)} = \overline{h(x)}$$

Тә'риф 10. *Хәтти $f(x)$ функсионалы о заман мүсбәт адланыр ки, истәнилән $x \in R$ елементи үчүн $f(x\ x^*) \geqslant 0$ олсун.*

Теорем 5. Әҝәр $f(x)$, R-дә верилмиш мүсбәт функсионал исә, онда истәнилән y^*, $x \in R$ елементләри үчүн

$$f(y^* x) = f(\overline{x^* y}) \tag{4}$$

бәрабәрлији вә

$$| f(y^* x) |^2 \leqslant f(y^* y)\ f(x^* x) \tag{5}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Исбаты. $z = \lambda x + \mu y$ елементини көтүрәк. Шәртә ҝөрә $f(x)$ мүсбәт олдуғундан

$$f(zz^*) \geqslant 0. \tag{6}$$

$$z^* z = \left(\overline{\lambda} x^* + \overline{\mu} y^*\right)(\lambda x + \mu y) = \| \lambda \|^2 x^* x +$$
$$+ \overline{\lambda} \mu x^* y + \overline{\mu} \lambda y^* x + | \mu |^2 y^* y \tag{7}$$

олдуғундан

$$f(z^* z) = | \lambda |^2 f(x^* x) + \overline{\lambda} \mu f(x^* y) +$$
$$+ \overline{\mu} \lambda f(y^* x) + | \mu |^2 f(y^* y). \tag{8}$$

Бурада $\lambda = \mu = 1$ оларса,

$$f((x + y)^* (x + y)) = f(x^* x) + f(x^* y) +$$
$$+ f(y^* x) + f(y^* y) \geqslant 0. \tag{9}$$

Сонра $\lambda = 1$ вә $\mu = i$ оларса, ашағыдакы бәрабәрлик алынар:

$$f((x + iy)^* (x + iy)) = f(x^* x) +$$
$$+ if(x^* y) - if(y^* x) + f(y^* y) \geqslant 0, \tag{10}$$

(9) вә (10)-дан

$$2f(x^* x) + 2f(y^* y) + (1 + i) f(x^* y) + (1 - i) f(y^* x) \geqslant 0. \tag{11}$$

Бурада $(1 + i) f(x^* y) + (1 - i) f(y^* x)$ һәгиги әдәд олмалыдыр. Она ҝөрә дә $f(y^* x) = \overline{f(y^* x)}$ олмалыдыр. Беләликлә, (4)-үн өдәнилдији алыныр. (8)-ин сол тәрәфи λ вә μ-нүн истәнилән гијмәтләриндә мәнфи олмамасы үчүн (5)-ин өдәнилмәси зәруридир. (5), Коши—Бүнјаковски бәрабәрсизлији адланыр.

§ 5. СИММЕТРИК БАНАХ ҸӘБРЛӘРИНДӘ МҮСБӘТ ФУНКСИОНАЛЛАР

Теорем 6. Ваһид елементли симметрик R Банах ҹәбриндә һәр бир мүсбәт хәтти $f(x)$ функсионалы мәһдуд олмагла

$$|f(x)| \leqslant f(e)\|x\| \tag{1}$$

бәрабәрсизлијини өдәјир.

Исбаты.

$$e-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2-\cdots \tag{2}$$

сырасыны көтүрәк. Белә ки, x ермит елемент олмагла $\|x\| \leqslant 1\cdot$ R там олдуғундан бу сыра мүтләг, јә'ни нормача јығыландыр· (2)-нин чәмини y илә ишарә едәк:

$$y=e-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2-\cdots \tag{3}$$

x-ин ермит елемент олмасына вә инволјусијанын кәсилмәзлијинә әсасән алырыг ки, y ермит елементдир. Билаваситә јохламаг олар ки, $y^*y=y^2=e-x$. Она көрә

$$f(e-x)=f(yy^*) \geqslant 0.$$

Беләликлә, бурадан һәр бир $\|x\|<1$ шәртини өдәјән ермит елемент үчүн

$$f(x) \leqslant f(e). \tag{4}$$

Инди бу бәрабәрсизлијин R-дән олан истәнилән ермит x елементи үчүн өдәнилдијини көстәрәк. Бурада x әвәзинә $-x$ јазмагла $-f(x)<f(e)$ вә беләликлә

$$|f(x)|<f(e). \tag{5}$$

Ашкардыр ки, (1) $x=0$ үчүн өдәнилир. Она көрә дә $x\neq 0$ олдуғуну гәбул едәрәк $x_1=\frac{1}{\|x\|}x$ елементини көтүрәк. Бурада $x_1^*=x_1$ олмагла $\|x_1\|=1$ олур. Она көрә дә (5) бәрабәрсизлијиндән

$$|f(x_1)|<f(e) \tag{6}$$

вә x_1-ин ифадәсинә көрә (1)-ин өдәнилдији алыныр. Демәли, биз истәнилән ермит елемент үчүн (1)-ин өдәнилдијини көстәрдик. Инди исә x-ин R-дән ихтијари елемент олдуғуну гәбул едәк. $z=xx^*$ ермит елемент олдуғундан (1)-дән

$$|f(z)|<f(e)\|z\|. \tag{7}$$

$\|z\|=\|x^*x\| \leqslant \|x^{z}\|\,\|x\|=\|x\|^2$ олдуғуна көрә

$$f(x^*x) \leqslant f(e)\|x\|^2. \tag{8}$$

Көстәрмәк олар ки, $|f(x)|$ үчүн

$$|f(x)|^2 \leqslant f(e)f(x^*x) \tag{9}$$

өдәнилир. (8)-дән

$$|f(x)|^2 \leqslant |f(e)\|^2\,\|x\|^2$$

олмагла (1), истәнилән x үчүн өдәнилдијиндән, $f(x)$-ин мәһдуд олдуғу исбат олунур. (1)-дән истифадә едәрәк бир нечә нәтиҹәнин доғрулуғуну көстәрәк.

Нәтиҹә 1. Ваһид елементли симметрик Банах ҹәбриндә $f(x)$ мүсбәт функсионалынын нормасы $f(e)$-јә бәрабәр олар. Мә'лумдур ки, $\|f\|$ ашағыдакы кими тә'јин олунур:

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| . \tag{10}$$

$\|x\| = 1$ олдуғуну нәзәрә алараг (1)-дән

$$\sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leqslant f(e) , \tag{11}$$

онда $\|f\| \leqslant f(e)$. (10)-а көрә $x = e$ олдугда $\|f\| = f(e)$.

Нәтиҹә 2. Ваһид елементли симметрик R Банах ҹәбриндә мүсбәт f функсионалы үчүн

$$f(x^*x) \leqslant f(e) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(x^*x)^n\|} \tag{12}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. Бунун үчүн

$$|f(x)|^2 \leqslant f(e) f(x^*x)$$

бәрабәрсизлијиндән ашағыдакы бәрабәрсизлији јазаг:

$$|f(x)| \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}} [f(x^*x)]^{\frac{1}{2}} . \tag{13}$$

$z = xx^*$ оларса, $z^*z = (xx^*)^2$ бәрабәрлијиндән

$$|f(z)| \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}} [f(z^*z)]^{\frac{1}{2}} . \tag{14}$$

Бурадан

$$|f(xx^*)| \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}} [f((x^*x)^2]^{\frac{1}{2}} . \tag{15}$$

(13) вә (15)-ә көрә

$$|f(x)| \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} [f((x^*x)^2)]^{\frac{1}{4}} . \tag{16}$$

Бу гајда үзрә (13) бәрабәрсизлијини ардыҹыл олараг тәтбиг етсәк, онда

$$|f(x)| \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}} \{f((x^*x)^{2^{n-1}})]^{\frac{1}{2^n}} , \tag{17}$$

$$\left|f\left((x^*x)^{2^{n-1}}\right)\right| \leqslant \|f\| \left\|(x^*x)^{2^{n-1}}\right\| . \tag{18}$$

$\|f\| = f(e)$ олдуғундан, бурадан

$$\left|f(x^*x)^{2^{n-1}}\right| \leqslant \|f(e)\| \left\|(x^*x)^{2^{n-1}}\right\| . \tag{19}$$

(17) вә (19)-дан

$$\| f(x) \| \leqslant f(e) \left\| (x^*x)^{2^{n-1}} \right\|^{\frac{1}{2^n}}, \tag{20}$$

бурадан исә x әвәзинә x^*x јазыб лимит алсаг, (12)-нин өдәнилдији исбат олунур. Әкәр x нормал елемент оларса, јә'ни $x^*x = xx^*$, онда (12)-дән

$$| f(x) | \leqslant f(e) r(x), \tag{21}$$

бурада $r(x)$, x-ин спектрал радиусудур, јә'ни

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\| x^n \|}.$$

Доғрудан да x нормал елемент оларса, онда $(x^*x)^n = (x^*)^n \cdot x^n$ Она көрә дә бурадан

$$\| (x^*x)^n \| \leqslant \left\| x^{*n} \right\| \ \| x^n \| \leqslant \| x^n \|^2$$

(20)-дән исә (21) өдәнилир.

§ 6. РЕЗОЛВЕНТИН БИРИНЧИ ТӘНЛИЈИ ҺӘЛЛӘРИНИН БӘ'ЗИ ХАССӘЛӘРИ

Теорем 7. Әкәр $R(\lambda)$ гијмәтләри мүәјјән Банах чәбринә дахил олмагла мүстәвинин мүәјјән D областында резолвентин биринчи тәнлијинин һәлли исә, онда $R(\lambda)$ локал аналитик функсијадыр.

Исбаты. Резолвентин биринчи тәнлијини көтүрәк:

$$R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu). \tag{1}$$

$\mu = \lambda_0 \in D$ гејд едәрәк (1)-дән ашағыдакы бәрабәрлији јазаг:

$$R(\lambda) [e - (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0)] = R(\lambda_0). \tag{2}$$

Әкәр $| \lambda - \lambda_0 | \ \| R(\lambda_0) \| < 1$ фәрз етсәк, онда көстәрдијимизә көрә $e - (\lambda_0 - \lambda) R(\lambda_0)$ елементинин тәрси вар вә

$$y = e + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R^n(\lambda_0) \tag{3}$$

бәрабәрлији васитәсилә тә'јин олунур. Она көрә дә (2)-дән

$$R(\lambda) = R(\lambda_0) \left[e + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R^n(\lambda_0) \right] \tag{4}$$

олдуғу алыныр.

(4) көстәрир ки, λ_0, $R(\lambda)$-нын регулјар гијмәти олдугда һәмин нөгтәнин $| \lambda - \lambda_0 | < \| R(\lambda_0) \|^{-1}$ әтрафында $R(\lambda)$ *һоломорф вә D-дә локал һоломорф функсијадыр.* Фәрз едәк ки, (λ) мүстәвисинин D_1 чохлуғу үзрә гијмәти мүәјјән Банах чәбринә дахил олан биргијмәтли $R(\lambda)$ функсијасы

$$R(\lambda)-R(\lambda_0)=-(\lambda-\lambda_0)R(\lambda)R(\lambda_0)=-(\lambda-\lambda_0)R(\lambda_0)R(\lambda) \qquad (5)$$

бәрабәрлијини өдәјир. λ_0—мүәјјән гејд олунмуш гијмәтдир.

Теорем 8. $R(\lambda)$-нын һәмин ҹәбрдән мүәјјән бир елемент үчүн резолвент олмасы, $R(\lambda_0)$-ын регулјар олмасы үчүн зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, $R(\lambda)$ мүәјјән бир елементин резолвентидир, онда нәинки λ әдәди, һәтта һәмин елементин резолвент чохлуғуна дахил олан истәнилән λ нөгтәсиндә $R(\lambda)$ регулјар олмагла (6) бәрабәрлијини өдәјир. Бунунла да шәртин зәрурилији исбат олунур.

Шәртин кафилији. Фәрз едәк ки, $R(\lambda_0)$ регулјардыр.

$$x_0=\lambda_0 e-[R(\lambda_0)]^{-1} \qquad (6)$$

илә ишарә едәк вә көстәрәк ки, $R(\lambda)$ бу елементин резолвентидир. (6)-дан $\lambda e-x_0=(\lambda-\lambda_0)e+[R(\lambda_0)]^{-1}$ олур. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфинә $R(\lambda)$ васитәсилә тә'сир едәк, онда

$$(\lambda e-x_0)R(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)R(\lambda)+[R(\lambda_0)]^{-1}R(\lambda). \qquad (7)$$

(5) бәрабәрлијиндән

$$R(\lambda)-R(\lambda_0)=-(\lambda-\lambda_0)R(\lambda)R(\lambda_0)$$

бәрабәрлијини көтүрмәклә бурадан $R(\lambda)R(\lambda_0)^{-1}=e-(\lambda-\lambda_0)R(\lambda)$ олдуғуну алырыг. Бу бәрабәрлији нәзәрә алсаг, (7)-дән $(\lambda e-x_0)R(\lambda)=e$ олмагла $R(\lambda)$, $\lambda e-x_0$ елементинин сағ тәрси олдуғуну көстәрир. Ејни гајда үзрә $R(\lambda)$-нын сол тәрс елемент олмасы көстәрилмәклә $R(\lambda)$, x_0-ын резолвенти олур. Резолвентин биринҹи тәнлијини нәзәрә алсаг, x_0 елементи λ-дан асылы дејилдир. Бунунла кафи шәрт вә беләликлә теорем исбат олунур.

Теорем 9. Фәрз едәк ки, (B) ҹәбри верилмишдир. Исбат едәк ки, резолвентин биринҹи тәнлијинин $\lambda=\infty$ әтрафында олан мәһдуд һәлли

$$R(\lambda)=x_1+x_2R(\lambda, x_3) \qquad (8)$$

шәклиндә көстәрилир. x_1 тәртиби ики олан нилпотент елемент, јә'ни $x_1^2=0$, x_2 идемпотент елементдир, јә'ни $x_2^2=x_2$; бунлардан әлавә,

$$x_1x_2=x_2x_1=0,$$

$$x_2x_3=x_3x_2=x_3$$

бәрабәрликләри өдәнилир. Белә ки, $R(\lambda, x_3)$, x_3 елементинин резолвентидир.

Исбаты. Фәрз едәк ки, $R(\lambda)$ резолвентин биринҹи тәнлијинин һәллидир. Јә'ни

$$R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu) R(\lambda) R(\mu). \tag{9}$$

$$R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda^n} \tag{10}$$

ифадәсини (9)-да јеринә јазараг, јеканәлик теореминә көрә λ-нын ујғун әмсалларыны бири-биринә бәрабәр етсәк, (9)-а дахил олан C_n елементләри арасында мүәјјән мүнасибәтләр алынар. Бу мүнасибәтләри көстәрәк. Онун үчүн

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda^n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\mu^n} = (\mu - \lambda) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda^n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\mu^n} \right) \tag{11}$$

бәрабәрлијини көтүрәк. Гејд едәк ки, (11)-ин сағ тәрәфинә јалныз $\frac{1}{\mu^k}$ вә һәмчинин јалныз $\frac{1}{\lambda^k}$ шәклиндә олан һәдләр дахил олмадығындан истәнилән k үчүн $C_0 C_k = C_k C_0 = \theta$ вә еләчә дә $C_0^2 = \theta$ вә $C_1^2 = C_1$. Бунлардан әлавә n вә k гијмәтләри үчүн:

$$C_n = C_{n-k} C_{k+1}, \qquad k \geqslant 1 \tag{12}$$

бәрабәрликләри алыныр. (12)-дән

$$C_n = C_{n-1} \cdot C_2, \; C_{n-1} = C_{n-2} C_2.$$

Она көрә

$$C_n = C_{n-2} (C_2)^2. \tag{13}$$

Беләликлә, ардычыл бәрабәрликләри мүгајисә етмәклә $n > 1$ олдугда $C_n = (C_2)^{n-1}$ бәрабәрлијини алырыг.

$$C_0 = x_1, \; C_1 = x_2, \; C_2 = x_3$$

ишарә едәк. $x_1^2 = 0$ вә $x_1 x_2 = x_2 x_1 = 0$ олмасы ашкардыр. Дикәр тәрәфдән (15)-дән $C_2 = C_2 C_1 = C_1 C_2$ олдуғундан

$$x_3 = x_3 x_2 = x_2 x_3 \tag{14}$$

өдәнилир. $C_0 = x_1$, $C_{-1} = x_2$ вә (13)-ү нәзәрә алараг (9)-дан

$$R(\lambda) = x_1 + \frac{x_2}{\lambda} + \frac{x_3}{\lambda^2} + \frac{x_3^2}{\lambda^3} + \cdots \tag{15}$$

бәрабәрлијини алырыг. (14)-ү нәзәрә алараг x_3 елементини ашағыдакы кими чевирәк:

$$x_3 = x_2 x_3.$$

Бу гајда үзрә истәнилән n үчүн

$$x_3^n = x_2 x_3^{n-1} \tag{16}$$

олдуғуну алырыг. x^j-нын $(j = \overline{1, 3})$ јухарыда көстәрдијимиз хассәләрини нәзәрә алсаг:

$$R(\lambda) = x_1 + x_2\left(\frac{e}{\lambda} + \frac{x_3}{\lambda^2} + \frac{x_3^2}{\lambda^3} + \cdots\right)$$

вә јахуд да

$$R(\lambda,\ x_3) = e\lambda^{-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_3^{n}}{\lambda^{n+1}} \tag{17}$$

олмагла (11)-ин өдәнилдији исбат олунур. Бурада $R(\lambda, x_3)$, x_3 елементинин $\lambda = \infty$ нөгтәси әтрафында резолвенти олмасы билаваситә ашкардыр. Биз бу исбатда әмсалларын бир-бирилә јерләрини дәјишмәсиндән истифадә етмишдик, белә бир хассә резолвентин биринчи тәнлијиндән ашкардыр.

Теорем 10. Әкәр $R(\lambda)$, резолвентин биринчи тәнлијинин $g = \{R_1 < |\lambda| < R_2\}$ областы дахилиндә һәлли исә, $R_2 > 0$, $R_1 \geqslant 0$, онда

$$R(\lambda) = R^{+}(\lambda) + R^{-}(\lambda) \tag{18}$$

ајрылышы доғрудур.

$$R^{+}(\lambda)\, R^{-}(\lambda) = R^{-}(\lambda)\, R^{+}(\lambda) = 0 \tag{19}$$

олмагла, $R^{+}(\lambda)$ вә $R^{-}(\lambda)$ резолвентин биринчи тәнлијинин һәлләри олур.

Биз бу теоремин исбатыны вермәклә $R^{+}(\lambda)$ вә $R^{-}(\lambda)$-нын исбат заманы бир нечә мүһүм хассәләрини көстәрәчәјик.

Исбаты. $R(\lambda)$-нын g дахилиндә Лоран сырасына ајрылышыны јазаг:

$$R(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \lambda^n. \tag{20}$$

Еләчә дә, бура дахил олан әмсалларын јерләринин дәјишмәси резолвентин биринчи тәнлијиндән ашкардыр.

(20) ифадәсини резолвентин биринчи тәнлијиндә, јә'ни

$$R(\lambda) - R(\mu) = -(\lambda - \mu)\, R(\lambda)\, R(\mu) \tag{21}$$

бәрабәрлијиндә јеринә јазаг, бурадан ашағыдакы бәрабәрлији аларыг:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} C_n \frac{(\lambda^n - \mu^n)}{\lambda - \mu} = \sum_{n,m=-\infty}^{+\infty} C_n C_m \lambda^n \mu^m. \tag{22}$$

Јеканәлик теоремини нәзәрә алараг λ, μ параметрләринин ејни гүввәтләринә көрә C_n-ләри мүгајисә едәк; бу мүгајисәни етмәдән габаг ашағыдакы мүһазирәләри гејд едәк:

$n \geqslant 1$ олдугда C_n-нин әмсалы $(\lambda^{n-1}+\lambda^{n-2}\mu+\cdots+\mu^{n-1})$, $n=0$ оланда сыфыр вә нәһајәт $n<0$ олдугда исә $(\lambda^{n}\mu^{-1}+\lambda^{n+1}\mu^{-2}+\cdots+\lambda^{-1}\mu^{n})$. Она көрә (22)-нин сағ тәрәфиндә нә мәнфи үстлү λ вә нә дә мәнфи үстлү μ дахил дејилдир, һәмчинин мүхтәлиф ишарәли k вә m-ләрә ујғун $\lambda^{k}\mu^{k}$ кими һәдләр иштирак етмәмәлидирләр. Бу о дејән сөздүр ки, истәнилән $k \geqslant 0$ вә $m<-1$ үчүн

$$C_m C_k = C_k C_m = 0. \tag{23}$$

(20)-ни ашағыдакы кими јазараг:

$$R(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\lambda^n+\sum_{n=-1}^{-\infty} C_n\lambda^n. \tag{24}$$

$$R^{+}(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n\lambda^n, \tag{25}$$

вә

$$R^{-}(\lambda)=\sum_{n=-1}^{-\infty} C_n\lambda^n \tag{26}$$

илә ишарә едәк. Онда

$$R(\lambda)=R^{+}(\lambda)+R^{-}(\lambda). \tag{27}$$

(23)-дән истифадә едәрәк $R^{+}(\lambda)$ вә $R^{-}(\lambda)$-нын резолвентин биринчи тәнлијини өдәдикләрини көстәрәк. Онда (27)-јә көрә (21)-дән

$$R^{+}(\lambda)+R^{-}(\lambda)-R^{+}(\mu)-R^{-}(\mu)=(\mu-\lambda)\left[R^{+}(\lambda)+R^{-}(\lambda)\right]\left[R^{+}(\mu)+R^{-}(\mu)\right]$$

бәрабәрлијини алырыг. (23)-ә көрә $R^{+}(\mu)R^{-}(\lambda)=R^{+}(\lambda)R^{-}(\mu)=0$ олдуғуну нәзәрә алсаг, бурадан:

$$\left[R^{+}(\lambda)-R^{+}(\mu)\right]+\left[R^{-}(\lambda)-R^{-}(\mu)\right]=(\mu-\lambda)R^{+}(\lambda)R^{+}(\mu)+(\mu-\lambda)R^{-}(\lambda)R^{-}(\mu).$$

Бу бәрабәрликдә сағ вә сол тәрәфә дахил олан μ вә λ мүсбәт вә мәнфи үстлү ифадәләри мүгајисә етсәк,

$$R^{+}(\lambda)-R^{+}(\mu)=(\mu-\lambda)R^{+}(\lambda)R^{+}(\mu), \tag{28}$$

$$R^{-}(\lambda)-R^{-}(\mu)=(\mu-\lambda)R^{-}(\lambda)R^{-}(\mu) \tag{29}$$

бәрабәрликләрини алмагла $R^{+}(\lambda)$ вә $R^{-}(\lambda)$, һәр биринин резолвентин биринчи тәнлијинин өдәдијини көстәрмиш олуруг. Инди теоремин јухарыда гејд олунмуш, $R^{+}(\lambda)$, $R^{-}(\lambda)$ илә әлагәдар олан бә'зи хассәләрини көстәрәк.

$R^-(\lambda)$, $\lambda = \infty$ әтрафында һоломорф олмагла $R^-(\infty) = 0$ вә (29) өдәнилдијиндән исбат етдијимиз теоремә көрә

$$R^-(\lambda) = x_1 + x_2 R(\lambda, x_2)$$

шәклиндә көстәрилир.

$R^-(\infty) = 0$ олдуғундан $x_1 = 0$ олур. Онда $R^-(\lambda)$-нын ифадәсиндән $R^+(\lambda) = x_2 R(\lambda, x_3)$ көстәрилиши алыныр. Белә ки, $x_3 = x_3 x_2 = x_2 x_3$. (25) вә (26) сыралары ујғун олараг $|\lambda| < R_2$ вә $|\lambda| > R_1$ областларында јығылыр. $R^+(\lambda)$, $\lambda = 0$ әтрафында һоломорф олдуғундан һәмчинин $R^+(\lambda)$ үчүн (28)-дән истифадә едәрәк

$$R^+(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\lambda)^n C_0^{n+1} \tag{30}$$

доғрулуғуну көстәрмәк олар.

Доғрудан да $R^+(\lambda)$, (25) ифадәсинә көрә (28)-дән

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n\left(\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2}\mu + \cdots + \mu^{n-1}\right) = -\sum_{n,m=0}^{\infty} C_n C_m \lambda^n \mu^n \tag{31}$$

бәрабәрлијини алырыг. Бурадан

$$C_1 = -C_0^2,\ C_2 = -C_1 C_0 = C_0^3.$$

Истәнилән n үчүн $C_n = (-1)^n C_0^{n+1}$ олмагла (30)-ун доғрулуғуну алырыг. Инди фәрз едәк ки, хүсуси һалда $R(\lambda)$ мүәјјән бир x елементинин резолвентидир.

$$x = x_2 x + (e - x_2) x \tag{32}$$

кими көстәрәк.

$$\left.\begin{aligned} x x_2 &= x^-, \\ (e - x_2) x &= x^+ \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

кими ишарә етсәк, онда

$$x = x^+ + x^-. \tag{34}$$

Бурада $x x_2 = x_2 x$; бу, C_n әмсалларынын гаршылыглы јердәјишмәсиндән ајдындыр. Көстәрәк ки, $R^+(\lambda)$, x^+-ын вә $R^-(\lambda)$ исә x^- елементләринин резолвентләридир. Јухарыда гејд етмишдик ки, x_2, јә'ни C_{-1} истәнилән $C_j\left(j = \overline{0, \infty}\right)$ елементинә ортогонал олдуғундан вә бу әмсалларла јерини дәјишдијиндән

$$R^-(\lambda) = x_2 R(\lambda) = R(\lambda) x_2. \tag{35}$$

Бу бәрабәрлик вә еләчә дә

$$R^+(\lambda) = (e - x_2) R(\lambda) = R(\lambda)(e - x_2) \tag{36}$$

өдәнилир, Шәртә көрә $R(\lambda)$, x-ин резолвенти олдуғундан

$$(\lambda e - x) R(\lambda) = R(\lambda)(\lambda e - x) = e \tag{37}$$

өдәнилир. (37)-нин һәр ики тәрәфин ујғун оларағ x_2 вә $(e - x_2)$-јә вурсаг ашағыдакы ејниликләр алынар:

$$x_2(\lambda e - x) R(\lambda) = x_2 R(\lambda)(\lambda e - x) = x_2, \tag{38}$$

$$(e - x_2)(\lambda e - x) R(\lambda) = (e - x_2) R(\lambda)(\lambda e - x) = e - x_2. \tag{39}$$

$C_0 = a_0$. Она көрә дә, $R^{-}(\lambda) a_0 = a_0 R^{-}(\lambda) = 0$, $R^{+} x^{-} = R^{+} x_2 x = (R^{+} x_2) x$ вә $R^{+} x_2 = 0$ олдугларыны нәзәрә алсаг: $R^{+} x^{-} = 0$. Еләчә дә, $x x_2 R^{+}(\lambda) = x x_2 R^{+}(\lambda) = x R^{+}(\lambda) x_2 = 0$,

$$x^{-} R^{+}(\lambda) = 0.$$

Беләликлә,

$$x^{-} R^{+}(\lambda) = R^{+}(\lambda) x^{-} = 0 \tag{40}$$

бәрабәрлији өдәнилир. (40)-ы нәзәрә алсаг, (38) вә (39)-дан ујғун оларағ:

$$(x x_2 - x_2 x) R^{-}(\lambda) = R^{-}(\lambda)(x x_2 - x_2 x) = x_2 \tag{41}$$

вә

$$[(e - x_2)\lambda - (e - x_2) x] R^{+}(\lambda) = R^{+}(\lambda)[(e - x_2)\lambda - (e - x_2) x] = e - x_2, \tag{42}$$

бәрабәрликләрини алырыг.

$x_2 x x_2$ вә $(e - x_2) x (e - x_2)$ елементләр чохлугларыны ујғун оларағ X_{x_2} вә X_{e-x_2} илә ишарә едәк. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, X_{x_2} вә X_{e-x_2}, X-ин алтчәбрләридир.

Мәсәлән, $y_1, y_2 \in X_{x_2}$ исә, онда $y_1 = x_2 y' x_2$ вә $y_2 = x_2 y'' x_2$ олмагла $x_2^2 = x_2$-ни нәзәрә алсаг:

$$y_1 y_2 = x_2 y' x_2 x_2 y'' x_2 = x_2 y' x_2^2 y'' x_2 = x_2 y' x_2 y'' x_2$$

бәрабәрлијиндән $y_1 y_2 = x_2 z x_2$ олар. Белә ки, $z = y' x_2 x''$ олмагла $y_1 y_2 \in X_{x_2}$. Чәбрин бүтүн аксиомларынын X_{x_2} алтчәбриндә өдәнилмәсини билаваситә јохламаг олар. Еіни заманда бу гејдләр X_{e-x_2} алтчәбринә дә аиддир. $x_2^2 = x_2$ олдуғундан, x_2, X_{x_2}-нин ваһид елементи вә $(e - x_2)^2 = (e - x_2)$ олдуғундан исә $e - x_2$, X_{e-x_2}-нин ваһид елементи олур. (41) вә (42) бәрабәрликләри көстәрир ки, $R^{-}(\lambda)$ вә $R^{+}(\lambda)$ ујғун оларағ X_{x_2} вә X_{e-x_2} алт чәбринә дахил олан $x_2 x = x^{-}$ вә $x^{+} = (e - x_2) x$ елементләринин ујғун резолвентләридир. Нәтичәдә x-ин резолвенти фәрз етдијимиз $R(\lambda)$-нын ујғун компонентинә, јә'ни $R^{-}(\lambda)$ дахил олан $R(\lambda, x_3)$ үчүн резолвент олдуғуну нәзәрә аларағ

$$(\lambda e - x_3)\ R(\lambda,x_3) = R(\lambda,x_3)(\lambda e - x_3). = e \qquad (43)$$

бәрабәрлијини јазаг. (43)-үн һәр тәрәфини x_2^2 -на вурмагла

$$x_2^2\ (\lambda e - x_3)R(\lambda, x_3) = x_2^2\ R(\lambda,x_3)(\lambda e - x_3) = x_2^2 \qquad (44)$$

бәрабәрлијини алырыг.

$$x_2x_3 = x_3x_2 = x_2 \qquad (45)$$

олдуғундан $R(\lambda,x_3)$ вә x_2 јерләрини дәјишәр. $x_2^2 = x_2$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$x_2^2 R(\lambda,x_3) = R\ (\lambda,x_3)\ x_2^2 \qquad (46)$$

бәрабәрлијини вә еләҹә дә

$$(\lambda x_2 - x_3)\,x_2\,R\,(\lambda,\,x_3) = x_2R\,(\lambda,\ x_3)\,(\lambda x_2 - x_3)_2. \qquad (47)$$

$R^-(\lambda) = x_2R\,(\lambda,\,x_3)$ олдуғундан, бурадан

$$(\lambda x_2 - x_3)\,R^-(\lambda) = R^-(\lambda)\,(\lambda x_2 - x_3) = x. \qquad (48)$$

(41) вә (48)-и нәзәрә алараг һәм x_3 вә һәм дә x_2x-ин X_2 алтҹәбриндә резолвентләринин ејни олдугларыны алырыг, она көрә дә $x_3 = x_2x$. $x_3 = x^-$ олдуғундан исә $x^- = x_2x$

$$x^+ = x - x_2x = (e - x_2)x, \qquad (49)$$

(42)-дән $x = 0$ олдугда

$$-(e - x_2)\,xR^+(0) = e - x_2 \qquad (50)$$

олдуғу алыныр. Һәм $R^+(0) = C_0$ вә (50)-јә көрә $x^+=(e-x_2)x$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$-C_0x^+ = e - x_2 \qquad (51)$$

мүнасибәтләрини алырыг. Бу бәрабәрликдән X_{e-x_2} алтфәзасында C_0, x^+ елементи үчүн сол тәрс олдуғуну көстәрир.

Биз $X-(B)$ ҹәбриндә верилмиш резолвентин мүәјјән хассәләрини өјрәнмәклә резолвентин биринҹи тәнлијинин һәлләри һаггында бир нечә ваҹиб теоремләринин исбатларыны вердик. Гејд етдијимиз кими, бу саһәдә алынан нәтиҹәләр мәһдуд хәтти операторлар ҹәбринә тәтбиг олунмагла, мәһдуд операторларын резолвентләринин лазыми хассәләрини вә беләликлә дә һәмин операторларла бағлы бир чох ријази мәсәләләрин һәлләрилә әлагәдардыр. Гапалы операторлу мәсәләләрин тәдгигинә кәлдикдә иш чәтинләшир, белә ки, $X-(B)$ ҹәбриндә алынан нәтиҹәләр билаваситә белә мәсәләләрин тәдгигинә тәтбиг олуна билмир. Бу мәгсәдлә мәһдуд хәтти операторларын резолвентләринин хассәләринин даһа дәгиг өјрәнилиши лазым кәлир вә бу саһәдә алынан нәтиҹәләрин көмәји илә гапалы операторлар нәзәријјәси тәдгиг олунур. Бунлардан башга хәтти мәһдуд операторларын резолвентләринин дәрин тәдгиги истәр мәһдуд вә истәрсә дә гапалы операторларын спектриал нәзәријјәсинә тәтбиг олунур. Инди биз $X-(B)$ чәбриндә алынан бир нәтәчәнин операторлар нәзәријјәсинә хас олан бир мүһүм теоремин исбатына тәтбиг едәк.

Теорем 11. T мәһдуд олмајан оператор исә, $\lambda=\infty$-$R(\lambda, T)$-нин мәхсуси нөгтәсидир вә $\lambda=\infty$ изолә едилмиш мәхсуси нөгтә олдугда, һәмин нөгтә $R(\lambda, T)$-нин тәбии мәхсуси нөгтәсидир.

Исбаты. Әксини фәрз едәк, јә'ни $\lambda=\infty$, $R(\lambda, T)$-нин регулјар нөгтәси олсун. Онда $R(\lambda, T)$ резолвентин биринчи тәнлијини өдәмәклә $\lambda=\infty$ әтрафында мәһдуд олар, исбат олунан (§ 5,8) теоремә көрә

$$R(\lambda, T)=T_1+T_2R(\lambda, T_2) \tag{52}$$

өдәнилир. Бурада $T_1^2=0$, $T_2^2=T_2$, $T_2T_3=T_3T_2=T_3$ олмагла $T\neq E$. $R(\lambda, T_3)$, T_3-үн резолвенти олмагла T_3 мәһдуд оператордур. Доғрудан да, $R(\lambda)$-нын n-чи төрәмәси

$$R^{(n)}(\lambda, T)=R^{(n)}(\lambda)=(-1)^n n!\,[R(\lambda)]^{n+1}$$

илә тә'јин олунмагла $T_2=C_2=2R''(0)$ вә $R''(0)$-ын мәһдуд олмасындан T_3-үн мәһдуд олмасы чыхыр. Көстәрәчәјик ки, идемпотент елементин спектри сыфыр вә ваһиддән ибарәтдир. Еләчә дә, бу хассә T_2 пројектиринә аиддир. Она көрә елә $x\in X$ вә $x\neq 0$ олан x вар ки, $T_2x=0$ олур. (52)-дән

$$R(\lambda, T)x=T_1x+R(\lambda, T_3)T_2x=T_1x.$$

Бурадан

$$R^2(\lambda, T)x=R(\lambda, T)T_1x=T_1^2x+T_2R(\lambda, T_3)\mathrm{T}_1x=$$
$$=T_1^2x+R(\lambda, T_3)T_2T_1x;\ T_2x=0,\ T_1^2x=0 \text{ вә } T_2T_1=T_1T_2$$

олдугларыны нәзәрә алсаг, $R^2(\lambda, T)x=0$. $R(\lambda, T)$-нин тәрси олдуғундан бурадан $x=0$ олмагла $x\neq 0$ шәртинә зиддир. Бу зиддијјәт $\lambda=\infty$-ун $R^2(\lambda, T)$ үчүн мәхсуси нөгтә олмасыны һөкм едир.

Теоремин икинчи һиссәсини исбат етмәк үчүн јенә әксини фәрз едәк, јә'ни гәбул едәк ки, $\lambda=\infty$ изоләедилмиш мәхсуси нөгтәдир вә $R(\lambda, T)$-нин тәртиби m-ә бәрабәр олан полјусдур. Онда $R(\lambda, T)$ резолвентин биринчи тәнлијини өдәдијиндән $R(\lambda, T)=R^-(\lambda, T)+R^+(\lambda, T)$ кими көстәрилир. Онда (30) вә (35)-ә көрә

$$R^-(\lambda, T)=R(\lambda, T)\,T \tag{53}$$

вә

$$R^+(\lambda, T)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\lambda)^m T_0^{n+1} \tag{54}$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, $T_0^m \neq 0$, $T_0^{m+1} = 0$. Дикәр тәрәфдән $T_1 = C_{-1}$ вә $T_0 = C_0$ олдуғундан

$$T_1 T_0 = T_0 T_1 = 0. \tag{55}$$

$T_0^m \neq 0$ олдуғундан elә y вар ки, $x = T_0^m y \neq 0$. $T_0^{m+1} = 0$ олдуғундан исә

$$T_0 y = T_0^{m+1} x = 0 \tag{56}$$

өдәнилир. (55)-ә көрә $T_1 T_0 y = 0$ олдуғундан, еләчә дә, $T_1 T_0^m y = 0$ вә $T_1 x = 0$. (53) вә (54)-ни нәзәрә алараг $R(\lambda, T)x$

$$R(\lambda, T)x = R(\lambda, T)\, T_1 x + \sum_{n=0}^{m} (-\lambda)^n\, T^{n+1} x \tag{57}$$

бәрабәрлији кими јазылыр. (56)-ја көрә $T_0^n x = T_0^{n+m+1} x$ олдуғундан истәнилән $n > 0$ үчүн $T_0^n x = 0$ вә һәмчинин $T_1 x = 0$ олдуғундан (57)-дән $R(\lambda, T)\, x = 0$ олмасы алыныр. $R(\lambda, T)$ -нин тәрси олдуғундан бурадан $x = 0$ олмагла $x = T_0^m \neq 0$ шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, изоләедилмиш $\lambda = \infty$ мәхсуси нөгтә $R(\lambda, T)$ үчүн јалныз тәбии мәхсуси нөгтәдир. Бунунла теорем исбат олунур.

§ 7. ЧӘБРИН ИДЕМПОТЕНТ ЕЛЕМЕНТИ ҺАГГЫНДА

Теорем 12. J идемпотент елемент исә, јә'ни $J^2 = J$ олдугда бу елементин резолвенти $R(\lambda, J)$ ашағыдакы шәкилдә јазылыр:

$$R(\lambda, J) = \frac{e - J}{\lambda} + \frac{J}{\lambda - 1}. \tag{1}$$

Исбаты. $|\lambda| > \gamma$ олдугда,

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \| J^n \|^{\frac{1}{n}}, \quad R(\lambda, J) = \frac{e}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J^n}{\lambda^{n+1}} \tag{2}$$

шәклиндә јазылыр. $J^2 = J$ олдуғундан $\| J \| \geqslant 1$ вә $J^n = J$ олур. Она көрә дә $\| J^n \| \geqslant 1$ вә γ-нын ифадәсини нәзәрә алсаг, $\gamma \geqslant 1$; демәли, $|\lambda| > 1$ олдугда (2) өдәнилир. $J^n = J$ олдуғундан (2)-дән $R(\lambda, J)$:

$$R(\lambda, J) = \frac{e}{\lambda} + J \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}}, \tag{3}$$

шәклиндә јазылыр.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} = \frac{1}{\lambda(\lambda - 1)}$ бәрабәрлијини нәзәрә алсаг, $R(\lambda, J)$-нын

(1) шәклиндә олмасы алыныр. Ваһид вә сыфыр садә идемпотент елементләрдир. $J = \theta$ оларса, онда $\frac{J}{\lambda} - \frac{J}{\lambda - 1} = 0$ олмагла (1)-дән

$$R(\lambda, \theta) = \frac{e}{\lambda}. \tag{4}$$

Бурадан көрүндүјү кими, θ-нын спектри, јә'ни $\sigma(\theta)$ јалныз сыфырдан ибарәтдир. $J = e$ исә, онда (1)-дән $R(\lambda, e) = \frac{e}{\lambda - 1}$ олур. Она көрә e-нин спектри $\sigma(e)$ һәмчинин бир елементли чохлуг, јә'ни ваһиддән ибарәтдир. Гејд етдијимиз бу нәтичәләри нәзәрә алсаг, ашағыдакы мүлаһизәни гејд едә биләрик.

Әкәр идемпотент J елементи ваһид вә сыфырдан фәргли исә, онда бунун спектри ваһид вә сыфырдан ибарәт олар. Беләки, бу нөгтәләрин һәр бири садә полјус олмагла чыхыглары ујғун олараг $e - J$ вә J-јә бәрабәрдир.

§ 8. ВАҺИД ЕЛЕМЕНТСИЗ БАНАХ ЧӘБРЛӘРИ ҺАГГЫНДА

Биз ваһид елементли Банах чәбриндә верилмиш елемент үчүн тәрс елемент анлајышы вә беләликлә дә, регулјар елемент анлајышы вермәклә белә елементләр чохлуғунун бир нечә мүһүм хассәләрини исбат етмишдик. Бундан әлавә резолвент анлајышы вермәклә биринчи вә икинчи резолвент тәнликләринин исбатлары верилмишдир. Биз бу параграфда ваһид елементи олмајан X-Банах чәбриндә һәмин анлајышларын үмумиләшмәси илә мәшғул олачағыг. Онун үчүн дә фәрз едәк ки, X ваһид елементсиз Банах чәбрдир. Биз ваһид елементли чәбрдә $x + e$ елементинин тәрси елә $y + e$ елементинә дејирдик ки,

$$(x + e)(y + e) = (y + e)(x + e) = e. \tag{1}$$

Һәмчинин сағ вә сол тәрс елементләр һаггында анлајыш вермәклә һәр ики тәрс елементин варлығындан тәрс елементин варлығынын доғру олдуғуну көстәрмишдик. Бурадан,

$$x + y + xy = y + x + yx = \theta. \tag{2}$$

Бу мүнасибәтдә ваһид елементин иштирак етмәмәси имкан јарадыр ки, сағ тәрс, сол тәрс вә тәрс елемент анлајышы ваһид елементсиз X чәбри үчүн үмумиләшдирилсин. Белә анлајыш биринчи дәфә Америка ријазијјатчысы Һерлис тәрәфиндән верилмишдир. $x \in X$ вә $y \in X$ олдугда y о заман x-ин квази сағ тәрс елементи адланыр ки,

$$x + y - xy = \theta \tag{3}$$

олсун. Һәмчинин y о заман x-ин квази сол тәрс елементи адланыр ки,

$$y + x - yx = 0 \qquad (4)$$

олсун. Сағ квази елементләр чохлуғуну R_+ вә сол квази елементләр чохлуғуну R_- илә ишарә едәк. y, x-ин ејни заманда сағ вә сол квази елемент исә, онда y, x-ин квази тәрс елементи адланыр. Бу тә'рифдән ашкардыр ки, x вә y-ин бири-биринин квази тәрс олмалары гаршылыглыдыр. Јә'ни y, x-ин квази сол тәрсидирсә, онда x, y-ин квази сағ тәрсидир вә әксинә. Һәм (3) вә һәм (4) өдәнилирсә, онда x вә y гаршылыглы квази тәрс елементләридир. Биз (3)-үн сол тәрәфини x вә y елементләринин квази һасили кими адландыраг вә $x\,0\,y$ кими ишарә етсәк, $x\,0\,y = x + y - Xy$ олар. Асанлыгла јохламаг олар ки, о—композисијасында X-дән олан елементләр үчүн ассосиативлик гајдасы доғрудур. Јә'ни

$$(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z). \qquad (5)$$

Бу билаваситә тә'рифдән ашкардыр. Белә чәбрләрдә $x \circ y = y \circ x$ олмасы, јә'ни коммутативлик гајдасы јалныз вә јалныз о заман доғрудур ки, $xy = yx$ олсун.

(5)-и нәзәрә алараг ашағыдакы тәклифи сөјләмәк олар. Әкәр x-ин квази сағ вә квази сол тәрс елементләри варса, онда бунлар бәрабәрдирләр, јә'ни һәмин елементин квази тәрс елементи вар. Онун үчүн дә фәрз едәк ки, y вә z, x-ин ујғун олараг сағ вә сол квази тәрс елементләридир. Онда тә'рифә көрә:

$$x \circ y = 0, \qquad (6)$$

$$z \circ x = 0. \qquad (7)$$

(5) көрә $(z \circ x) \circ y = z \circ (x \circ y)$. Онда (6) вә (7)-јә көрә бурадан $y = z$ олдуғу алыныр. x-ин квази тәрс y елементи варса, онда бу елемент x-ин квази регулјар елементи адланыр (ујғун олараг квази сағ регулјар вә квази сол регулјар елемент тә'риф олунур).

Теорем 13. Квази сағ, квази сол вә квази регулјар елементләр чохлуғу ачыгдыр.

Исбаты. $\|x\| < 1$ олдугда, $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ елементинин x үчүн квази тәрс елемент олдуғуну билаваситә јохлајаг. $y = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$ илә ишарә едәрәк $x \circ y$ квази һасилини тә'јин едәк: $x \circ y = x + y - xy$ олдуғундан, бурадан

$$x \circ y = x \sum_{n=1}^{\infty} x^n - x \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 0.$$

Ејни гајда үзрә $y \circ x = 0$ олдуғуну јохламаг олар. Беләликлә, y, x-ин квази тәрс елемент олмасы алыныр. Инди фәрз едәк ки, y, x-ин сағ квази тәрсидир. Онда $x \circ y = 0$.
$t = z \circ y$ олсун. Башга сөзлә, $t = z + y - zy$, һәмчинин $x \circ y = 0$, јә'ни $y = xy - x$ олдуғундан $t = (z - x) + (z - x) y$ олур. Бурадан исә

$$| t | \leqslant \| z - x \| (1 + \| y \|).$$

$\| z - x \| \leqslant (1 + \| y \|)^{-1}$ фәрз олунурса, $\| t \| < 1$ олмагла t-нин квази тәрс елемент олмасы чыхыр. t-нин квази тәрсини τ илә ишарә етсәк, $t \circ \tau = 0$ вә беләликлә дә, $t = z \circ y$ олдуғуну нәзәрә алсаг ахырынчы бәрабәрликдән $(z \circ y) \circ \tau = z \circ (y \circ \tau) = 0$ олмагла $y \circ \tau$ елементинин z елементи үчүн квази сағ тәрс олмасы мејдана чыхыр. (8)

Демәли, квази сағ тәрс елементләр чохлуғу ачыгдыр. Ејни гајда үзрә y, x-ин сол квази тәрс елементи олса иди $\tau = y \circ z$ көтүрмәклә вә $\| z - x \| < (1 + \| y \|)^{-1}$ фәрз етмәклә $\| \tau \| < 1$ олмасыны алардыг. Еләчә дә $\bar{\tau}$, τ-нын квази тәрсидирсә, онда $\bar{\tau} \circ \tau = 0$. Бурадан исә $\bar{\tau} \circ (y \circ z) = (\bar{\tau} \circ y) \circ z = 0$ олмагла $\bar{\tau} \circ y$-ин z үчүн сол квази тәрс олмасы алыныр. Јә'ни квази сол регулјар елементләр чохлуғу ачыгдыр. Исбат гајдасындан ашкардыр ки, квази регулјар елементләр чохлуғу ачыгдыр. Доғрудан да, бу чохлуг квази сағ регулјар вә квази сол регулјар ачыг чохлугларынын кәсишмәсидир. $x \in X$ гејд олунмуш елемент олсун. Ашағыдакы тә'рифләри гејд едәк. Фәрз едәк ки, λ-нын мүәјјән гијмәтиндә λx-ин јеканә квази тәрс елементи вар. Онда λ-нын белә гијмәти регулјар гијмәт адланмагла белә гијмәтләр чохлуғу X-ин *дисолвент чохлуғу* адланыр. Бу чохлуғу бүтүн мүстәвијә гәдәр тамамлајан чохлуг исә X-ин спектри адланыр. Әкәр λ регулјар әдәддирсә, λx-ин квази тәрсини $R(\lambda, x)$ илә ишарә етсәк, $R(\lambda, x)$, x-ин дисолвенти адланар.

$R(\lambda, x)$-ин тә'рифинә көрә ашкардыр ки,

$$\lambda x + R(\lambda, x) = \lambda x R(\lambda, x) = \lambda R(\lambda, x) x.$$

Бурадан ујғун олараг дисолвентин биринчи вә икинчи тәнликләрини алмаг олар.

$$\mu x + R(\mu, x) - \mu x R(\mu, x) = 0$$

олдуғуну нәзәрә алараг ашағыдакы кими бәрабәрлик көтүрәк:

$$R(\lambda, x)\,[\lambda\mu x + \lambda R(\mu, x) - \lambda\mu x R(\mu, x)] = 0. \tag{9}$$

$\lambda x R(\lambda, x) = \lambda x + R(\lambda, x)$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (9)-дан

$$\mu(\lambda x + R(\lambda, x)) + \lambda R(\lambda, x) \cdot R(\mu, x) - \lambda(\mu x + {} \\ + R(\mu, x) - \mu R(\lambda, x) R(\mu, x) = 0. \tag{10}$$

Бурадан

$$\mu R(\lambda, x) - \lambda R(\mu, x) = (\lambda - \mu) R(\lambda, x) \cdot R(\mu, x)$$

Һилберт ејнилији алыныр. Аналожи олараг икинчи дисолвент тәнлијин доғрулуғуну ҝөстәрмәк олар. Јә'ни x, $y \in X$ олмагла һәр ики елементин квази тәрси варса,

$$xR(y) - R(x)y = R(x)(x - y)R(y) \tag{11}$$

бәрабәрлији өдәнилир. Бурада $R(x)$ вә $R(y)$ ујғун x вә y елементләринин дисолвентләридир. Биз бу анлајышларла кифајәтләнмәклә гејд едәк ки, дисолвентин (10) вә (11) ејниликләриндән истифадә олунараг дисолвентин ујғун параметрдән асылылығы өјрәнилир. Бу хассәләрин мүһүмләриндән бири, дисолвнетин параметрдән асылы локал аналитик олмасыдыр. Дисолвентин хассәләринин дәгиг өјрәнилмәсиндән сонра ваһиди олмајан чәбрә дахил олан елементин үмуми спектрал нәзәријјәси өјрәнилир вә бу нәзәријјә мүәјјән синиф операторлар чохлуғуна тәтбиг олунур. Бу һагда дәгиг мә'луматы“ Е. Хилл вә Р. Филлипсин. „Функциональный анализ и полугруппы“ китабындан алмаг олар.

Теорем 14. **$a \in R_+$ вә $a \bar{\in} R$ исә, онда a-нын үмумијјәтлә сонсуз сајда сағ квази тәрс елементи вардыр. Бурада R_+, квази тәрс елементләр чохлуғудур.**

Исбаты. Фәрз едәк ки, елә $y \in X$ вар ки, a-нын сағ квази тәрсидир. Јә'ни

$$a \circ y = 0. \tag{12}$$

$\tilde{y} = y \circ (a \circ y)$ олсун. $\tilde{y} = (y \circ a) \circ y$ елементинин a үчүн сағ тәрси олдуғуну билаваситә јохламаг олар. Доғрудан да (12)-јә көрә

$$a \circ \tilde{y} = (a \circ y) \circ (a \circ y). \tag{13}$$

Бурадан $a \circ \tilde{y} = 0$ олмагла $\tilde{y}$-ин a үчүн сағ квази тәрс олмасы алыныр. Инди a-нын сағ квази тәрс елементләриндән бирини гејд едәрәк b илә ишарә едәк:

$$a \circ b = 0 \tag{14}$$

$$t = a \circ y \tag{15}$$

оларса, (14)-ә көрә

$$t = y - b - a(y - b). \tag{16}$$

Бурада $y = b + h$ илә ишарә етсәк,

$$t = h - ah. \tag{17}$$

$\| t \| < 1$ олдугда јә'ни $\| h - ah \| < 1$ оларса, онда көстәрмишдик ки, t-нин квази тәрс елементи вар вә

$$\tau = -\sum_{n=1}^{\infty}(h - ah)^n = -v \tag{18}$$

бәрабәрлиjи илә тә'jин олунур. Инди билаваситә көстәрәк ки, бу һалда

$$\xi(a, h) = b + (ab - ba)h + (ab - ba)h\sum_{n=1}^{\infty}(h - ah)^n \tag{19}$$

васитәсилә тә'jин олунан елемент a-нын квази сағ тәрсидир jә'ни

$$a + \xi(a, h) - a\xi(a, h) = 0. \tag{20}$$

(19)-а көрә (20)-нин сол тәрәфини a_1 илә ишарә едиб белә jазаг.

$$a_1 = a + b + (ab - ba)h + (ab - ba)hv -$$
$$- ab - a(ab - ba)h - a(ab - ba)hv. \tag{21}$$

(14)-ү нәзәрә алсаг:

$$a_1 = (ab - ba - a\cdot ab + aba)h + (ab - ba - a\cdot ab + aba)hv$$

бәрабәрлиjи илә тә'jин олунур. Jенә дә (14)-ү нәзәрә алараг $ab = a + b$ илә әвәз етсәк $ab - ba - a\cdot ab + aba = ab - ba - a(a + b) + (a + b)a = 0$ олмагла $a_1 = 0$ вә она көрә дә (19) илә тә'jин олунан $\xi(a, h)$-ын a-нын сағ квази тәрс елемент олмасы чыхыр. (19)-дан $\| h - ah \| < 1$ бәрабәрсизлиjини өдәjән истәнилән h үчүн $\xi(a, h)$, a-нын сағ квази тәрси олмагла белә елементләрин саjы сонсуздур. Бу нәтиҹә jалныз онунла әлагәдардыр ки, $a \in R_+$ олмагла $a \overline{\in} R$. Она көрә дә $ab \neq ba$. (19)-дан даһа бир мүһүм нәтиҹә алыныр ки, $\xi(a, h)$, h-ын аналитик функсиjасыдыр.

Биз көстәрдик ки, әкәр сағ квази тәрс елемент варса, онда сонсуз саjда сағ квази тәрс елементләр гурмаг олар. Еjни мүлаһизәни верилмиш елемент үчүн jалныз сол квази тәрс елемент олдугда сөjләмәк оларды. $a \circ b = 0$ олдугда һәмчинин көстәрмишдик ки, $\| x - a \| < (1 + \| b \|)^{-1}$ олан истәнилән x елементинин дә сағ квази тәрс елементи вар вә y бу елемент

$$y = (b \circ c) \tag{22}$$

олар. Бурада

$$c = -\sum_{n=1}^{\infty}[(x - a) - (x - a)b]^n. \tag{23}$$

(22)-jә көрә

$$y = b - \sum_{n=1}^{\infty}[(x - a) - (x - a)b]^n +$$

$$+ b \sum_{n=1}^{\infty} [(x-a)-(x-a)b]^{n}. \tag{24}$$

Демәли, (24) васитәсилә тә'јин олунан сағ квази тәрс елемент, $y = y(a, b, x)$ кими јазылмагла бу функсија x-ин аналитик функсијасыдыр. (24)-дән көрүндүјү кими $x \to a$ олдугда $y(a, b, x) \to b$ олур. Инди ашағыдакы теореми исбат едәк.

Теорем 15. Сағ, сол квази тәрс елемент x-ин функсијасы кими ујғун олараг R_+ вә R_--ин һәр бир компонентиндә локал аналитик функсија олмагла квази тәрс елемент x-дән асылы R-ин һәр бир компонентиндә аналитик функсијадыр.

Исбаты. b-нин a үчүн сағ квази тәрс елементинин олдуғуну

$$\| y \| < M \tag{25}$$

$$\| x - a \| < \frac{1}{2}(1 + M)^{-1} \tag{26}$$

фәрз едәк. $M > \| b \|$ әдәдини көтүрәрәк бәрабәрсизликләрлә тә'јин олунан сфералары ујғун олараг S_1 вә S_2 илә ишарә едәк. Биз көстәрмишдик ки,

$$\| x - a \| < (1 + \| b \|)^{-1} \tag{27}$$

бәрабәрсизлијини өдәјән һәр бир x үчүн квази сағ тәрс елемент вардыр.

$M > \| b \|$ олдуғундан S_2 сферасы (27) илә тә'јин олунан сферанын дахилинә дүшдүјүндән S_2-јә дахил олан һәр бир x елементинин квази сағ тәрс елементи вардыр. Инди $a' \in S_2$ гәбул едәрәк фәрз едәк ки, S_1-дән елә b' елементи вар ки, $a' \circ b' = 0$, инди исбат етдијимиз дүстура көрә елә x-ләр чохлуғу гурмаг олар ки, бу чохлуға дахил олан һәр бир x-ин квази сағ тәрс елементи вар вә бу елемент

$$\xi(x, a', b') = b' - \sum_{n-1}^{\infty} [(x-a') - (y-a')b']^{n} +$$

$$+ b' \sum_{n=1}^{\infty} [(x-a') - (y-a')b']^{n} \tag{28}$$

бәрабәрлији васитәсилә гурулур. Гејд етдијимиз кими $\xi(x, a', b')$ S_2-дә аналитик функсијадыр. (28)-дән $x \to a'$ олдугда $\xi(x, a', b') \to b$ олур. (28) илә тә'јин олунан $\xi(x', a', b')$ һәмчинин a нөгтәсинин әтрафында аналитик функсијадыр. Лакин (28)-дән $x \to a$ олдугда $\xi(x, a', b') \to b$ олмасы, үмумијјәтлә чыхмыр. Она көрә дә $\xi(x, a, b)$, x-ин функсијасы кими R_+-ин һәр компонентиндә локал аналитикдир. Ејни мүлаһизәни сол квази тәрс елементләр һаггында һәмин гајда үзрә исбат етмәк оларды. Јә’ни a, b-нин сол квази тәрс елементи исә, онда $\| x - b \| < (1 + \| a \|)^{-1}$-дән көтүрүлмүш һәр x-ә гаршы тәрс $\xi(x, b, a)$ елементи вар вә R-ин һәр компонентиндә локал аналитик функсијадыр.

Теорем 16. Дисолвент чохлуг ачыг олмагла, дисолвент белә чохлуғун һәр бир компонентиндә аналитик функсијадыр.

Исбаты. $\lambda_0 \neq 0$ олдуғуну гәбул етмәклә $\lambda_0 \in \rho(x)$ олсун. Бурада $\rho(x)$ дисолвент чохлугдур. Бу теореми исбат етмәк үчүн (24)-дә x әвәзинә $\frac{x}{\lambda}$, a әвәзинә $\frac{x}{\lambda_0}$ вә b әвәзинә $R(\lambda_0, x)$ јазмагла һәмин бәрабәрликдән

$$y = R(x, \lambda_0) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0}\right) - \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0}\right) R(x, \lambda_0)\right] +$$

$$+ R(x, \lambda_0) \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0}\right) - \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0}\right) R(x, \lambda_0)\right] \quad (29)$$

мүнасибәти алыныр. Дисолвентин тә’рифинә көрә

$$\frac{x}{\lambda_0} R(x, \lambda_0) = \frac{x}{\lambda_0} + R(x, \lambda_0), \quad (30)$$

$$\frac{x}{\lambda} R(x, \lambda_0) - \frac{x}{\lambda_0} R(x, \lambda_0) = \frac{x}{\lambda} R(x, \lambda_0) \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_0} - \frac{x}{\lambda_0} R(x, \lambda_0) \quad (31)$$

(30)-у нәзәрә алсаг, бурадан

$$\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0}\right) R(x, \lambda_0) = \frac{\lambda_0}{\lambda}\left[\frac{x}{\lambda_0} + R(x, \lambda_0)\right] -$$

$$- \left[\frac{x}{\lambda_0} + R(x, \lambda_0)\right] = \frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0} + \frac{\lambda_0}{\lambda} R(x, \lambda_0) - R(x, \lambda_0). \quad (32)$$

Она көрә дә,

$$\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0} - \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{x}{\lambda_0}\right) R(x, \lambda_0) = R(x, \lambda_0) -$$

$$- \frac{\lambda_0}{\lambda} R(x, \lambda_0) = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} R(x, \lambda), \quad (33)$$

(33)-ә әсасән (29)-дан алырыг ки:

$$R(x, \lambda) = R(x, \lambda_0) - \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda} R(x, \lambda_0)\right]^{n} +$$

$$+R(x,\ \lambda_0)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}R\,(x,\ \lambda_0)\ \right]^n. \tag{34}$$

$$\left\|\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}R\,(x,\ \lambda_0)\right\|<1 \tag{35}$$

олдугда $-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}R(x,\ \lambda_0)\right]^n$ елементи $\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}R(x,\ \lambda_0)$ елементинин квази тәрси олдуғундан

$$\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}R\,(x,\lambda_0)-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}\ R\,(x,\ \lambda_0)\right]^n+$$

$$+\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}\,R\,(x,\lambda_0)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}R\,(x,\ \lambda_0)\ \right]=0 \tag{36}$$

олар. Бурадан

$$R\,(x,\lambda_0)-\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}\ R\,(x,\ \lambda_0)\ \right]^n=\frac{\lambda_0}{\lambda}R\,(x,\lambda_0)-$$

$$-\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}R\,(x,\ \lambda_0)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}\ R\,(x,\ \lambda_0)\right]^n. \tag{37}$$

(37)-јә көрә (34)-дән

$$R\,(x,\ \lambda)=\frac{\lambda_0}{\lambda}R\,(\lambda_0,\ x)+\frac{\lambda_0}{\lambda}R\,(x,\lambda_0)\times$$

$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}\ R\,(x,\ \lambda_0)\ \right]^n. \tag{38}$$

Демәли, $R\,(x,\ \lambda)$, $\frac{x}{\lambda}$ елементинин квази тәрс елементи олмагла

$$|\ \lambda-\lambda_0\ |\leqslant|\ \lambda\ |\cdot\|\,R\,(\lambda_0,\ x)\,\|^{-1}$$

олдугда λ-нын аналитик функсијасыдыр.

Гејд. Фәрз едәк ки, X чәбри ваһид елементлидир. $x\in X$ олмагла

$$y=e-x \tag{39}$$

бәрабәрлијини көтүрәк. (39) васитәсилә x-ин y-ә биргијмәтли ин'икас олунмасы ашкардыр. (39) илә тә'јин олунан y_1 вә y_2 елементләринин һасилини дүзәлдәк, јә'ни

$$y_1=e-x_1, \tag{40}$$

$$y_2 = e - x_2, \qquad (41)$$

олдугда

$$y_1 y_2 = (e - x_1)(e - x_2) = e - x_1 - x_2 + x_1 x_2$$

вә јахуд да

$$y_1 y_2 = e - (x_1 + x_2 - x_1 \cdot x_2), \quad y_1 y_2 = e - x_1 \circ x_2. \qquad (42)$$

(42) көстәрр ки, $y_1 y_2$, (39) васитәсилә олан ин'икасда $x_1 \circ x_2$-јә чеврилир. (39) вә (40) васитәсилә

$$y_1 \circ y_2 = y_1 + y_2 - y_1 y_2 = e - x_1 + e - x_2 - (e - x_1)(e - x_2)$$

оларса,

$$y_1 \circ y_2 = e - x_1 x_2. \qquad (43)$$

(43) көстәрир ки, әксинә, (39) васитәсилә $y_1 \circ y_2$-јә гаршы $x_1 \cdot x_2$ елементи ујғун олур.

(46)-дан көрүндүјү кими, $x_1 x_2 = x_2 x_1 = e$ оларса, $y_1 \circ y_2 = y_2 \circ y_1 = 0$ вә $y_1 \circ y_2 = y_2 \circ y_1 = 0$ исә, $x_1 x_2 = e$ олур. Беләликлә дә, x-ин тәрси олмасы үчүн бу елементә (42) васитәсилә тә'јин олунан ујғун елементин квази тәрс елементинин олмасы зәрури вә һәм дә кафи шәртдир.

VII ФӘСИЛ

БАНАХ ФӘЗАЛАРЫНДА ВӘ БАНАХ ҸӘБРЛӘРИНДӘ РЕГУЛЈАР ВӘ СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘРИН НОРМАЛ ҺӘЛЛИ ОЛУНМАСЫ

§ 1. КӘСИЛМӘЗ ХӘТТИ ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘР

Биз тамам кәсилмәз операторлу тәнликләрин һәлләрини тәдгиг едәрәк Рисс нәзәријјәсиндән истифадә етмишдик. Бу нәзәријјә һәм верилмиш фәзанын вә һәм дә бу фәзада тә'сир едән тамам кәсилмәз операторун структуру илә бағлы олан кејфијјәтләрлә әлагәдар шәрһ едилмишдир. Лакин сонралар бу нәзәријјә тамам кәсилмәз операторлу тәнликләрә хас олан бир чох мүһүм теоремләрлә зәнкинләшдирилмишдир. Бу нәзәријјәдә верилмиш фәзада тамам кәсилмәз операторлу тәнликләр илә гошма фәзада ујғун гошма тамам кәсилмәз операторлу тәнликләр арасында мүәјјән тәбии бағлылыг вардыр. Белә бир бағлылыг истәр верилмиш тәнлијин вә истәрсә дә ујғун гошма тәнлијин һәлл олунмасы үчүн зәрури вә кафи шәртләрлә бағлы бир нечә мүһүм теоремләрин исбатына сәбәб олур. Бунлардан әлавә, Рисс нәзәријјәси мүәјјән итерасијасы тамам кәсилмәз операторлу тәнликләр үчүн үмумиләшдирилир. Нәһајәт, бу нәзәријјә чох кениш синиф тә'јин етмәјән регулјар операторлу тәнликләрә тәтбиг олунур. Јухарыда гејд етдијимиз мүлаһизәләри нәзәрә алараг, бу фәсилдә бир нечә мүһүм теоремләрин исбатыны вермәклә алынан нәтичәләрдән билаваситә сингулјар операторлу тәнликләрин тәдгигиндә истифадә едәчәјик. Фәрз едәк ки, K, $X - (B)$ фәзасында верилмиш тамам кәсилмәз оператордур.

Теорем 1.

$$x - Kx = y \tag{1}$$

тәнлијинин мүәјјән бир y үчүн һәллинин олмасындан өтрү

$$f - K^*f = 0 \tag{2}$$

тәнлијинин һәр бир һәллинин

$$f(y) = 0 \tag{3}$$

бәрабәрлијини өдәмәси зәрури вә һәм дә кафидир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, $x = x_0$, (1) тәнлијин һәллидир. Она көрә дә $y = x_0 - Kx_0$ олур. (2)-ни өдәјән f функсионалыны көтүрәк:

$$f(y) = f(x_0 - Kx_0) = f(x_0) - f(Kx_0) =$$
$$= f(x_0) - K^*f(x_0) = (f - K^*f)\,x_0;$$

онда (2)-јә көрә бурадан, $f(y) = 0$ олмагла шәртин зәрурилији исбат олунур.

Шәртин кафилији. (3)-үн өдәнилдијини фәрз едәрәк (1) шәклиндә көстәрилән y_1-ләр чохлуғуну X_1 илә ишарә едәк y-ин (1) шәклиндә олдуғуну көстәрәк. Онун әксини фәрз едәк јә'ни $y \overline{\in} X_1$. Көстәрмишдик ки, X_1 алтфәзадыр. y вә X_1 арајындакы мәсафәни d илә ишарә етсәк, $d > 0$ олар. Онда Хан—Банах теореминдән алдығымыз нәтичәјә көрә елә f_1 функсионалыны гурмаг олар ки, $f_1(y) = 1$ олмагла $\tilde{y} \in X_1$ олан истәнилән нөгтәдә $f_1(\tilde{y}) = 0$. $f_1(Kx - x) = (K^*f_1 - f_1)x$ вә $Kx - x \in X_1$ олдуғундан $f_1(Kx - x) = 0$ вә она көрә дә

$$(K^*f_1 - f_1)\,x = 0 \tag{4}$$

бәрабәрлији истәнилән x үчүн өдәнилир, јә'ни

$$K^*f_1 - f_1 = 0. \tag{5}$$

Беләликлә, (3)-ү нәзәрә алсаг

$$f_1(y) = 0, \tag{7}$$

лакин f_1-ин тә'јин олунмасындан: $f_1(y) = 1$, беләликлә, зиддијјәт алыныр. Јә'ни $y \in X_1$. Демәли, (3) өдәнилирсә $y = x - Kx$ кими көстәрилир. Бу исә (1)-ин һәллинин олдуғуну көстәрир. Бунунла да кафи шәрт вә она көрә дә теорем исбат олунур. Бурадан белә нәтичә алырык: әкәр (2)-нин јалныз сыфыр һәлли варса, онда (1)-ин истәнилән сағ тәрәфи үчүн һәлли вар.

Теорем 2.

$$f - K^*f = g \tag{8}$$

тәнлијинин g-нин гошма фәзадан олан мүәјјән бир g үчүн һәллинин олмасындан өтрү

$$x - Kx = 0 \tag{9}$$

тәнлијини өдәјән истәнилән x үчүн

$$g(x) = 0 \tag{10}$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси зәрури вә һәм дә кафидир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Фәрз едәк ки, f_1 (8)-ин һәллидир. Онда

$$g = f_1 - K^*f_1, \tag{11}$$

$$g(x) = f_1(x) - K^*f_1(x) = f_1(x) - f_1(Kx) = f_1(x - Kx).$$

$x - Kx = 0$ олдуғундан $g(x) = 0$ вә беләликлә дә зәрури шәрт исбат олунур.

Шәртин кафилији. (10)-ун өдәнилдијини гәбул едәрәк (8)-ин һәллинин варлығыны исбат едәк. $X_1 = T(X)$ алтфәзасында мүәјјән бир функсионал дүзәлдәк. Белә ки, $y \in X_1$ олдугда

$$x - Kx = y \tag{12}$$

бәрабәрлијини өдәјән x-ләрдән бирини көтүрәрәк

$$\tilde{f}(y) = g(x) \tag{13}$$

гәбул едәк. Теоремин шәртләри дахилиндә $\tilde{f}(y)$ биргијмәтли тә'јин олунур. Доғрудан да, әкәр ејни y-ә гаршы көстәрилдији кими башга бир x_1 көтүрсәјдик, онда:

$$x - Kx = x' - Kx'. \tag{14}$$

Бурадан, $K(x - x') = x - x'$. Теоремин шәртинә көрә

$$g(x - x') = 0. \tag{15}$$

$g(x) = g(x')$. Беләликлә, $f(y)$ функсионалы биргијмәтли тә'јин олунур. $\tilde{f}(y)$-ин ејничинсли вә аддитив олмасы ашкардыр. Инди көстәрәк ки, $\tilde{f}(y)$ мәһдуддур. Биз тамам кәсилмәз операторлар нәзәријјәсини тәдгиг едәрәк тәрс оператор олдугда бу операторун мәһдуд кәсилмәз олдуғуну исбат етмишдик. Бу $\tilde{f}(y)$ функсионалыны тә'јин едәркән (12)-ни өдәјән x-ләрдән мүәјјән бирини көтүрәрәк (13) васитәсилә тә'јин едирдик. Буну нәзәрә алараг, исбат олунмушдур ки, белә x-ләрдән бирини гејд етсәк, онда елә сабит $M > 0$ әдәди вар ки,

$$\|x\| \leqslant M \|y\| \tag{16}$$

өдәниләр

$$\|\tilde{f}(y)\| = \|g(x)\|. \qquad (17$$

$g(x)$ мәһдуд олдуғундан

$$|g(x)| \leqslant K\|x\|, \tag{18}$$

она көрә дә (17)-дән

$$|\tilde{f}(y)| \leqslant Q\|y\|, \tag{19}$$

беләки, $Q=MK$. Бу исә $\tilde{f}(y)$ функсионалынын мәһдуд олдуғуну көстәрир. Хан — Банах теореминә көрә $\tilde{f}(y)$ функсионалыны X_1-дән бүтүн фәзаја давам етдирмәк олар. $\tilde{f}(y)$-ин давамыны $f(y)$ илә ишарә едиб, ашағыдакы бәрабәрлији көтүрәк:

$$f(x-Kx)=f(y). \tag{20}$$

$f(y)=\tilde{f}(y)=g(x)$ олдуғундан (20)-дән

$$f(x-Kx)=g(x), \tag{21}$$

она көрә

$$(f-K^{*}f)x=g(x) \tag{22}$$

истәнилән x үчүн өдәнилдијиндән (2) тәнлијинин һәллинин варлығы алыныр. Бунунла теорем исбат олунур. Бурадан ашағыдакы нәтиҹә алыныр.

(9) тәнлијинин јалныз сыфыр һәлли варса, онда (8)-ин истәнилән сағ тәрәф үчүн һәлли вардыр.

Теорем 3. (1) тәнлијинин истәнилән y үчүн һәллини олмасындан өтрү (9)-ун тривиал сыфыр һәллинин олмасы зәрури вә һәм дә кафидир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Әксини фәрз едәк: (1)-ин истәнилән y үчүн һәлли олдуғу һалда (9)-ун $x=x_1\neq 0$ һәлли вар.

Белә тәнликләрә бахаг:

$$x-Kx=x_{\text{к}} \quad (\text{к}=1,\ 2,\ 3,\ldots). \tag{23}$$

(1)-ин истәнилән y үчүн һәлли олдуғундан (23)-үн һәлли вар бу һәлли $x_{\text{к}+1}$ илә ишарә едәк. $Tx_{\text{к}}=x_{\text{к}-1}$ олдуғундан:

$$T^{\text{к}-1}x_{\text{к}}=x_1\neq 0. \tag{24}$$

лакин

$$T^{\text{к}}x_{\text{к}}=Tx_1=0. \tag{25}$$

Бурадан белә нәтиҹәјә кәлирик: $x_{\text{к}}\in X_{\text{к}}^0$ оларса, $x_{\text{к}}\overline{\in} X_{\text{к}-1}^0$; белә ки, $X_{\text{к}}^0$ алтфәзасы

$$T^{\text{к}}x=0 \tag*{(26}$$

бәрабәрлијини өдәјән нөгтәләр чохлуғудур. $X_{\text{к}-1}^0\leqslant X_{\text{к}}^0$ олмасы ашкардыр. $x_{\text{к}}\in X_{\text{к}}^0$ вә $x_{\text{к}}\overline{\in} X_{\text{к}-1}^0$ олдуғуну нәзәрә алсаг,

$X^0_{к-1} \subset X^0_к$ олмагла $X^0_{к-1}$ $X^0_к$-ын дүзкүн һиссәсидир. Онда $x_к \in X^к_{0-1}$ елементи үчүн $X^0_к$-дан $\| y_к \| = 1$ олан елә $y_к$ елементи тапмаг олар ки,

$$\| y_к - x_к \| \geqslant \frac{1}{2}.$$

$\{y_j\}$ ардычыллығынын мәһдуд вә еләчәдә K-нын тамам кәсилмәз олдуғуну нәзәрә алсаг, $\{Ky_j\}$-дан јығылан $\{Ky_{p_\nu})$ алтардычыллығы сечмәк олар. $p > q$ олдуғуну ғәбул едәрәк y_p вә $|y_{b_i}|$ елементләрини көтүрәк:

$$y_{p_i, q_i} = T^{p-1i}(y_{q_i} + Ty_{p_i} - Ty_{q_i}). \tag{27}$$

(27)-нин сағ тәрәфинә дахил олан һәр бир елемент $X^0_{p_i-1}$-ә дахил олдуғундан $y_{p_i, q_i} \in X_{p_i-1}$ олур. Она көрә дә (27)-јә көрә $y_{p_i} - y_{p_i, q_i} \| \geqslant \frac{1}{2}$ олар. Дикәр тәрәфдән $E - K = T$ олдуғундан $Ky_{p_i} - Ky_{q_i} = y_{p_i} - y_{p_i, q_i}$. Демәли:

$$\| Ky_{pi} - Ky_{q_i} \| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Бу исә K-нын тамам кәсилмәзлији шәртинә зиддир. Беләликлә, зәрури шәрт исбат олунур.

Шәртин кафилији. Инди фәрз едәк ки, (9)-ун јалныз сыфыр һәлли вар. Онда исбат етдијимиз кими, (8)-ин истәнилән сағ тәрәф үчүн һәлли вар. $X - (B)$ фәзасы олдугда һәмчинин, $X^* - (B)$ фәзасы вә K^* тамам кәсилмәз олдуғундан (1) тәнлији үчүн исбат етдијимиз зәрури шәрти тәтбиг етмәк олар. Башга сөзлә, (2) тәнлијинин јалныз сыфыр һәлли вар. Она көрә дә (1) тәнлијини истәнилән y үчүн һәлли вар. Бунунла да кафи шәрт вә теорем исбат олунур.

Теорем 4.

$$\boldsymbol{Tx = 0} \tag{29}$$

вә

$$\boldsymbol{T^*g = 0,} \tag{30}$$

тәнликләринин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы сонлу олмагла ејнидир.

Исбаты.

$$E - K = T, \tag{31}$$

$$E - K^* = T^*. \tag{32}$$

K тамам кәсилмәз олдуғундан K^* да тамам кәсилмәздир. Үјғун алтфәзалары X^0_1, X^0_2 илә ишарә едәк: јә'ни $X^0_1(T) = X^0_1$. (29)-у өдәјән нөгтәләр чохлуғуну, $X^0_2(T^*) = X^0_2$ илә (30)-у өдәјән нөгтәләр чохлуғуну ишарә етсәк, көстәрдијимиз кими X_1^0 вә X_2^0 алтфәзалар олмагла сонлу өлчүлүдүр. X_1^0-ин өлчүсү n вә X_2^0-нин өлчүсү, ν олсун. Исбат едәк ки, $n = \nu$. X_1^0-дән хәтти асылы олмајан елементләр $x_j (j = \overline{1, n})$ вә X_2^0-дән олан хәтти асылы олмајан елементләр $g_j (j = \overline{1, \nu})$ олсун. Әввәлчә, $n < \nu$ олдуғуну гәбул едәк. Мә'лумдур ки, x_j-а $(j = \overline{1, n})$ биортогонал олан елә $f_j \, (j = 1, n)$ функсијалар системи вар ки,

$$f_j (x_к) = \begin{cases} 1, & j = к \\ 0, & j \neq к \end{cases} \quad (j, \, к = \overline{1, n}). \tag{33}$$

Еләчә дә $g_j' \, (j = \overline{1, \nu})$ функсионаллары үчүн ујғун елә $y_к$ $(к = \overline{1, \nu})$ елементләр системи вар ки,

$$g_1 (y_к) = \begin{cases} 1 & j = к \\ 0 & j \neq к \end{cases} \quad (j, к = \overline{1, \nu}). \tag{34}$$

$$Wx = \sum_{j=1}^{n} f_j (x) \, y_j \tag{35}$$

бәрабәрлијинә бахаг. W чевирмәси X-и сонлу өлчүлү фәзаја ин'икас етдирдијиндән тамам кәсилмәз олар.

$$V = K + W \tag{36}$$

оларса, еләчәдә K тамам кәсилмәз олдуғундан V тамам кәсилмәз олар.

$$x - Vx = 0 \tag{37}$$

тәнлијини көтүрәк вә (36)-ја көрә

$$x - Vx = x - Kx - Wx = x - Kx - \sum_{j=1}^{n} f_j (x) \, y_j.$$

Бурадан

$$Tx - \sum_{j=1}^{n} f_j (x) \, y_j = 0. \tag{38}$$

Фәрз едәк ки, $x = x_0$ (38)-ин һәллидир:

$$Tx_0 - \sum_{j=1}^{n} f_j (x_0) \, y_j = 0, \tag{39}$$

Бурадан

$$g_s (Tx) - \sum_{j-1}^{n} f_j (x_0) \, g_s (y_j) = 0 \quad (s = \overline{1, n}), \tag{40}$$

(34)-ә көрә

$$g_s(Tx_0) - f_s(x_0) = 0. \qquad (41)$$

(30)-а көрә бурадан

$$f_s(x_0) = 0 \quad (s = \overline{1, n}). \qquad (42)$$

(39)-дан $T\ x_0 = 0$ олмагла $x_0 \underset{\text{п}}{\in} X^0_1$, олур, она көрә дә

$$x_0 = \sum_{j=1} \alpha_к x_к \qquad (43)$$

шәклиндә көстәрилир. (33)-ү нәзәрә алсаг, (43)-дән

$$\alpha_s = f_s(x_0) \quad (s = \overline{1\ n}). \qquad (44)$$

(42)-јә көрә исә $\alpha_s = 0$ $(s = \overline{1, n})$ олмагла $x_0 = 0$ олур. Јә'ни (39)-ун јалныз сыфыр һәлли вардыр. Ујғун ејничинсли олмајан тәнлијин истәнилән сол тәрәфи үчүн һәлли вардыр. Она көрә дә

$$Tx - \sum_{j=1}^{п} f_j(x)\, y_j = y_{п+1} \qquad (45)$$

тәнлијинин һәлли вардыр. $x = x'$, (45)-ин һәлли олсун:

$$Tx' - \sum_{j=1}^{п} f_j(x')\, y_j = y_{п+1}. \qquad (46)$$

38)-ә $g_{п+1}$ илә тә'сир етсәк, онда

$$g_{п+1}(Tx') - \sum_{j=1}^{п} f_j(x')\, g_{п+1}(y_j) = g_{п+1}(y_{п+1}). \qquad (47)$$

$g_{п+1}(y_{п+1}) = 1$ вә $g_{п+1}(y_j) = 0$ олдуғундан бурадан $T^* g_{п+1} x' = 0$. Демәли, $\nu \leqslant n$. $\nu < n$ фәрз етсәјдик, онда (38) тәнлији әвәзинә

$$T^* g - \sum_{j=1}^{\nu} g(y_j) f_j = 0 \qquad (48)$$

тәнликләрини көтүрмәклә ејни схем үзрә $\nu \geqslant n$ вә $\nu = n$ олдуғу алынарды. Көстәрдикләримизи нәзәрә алсаг, ашағыдакы тәклифи јаза биләрик:

$$Tx = y, \qquad (49)$$

вә

$$T^* g = f \qquad (50)$$

тәнликләринин истәнилән сағ тәрәф үчүн јеканә һәлли вар вә јахуд (49) вә (50)-нин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы сонлу олмагла бәрабәрдир.

(49) вә (50) тәнликләринин үмуми һәлләри

$$x = x' + \sum_{j=1}^{п} \alpha_к x_к \qquad (51)$$

вә

$$g = g' + \sum_{j=1}^{n} \alpha_к g_к \qquad (52)$$

дүстурлары васитәсилә гурулур. Бурада x' вә y' ујғун олараг (49) вә (50) тәнликләринин хүсуси һәлләридир.

Теорем 5.

$$T = W + V \qquad (53)$$

оператору үчүн Фредһолм алтернативинин доғру олмасы үчүн W-нин тәрси олмасы вә V-нин тамам кәсилмәз олмасы зәрури вә һәм дә кафидир.

Биз тамам кәсилмәз операторлар үчүн Рисс нәзәријјәсини верәркән шәртин зәрури олдуғуну көстәрмишдик.

Исбаты. Шәртин кафилији. Бунун үчүн (26)-нын өдәнилдијини гәбул едәк. W-нин тәрси олдуғундан (26)-дан

$$W^{-1}Tx = W^{-1}y \qquad (54)$$

алыныр. (1) вә (54) тәнликләри еквивалентдир. $W^{*-1} = \left(W^{-1}\right)^*$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$T^* W^{*-1} g = f \qquad (55)$$

тәнлијини көтүрәк. Әкәр (55)-ин һәр һансы бир g_0 һәлли варса, онда (2) тәнлијинин һәлли $g' = W^{*-1}g_0$, олар. Тәрсинә, g'' (2)-нин һәлли исә $W^{*'} g''$, (55)-ин һәлли олар. Бу мә'нада (2) вә (55) еквивалентдир. $K = -W^{-1}V$ илә ишарә едәк. Бурадан $K^* = -V^*\left(W^{-1}\right)^* = -V^*)K^*)^{-1}$ олар. Она көрә дә (54) вә (55) тәнликләри ашағыдакы шәкилдә јазылыр:

$$x - Kx = W^{-1}y \qquad (56)$$

вә

$$g - K^*g = f. \qquad (57)$$

K вә K^* тамам кәсилмәз олдуғундан ја (56) вә (57) тәнликләринин истәнилән сағ тәрәф үчүн јеканә һәлләри вар вә јахуд да

$$x - Kx = 0, \qquad (58)$$

$$g - K^*g = 0 \qquad (59)$$

тәнликләринин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы сонлу олмагла бәрабәрдир. $x_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ вә $g_j'\left(j = \overline{1, n}\right)$, (58) вә (59)-нун ујғун олараг там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләри олсун. Ашкардыр ки, $x_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ һәмчинин (1)-ин там систем тәшкил едән һәлләри олар. Инди көстәрәк ки,

$$g_j = W^{*-1}(g_j') \quad (j = \overline{1, n}) \tag{60}$$

(2) тәнлијинин там систем тәшкил едән һәлләрдир. (2) вә (55) тәнликләри еквивалент олдуғундан (60) васитәсилә тә'јин олунан һәр g_j $(j = \overline{1, n})$ функсионалы (2)-нин һәллидир. Көстәрәк ки, g $(j = \overline{1, n})$ функсионаллары хәтти асылы дејилдир.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j = 0 \tag{61}$$

бәрабәрлијиндән $\lambda_j = 0 (j = \overline{1, n})$ олдуғуну көстәрәк. (60)-а көрә

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j' = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j W^*(g_j) \tag{62}$$

бәрабәрлијиндә (61)-и нәзәрә алсаг,

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j g_j' = 0, \tag{63}$$

$g_j' (j = \overline{1, n})$ хәтти асылы олмадығындан (36)-дан $\lambda_j = 0 (j = \overline{1, n})$ олмагла $g_j (j = \overline{1, n})$ функсионалларынын хәтти асылы олмадыглары алыныр. Асанлыгла јохламаг олар ки, (2) тәнлијинин $g_j (j = \overline{1, n})$ хәтти асылы олмајан башга һәлли јохдур. Она көрә дә $\tilde{g}$ илә (2)-нин елә һәллини ишарә едәк ки, $g_j (j = \overline{1, n})$-ларын хәтти комбинасијасы олмасын, онда $W^*\tilde{g}$ (32)-нин $g_j (j = \overline{1, n})$ хәтти комбинасијаларындан ибарәт олмајан һәлли оларды. Бу исә мүмкүн дејилдир. Она көрә дә (2)-нин там систем һәлләрини јалныз $g_j (j = \overline{1, n})$ тәшкил едир Беләликлә, исбат етдик ки, (1) вә (2)-нин хәтти асылы олмајан һәлләри сонлу олмагла сајлары бәрабәрдир. (1) вә (56) еквивалент олдғундан (56)-нын вә еләчә дә (1)-ин һәллинин олмасы үчүн

$$g_j' (W^{-1}(y)) = 0 \quad (j = \overline{1, n}) \tag{64}$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси зәрури вә кафи шәртдир.

$$(W^{-1})^* (g_j')_y = W^{*-1} g_j' y = g_j(y) \tag{65}$$

олдуғундан (64)-ә көрә (65)-ин сол тәрәфи сыфыр олмагла

$$g_j(y) = 0 \tag{66}$$

олмасы өдәнилир. Демәли, (2) тәнлијин истәнилән y үчүн һәллинин олмасында өтрү зәрури вә кафи шәрт (36)-нын өдәнилмәсидир. Белә ки, $g_j (j = \overline{1, n})$ (2) тәнлијин там систем һәлләринин сајыдыр. Беләликлә кафи шәрт вә еләчә дә теорем исбат олунур.

§ 2. РИСС НӘЗӘРИЈЈӘСИНИН БӘ'ЗИ ҮМУМИЛӘШМӘСИ

K_1 оператору Банах фәзаларында тә'сир едән тамам кәсилмәз оператор олдугда

$$x - \lambda K_1 x = y \tag{1}$$

тәнлиjинин һәлл олунмасына вә спектринә аид бир чох мүһүм нәтиҹәләр әлдә едилмишдир. С. Н. Николски K операторунун мүәjjән интерасиjасы тамам кәсилмәз олдугда

$$x - \lambda K x = y \tag{2}$$

тәнлиjинин һәлләри үчүн бир нечә теоремләрин исбатыны вермишдир Беләки, K хәтти кәсилмәз оператор олмагла K тамам кәсилмәздир. (2) тәнлиjи илә әлагәдар олараг

$$x - \lambda^n K^n x = y_n \tag{3}$$

тәнлиjинә бахаг. Беләки,

$$y_n = y + \lambda K y + \cdots + \lambda^{n-1} K^{n-1} y. \tag{4}$$

Теорем 6. (2)-нин һәр бир һәлли (3)-үн һәллидир вә x 3)-үн һәллидирсә, онда $x = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j K^j x' + y_{j+1}\right]$ дә (2)-нин һәллидир.

Исбаты. Фәрз едәк ки, x, (2)-нин һәллидир. (2)-jә $E + \lambda K + \cdots + \lambda^{n-1} K^{n-1}$ илә тә'сир етсәк, онда (3) өдәнилир. Беләликлә, x (3)-үн һәллидир, көстәрәк ки, $x = x'$ (3) үчүн һәр һансы бир һәллидирсә, онда (2)-нин мүәjjән һәллини гурмаг олар. Онун үчүн дә

$$x'_\nu = \lambda K(x'_{\nu-1}) + y \tag{5}$$

$(\nu = \overline{1, n})$ белә ки, $x'_0 = x'$. (5)-дән

$$\sum_{\nu=1}^{n} x'_\nu = \lambda \sum_{\nu=0}^{n-1} K(x'_\nu) + ny. \tag{6}$$

$$x'_n = \lambda K(x'_{n-1}) + y = \lambda^n K^n(x') + y = x', \tag{7}$$

она көрә дә (7)-дән

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} x'_\nu = \lambda \sum_{\nu=0}^{n-1} K(x'_\nu) + ny. \tag{8}$$

$$x = \frac{1}{n}(x' + x'_1 + \cdots + x'_{n-1}) \tag{9}$$

вә jахуд да

$$x = \frac{1}{n}\left(x' + \lambda K x' + \cdots + \lambda^{n-1} K^{n-1} x' + \right.$$
$$\left. + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}\right), \tag{10}$$

бурада

$$y_n = y + \lambda K y + \cdots + \lambda^{n-1} K^{n-1} y \tag{11}$$

(1) тәнлијинин һәлли олар. Бунунла теорем исбат олунур. (3)-үн јеканә x' һәлли варса, онда бу (2) тәнлијинин һәлли олар.

Теорем 7. μ, K^n **операторунун мәхсуси әдәдләриндән бири исә, онда** $\lambda = \sqrt[n]{\mu}$ $(j = \overline{1, n})$ **илә тә'јин олан** λ_j $(j = \overline{1, n})$ **әдәдләриндәнән азы бири** K**-нын мәхсуси әдәдидир.**

Исбаты. Фәрз едәк ки, x', K^n операторунун μ-јә ујғун мәхсуси векторудур. λ_j $(j = \overline{1, n})$ әдәдләри васитәсилә x'_j елементләрини тә'јин едәк:

$$x'_j = \frac{1}{n}\left[x' + \lambda_j K x' + \cdots + \lambda_j^{n-1} K^{n-1} x'\right] \; (j = \overline{1, n}). \tag{12}$$

Шәртә көрә λ_j $(j = \overline{1, n})$ $\lambda^n = \mu$ тәнлијинин көкләридир Бурада

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^{k} = 0, \left(k = \overline{1, n-1}\right) \tag{13}$$

олдуғундан (12)-дән

$$x' = x'_1 + x'_2 + \cdots + x'_n \tag{14}$$

x', μ-јә ујғун K^n-нын мәхсуси вектору олдуғундан $x' \neq 0$, она көрә дә (13)-ә дахил олан векторларын һамысы сыфыр ола билмәз. Фәрз едәк $x'_\nu \neq 0$; ашкардыр ки,

$$n\left[x'_\nu - \lambda_\nu K x'_\nu\right] = x' - \lambda_\nu^n K^n x'. \tag{15}$$

Доғрудан да, (12) вә (13) нәзәрә алынарса, (15)-ин өдәнилдији алыныр. (15)-дән $x' - \lambda_\nu^n K^n x' = x' - \mu K^n x' = 0$ олдуғундан

$$x'_\nu - \lambda_\nu K x'_\nu = 0 \tag{16}$$

тәнлијиндән λ_ν-нин K үчүн мәхсуси әдәд олдуғу алыныр. Беләликлә, теорем исбат олунур.

§ 3. БАНАХ ЧӘБРЛӘРИНДӘ СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘР

Коши нүвәли хәтти сингулјар тәнликләр нәзәријјәси истәр нәзәри вә истәрсә дә тәтбиги чәһәтдән кениш тәтбигата маликдир. Хүсусән комплекс областда бахылан тәнликләр, ријази физика, еластиглик, хәтти өртүк вә башга нәзәријјәләрә кеништәтбиг олунур. Коши нүвәли сингулјар тәнликләр нәзәријјәси чох тәбии олараг комплекс дәјишәнли функсијалар үчүн гојулмуш Һилберт мәсәләси илә сых әлагәдардыр. Белә ки, бу мәсәләнин тәдгигиндә алынан нәтиҹәләр сингулјар тәнликләрин һәлләрини тамам характеризә едир. Беләликлә, Коши нүвәли үмуми сингулјар тәнликләрин характеристик һиссәсинә ујғун Һилберт мәсәләсинин индекси белә тәнликләрин һәллини хәтти регулјар интеграл тәнликләр үчүн Фредһолмун алтернатив нәзәријјәсилә әлагәләндирир. Бу параграфда сингулјар тәнликләрин регулјаризасијасы вә бахылан тәнликлә еквивалентлик мәсәләсини нәзәрдән кечирәҹәјик. Биз китабын мүәјјән фәсилләриндә хәтти операторлу тәнликләрин һәлләри һаггында мүәјјән мүлаһизәләр ирәли сүрәрәк тамам кәсилмәз операторлу тәнликләрин Һилберт фәзасында арашдырылмасыны вермәклә белә тәнликләрин, һәмчинин үмуми Банах фәзаларында ејни гајда үзрә тәдгиг олунмасыны гејд етмишик. Сонра исә мүәјјән үмумиләшдирмәләр вермишдик. Бахылан тәнликләрин тәдгиг схеминдән көрүндүјү кими, белә арашдырылмалар сингулјар операторлу тәнликләр үчүн јарамыр. Белә ки, истәр тәдгиг олунан фәзаларын вә истәрсә дә бахылан хәтти операторларын структуралары белә тәнликләрин һәлл олунмалары һаггында мүәјјән мүлаһизәләрин дејилмәсини ортаја чыхармыр. Бу гыса киришдән сонра биз бу параграфда хәтти сингулјар тәнликләрин һәлләринин тәдгиги мәсәләсини нәзәрдән кечирәрәк мүәјјән бир нәзәријјәни шәрһ едәҹәјик. Комплекс областда гапалы контурлар үчүн бахылан Коши нүвәли хәтти сингулјар тәнликләрин һәлләринин мүҹәррәд шәкилдә бахылмасы илк дәфә академик З. И. Хәлилов тәрәфиндән ирәли сүрүләрәк тәдгиг олунмушдур. Бу нәзәријјәдән сонра функсионал анализ саһәсиндә ишләјән бир чох көркәмли ријазијјатчылар бу истигамәти инкишаф етдирәрәк мүхтәлиф мәсәләләрә тәтбиг олмаларыны көстәрмишләр. Инди һәмин нәзәријјәнин әсас нәтиҹәләрини шәрһ едәк.

Фәрз едәк ки, R нормалашмыш хәтти һәлгәдир. Ашағыдакы оператор тәнлијинә бахаг:

$$Tx \equiv u\,x + vSx + Kx = y. \qquad (1)$$

Бурада u, v вә y, R-дә верилмиш елементләр, S вә K исә һәмин һәлгәдә тә'сир едән мәһдуд вә хәтти операторлардыр. Белә ки, K регулјар, S исә ашағыдакы шәртләри өдәјән сингулјар оператордур:

$$S^2 = E. \qquad (2)$$

Истәнилән $u \in R$ үчүн $uS - Su$ оператору регулјардыр.

$\omega \in R$ истәнилән елементдирсә, онда $uS - Su$ оператору ω-ја ашағыдакы гајда үзрә тә'сир едир:

$$(uS - Su)\,\omega = u\,(S\omega) - S\,(u\omega).$$

Бу хассәләр васитәсилә ики мүһүм ејнилијин доғрулуғуну көстәрәк: R-дән олан ихтијари u вә v елементләри үчүн

$$SuSv = uv + Pv \tag{3}$$

ејнилијинин доғрулуғуну көстәрәк. Бурада u гејд олунмуш һесаб едилир. P исә v-јә тә'сир едән регулјар оператордур. $S^2uv = uv$ олдуғундан

$$SuSv = uv - S^2uv + SuSv,$$

беләликлә,

$$SuSv = uv - S\,[Su - uS]\,v.$$

$$Pv \equiv S\,[uS - Su]\,v$$

оларса, (3)-үн доғрулуғу алыныр. S мәһдуд вә $uS - Su$ регулјар олдуғундан P дә регулјардыр. (3) Пуанкаре—Бертран дүстуру адланыр. Һәмчинин u гејд олунарса,

$$Suv = uSv + Qv \tag{4}$$

ејнилијинин доғрулуғуну асанлыгла көстәрмәк олар:

$$Suv = uSv - uSv + Suv$$

олдуғундан, бурадан

$$Suv = uSv + Qv \tag{5}$$

вә јахуд

$$Qv = (Su - uS)\,v. \tag{6}$$

Ашкардыр ки, Q регулјардыр. (5), u елементинин сингулјар S операторундан харичә чыхарылмасыны характеризә едир. Гејд едәк ки, (3) вә (5) гапалы контурлу Коши нүвәли сингулјар оператор үчүн дә өдәнилир. Даһа доғрусу $S^2 = E$ вә $uS - Su$ операторунун регулјар олмасы, Коши нүвәли сингулјар оператору үчүн дә доғрулуғу бу шәртләрин тәбии үмумиләшмәләр олдуғуну көстәрир. T үмуми сингулјар оператор адланыр.

Тә'риф. 1. Елә бир τ оператору варса ки, $\tau Tx = \tau y$ тәнлијинә Рисс—Шаудер нәзәријјәси тәтбиг олунур, онда белә τ оператору *T-нин сол регулјаризатору* адланыр. Һәмчинин сағ регулјаризасијаны ифадә етмәк олар. Мүәјјән шәртләр дахилиндә З. И. Хәлилов сол регулјаризасија мәсәләсинин варлығыны көстәрмишдир. Фәрз едәк ки τ, T_1 оператору үчүн сол регулјаризатордур, белә ки, бу регулјаризатор һәмин синифдән ахтарылыр:

$$\tau x = u_1 x + v_1 S x + K_1 x. \tag{7}$$

τT композисијасына бахаг:

$$\tau T x \equiv u_1 (ux + vSx + Kx) + v_1 S (ux + vSx + Kx) + \\ + K_1 (ux + vSx + Kx), \tag{8}$$

бурадан,

$$\tau T x \equiv u_1 u x + u_1 v S x + u_1 K x + v_1 S u x + \\ + v_1 S v S x + v_1 S K x + H x_1 \tag{9}$$

беләки,

$$H \equiv K_1 u + K_1 v S + K_1 K.$$

K_1 вә K-нын регулјар вә S-ин мәhдуд олмасындан H операторунун регулјар олмасы чыхыр. Бурада u вә v-нин hәр биринә мәhдуд хәтти оператор кими бахылыр. (3) вә (5) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг:

$$\tau T x \equiv u_1 u x + u_1 v S x + u_1 K x + v_1 u S x + \\ + Q x + v_1 v x + P x + v_1 S K x + H x. \tag{10}$$

$$u_1 K + Q + P + v_1 S + v_1 S K + H = M \tag{11}$$

оларса, M-ин регулјар оператор олмасы бураја дахил олан операторларын көстәрилән хассәләриндән чыхыр. (11)-ә көрә (10)-дан

$$\tau T x \equiv (u_1 u + v_1 v)\, x + (u_1 v + v_1 u)\, S x + H x, \tag{12}$$

$$w_1 = u_1 u + v_1 v, \tag{13}$$

$$w_2 = u_1 v + v_1 u, \tag{14}$$

$$\tau T x \equiv w_1 x + w_2 S x + H x. \tag{15}$$

(15)-дән көрүндүјү кими, τ-нун сол регулјар оператор олмасы үчүн әввәлчә $w_2 = 0$ олмасыны тә'мин етмәк лазымдыр. (13) вә (14)-дән

$$w_1 + w_2 = (u_1 + v_1)(u + v), \tag{16}$$

$$w_1 - w_2 = (u_1 - v_1)(u - v). \tag{17}$$

Тә'риф 2. *$u + v$ вә $u - v$ елементләри регулјар оларса, онда T оператору нормал оператор адланыр.*

T-нин нормаллығыны гәбул едәрәк (16) вә (17)-дән

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= (w_1 + w_2)(u + v)^{-1} \\ u_1 - v_1 &= (w_1 - w_2)(u - v)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Бурадан исә,

$$u_1 = \frac{1}{2}\left[(w_1 + w_2)(u + v)^{-1} + (w_1 - w_2)(u - v)^{-1}\right], \tag{19}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \left[(w_1 + w_2)(u+v)^{-1} - (w_1 - w_2)(u-v)^{-1}\right]. \quad (20)$$

Беләликлә, T нормал оператор оларса, u_1 вә v_1 биргијмәтли олараг тә'јин олунур. Бурада $w_2 = 0$ фәрз едәрәк, $w_1 = \omega$ илә ишарә едәк. ω-нын регулјар олдуғуну гәбул едәрәк (12)-дән

$$\tau Tx = \omega x + Hx \quad (21)$$

олдуғу өдәнилир. Она көрә дә (1) тәнлијинә ујғун

$$\omega x + Hx = \tau y \quad (22)$$

тәнлијини алырыг. ω регулјар олдуғундан бурадан,

$$x + H_0 x = h_0, \quad (23)$$

беләки,

$$H_0 = \omega^{-1} H, \qquad h_0 = \omega^{-1} \tau y.$$

Бүтүн мүлаһизәләрдән көрүндүјү кими, H_0 оператору регулјардыр. Беләликлә, (1) сингулјар тәнлијинә ујғун регулјар операторлу (23) тәнлији гаршы гојулур. Бу тәдгигат нәтиҹәсиндә ашағыдакы теореми ифадә етмәк олар.

Теорем 8. ***T* нормал оператор исә, онда сол регулјаризатор вар.**

ω-нын һесабына сонсуз сајда сол регулјаризаторун варлығы алыныр. Бу тәдгигатдан көрүндүјү кими, (1) тәнлијинин һәр бир һәлли һәмчинин (23)-үн һәллидир. Тәрси үмумијјәтлә дүз дејилдир. Әкәр R коммутатив һәлгә оларса, (19) вә (20) бәрабәрликләри ашағыдакы шәкилдә олар:

$$u_1 = \omega u (u^2 - v^2)^{-1}, \quad (24)$$

$$v_1 = -\omega v (u^2 - v^2)^{-1}. \quad (25)$$

§ 4. СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘР ҮЧҮН ӘСАС ТЕОРЕМЛӘР

Фәрз едәк ки, R унитар һәлгәсиндә

$$Tx \equiv ux + vSx + Kx = y \quad (1)$$

тәнлији верилмишдир. Беләки, T нормал оператордур. (1) тәнлијинә ујғун гошма тәнлик исә

$$T^* x \equiv u^* x^* + S^* u^* x^* + K^* x^* = y \quad (2)$$

шәклиндә олар. Әввәлчә гејд едәк ки, T-нин нормал олмасындан T^*-ун нормал олдуғу асанлыгла көстәрилир.

$$Tx = 0 \quad (3)$$

(1)-ә ујғун ејничинсли тәнлик олсун. Ашағыдакы әсас теоремләрин исбатыны верәк.

Теорем 9. (3) тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы сонлудур.

Исбаты. Биз T нормал оператор олдугда белә операторун регулјаризасијасынын варлығы һаггында теорем исбат етмишдик. Фәрз едәк ки, T_1, T үчүн белә регулијаризаторлардан биридир. (3)-дән

$$T_1Tx = 0. \tag{4}$$

(4) регулјар операторлу тәнлик олдуғундан Рисс теореминә көрә (4)-үн хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы сонлудур. (3)-үн һәр бир һәлли, ејни заманда (4)-үн һәлли олдуғундан теорем исбат олунур.

Теорем 10. (1) тәнлијинин һәлл олунмасы үчүн

$$(y, \eta_i) = 0 \tag{5}$$

бәрабәрликләринин өдәнилмәси зәрури вә һәм дә кафи шәртдир. Белә ки, η_i $(i = \overline{1, n})$,

$$T^*x^* = 0 \tag{6}$$

тәнлијинин там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләридир.

Исбаты. Шәртиң зәрурилији. T_1 васитәсилә (1)-ә тә'сир етсәк

$$T_1Tx = T_1y. \tag{7}$$

(1) тәнлијинин һәр бир һәллинин (7)-и үчүн һәлл олмасы ашкардыр. Гејд етдијимиз кими, тәрси үмумијјәтлә дүз дејилдир. (7) тәнлији регулјар операторлу олдуғундан Рисс нәзәријјәсинә көрә (7)-нин һәлләрини гураг.

$$T_1\xi = 0 \tag{8}$$

тәнлијинин һәлләри васитәсилә (7)-дән Tx үчүн мүәјјән бир бәрабәрлик јазаг. Көстәрдијимиз кими (8)-ин хәтти асылы олмајан һәлләри сонлудур. (8)-нин там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләрини ξ_j $(j = \overline{1, m})$ илә ишарә едәк:

$$Tx = y + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \xi_j \tag{9}$$

тәнлијини көтүрәк. Бурада, λ_j $(j = \overline{1, m})$ ихтијари сабитләрдир. Ашкардыр ки, (7)-нин һәр бир һәлли еләчә дә (9)-ун һәллидир. (9)-дан көрүндүјү кими, (7)-нин һәр бир һәллинин (1) тәнлијинин һәллинин олмасы үчүн $\lambda_j = 0\ (j = \overline{1, n})$ олмасы зәрури вә һәм дә кафи шәртдир. Мә'лумдур ки, (7) тәнлијинин һәллинин олмасы үчүн

$$(T_1 y,\ \omega_j) = 0 \tag{10}$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәси зәрури вә һәм дә кафи шәртдир. Белә ки, $\omega_j\ (j = \overline{1, n})$

$$T^*\ T_1^* \omega = 0 \tag{11}$$

тәнлијинин там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләридир. Гошма операторун тә'рифинә көрә (10)-дан:

$$(y\ , \eta_j) = (y,\ T_1^* \omega_j) = 0, \quad (j = \overline{1, n}). \tag{12}$$

Шәртин кафилији. Фәрз едәк ки, x (7) тәнлијинин һәлли-

$$T_1 T x = 0 \tag{13}$$

дир. тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы сонлу олар. $\eta_j\ (j = \overline{1, N})$, бу тәнлијинин там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләри олсун. (7)-нин һәлләринин истәр резолвент вә истәрсә дә псевдорезолвент васитәсилә гурулмасыны нәзәрә алсаг, онда елә бир H хәтти оператору вар ки, (7)-нин һәллини

$$x = HT_1 y + \sum_{j=1}^{N} \mu_j \eta_j \tag{14}$$

шәклиндә көстәрмәк олур. Бурада, $\mu_j\ (j = \overline{1, N})$ ихтијари сабитләрдир. $\xi_j\ (j = \overline{1, m})$ системи хәтти асылы олмадығындан бу системлә биортогонал олан $\xi_j'\ (j = \overline{1, m})$ системини гурмаг олар:

$$(\xi_i,\ \xi_y') = \delta_{ij}. \tag{15}$$

$i \neq j$ олдугда $\delta_{ij} = 0$, $i = j$ оларса, $\delta_{ij} = 1$ олур. (9)-дан $(Tx - y,\ \xi_i')$ скалјар һасилини јазаг:

$$(Tx - y,\ \xi_i') = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j (\xi_j\ \xi_i'), \tag{16}$$

бурада (15)-и нәзәрә алсаг:

$$\lambda_i = (Tx - y,\ \xi_i') \tag{17}$$

бәрабәрлијини алырыг. Гејд етдијимиз кими, (9)-ун һәлли олан x-ин һәмчинин (7)-ни өдәмәси үчүн зәрури вә кафи шәрт $\lambda_i = 0 (i = \overline{1, m})$ вә јахуд да

$$(Tx - y,\ \xi_i') = 0 \tag{18}$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәсидир. Она көрә дә x-ин (14) васитәсилә олан ифадәсини (18)-дә јеринә јазсаг:

$$\left(THT_1y + \sum_{j=1}^{N}\mu_j T\eta_j - Ty, \xi_i'\right) = 0, \qquad (19$$

бурадан

$$\left(THT_1 y, \xi_i\right) + \sum_{j=1}^{N} \mu_j \left(T\eta_j, \xi_j'\right) - \left(Ty, \xi_i'\right) = 0, \qquad (20$$

$$\left(y, T_1^* H^* T^* \xi_i'\right) + \sum_{j=1}^{N}\mu_j \left(T\eta_j, \xi_i'\right) - \left(y, T^* \xi_i'\right) = 0. \qquad (21$$

Бурада, $a = \left(y, \left(T_1^* H^* T^* - T^*\right) \xi_i'\right)$ илә ишарә едәк, $A_{ij} = (T\eta_j , \xi_i'$
оларса, онда (20)-дән

$$a_i + \sum_{j=1}^{N} A_{ij}\mu_j = 0. \qquad (22$$

Беләликлә $\mu_i \left(j = \overline{1, N}\right)$-нын сечилмәси үчүн хәтти чәбри тәнликләр системини алырыг. (22)-јә ујғун гошма системи јазсаг

$$\widehat{a}_i + \sum_{j=1}^{N} \widehat{A}_{ij} \widetilde{\mu}_j = 0, \qquad (23$$

онда (22)-нин һәллинин олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij} a_j = 0 \qquad (24)$$

бәрабәрлијинин өдәнилмәсидир. $a_i = (y, w_i)$ олдуғундан

$$\sum_{j=1}^{n} B_{ij}\, a_j = \sum_{j=1}^{n} (B_{ij} y, w_i) = 0.$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(y, \widetilde{B}_{ij}\, w_i\right) = 0$$

вә јахуд да $g_i = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{B}_{ij}\, w_i$ илә ишарә етсәк, (23)-дән

$$(y, g_i) = 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right). \qquad (25)$$

Көстәрәк ки, g_i, η_j-ун хәтти комбинасијасындан ибарәтдир, онун үчүн $z \in R$ истәнилән елемент олсун.

$$T_1 T x \equiv K(x) = K(z) = y_z \qquad (26)$$

тәнлијинин һәлли $x = z$ олар. Онда инди көстәрдијимиз кими,

$$(y_z,\ g_1)=0, \tag{27}$$

јахуд да $(Kz,\ g_i)=0$ өдәнилир, бурадан исә $(z, K^* g_1)=0$. z ихтијари олдуғундан бурада

$$K^* g_i = 0, \tag{28}$$

јә'ни g_i, η_i-ин хәтти комбинасијасыдыр.

Беләликлә, кафи шәрт исбат олунур.

Теорем 11. (3) вә (6) тәнликләринин хәтти асылы олмајан һәлләри сајынын фәрги *T*-нин јалныз характеристик һиссәсиндән асылы олар.

Исбаты. T_1-ин T үчүн регулјаризатор олдуғуну фәрз едәрәк әлавә

$$T_1\xi = 0 \tag{29}$$

вә

$$T_1^*\eta = 0 \tag{30}$$

тәнликләринә баxаг.

κ вә κ' илә ујғун олараг (3) вә (6) тәнликләринин хәтти асылы олмајан һәлләри сајыны, m вә m' илә исә ујғун олараг (29) вә (30) тәнликләринин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајыны ишарә едәк. (3), (6), (29) вә (30) тәнликләринин һәлләринин хәтти асылы олмајан векторларыны ујғун олараг ашағыдакы кими ишарә едәк:

$$x_i\left(i=\overline{1,\kappa}\right),\ y_i\left(i=\overline{1,\ \kappa'}\right),\ \xi_i\left(i=\overline{1,m}\right) \text{ вә } \eta_j\left(i=\overline{1,m'}\right).$$

T_1 регулјаризатор олдуғундан $T_1Tx=0$ вә $T^*T_1^*\,x=0$ тәнмикләринин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы бәрабәрдир. $T_1Tx=0$ тәнлијинин һәр бир һәлли, һәмчинин

$$Tx=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\xi_i \tag{31}$$

тәнлијинин һәлли олар. $\lambda_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ мүәјјән сабит әдәдләрдир. (31)-ин һәллинин олмасы үчүн $y_i\left(i=\overline{1,\kappa}\right)$ векторларынын (31)-ин сағ тәрәфинә ортогонал олмалары зәрури вә кафидир. Она көр дә

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(\xi_i,\ \eta_j)=0. \tag{32}$$

$|(\xi_i,\ \eta_j)|=A_{ij}$ оларса, онда (32)-дән

$$\sum_{i=1}^{m}A_{ij}\lambda_j=0\left(j=\overline{1,\kappa'}\right). \tag{33}$$

$|A_{ij}\|$ рангыны r илә ишарә едәк. Онда (31) тәнлији

$$Tx = \sum_{j=1}^{m-r} \mu_j \xi_j^* \qquad (34)$$

кими јазылар. Бурада $\mu_j \left(j=\overline{1, m-r}\right)$ мүәјјән әдәд, $\xi_j^* \left(j = \overline{1, m-r}\right)$ исә $\xi_k \left(k = \overline{1, m}\right)$ векторларындан бири олмагла $^*_j \left(j=\overline{1, m-r}\right)$ системи хәтти асылы дејилдир. (34) тәнлијинин һәлли ашағыдакы бәрабәрлик васитәсилә тә'јин олунур:

$$x = \sum_{j=1}^{m-r} \mu_j \xi_j^{**} + \sum_{j=1}^{k} \nu_j x_j. \qquad (35)$$

Белә ки, ξ_j^{**}

$$Tx = \xi_j^* \quad \left(j = \overline{1, m-r}\right) \qquad (36)$$

тәнлијинин хүсуси һәлләриндән бири вә $\nu_i \left(i = \overline{1, k}\right)$ ихтијари сабитләрдир. Көстәрәк ки, $\xi_j^{**} \left(j = \overline{1, m-r}\right)$ вә $x_j \left(j = \overline{1, k}\right)$ векторлары хәтти асылы дејилдир. Әксини фәрз етсәк, онда һамысы бирдән сыфыр олмајан $\mu_j' \left(j = \overline{1, m-r}\right)$ вә $\nu_j' \left(j = \overline{1, k}\right)$ әдәдләри вар ки,

$$\sum_{i=1}^{m-r} \mu_i' \xi_i^{**} + \sum_{j=1}^{k} \nu_j' x_j = 0. \qquad (37)$$

Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфинә T оператору васитәсилә тә'сир едәк:

$$\sum_{i=1}^{m-r} \mu_i' T\xi_i^{**} + \sum_{j=1}^{k} \nu_j' T x_j = 0. \qquad (38)$$

$T\xi_i^{**} = \xi_i^* \left(i = \overline{1, m-r}\right)$ вә $Tx_j = 0 \left(j = \overline{1, k}\right)$ олдуғундан бурадан

$$\sum_{i=1}^{m-r} \mu_i' \xi_i^* = 0. \qquad (39)$$

$\xi_i^* \left(i = \overline{1. m-r}\right)$ векторлары хәтти асылы олмадығындан (39)-дан $\mu_i = 0 \left[i = \overline{1, m-r}\right]$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (37)-дән

$$\sum_{j=1}^{k} \nu_j' x_j = 0. \qquad (40)$$

$x_j \left(j = \overline{1, k}\right)$ хәтти асылы олмадығындан (40)-дан $\nu_j' = 0 \left(j = \overline{1, k}\right)$, һәм $\mu_i = 0 \left(i = \overline{1, m-r}\right)$ вә еләчә дә $\nu_j = 0 \left(j = \overline{1, k}\right)$ олмагла бу әдәдләр системинин сечилмәси шәртинә зиддир. Алынан зиддијјәт көстәрир ки, $\xi_j^{**} \left(j = \overline{1, m-r}\right)$, $x_j \left(j = \overline{1, k}\right)$

системләри васитәсилә тә'јин олунан векторлар хәтти асылы дејилдир. Беләликлә, биз көстәрдик ки, $T_1Tx = 0$ тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы $(m - r + \kappa)$-ја бәрабәрдир. Инди исә $T^*T_1^*x = 0$ тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајыны һесаблајаг. Бу тәнлијин һәр бир һәлли һәмчинин

$$T_1 x = \sum_{i=1}^{\kappa'} \lambda_i'' y_i, \tag{41}$$

тәнлијинин һәлли олар. $\lambda_i'' \left(i = \overline{1, \kappa'}\right)$ сабит әдәдләрдир. (41) тәнлијинин һәллинин олмасы үчүн $\xi_i \left(i = \overline{1, m}\right)$ векторларынын һәмин тәнлијин сағ тәрәфинә ортогонал олмасы зәрури вә һәмдә кафи шәртдир. Она көрә дә

$$\sum_{j=1}^{\kappa'} \lambda_j''(y_i, \xi_j) = 0 \quad \left(j = \overline{1, m}\right) \tag{42}$$

$B_{ij} = (y_i, \xi_j)$ илә ишарә едәк. Онда (42)-дән

$$\sum_{j=1}^{\kappa'} B_{ij}\, \lambda_i'' = 0. \tag{43}$$

$\| B_{ij} \|$ матрисинин рангыны r' илә ишарә едәк. Онда (41)-ин сағ тәрәфи

$$T_1^* x = \sum_{i=1}^{\kappa' - r'} \mu_j'' y_i^* \tag{44}$$

кими јазылар. Бурада $\mu_i'' \left(i = 1, \overline{\kappa' - r'}\right)$ сабит әдәдләрдир $y_i^* \left(i = \overline{1, \kappa' - r'}\right)$, $y_i \left(i = \overline{1, \kappa'}\right)$ векторлары васитәсилә тә'јин олунан хәтти асылы олмајан векторлардыр. (44) тәнлијинин һәлли

$$x = \sum_{i=1}^{\kappa' - r'} \mu_i'' y_i^{**} + \sum_{i=1}^{m'} \nu_j'' \eta_j. \tag{45}$$

Бурада y_i^{**}, $T_1^* x = y_i^*$ тәнлијинин хүсуси һәлләриндән бирилир. Ејни мүлаһизәни тәкрар етсәк, $y_i^{**} \left(i = \overline{1, \kappa' - r'}\right)$ вә $\mu_j \left(j = \overline{1, m'}\right)$ векторларынын бирликдә хәтти асылы олмадығыны көстәрмәк олар. Беләликлә, көстәрдик ки, $T^*T_1^* x = 0$ тәнлијинин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы $\kappa' - r' + m'$ олар. Лакин $T_1Tx = 0$, $T^*T_1^*x = 0$ тәнликләринин хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы бәрабәр олдуғундан

$$m - r + \kappa = \kappa' - r' + m' \tag{46}$$

олар. Дикәр тәрәфдән $\| B_{ij} \|$ матриси $\| A_{ij} \|$ матрисинә нәзә рән транспонерә олунмуш матрис олдуғундан $r' = r$ вә она көрә дә $m - m' = \kappa' - \kappa$. Характеристик һиссәләри ејни олан үмуми сингулјар операторлар үчүн ејни регулијаризатор сечмәк мүмкүн олдуғундан $m - m'$ сабит олмагла $\kappa' - \kappa$-нын сабит олдуғу алыныр.

Тә'риф $x = \kappa - \kappa'$, *T операторунун индекси адланыр.*

IX ФӘСИЛ

МҮЧӘРРӘД СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘР ВӘ БӘЗИ ӘСАС АНЛАЈЫШЛАР

§ 1. ЕКВИВАЛЕНТ РЕГУЛЈАРИЗАТОРЛАР ҺАГГЫНДА

Бу параграфда

$$Tx = ux + vSx + Kx = y \tag{1}$$

мүчәррәд сингулјар тәнлијинин һәлли тәдгиг олунур. (1)-ә дахил олан операторларын вә елементләрин верилмиш R һәлгәсиндә ујғун олараг тә'јин олундуғуну вә веридијини фәрз едирик. Гејд етдијимиз кими, верилмиш T сингулјар операторуна ујғун *еквивалент регулјаризаторун* гурулма мәсәләси сингулјар тәнликләр нәзәријјәсинин мүһүм истигамәтләриндән бири олмушдур. Хүсусән белә мәсәлә мүчәррәд сингулјар тәнликләр үчүн чәтин олмагла бәрабәр бу нәзәријјәнин ән вачиб тәдгигатларындан биридир.

З. И. Хәлилов (1) тәнлијини тәдгиг едәркән T үчүн регулјаризаторун гурулмасы мәсәләсилә мәшғул олмушдур. T-нин тә'сир етдији һәлгә һәмчинин R олмагла белә регулјаризатор үмумијјәтлә еквивалент дејилдир. Биз (1) тәнлијини јенидән тәдгиг едәрәк көстәрәчәјик ки, R-ин тоположи һасилиндә јә'ни, R^2-да тә'сир едән елә оператор гурмаг олар ки, T-јә ујғун еквивалент регулјаризатор олсун. Бу мәгсәдлә (1)-ин һәр тәрәфинә S оператору илә тә'сир едәк:

$$S[ux + vSx + Kx] = Sy. \tag{2}$$

$S^2 = E$ олдуғуну нәзәрә алараг (2)-ни ашағыдакы кими јаза биләрик:

$$SuSSx + SvSx + SKSSx = Sy, \tag{3}$$

$x = \varphi_1$, $Sx = \varphi_2$ илә ишарә етсәк, онда (1) вә (2)-дән ујғун олараг

$$\left.\begin{aligned} u\varphi_1 + v\varphi_2 + K\varphi_1 &= y, \\ SuS\varphi_2 + SvS\varphi_1 + SKS\varphi_2 &= Sy. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пуанкаре—Бертран дүстуруну нәзәрә алсаг:

$$SvS\varphi_1 = v\varphi_1 + Q_1\varphi_1, \tag{5}$$

$$SuS\varphi_2 = uu\varphi_2 + Q_2\varphi_2. \tag{6}$$

Белә ки, Q_1 вә Q_2, R-дә тә'сир едән мүәјјән регулјар оператордур. K регулјар оператор олдуғундан $Q = SKS$, һәмчинин регулјар оператордур. $K = P_{11}$ вә $P_{12} = 0$,

$$Q_1 = P_{21}, \ Q_2 + Q = P_{22}.$$

илә ишарә едиб (5) вә (6)-ны нәзәрә алсаг, (4) ашағыдакы кими јазылар:

$$\left.\begin{array}{l} u\varphi_1 + v\varphi_2 + P_{11}\varphi_1 + P_{12}\varphi_2 = h_1, \\ v\varphi_1 + u\varphi_2 + P_{21}\varphi_1 + P_{22}\varphi_2 = h_2. \end{array}\right\} \tag{7}$$

Бурада,

$$h_1 = y, \quad h_2 = Sy.$$

Ашағыдакы бәрабәрликләрлә тә'јин олунан вектор матрисини вә вектор операторуну көтүрәк:

$$\omega = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Бурада P-нин R^2-да регулјар олдуғу гәбул олунур.

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\varphi = (\varphi_1, \ \varphi_2). \tag{11}$$

Бунлары нәзәрә алсаг, (7) системи

$$\omega\varphi + P\varphi = h \tag{12}$$

оператор тәнлији кими јазылыр.

$\varphi \in R^2$, олдугда һәм ω-нын φ-јә һасили һәмчинин P-нин φ-јә тә'сири мә'лум гануна көрә апарылыр. Демәли, тәдгигатын нәтичәси ону көстәрир ки, (1)-ә гаршы (12) оператор тәнлији гаршы гојулур. Белә ки, P, R^2-да тә'сир едән регулјар оператордур.

Фәрз едәк ки, ω-нын тәрси вар. Буну ω^{-1} ишарә едәк, онда (12)-дән

$$\widetilde{H}\varphi \equiv \varphi + H\varphi = g \tag{13}$$

оператор тәнлијини алырыг. Бурада:

$$H = \omega^{-1} P, \tag{14}$$

$$g = \omega^{-1} h. \tag{15}$$

(13) тәнлији R^2-дә тә'сир едән елә регулјар операторлу тәнликдир ки, бу тәнлијә Рисс нәзәријјәси тәтбиг едилә биләр.

Тә'риф 1. *Әкәр ω-нын тәрси варса, онда T операторуна нормал оператор дејәчәјик.*

Демәли, T нормал оператор олдугда һәмишә (1) тәнлијинә ујғун (13) тәнлијини гурмаг олар. Инди (1) вә (13) тәнликләринин һәлләри арасындакы мүнасибәти тәдгиг едәк. Әввәлчә, ону гејд едәк ки, әкәр (1)-тәнлијинин һәлли мә'лум исә, онда (13)-ә ујғун һәлли гурмаг олар.

Теорем 1. $\varphi=(\varphi_1,\ \varphi_2)$ вектору (13)-үн вә еләчә дә (12)-нин һәллидирсә, онда

$$x=\frac{\varphi_1+S\varphi_2}{2} \tag{16}$$

илә тә'јин олунан елемент (1) тәнлијинин һәллидир.

Исбаты. x-ин (16) илә тә'јин олундуғуну гәбул едәрәк (1) тәнлијинин сол тәрәфини мүәјјән гајда илә чевирәк:

$$Tx=ux+vSx+Kx=u\,\frac{\varphi_1+S\varphi_2}{2}+$$
$$+vS\,\frac{\varphi_1+S\varphi_2}{2}+K\,\frac{\varphi_1+S\varphi_2}{2}=\frac{1}{2}\,(u\varphi_1+v\varphi_2+K\varphi_1)+$$
$$+\frac{1}{2}\,(uS\varphi_2+vS\varphi_1+KS\varphi_2). \tag{17}$$

$S^2=E$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда ашағыдакы бәрабәрлијин алынмасы ашкардыр:

$$S\,(SuS\varphi_2+SvS\varphi_1+SKS\varphi_2)=(uS\varphi_2+vS\varphi_1+KS\varphi_2).$$

Дикәр тәрәфдән (4)-ү нәзәрә алсаг, онда (17)-дән

$$Tx=\frac{y}{2}+\frac{SSy}{2}=y$$

олдуғу алыныр. Демәли, (16) илә тә'јин олунан x, (1) тәнлијинин һәлли олур. Беләликлә, (1) вә (13) тәнликләри еквивалентдир. R^2-да тә'сир едән $\widetilde{H}$ операторуну T-јә ујғун еквивалент регулјаризатор адландырачағыг. Бизим тәдгигатларымызын нәтичәси ону көстәрир ки, бу үсул хүсуси һалда гапалы контурлар үчүн Коши нүвәли скалјар сингулјар тәнликләр үчүн дә ејни күчдә тәтбиг олунур. Белә бир үсулун тәдгиги мүәјјән синиф мүчәррәд сингулјар тәнликләр нәзәријјәсиндә мүһүм рол ојнајыр. Биз (13) тәнлијинин гурулмасында T-нин нормал олмасыны фәрз етмишдик. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, (13) тәнлијини алмаг үчүн $u+v$ вә $\grave{u}-v$ елементләринин регулјар олмасы кифајәтдир. Доғрудан да, (7)-јә дахил олан тәнликләри бир дәфә тәрәф-тәрәфә топламагла вә бир дәфә дә чыхмагла ашағыдакы тәнликләри аларыг

$$\left.\begin{aligned}(u+v)\varphi_1+(u+v)\varphi_2+M_{11}\varphi_1+M_{12}\varphi_2=t_1,\\(u-v)\varphi_1-(u-v)\varphi_2+M_{21}\varphi_1+M_{22}\varphi_2=i_2.\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Бурада
$$M_{11}=P_{11}+P_{21},\quad M_{12}=P_{12}+P_{22},$$
$$M_{21}=P_{11}-P_{21},\quad M_{22}=P_{12}-P_{22},$$
$$t_1=h_1+h_2,\quad t_2=h_1-h_2.$$

$u+v$ вә $u-v$ елементләринин регулјар олдуғуну фәрз етсәк, онда (18)-дән:

$$\varphi_1+\varphi_2+(u+v)^{-1}M_{11}\varphi_1+(u+v)^{-1}M_{12}\varphi_2=(u+v)^{-1}t_1,$$
$$\varphi_1-\varphi_2+(u-v)^{-1}M_{21}\varphi_1+(u-v)\,M_{22}\varphi_2=(u+v)^{-1}t_2.$$

Бурадан исә ашағыдакы системи алырыг:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1+N_{11}\varphi_1+N_{12}\varphi_2+d_1,\\\varphi_2+N_{21}\varphi_1+N_{22}\varphi_2+d_2.\end{aligned}\right\}\qquad(19)$$

Бурада

$$N_{11}=\frac{1}{2}\left[(u+v)^{-1}M_{11}+(u-v)^{-1}M_{21}\right],\qquad(20)$$

$$N_{12}=\frac{1}{2}\left[(u+v)^{-1}\ M_{12}+(u-v)^{-1}M_{22}\right],\qquad(21)$$

$$N_{22}=\frac{1}{2}\left[(u+v)^{-1}M_{12}-(u-v)^{-1}M_{22}\right],\qquad(22)$$

$$N_{21}=\frac{1}{2}\left[\,M_{11}(u+F)^{-1}-M_{\cdot 1}(\,u-F)^{-1}\right]\qquad(23)$$

$$d_1=\frac{1}{2}\left[(u+v)^{-1}t_1+(u-v)^{-1}t_2\,\right],\qquad(24)$$

$$d_2=\frac{1}{2}\left[(u+v)^{-1}t_1-(u-v)^{-1}t_2\right].\qquad(25)$$

(19) системи (13) тәнлији илә ејникүчлүдүр. Демәли, (13)
тәнлијини алмаг үчүн З. И. Хәлиловун нормаллыг шәрти ки-
фајәтдир. Инди бу үсулун сингулјарлыг тәртиби n олан опе-
раторлу тәнликләр үчүн дә доғру олдуғуну кәстәрәк. Јенә дә
(1) тәнлијинин тәтбиги илә мәшғул олаг. Анҹаг һәмин тәнлијә
дахил олан сингулјар S операторундан ашағыдакы шәртин
өдәнилдијини тәләб едәк.

1. $S^n=E,\ n>2$ олан ихтијари натурал әдәддир.

2. $uS-Su$ оператору истәнилән $u\in R$ үчүн регулјар оператордур.

Белә бир тә'рифи нәзәрә алараг (1) тәнлијинин һәр тәрәфинә $S^к\,(к=\overline{0,\ n-1})$ илә тә'сир едәк. $S^\circ\equiv E$ гәбул едирик:

$$S^к(ux+vSx+Kx)=S^кy\ \ (к=\overline{0,n-1}).\qquad(26)$$

Һәмчинин, $S^{n} = E$ олдуғуну нәзәрә алараг, (1) вә (25)-дән

$$S^{к}uS^{n-к}S^{к}x + S^{к}vS^{n-к}S^{к+1}x +$$
$$+ S^{к}KS^{n-к}S^{к}x = S^{к}y \; (к = \overline{0, n-1}). \tag{27}$$

Әкәр $S^{к}x = \varphi_{к}$ илә ишарә етсәк, онда (27)-дән

$$S^{к}uS^{n-к}\varphi_{к} + S^{к}vS^{n-к}\varphi_{к+1} + S^{к}KS^{n-к}\varphi_{к} = S^{к}y \quad (к = \overline{0, n-1}). \tag{28}$$

Пуанкаре—Бертран дүстуруна көрә

$$S^{к}uS^{n-к}\varphi_{к} = u\varphi_{к} + Q_{к}\varphi_{к}, \tag{29}$$

$$S^{к}vS^{n-к}\varphi_{к+1} = v\varphi_{к+1} + P_{к}\varphi_{к+1}. \tag{30}$$

Белә ки, $Q_{к}$, $P_{к}\left(к = \overline{0, n-1}\right)$ R-дә тә'сир едән мүәјјән регулјар оператордур. Еләчә дә $T_{к} = S^{к}KS^{n-к}$ R-дә тә'сир едән регулјар оператордур. $Q_{к} + T_{к} = M_{к}$ илә ишарә едиб, (29) вә (30)-у нәзәрә алсаг (28)-дән

$$u\varphi_{к} + v\varphi_{к+1} + T_{к}\varphi_{к} + P_{к}\varphi_{к+1} = h_{к} \quad \left(к = \overline{0, n-1}\right) \tag{31}$$

операторлу тәнликләр системини алырыг. Белә ки, $h_{к} = S^{к}y \left(к = \overline{0, n-1}\right)$. Көстәрдијимиз гајда үзрә (31) тәнлијини

$$\omega\varphi + H\varphi = h \tag{32}$$

шәклиндә јазмаг олар. Белә ки, ω, n^{2} елементли мүәјјән квадрат матрис, H исә n^{2} сајда операторлу матрис оператордур. Демәли биз (1) тәнлијинә ујғун R^{n}-дә тә'сир едән H регулјар операторлу (32) тәнлијини гаршы гојдуг. Еләчә дә, ω-нын тәрси олдугда (32) тәнлијини

$$Z\varphi \equiv \varphi + \mathscr{E}\varphi = g \tag{33}$$

тәнлији илә әвәз етмәк олар. Нәтичәдә ашағыдакы тәклиф алыныр.

Теорем 2. (1) вә (33) тәнликләри еквивалентдир.

Исбаты. Z, T-нин еквивалент регулјаризаторудурс (33)-үн һәлли верилдикдә (1) тәнлијинин

$$x = \frac{1}{n}\sum_{к=0}^{n-1} S^{n-к}\varphi_{к} \qquad (3$$

дүстуру илә тә'јин олундуғуну көстәрмәк кифајәтдир. Бу, билаваситә јохламагла исбат олунур. Еји гајда үзрә (34)-ү (1)-дә јеринә јазараг (31) системинин доғрулуғуну нәзәрә алсаг, һәмин тәнлијин өдәнилдији алыныр.

Биз һәр ики һалда алынан регулјар операторлу тәнлиј Рисс нәзәријјәсини тәтбиг етмәк үчүн ујғун матрисин тәрсинин олдуғуну фәрз етмишдик. Беләликлә, операторун нормаллыг шәртинә дахил олан белә бир фәрзијјә бә'зән верилмиш һәлгәнин коммутатив олдуғуну тәләб едә биләр. Биз $n=2$ олдугда, R һәлгәсиндән коммутативлик шәртини тәләб етмәмәклә $u+v$ вә $u-v$ елементләринин регулјар олдуғуну фәрз етмишдик. Мүәјјән садә ҹәбри әмәлләр васитәсилә коммутативлик әвәзинә верилмиш елементләрдән дүзәлмиш мүәјјән комбинасијаларын регулјар олмасыны тәләб етмәк кифајәтдир. Белә бир тәклиф даһа мүрәккәб сингулјар операторларын тәдгигиндә дә мараглыдыр. Башга сөзлә, јухарыдакы тәдгигаты нәзәрә алмагла

$$\sum_{к=0}^{n-1} u_к S^к x + Kx = y \tag{35}$$

тәнлијинин дәејни гајда илә тәдгигини көстәрмәк оларды.

§ 2. МҮХТӘЛИФ СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ СИНГУЛЈАР ТӘНЛИКЛӘРИН ТӘДГИГИ

$$Tx = ux + vS_1x + wS_2x + Kx = y \tag{1}$$

тәнлијинә бахаг. S_1 вә S_2, тәртиби ики олан З. И. Хәлилов мә'нада сингулјар операторлар олдуғу фәрз олунур. Белә ки,

$$S_1S_2 = S_2S_1. \tag{2}$$

(1) тәнлијини тәдгиг етмәздән габаг гејд едәк ки, S_1 вә S_2, $S_1^2 = S_2^2 = E$ вә R-дән олан верилән u үчүн $S_1u - uS_1$, $uS_2 - S_2u$ регулјарлыг шәртләрини өдәдикдә ејни шәртләри һәмчинин, $S_1S_2 = S_\circ$ оператору да өдәјир.

$S_1S_2 = S_2S_1$ шәрти дахилиндә $\sigma^2 = E$ олмасы ашкардыр. Инди верилән u-ја ујғун $S_1S_2u - uS_1S_2$ операторунун регулјар олдуғуну көстәрәк:

$$S_1S_2u - uS_1S_2 = S_1S_2u - S_1uS_2 + S_1uS_2 -$$
$$- uS_1S_2 = S_1(S_2u - uS_2) + (S_1u - uS_1)S_2. \tag{3}$$

вә S_2 операторларынын мәһдудлуғундан вә $S_1u - uS_1$, $-uS_2$ операторларынын регулјарлығындан, $S_1S_2u - uS_1S_2$ ераторунун регулјарлығы алыныр.

Биз $S^n = E$ олан һалын тәдгигиндә фактик олараг белә бир хассәдән исбатсыз истифадә етмишдик. Јә'ни, $S^n \equiv E$ вә истәилән $u \in R$ үчүн $uS - Su$-нын регулјарлыг шәртиндән $(uS^к - S^кu)$-нын регулјар олмасыны гәбул етмишдик. (1) тәнлијини тәдгиг етмәк үчүн һәмин тәнлијин һәр тәрәфинә S_1, S_2 вә S_1S_2 операторлары васитәсилә тә'сир едәк вә $S_1S_2 = S_2S_1$ дәнилдијини нәзәрә алаг:

$$S_1uS_1S_1x + S_1vS_1x + S_1wS_1S_1S_2x + S_1KS_1S_1x = S_1y, \tag{4}$$
$$S_2uS_2S_2x + S_2vS_2S_1S_2x + S_2wS_2x + S_2KS_2S_2x = S_2y, \tag{5}$$

$$S_1S_2uS_1S_2S_1S_2x + S_1S_2vS_1S_2S_2x + S_1S_2wS_1S_2S_1x + \\ + S_1S_2KS_1S_2S_1S_2x = S_1S_2y. \tag{6}$$

$$x = \varphi_1,\ S_1x = \varphi_2,\ S_2x = \varphi_3,\ S_1S_2x = \varphi_4$$

илә ишарә етсәк, онда (1), (4), (5) вә (6) тәнликләриндән

$$u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + K\varphi_1 = y, \tag{7}$$

$$S_1uS_1\varphi_2 + S_1vS_1\varphi_1 + S_1wS_1\varphi_4 + S_1KS_1\varphi_2 = S_1y, \tag{8}$$

$$S_2uS_2\varphi_3 + S_2vS_2\varphi_4 + S_2wS_2\varphi_1 + S_2KS_2\varphi_3 = S_2y, \tag{9}$$

$$S_1S_2uS_1S_2\varphi_4 + S_1S_2vS_1S_2\varphi_3 + S_1S_2wS_1S_2\varphi + \\ + S_1S_2KS_1S_2\varphi_4 = S_1S_2. \tag{10}$$

Пуанкаре—Бертран дүстуруна көрә:

$$S_1uS_1\varphi_2 = u\varphi_2 + P_1\varphi_2, \tag{11}$$

$$S_1vS_1\varphi_1 = v\varphi_1 + P_2\varphi_1, \tag{12}$$

$$S_1wS_1\varphi_4 = w\varphi_4 + P_3\varphi_4, \tag{13}$$

$$S_2uS_2\varphi_3 = u\varphi_3 + P_4\varphi_3, \tag{14}$$

$$S_2vS_2\varphi_4 = v\varphi_4 + P_5\varphi_4, \tag{15}$$

$$S_2wS_2\varphi_1 = w\varphi_1 + P_6\varphi_1, \tag{16}$$

$$S_1S_2\,u\,S_1S_2\varphi_4 = u\varphi_4 + P_7\varphi_4, \tag{17}$$

$$S_1S_2vS_1S_2\varphi_3 = v\varphi_3 + P_8\varphi_3, \tag{18}$$

$$S_1S_2wS_1S_2\varphi_2 = w\varphi_2 + P_9\varphi_2. \tag{19}$$

Ашағыдакы операторлары дахил едәк:

$$Q_{11} = K,\ Q_{1j} = 0 \quad (j = 2, 3, 4),$$
$$Q_{21} = P_2,\ Q_{22} = P_1 + SkS_1,\ Q_{28} = 0,\ Q_2 = P_4,$$
$$Q_{31} = P_7,\ Q_{32} = 0,\ Q_{33} = P_8 + S_2KS_2,$$
$$Q_{34} = P_6,\ Q_{41} = 0,\ Q_{42} = C_7,$$
$$Q_{43}\,P_9,\ Q_{44} = P_8 + S_1S_2KS_1S_2.$$

Белә оператору дахил етдикдән сонра (7), (8), (9) вә (10) тәнликләр системи симметрик олараг ашағыдакы кими јазылар:

$$u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + \sum_{j=1}^{4} Q_{1j}\varphi_j = h_1, \tag{20}$$

$$u\varphi_1 + u\varphi_2 + w\varphi_4 + \sum_{j=1}^{4} Q_{2j}\varphi_j = h_2, \tag{21}$$

$$w\varphi_1 + u\varphi_3 + v\varphi_4 + \sum_{j=1}^{4} Q_{3j}\varphi_j = h_3, \tag{22}$$

$$w\varphi_2 + v\varphi_3 + u\varphi_4 + \sum_{j=1}^{4} Q_{4j}\varphi_j = h_4. \tag{23}$$

Бурада, $h_1 = y$, $h_2 = S_1 y$, $h_2 = S_2 y$ $h_4 = S_1 S_2 y$, беләликлә, тәдгигат нәтичәсиндә (1) тәнлијинә гаршы R^4-дә тәсир едән $Q_{ij}\,(i, j = \overline{1, 4})$ регулјар опрторлу тәнликләр системини алырыг:

$$\omega = \begin{pmatrix} u & v & w & 0 \\ v & u & 0 & w \\ w & 0 & u & v \\ 0 & w & v & u \end{pmatrix} \tag{24}$$

вә $Q = \| Q_{ij} \|$.

$h = (h_1, h_2, h_3, h_4)$, $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$ илә ишарә етсәк, (20), (21), (22) вә (23) системини

$$\omega\varphi + \grave{U}\varphi = h \tag{25}$$

тәнлији шәклиндә јазмаг олар. Еләчә дә T нормал јә'ни; ω-нын тәрси олдугда (25)-дән

$$\varphi + \tilde{Q}\varphi = \tilde{h} \tag{26}$$

шәклиндә јазылыр, бурада, $\tilde{Q}$-нүн регулјар олмасы гәбул олунур. S_1 вә S_2 мүхтәлиф олан һалда да ашағыдакы тәклифи ифадә етмәк олар.

Теорем 3. *T* нормал оператор исә,

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$$

(26) тәнлијинин һәллидирсә, онда

$$x = \frac{1}{4}[S_1 + S_1\varphi_2 + S_2\varphi_3 + S_1 S_2\varphi_4] \tag{27}$$

(1) тәнлијинин һәлли олар.

Бурада апарылан тәдгигатлар ејни үсул илә даһа мүрәккәб мүхтәлиф операторлу сингулјар тәнликләрә тәтбиг олабиләр. Мәсәлән, бу үсул

$$ux + \sum_{i_1, i_2, \ldots i_n} w_{i_1, i_2, \ldots, i_n} S_1^{i_1}, S_2^{i_2} \cdots S_p^{i_n} x = y \tag{23}$$

тәнлијинә тәтбиг олар, belә ки, $S_1^n = S_2^n = S_p^n = E$ сингулјар операторлардыр. Көстәрдијимиз кими ,ујғун системи тәшкил етмәк үчүн $S_1^{p_1} S_2^{p_2} \ldots S_p^{p_p}$ операторлары васитәсилә тә'сир етмәклә $S_i\,(i = \overline{1, p})$ операторларынын гаршылыглы јердәјишмәләрини фәрз етмәк лазымдыр. Бу һалда ујғун системә дахил олан мәчһулларын сајы n^p-јә бәрабәр вә ујғун системин һәлли мә'лум исә верилмиш тәнлијин һәллини гурмаг олар. Бу гејд етдикләримиз јалныз бөјүк һесабламаларла әлагәдар олдуғундан јухарыда гејдләримизлә кифајәтләнәҹәјик. Нәһајәт ашағыдакы гејди зәрури һесаб едирик. Бүтүн бизим тәдгигатларымызда $S_pS_q = S_qS_p$ шәртләрини ашағыдакы бәрабәрликләрлә әвәз етмәк олар:

$$S_pS_q = S_qS_p + Q_{p,q}$$

белә ки, $Q_{p,q}$ мүәјјән регулјар операторлардыр.

§ 3. ИНВОЛЈУСИЈАЛЫ ҺӘЛГӘЛӘРДӘ СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘРИН ТӘДГИГИ

Фәрз едәк ки, R һәлгәси симметрикдир. Бу параграфда

$$Tx \quad . \, x \quad vx + wSx + \delta S\bar{x} + \varphi S\bar{x} + \psi \bar{S}\bar{x} + Kx + H\bar{x} = y \qquad (1)$$

тәнлијинин һәлли тәдгиг олунур. (1)-ә дахил олан операторлар инволјусијалы R һәлгәсиндә тә'сир едән операторлардыр.

Теорем 4. (1) тәнлијинә гаршы мүхтәлиф операторлу еквивалент сингулјар тәнлик гаршы гојмаг олар.

Исбаты. Бу мәгсәдлә (1)-ин һәр тәрәфиндән көстәрилән инволјусија васитәсилә гошма көтүрсәк, онда ашағыдакы тәнлији аларыг:

$$\bar{u}\bar{x} + v\bar{x} + \bar{w}\bar{S}\bar{x} + \bar{\delta}\, S\bar{x} + \bar{\varphi}S\bar{x} +$$
$$+ \bar{\psi}Sx + \bar{K}\bar{x} + \bar{H}x = \bar{y}. \qquad (2)$$

R^2 һәлгәсиндә тә'сир едән $S_c = [S, \bar{S}]$ операторуну тә'јин едәк, $\omega = [\varphi_1, \varphi_2] \in R^2$ исә, онда

$$S_c\omega = [S, \bar{S}]\,[\varphi_1, \varphi_2] = [S\varphi_1, \bar{S}\varphi_2].$$

Көстәрәк ки, S_c, R^2-да тә'сир едән сингулјар оператордур.

$$S_c^2\omega = S_c[\varphi_1, \varphi_1] = S_c[S\varphi_1, \bar{S}\varphi_2] = [S, \bar{S}]\,[S\varphi_1, \bar{S}\varphi_2] =$$
$$= [S^2\varphi_1, \bar{S}^2\varphi_2] = [\varphi_1, \varphi_2].$$

Демәли, $S_c^2 \equiv E'$; белә ки, E', R^2-да тә'сир едән ваһид оператордур:

$$[S_c\omega_1 - \omega_1S_c]\,\omega = \{[S, \bar{S}]\,[\varphi_1, \varphi_2] - [\varphi_1, \varphi_2]\,[S, \bar{S}]\}\,[\psi_1, \psi_2] =$$
$$= [S\varphi_1\psi_1, \bar{S}\varphi_2\psi_2] - [\varphi_1S\psi_1, \varphi_2S\psi_2] = [(S\varphi_1)\psi_1 - \varphi_1S\psi_1] +$$
$$+ [(S\varphi_2)\psi_2 - \varphi_2\bar{S}\psi_2] = [(S\varphi_1 - \varphi_2S)\psi_1] + [(\bar{S}\varphi_2 - \varphi_2\bar{S})\psi_2].$$

$S\varphi_1 - \varphi_1S$ вә $\bar{S}\varphi_2 - \varphi_2\bar{S}$ регулјар операторлар олдуғундан, һәмчинин $S_c\omega_1 - \omega_1S_c$ оператору да регулјардыр. Биз бурада ја'ни R^2-да олан чәбри әмәлләрдән бири ики векторун һасили тәбии олараг дахили һасилләрдән дүзәлмиш вектору көтүрдүк. Инди (1) вә (2) тәнлијини бирликдә көтүрәрәк бу тәнликләр васитәсилә S_1' вә S_2' сингулјар операторлары васитәсилә тә'јин олунан еквивалент сингулјар тәнлик гураг. Она көрә ашағыдакы вектор вә оператор матрисләрини тә'јин едәк:

$$u_0 = \begin{pmatrix} u & v \\ \overline{v} & \overline{u} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$v_0 = \begin{pmatrix} w & \delta \\ \overline{\delta} & \overline{w} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$w_0 = \begin{pmatrix} \varphi & \psi \\ \overline{\psi} & \overline{\varphi} \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$M = \begin{pmatrix} K & H \\ \overline{H} & \overline{K} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$z = (y, \overline{y}), \tag{7}$$

$$S_1' = [S, \overline{S}], \tag{8}$$

$$S_2' = [\overline{S}, S]. \tag{9}$$

Бунлары нәзәрә алараг (1) вә (2)-дән ашағыдакы оператор тәнлијини гура биләрик:

$$u_0\omega + v_0 S_1'\omega + w_0 S_2'\omega + M\omega = z. \tag{10}$$

Демәли, нәтичәдә мүхтәлиф сингулјар операторлу тәнлик алырыг. Биз белә тәнлији тәдгиг едәркән фәрз етмишдик ки $S'S'_2 = S'_2S'_1$ вә јахуд да $S_1'S_2' - S_1'S_1'$ регулјар оператор олсун.

$$S_1' S_2'' = [S, \overline{S}]\,[\overline{S}, S] = [S\overline{S}, \overline{S}S],$$

$$S_1'S_2' = [\overline{S}, S]\,[S, \overline{S}] = [\overline{S}S, S\overline{S}].$$

Бу бәрабәрликләр көстәрир ки, S вә $\overline{S}$ операторларындан ја $S\overline{S} = \overline{S}S$ вә јахуд да $S\overline{S} - \overline{S}S$ фәргинин регулјар олмасыны тәләб етмәлијик. Әввәлчәдән инволјусијалы һалгәдә елә сингулјар операторлу сингулјар тәнлијә бахмаг оларды ки, һәмин тәнлијә дахил олан оператор $S = \overline{S}$ хассәли олсун. Онда (10). $[S, \overline{S}] = S_c$ сингулјар операторлу тәнлик олмагла белә шәртләрин өдәнилмәсини тәләб етмәјә еһтијач галмазды. Инди (11) вә (10) тәнликләринин еквивалент олдуғуну көстәрмәклә кифајәтләнәк. Әкәр x, (1) тәнлијинин һәллидирсә, онда $(x, \overline{x}) = \omega$ шүбһәсиз (10) тәнлијинин һәлли олар. Инди әксини фәрз едәк, ја'ни фәрз едәк ки,

$$\omega = (\varphi_1, \varphi_2),$$

(10) тәнлијнинин һәллидир. Ашағыдакы кими вектор тә'јин
едәк:

$$x = \frac{1}{2}\left[\omega_1 + \overline{\omega_2}\right]. \qquad (11)$$

Билаваситә көстәрәк ки, белә тә'јин олунан x, (1) тәнлији-
нин һәллидир. Әввәлчә ону гејд едәк ки, ω, (10)-ун һәлли исә
онда ω_1, ω_2 ашағыдакы системин һәллидир.

$$\left.\begin{aligned} &u\omega_1 + v\omega_2 + wS\omega_1 + \delta S\omega_2 + \varphi\overline{S}\omega_1 + \\ &\quad + \psi\overline{S}\,\omega_2 + K\omega_1 + H\omega_2 = y, \\ &\overline{v}\,\omega_1 + \overline{u}\omega_2 + \delta\,\overline{S}\,\omega_1 + \overline{w}\,\overline{S}\omega_2 + \overline{\psi}S\omega_1 + \\ &\quad + \overline{\varphi}\,S\omega_2 + \overline{H}\omega + \overline{K}\omega_2 = \overline{y}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Инди x-ин (11) васитәсилә тә'јин олундуғуну гәбул едәрәк,
(1) тәнлијинин сол тәрәфи үчүн елементар чевирмәләр апараг:

$$u\,\frac{\omega_1 + \overline{\omega_2}}{2} + v\,\frac{\overline{\omega_1} + \omega_2}{2} + wS\,\frac{\omega_1 + \overline{\omega_2}}{2} + \delta S\,\frac{\overline{\omega_1} + \omega_2}{2} +$$

$$+ \varphi\overline{S}\,\frac{\omega_1 + \overline{\omega_2}}{2} + \psi\overline{S}\,\frac{\overline{\omega_1} + \omega_2}{2} + K\,\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} +$$

$$+ H\,\frac{\overline{\omega_1} + \omega_2}{2} = \frac{1}{2}\left[u\omega_1 + v\omega_2 + wS\omega_1 + \delta S\varphi_2 + \right.$$

$$\left. + \varphi\,\overline{S}\omega_1 + \psi\,\overline{S}\omega_2 + K\omega_1 + H\omega_2\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\overline{v}\omega_1 + \overline{u}\omega_2 + \overline{\delta\,S}\omega_1 + \overline{w}\,\overline{S}\,\omega_2 + \right.$$

$$\left. + \overline{\psi}S\omega_1 + \overline{\varphi}S\omega_2 + \overline{H}\omega_1 + \overline{K}\;\omega_2\right] - = \frac{y}{2} + \frac{y}{2} = y.$$

Демәли, (11) илә тә'јин олунан x (1) тәнлијинин һәлли олур.
Бунунла да (1) вә (10) тәнликләринин еквивалент олдуғу
исбат олунур.

Гејд. Әкәр верилмиш тәнликдә иштирак едән сингулјар S
операторy $S^n = E$ хассәли оларса, ејни үсулла тәдгигаты да-
вам етдирмәклә даһа үмумиләшмиш тәнликләрә бахмаг олар.
Бундан әлавә бу үсулла (1) тәнлијинә ујғун олан мүхтә-
лиф сингулјар операторлу тәнликләри тәдгиг етмәк олар.

Инволјусијалы R һәлгәсиндә тә'сир едән аддитив вә һәги-
ги ејничинсли сингулјар S операторунун компонентләри һаг-
гында бә'зи хассәләри көстәрәк. Мә'лумдур ки, инволјусијалы
R һәлгәсиндә тә'сир едән һәр бир аддитив вә һәгиги ејничинс-
ли оператор јеканә олараг ашағыдакы кими көстәрилир:

$$Sx = S_1x + S_2\overline{x}. \qquad (13)$$

Белә ки, S_1 вә S_2, R-дә тә'сир едән хәтти операторлар олмагла ашағыдакы бәрабәрликләр илә тә'јин олунур:

$$S_1x = \frac{Six + iSx}{2i}, \tag{14}$$

$$S_2x = \frac{iS\overline{x} - Si\overline{x}}{2i}. \tag{15}$$

(13)-ү нәзәрә алараг S^2x композисијасыны тә'јин едәк:

$$\begin{aligned} S^2x = S[Sx] &= S_1[Sx] + S_2[\overline{S}\,\overline{x}] = \\ &= S_1[S_1x + S_2\overline{x}] + S_2[\overline{S_1}\,\overline{x} + \overline{S}_2x] = \\ &= [S_1^2 + S_2\overline{S}_2]\,x + [S_1S_2 + S_2\overline{S_1}]\,\overline{x}. \end{aligned} \tag{16}$$

Она көрә, әкәр биз S-ин R-дә тә'сир едән

$$S^2 = E \tag{17}$$

хассәли һәгиги ејничинсли вә аддитив оператор олдуғуну фәрз етсәк, онда (16)-дан

$$S_1^2 + S_2\overline{S}_2 = E \tag{18}$$

вә

$$S_1S_2 - S_2\overline{S_1} = 0. \tag{19}$$

Белә бир хассәдән истифадә едәрәк инволјусијалы R һәлгәсиндә тә'сир едән аддитив вә һәгиги ејничинсли сингулјар тәнликләрин һәллилә башга үсулла да мәшғул олмаг олар. Мәсәлән:

$$Tx = ux + vSx + Kx = y \tag{20}$$

тәнлијини тәдгиг едәк, фәрз едәк ки, S, $S^2 = E$ олмагла һәгиги ејничинсли вә аддитив сингулјар оператордур. (13)-ү нәзәрә алараг (19)-у ашағыдакы кими јаза биләрик:

$$ux + vS_1x + vS_2\overline{x} + K_1x + K_2\overline{x} = y.$$

Биз һәмчинин K-нын ејнитипли регулјар оператор олдуғуну фәрз едирик. Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфиндән гошма (инволјусија) алсаг:

$$\overline{u}\,\overline{x} + \overline{v}\,\overline{S}_1\,\overline{x} + \overline{v}S_2x + \overline{K}_1\,\overline{x} + \overline{K}_2x = \overline{y} \tag{21}$$

тәнлијини алырыг. Бурадан

$$\begin{aligned} &u_0\omega + v_0S_0'\omega + Hw = h, \\ &v_0 = (v, \overline{v}). \end{aligned} \tag{22}$$

Белә ки,

$$u_0 = (u, \overline{u})$$

$$S_0' = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ \overline{S}_2 & \overline{S_1} \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 \\ \overline{K}_2 & \overline{K}_1 \end{pmatrix},$$

$$\omega=(x,\ \overline{x}),\qquad h=(y,\ \overline{y}).$$

$\omega=(\omega_1,\ \omega_2)$, R^2 һəлгəсиндəн көтүрүлмүш елемент исə онда $S_0'\omega$ ашағыдакы кими тə'јин олунар:

$$S_0'\omega=\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ \overline{S}_2 & \overline{S}_1 \end{pmatrix}(\omega_1,\ \omega_2)=[S_1\omega_1+S_2\omega_2,\ \overline{S}_2\omega_1+\overline{S}_1\omega_2\ ].$$

Асанлыгла јохламаг олар ки,

$$S_0'S_0'\omega=S_0'(S_0'\omega)\ =S_0'\ [S_0'(\omega_1,\ \omega_2)\,[=$$

$$=[S_1^2\omega_1+S_1S_2\omega_2+S_2\overline{S}_2\omega_1+S_2\overline{S}_1\omega_2,$$

$$\overline{S}_2S_1\omega_1+\overline{S}_2S_2\,\omega_2+\overline{S}_1\,\overline{S}_2\omega_1+\overline{S}_1^2\,\omega_2]=$$

$$=[(S_1^2+S_2\overline{S}_2)\,\omega_1+(S_1S_2+S_2\overline{S}_1\ )\,\omega_2,$$

$$(\overline{S}_2S_1+\overline{S}_1\,\overline{S}_2)\,\omega_1+(\overline{S}_2\,S_2+\overline{S}_1^2)\,\omega_2]. \tag{23}$$

(17) вə (18) бəрабəрликлəрини нəзəрə алсаг, (23) бəрабəрлијинин сағ тəрəфинин $[\omega_1,\ \omega_2]=\omega$ олдуғу алыныр. Белəликлə, $S_0'S_0'\equiv E'$. Белə ки, E', R^2-да тə'сир едəн ејнилик оператордур). Елəчə дə $S_0\omega-\omega S_0$-ын регулјар оператор олдуғуну јохламаг олар. Əввəлчə гејд едəк ки,

$$[uS-Su]\,x=(uS_1-S_1u)\,x+(uS_2-S_2u)\,\overline{x}$$

бəрабəрлијиндəн вə $uS-Su$ фəргинин регулјар олмасындан uS_1-S_1u вə uS_2-S_2u операторларынын регулјар олмалары чыхыр. Доғрудан да (14) вə (15) бəрабəрликлəринə көрə бу операторларын һəр бири $uS-Su$ операторунун садə комбинасијасы кими көстəрилир.

Јери кəлмишкəн бир хассəни дə гејд едəк, һəр һансы P оператору регулјар исə, онда $\overline{P}$-дə һəмчинин регулјар оператор олар. Нəһајəт,

$$S_0'\omega-S_0'\omega=\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ \overline{S}_2 & \overline{S}_1 \end{pmatrix}(\omega_1,\ \omega_2)-(\omega_1,\ \omega_2)\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ \overline{S}_2 & \overline{S}_1 \end{pmatrix}=$$

$$=[S_1\omega_1-\omega_1S_1+S_2\omega_2-\omega_2S_2,\ \ \overline{S_2\,\overline{\omega}_1-\overline{\omega}_1S_2}+\overline{S_1\overline{\omega}_2-\overline{\omega}_2S_1}]$$

бəрабəрлијиндəн $S_0'\omega-\omega S_0'$ операторунун регулјар олмасы чыхыр. Бу тəдгигатын нəтичəсини нəзəрə алсаг, ашағыдакы теореми алырыг:

Теорем 5. ***R* инволјусијалы һəлгəдə верилмиш һəгиги ејничинсли вə аддитив *S* сингулјар операторлу (20) тəнлијинə гаршы, R^2-да тə'сир едəн хəтти S_0' сингулјар операторлу еквивалент (22) тəнлијини гаршы гојмаг олар.**

§ 4. ВАҺИДИ ОЛМАЈАН ҺӘЛГӘЛРӘ ДӘ СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘРИН ТӘДГИГИ

Фәрз едәк ки, ашағыдакы сингулјар тәнлик верилир:

$$Tx \equiv ax + bSx + ux + vSx + Kx = y, \qquad (1)$$

белә ки, u, v, y ваһиди олмајан нормалашмыш R һәлгәсиндә верилмиш елементләрдир. S вә K исә бу һәлгәдә тә'сир едән ујғун сингулјар вә регулјар операторлардыр. Нәһајәт, әкәр R һәлгәси Φ мејданында тә'јин едилмишдирсә, онда a вә b, Φ-дән көтүрүлмүш әдәдләрдир. (1)-и тәдгиг етмәдән габаг гејд едәк ки, үмумијјәтлә ваһиди олмајан фәзаларда билаваситә тәдгигат апармаг үчүн јени тә'рифләр вә бунлар илә әлагәдар олан бир чох үмумиләшдирилмәләр верилмәлидир.

Әкәр R һәлгәси ваһид елементли һәлгә олса иди, онда

$$ae + u = \tilde{u}, \qquad (2)$$

$$be + v = \tilde{v}, \qquad (3)$$

ишарә етмәклә (1) тәнлијини З. И. Хәлиловун тәнлијинә кәтирмәк оларды. Јә'ни (1)-дән

$$\tilde{u}x + \tilde{v}Sx + Kx = y \qquad (4)$$

тәнлијини алардыг. Белә ки, e ваһид елементдир. Әкәр биз (1) тәнлијинә ујғун T_1 регулјаризаторуну (1) шәклиндә ахтарыб вә T_1T композисијаны тә'јин етмиш олсајдыг, R-ин ваһиди олмадығындан нормаллыг шәртинин верилмәси мүәјјән мә'нада чәтин олмагла белә регулјаризаторун варлығы һаггында ејни гајда үзрә мүлаһизә јүрүтмәк олмазды. Нәһајәт, R-ә ујғун ваһид елементли R' һәлгәсини гаршы гојмаг, һәлә верилмиш тәнлијә ујғун регулјаризаторун гурулма мәсәләсини һәлл етмир. Бу дедикләримизи нәзәрә алсаг, (1) тәнлијинин ајрыча тәдгиг олмасы мараглыдыр. (1) тәнлијини тәдгиг етмәкдән өтрү R-ә гаршы ваһид елементли R' һәлгәсини гаршы гојаг. Мә'лумдур ки, белә һәлгә ашағыдакы кими гурулур. R' Φ вә R-ин тоположи һасили кими тә'јин олунур:

$$R' = \Phi \times R.$$

Белә ки, R'-дә чәбри әмәлләр ашағыдакы кими тә'јин олунур:

$$x_1 = [\alpha, x], \quad y_1 = [\beta, y].$$

R'-ә дахил олан елементләр исә онда:

$$x_1 + y_1 = [\alpha + \beta, x + y],$$

$$x_1 y_1 = [\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy],$$

$$\| x_1 \| = \| x \| + | \alpha | .$$

Бу әмәлләри нәзәрә алсаг, јохламаг олар ки, R' һәмчинин нормалашмыш һәлгә вә $e' = [1, \theta]$ исә бу һәлгәнин ваһидидир.

Бурада θ, R-ин сыфрыдыр. R'-дә тә'сир едән ашағыдакы операторлары көтүрәк:

$$S_0 = [1, S], \quad K_1 = [1, A].$$

Әкәр $x_1 = [\alpha, x]$, R'-ә дахил олан елемент исә $S_0 x_1 = [\alpha, Sx]$ кими тә'јин олунур. Еләчә дә K_1 регулјар олмасыны $S_0^2 = E'$ олдуғуну R'-дә асанлыгла јохламаг олар. Она көрә $u'S_0 - S_0 u'$ оператору регулјардыр. Бурада E', R'-дә тә'сир едән ејнилик кими оператор вә u', R'-ә дахил олан истәнилән елементдир. Ашағыдакы кими сингулјар тәнлијә бахаг:

$$\tilde{T}x' = [a, u]\,[\beta, x] + [b, v]\,S_0\,[\beta, x] + K_1\,[\beta, x] = [\gamma, y_0], \tag{5}$$

бурада $y_0 = y + \alpha u + \beta v$, $[a, u] = \tilde{u}$,

$$[\beta, x] = x', \quad [b. v] = \tilde{v}, \quad [\gamma, y_0[= \tilde{y}$$

ишарә етсәк, онда (5) тәнлији ашағыдакы кими јазылыр:

$$\tilde{T}x' = \tilde{u}x' + \tilde{v}S_0x' + K_1x' = \tilde{y}. \tag{6}$$

Бу тәнлик R'-дә верилмиш сингулјар σ операторлу тәнликдир.

$$\beta + a\beta + b\beta = \gamma$$

олдуғуну гәбул едәк. Белә олдугда ашағыдакы нәтиҹәни алырыг. Әкәр x, (1)-ин һәлли исә, онда $x' = [\beta, x]$ (5). Тәнлијинин һәлли, тәрсинә әкәр $x' = [\beta, x]$ (5)-ин һәлли исә, x, (1) тәнлијинин һәлли олур. Демәли, (1) вә (5) еквивалент тәнликләрдир. Әкәр $\beta = 0$ оларса, онда $\gamma = 0$. Она көрә (5) ашағыдакы кими јазылыр:

$$\tilde{T}x' = [a, u]\,[0, x] + [b, v]\,S_0\,[0, x[+ K_1\,[0, x] = [0, y]. \tag{7}$$

T оператору үчүн нормаллыг шәрти тапылмасы мәгсәдилә $\tilde{T}$ операторуна ујғун регулјар операторун, гурулмасыны R'-дә ахтараҹағыг. Фәрз едәк ки, $\tilde{T}_0$, $\tilde{T}$-јә ујғун регулјар оператордур. $\tilde{T}$ нормал оператор олдугда, белә регулјаризатор З. И. Хәлилов тәрәфиндән гурулмушдур.

$$\tilde{T}_0x' = \tilde{u}_0x' + \tilde{v}_0S_0x' + K_0x'$$

бәрабәрлији илә тә'јин олунан $\tilde{T}_0$-ын $\tilde{T}$ үчүн регулјаризатор олдуғуну фәрз едәк.

$$\tilde{T}_0\tilde{T}x' = \tilde{T}_0\tilde{y} \tag{8}$$

бәрабәрлијини көтүрәк вә фәрз едәк ки, $\tilde{T}$ оператору нормалдыр. Белә операторун нормал олмасы үчүн $\tilde{u} + \tilde{v}$ вә $\tilde{u} - \tilde{v}$ елементләри регулјар олмалыдыр. $u_1 = \tilde{u} + \tilde{v}$ вә $v_1 = \tilde{u} - \tilde{v}$ исә, онда

$$u_1 u_1^{-1} = e', \quad v_1 v_1^{-1} = e',$$

$$u_1 = \left[\delta_1, \ \tilde{\tilde{u}}_1\right], \quad u_1^{-1} = \left[\delta_2, \ \tilde{\tilde{u}}_2\right].$$

Онда

$$\left[\delta_1, \ \tilde{\tilde{u}}_1\right]\left[\delta_2, \ \tilde{\tilde{u}}_2\right] = [1, \ \theta],$$

бурадан исә

$$\left[\delta_1\delta_2, \ \delta_1\tilde{\tilde{u}}_2 + \delta_2\tilde{\tilde{u}}_1 + \tilde{\tilde{u}}_1\tilde{\tilde{u}}_2\right] = [1, \theta]. \tag{9}$$

Фәрз едәк ки, $\delta_1\delta_2 = 1$ онда (9)-дан

$$\delta_1 \tilde{\tilde{u}}_2 + \delta_2\tilde{\tilde{u}}_1 + \tilde{\tilde{u}}_1\tilde{\tilde{u}}_2 = 0. \tag{10}$$

$v_1 = \left[\delta_3, \ \tilde{\tilde{v}}_1\right]$ вә $v_1^{-1} = \left[\delta_4, \ \tilde{\tilde{v}}_2\right]$ оларса, еләчә дә $\delta_3\delta_4 = 1$ фәрз етмәклә

$$\delta_4 \tilde{\tilde{v}}_1 + \delta_3\tilde{\tilde{v}}_2 + \tilde{\tilde{v}}_1 \tilde{\tilde{v}}_2 = 0, \tag{11}$$

$$\delta_1\delta_2 = 1, \quad \delta_3\delta_4 = 1.$$

Бәрабәрликләрини гәбул етсәк, (10) бәрабәрлијинин сол тәрәфи $\delta_1\tilde{\tilde{u}}_2$, $\delta_2\tilde{\tilde{u}}_1$ елементләринин квази һасили, еләчә дә (11) бәрабәрлијинин сол тәрәфи $\delta_4 v_1$ вә $\delta_3 v_2$ елементләринин квази һасилидир. Белә елементләрин квази һасилләри ашағыдакы шәкилдә јазылыр:

$$\delta_1 u_2 \circ \delta_2\tilde{u}_1 = 0, \tag{12}$$

$$\delta_4\tilde{\tilde{v}}_1 \circ \delta_3\tilde{\tilde{v}}_2 = 0. \tag{13}$$

Бизим тәдгигатымыздан көрүндүјү кими, (12) вә (13) нормаллыг шәртләрини u, v вә бунларын квази тәрсләри васитәсилә ифадә етмәк олар. Әкәр биз ујғун ејничинсли тәнликләр һаггында мүлаһизә десәк бу тәнликләрин еквивалент олмасы үчүн $\beta = 0$ вә $\gamma = 0$ көтүрмәлијик. Башга сөзлә, әкәр $\beta \neq 0$ вә еләчә дә $\gamma \neq 0$ фәрз олунарса, гејд олунмуш ејни чинсли еквивалент тәнликләрин еквивалентлији позулур.

§ 5. ҮМУМИЛӘШМИШ ОПЕРАТОРЛУ СИНГУЛЈАР ТӘНЛИКЛӘР

Бизим бу фәсилдә шәрһ етдијимиз тәнликләрдә әлавә шәрт дахилдә S сингулјар операторундан $S^p = E$ шәртини өдәмәсини тәләб етмишдик. Бурада $p \geqslant 2$ олан натурал әдәддир.

Мүәјјән бир синиф сингулјар операторлу тәнликләри тәдгиг едилмишдир ки, һәмин тәнлијә дахил олан сингулјар оператор полиномиал мүнасибәтдән тә'јин олунур. Биз апарылан тәдгигат нәтичәсиндә садә һал үчүн бә'зи мүһүм нәтичәләрини гејд едәчәјик. Она көрә дә фәрз едәк ки, бизә

$$Tx \equiv ux + vSx + Kx = y. \qquad (1)$$

u, v, y бахылан R Банах һәлгәсиндә верилмиш елементләр T, S бурада тә'сир едән мәһдуд операторлардыр. Белә ки, K регулјар вә S исә ашағыдакы шәртләри өдәјән сингулјар оператордур:

$$1.\ S^2 + \alpha S + \beta E = 0 \qquad (2)$$

$u \in R$ олан истәнилән u үчүн

$$uS - Su \qquad (3)$$

оператору регулјардыр. Бурада $\alpha = 0$, $\beta = 1$ оларса, $S^2 = E$ олмагла З. И. Һәлилов мә'нада сингулјар операторуну алырыг. Гејд едәк ки, (2)-ни өдәјән S тамам кәсилмәз олмаз, әкс һалда $\alpha S + S^2$ там кәсилмәз олмагла E-нин там кәсилмәз олмағы алынарды. Бу исә мүмкүн дејилдир. (2)-јә ујғун

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0 \qquad (4)$$

тәнлијини көтүрәк. (4) тәнлијинин көкләри бәрабәр исә, онда (4)-дән

$$(\lambda - \gamma)^2 = 1$$

кими јазараг

$$(S - \gamma E)^2 = E \qquad (5)$$

олдуғуну алардыг. Бу заман (1) тәнлијини ашағыдакы кими јазмаг мәгсәдә мүнасибдир. $S_0 = S - \gamma E$ оларса, $S = S_0 + \gamma E$ олар. Она көрә дә (1)-дән

$$Tx \equiv ux + v(S_0 + \gamma E)x + Kx = y \qquad (6)$$

вә јахуд да

$$Tx \equiv ux + vS_0x + K_0x = y \qquad (7)$$

бурадан.

$$K_0 = v\gamma x + Kx \qquad (8)$$

$$uS_0 - S_0u = u(S - \gamma E) - (s - \gamma E)u = uS - Su$$

олдуғу алыныр. Беләликлә:

1. $S_0^2 = E$
2. истәнилән $u \in R$ үчүн, $(uS_0 - S_0u)$ регулјар оператордур.

Демәли, (4)-үн көкләринин бәрабәр олмасы марагла һал дејилдир. Она көрә дә (4)-үн көкләринин мүхтәлиф олдуғуну фәрз едәҹәјик. Бу һалда (4) јенә дэ әлверишли шәклә салынар. (4)-дән

$$\left(\lambda + \frac{\alpha}{2}\right)^2 = \beta + \frac{\alpha_2}{4}$$

вә јахуд да

$$\left(\frac{2\lambda + \alpha}{\sqrt{\alpha_2 + 4\beta}}\right)^2 = 1. \qquad (9)$$

Ујғун оператор исә:

$$\left(\frac{2S+\alpha E}{\sqrt{\alpha_2+4\beta}}\right)^2 = E, \tag{10}$$

$$S_{00} = \frac{2S+\alpha E}{\sqrt{\alpha^2+4\beta}} \tag{11}$$

оларса, бурадан:

$$S = \delta_1 S_{00} + \delta_2 E,\ \delta_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2+4\beta}}{2},\quad \delta_2 = -\frac{\alpha}{2}. \tag{12}$$

Она көрә дә (1), ашағыдакы шәкилдә олар:

$$ux + v(\delta_1 S_{00} + \delta_2 E)x + Kx = y. \tag{13}$$

Бурадан

$$u_{00}x + v_{00}S_{00}x + Kx = y,\quad u_{00} = u + \delta_2 v,\ v_{00} = \delta_1 v. \tag{14}$$

(12)-ни нәзәрә алсаг,

$$S_{00} = \frac{S-\delta_2 E}{\delta_1}, \tag{15}$$

она көрә дә (15)-дән

$$uS_{00} - S_{00}u = u_1 S - Su_1. \tag{16}$$

Бурада $u_1 = \frac{u}{\delta_1}$-дир $u_1S - Su_1$ регулјар олмасындан (16)-нын сол тәрәфинин регулјар олмасы чыхыр. Бу һалда исә $S_{00}^2 = E$ вә $uS_{00} - S_{00}u$ регулјар олмасындан (1) тәнлијинин һәллини тәдгиг етмәјә еһтијаҹ јохдур. Лакин S оператору

$$\sum_{к=0}^{p} \alpha_к S^к = E,\ p \geqslant 3 \tag{17}$$

мүнасибәтләриндән тә'јин олунса иди, ујғун тәнлик бу гајда үзрә тәдгиг олуна билмәзди. Јалныз

$$\sum_{к=0}^{p} \alpha_к \lambda^к = 0 \tag{18}$$

тәнлијинин көкләринин бәрабәр олан һалы (17)-дән

$$S_0^2 = E \tag{19}$$

бәрабәрлијинә кәтирәрди. Бу һал көстәрдијимиз кими, бу фәслин мүәјјән параграфларында тәдгиг олунмушдур. Она көрә дә белә сингулјар операторлу тәнликләрин тәдгиги заманы биз ујғун полиномун көкләринин үмумијјәтлә мүхтәлиф олдуғуну фәрз едәҹәјик. Көстәрилән тәдгиг схеми S сингулјар оператору ихтијари полиномдан тә'јин олдугда белә арашдырылыр. Она көрә дә садә олмасы үчүн бу схеми (1) тәнлијини (2) вә (3) шәртләрини өдәдији һалда верәҹәјик. Бу һалда (4) тәнлијинин көкләрин мүхтәлиф олдуглары фәрз олунур.

$$\alpha^2 + \alpha\lambda + (\beta + 1) = 0 \qquad (20)$$

тәнлијинин көкләрини $\alpha_j\,(j = 1,\ 2)$ илә ишарә едәрәк $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Онда $(\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2) = 1$ мүнасибәтиндән

$$(S - \alpha_1 E)(S - \alpha_2 E) = E. \qquad (21)$$

Бу һалда (1) тәнлији ашағыдакы шәкилдә јазылыр:

$$(u + \alpha_1 v)\,x + v\,(S - \alpha_1 E)\,x + Kx = y, \qquad (22)$$

$$(u + \alpha_2 v)\,x + v\,(S - \alpha_2 E)x + Kx = y. \qquad (23)$$

(23)-үн һәр тәрәфинә $S - \alpha_1 E$ васитәсилә тә'сир едәк. Онда

$$(S - \alpha_1 E)(u + \alpha_2 v)\,x + (S - \alpha_1 E)\,v\,(S - \alpha_2 E)x + \\ + (S - \alpha_1 E)Kx = (S - \alpha_1 E)y$$

вә јахуд да (21)-и нәзәрә алаг. Бурадан

$$(S - \alpha_1 E)(u + \alpha_2 v)(S - \alpha_2 E)(S - \alpha_1 E)\,x + \\ + (S - \alpha_1 E)\,v\,(S - \alpha_2 E)\,x + (S - \alpha_1 E)\,K(S - \alpha_2 E)(S - \alpha_1 E)x = \\ = (S - \alpha_1 E)\,y. \qquad (24)$$

Асанлыгла көстәрмәк олар ки,

$$(S - \alpha_1 E)\,w_1\,(S - \alpha_2 E)\,w_2 = w_1 w_2 + P_{w_1} w_2. \qquad (25)$$

Бурада w_1-ин гејд олундуғу фәрз олунур, P_{w_1} исә регулјар оператордур. Бу ејнилији нәзәрә алараг (24)-дән

$$(u + \alpha_2 v)x + P_{u+\alpha_2 v}(S - \alpha_1 E)\,x. \qquad (26)$$

Ејни гајда үзрә

$$(S - \alpha_1 E)\,v\,(S - \alpha_2 E)\,x = vx + P_v x. \qquad (27)$$

(24)-дән

$$(u + \alpha_2 v)(S - \alpha_1 E)x + P_{u+\alpha_2 v}(S - \alpha_1 E)\,x + vx + P_v x + \\ + (S - \alpha_1 E)K(S - \alpha_2 E)(S - \alpha_1 E)x = (S - \alpha_1 E)y. \qquad (28)$$

$\varphi_1 = x$, $\varphi_2 = (S - \alpha_1 E)\,x$ илә ишарә едәрәк ујғун олараг (22) вә (28)-дән:

$$(u + \alpha_1 v)\,\varphi_1 + v\varphi_2 + K\varphi_1 = y, \qquad (29)$$

$$v\varphi_1 + (u + \alpha_2 v)\,\varphi_2 + P_v\varphi_1 + P_0\varphi_2 = (S - \alpha_1 E)y. \qquad (30)$$

Бурада,

$$P_0\varphi_2 = P_{u+\alpha_2 v}\,\varphi_2 + (S - \alpha_2 E)\,K(S - \alpha_2 E)\,\varphi_2 \qquad (31)$$

регулјар оператордур.

$$\omega = \begin{pmatrix} u + \alpha, v & v \\ v & u + \alpha_2 v \end{pmatrix},$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} K & 0 \\ P_v & P_0 \end{pmatrix},$$

$$h_0=(y,\ (S+\alpha_1E)\,x), \tag{32}$$

$$\varphi=(\varphi_1,\ \varphi_2) \tag{33}$$

оларса, онда (29) вә (30)-дан

$$T_0\varphi\equiv\omega\varphi+K_0\varphi=h_0. \tag{34}$$

Бурада ω^{-1}-ин варлығыны фәрз етмәклә (34)-дән

$$\varphi+K_{00}\varphi=h_{00} \tag{35}$$

тәнлијини алырыг. ω-нын тәрси олдугда T операторуна нормал оператор дејилир. Операторун нормал олмасы үчүн $(u^2-v^2-$ $-\alpha uv)$-нин тәрсинин олмасы кифајәтдир. Демәли, биз нәтичәдә көстәрдик ки, T нормал оператор олдугда (1) тәнлијинә гаршы (35) гаршы гојулур. Белә ки, K_{00}, R^2 һәлгәсиндә тә'сир едән оператордур. Биз әлавә олараг K_{00}-дан регулјар олмасыны тәләб етсәк бунунла да (35) тәнлијинә Рисс—Шаудер нәзәријјәсини тәтбиг етмәк олар. Биз бу мүлаһизәләримиздән ашағыдакы нәтичәни алырыг.

T оператору нормал исә, онда 1 вә 2 шәртләрини өдәјән сингулјар операторлу (1) тәнлијинә (35) тәнлијини гаршы гојмаг олар ки, бу да верилмиш тәнлијин мүәјјән үсулла регуларизасија мәсәләсини һәлл едир. Бу схеми

$$S^3-\beta_1S^2-\beta_2S-\beta_3E=0 \tag{36}$$

мүнасибәтиндән тә'јин олунан вә $u\in R$ истәнилән $uS-Su$ регулјарлыг шәртини өдәјән S сингулјар оператор үчүн көстәрәк. Гејд етдијимиз кими

$$\lambda^3-a_{\ 1}\lambda^2-a_2\lambda-a_3=0 \tag{37}$$

тәнлијин көкләринә көрә ашағыдакы шәкилдә көстәрилә биләр

$$(S-\alpha_1E)\,(S-\alpha_2E)\,(S-\alpha_3E)=E, \tag{38}$$

еләчә дә (1) тәнлијини ашағыдакы систем шәклиндә јазаг:

$$\begin{aligned}&(u+\alpha_1v)x+v\,(S-\alpha_1E)\,x+Kx=y,\\&(u+\alpha_2v)x+v(S-\alpha_2E)x+Kx=y,\qquad(39)\\&(u+\alpha_3v)x+v\,(S-\alpha_3E)x+Kx=y.\qquad(40)\end{aligned}$$

(39)-а $S-\alpha_1E$ вә (40)-а исә $(S-\alpha_1E)\,(S-\alpha_2E)$ операторлары васитәсилә тә'сир едәк:

$$\begin{aligned}&(S-\alpha_1E)\,(u+\alpha_2v)x+(S-\alpha_1E)\,v\,(S-\alpha_2E)\,x+\\&\qquad+(S-\alpha_1E)\,Kx=(S-\alpha_1E)\,y,\qquad(41)\\&(S-\alpha_1E)\,(S-\alpha_2E)\,(u+\alpha_3v)\,x+(S-\alpha_1E)\,(S-\alpha_2)\,v\times\\&\quad\times(S-\alpha_3E)\,x+(S-\alpha_1E)\,(S-\alpha_2E)\,Kx=\\&\qquad=(S-\alpha_1E)\,(S-\alpha_2E)\,y.\qquad(42)\end{aligned}$$

(41)-и ашағыдакы кими јазаг:

$$(S - \alpha_1E)(u + \alpha_2v)(S - \alpha_2E)(S - \alpha_3E)(S - \alpha_1E)x +$$
$$+ (S - \alpha_1E)v(S - \alpha_2E) \cdot (S - \alpha_3E)(S - \alpha_2E)(S - \alpha_1E)x +$$
$$+ (S - \alpha_1E)K(S - \alpha_2E)(S - \alpha_3E)(S - \alpha_1E)x =$$
$$= (S - \alpha_1E)y, \tag{43}$$

$$(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)(u + \alpha_3v)(S - \alpha_3E)(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)x +$$
$$+ (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)v(S - \alpha_3E)x + (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)K \times$$
$$\times (S - \alpha_3E)K(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)x = (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)y. \tag{44}$$

Нәһајәт, $x = \varphi_1$, $(S - \alpha_1E)x = \varphi_2$, $(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)x = \varphi_3$ илә ишарә етсәк, онда (39), (43) вә (44)-дән

$$u\varphi_1 + v\varphi_2 + K\varphi_1 = y, \tag{45}$$

$$(S - \alpha_1E)(u + \alpha_2v)(S - \alpha_2E)(S - \alpha_3E)\varphi_2 + (S - \alpha_1E)v \times$$
$$\times (S - \alpha_2E)(S - \alpha_3E)\varphi_3 +$$
$$+ (S - \alpha_1E)K(S - \alpha_2E)(S - \alpha_3E)\varphi_2 = y_1, \tag{46}$$

$$(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)(u + \alpha_3v)(S - \alpha_3E)\varphi_3 + (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E) \times$$
$$\times v(S - \alpha_3E)\varphi_1 + (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)K(S - \alpha_3E)\varphi_3 = y_2. \tag{47}$$

белә ки, $y_1 = (S - \alpha_1E)y$ вә $y_2 = (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)y$, $uS - Su$-ин регулјарлыг шәртини нәзәрә алсаг $uS^2 - S^2u = uS^2 - S^2u - SuS + SuS = (uS - Su)S - S(Su - uS)$-дән S-ин мәһдудлуғу нәзәрә алынарса, онда $uS^2 - S^2u$-нын регулјарлығы алыныр:

$$(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)w(S - \alpha_3E)x = (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)w \times$$
$$\times (S - \alpha_3E) - (S - \alpha_1E)) S - \alpha_2E)(S - \alpha_3E) wx + wx.$$

Бурадан:

$$(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)w(S - \alpha_3E) = (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2B) \times$$
$$\times [w(S - \alpha_3E) - (S - \alpha_3E)w]x + wx, \tag{48}$$

(48)-дән исә

$$(S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)w(S - \alpha_3E)x =$$
$$= wx + (S - \alpha_1E)(S - \alpha_2E)(wS - Sw)x \tag{49}$$

өдәнилир.

Бу гајда үзрә көстәрмәк олар ки,

$$(S - \alpha_1E)w(S - \alpha_2E)(S - \alpha_3E)x = wx +$$
$$+ (S - \alpha_1E)(wS^2 - S^2w). x \tag{50}$$

$(S - \alpha_1E)$, $(S - \alpha_2E)$ операторларынын мәһдуд олдуғуну вә $wS - Sw$ вә $wS^2 - S^2w$ операторларынын регулјар олмалары нәзәрә алынырса, (48) вә (50)-нин сағ тәрәфинә дахил олан операторлар регулјардыр. Бу мүлаһизәләри нәзәрә алсаг, (45), (46) вә (47)-дән:

$$\left.\begin{aligned} &u\varphi_1 + v\varphi_2 + K\varphi_1 = y, \\ &(u + \alpha_2 v)\,\varphi_2 + v\varphi_3 + P_2\varphi_2 + P_3\varphi_3 = y_1, \\ &v\varphi_1 + (u + \alpha_3 v)\,\varphi_3 + Q_1\varphi_1 + Q_3\varphi_3 = y_2. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Бурада P_2, P_3, Q_1 вә Q_3 мүәјјән регулјар операторлардыр. u вә v елементләринин мүәјјән комбинасијасына әлавә шәрт гојмагла (51)-дән

$$\omega - F\omega = f \tag{52}$$

тәнлијини алырыг. Белә ки, F, R^3-дә тә'сир едән оператордур (52)-јә Рисс — Шаудер нәзәријјәсини тәтбиг етмәк үчүн F-дән әлавә регулјарлыг шәрти тәләб олунур. (2) вә (36)-ны өдәјән сингулјар операторлар үчүн гејд етдијимиз регулјаризасија мәсәләләринин гурулмасында көрүндүјү кими, бу үсул (17)-ни өдәјән истәнилән S сингулјар операторлу тәнликләр үчүн дә тәтбиг олуна биләр. Лакин гејд етмәк лазымдыр ки, үмумијјәтлә бахылан тәнлик вә регулјаризасијадан сонра алынан тәнлик арасында еквивалентлик мәсәләси ахыра чатдырылмамышдыр.

§ 6. МҮӘЈЈӘН СИНИФ СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘРИН КЛАССИК ҮСУЛЛА РЕГУЛЈАРИЗАСИЈАСЫ МӘСӘЛӘСИ

Биз бу фәслин параграфларында мүхтәлиф синифли сингулјар операторлу тәнликләри тәдгиг едәркән әсасән, еквивалент регулјаризасија илә мәшғул олмушдуг. Бундан башга $ux + vSx + Kx = y$ тәнлијинин классик үсулла регулјаризасијасы гурулмушдур. Инди исә бу параграфда классик үсулла

$$Tx \equiv ux + vSx + wS^2x + Kx = y, \tag{1}$$

тәнлијинин регулјаризасијасы мәсәләси тәтбиг олунур. Белә ки, $S^3 = E$ вә $u \in R$ олан истәнилән u үчүн $uS - Su$ оператору регулјардыр. Әкәр

$$T_1x \equiv u_1x + v_1xS + w_1S^2x + K_1x \tag{2}$$

операторуну T_1 үчүн сол регулјаризатор фәрз етсәк, онда

$$T_1Tx = T_1y \tag{3}$$

тәнлијиндән

$$u_0x + v_0Sx + w_0S^2x + M\mathrm{x} = T_1y \tag{4}$$

тәнлијини алырыг. Белә ки,

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= u_1u + v_1u + w_1v, \\ v_0 &= u_1v + v_1u + w_1w, \\ w_0 &= u_1w + v_1v + w_1u \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

бурадан исә ашағыдакы бәрабәрликләри аларыг:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{u}_0 &= (u_1 + v_1 + w_1)(u + v + w), \\ \widetilde{v}_0 &= (u_1 - v_1 + w_1)(u - v + w), \\ \widetilde{w}_0 &= (u_1 + v_1 - w_1)(u + v - w). \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$u + v + w$, $u - v + w$ вә $u + v - w$ елементләринин регулјар олмаларыны фәрз едәрәк:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 + w_1 &= \widetilde{u}_0 (u + v + w)^{-1}, \\ u_1 - v_1 + w_1 &= \widetilde{v}_0 (u - v + w)^{-1}, \\ u_1 + v_1 - w_1 &= \widetilde{w}_0 (u + v - w)^{-1}. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Бу системдән алыныр:

$$\begin{aligned} 2u_1 &= \widetilde{v}_0 (u - v + w)^{-1} + \widetilde{w}_0 (u + v - w)^{-1}, \\ 2u_1 + 2w_1 &= \widetilde{u}_0 (u + v + w)^{-1} + \widetilde{v}_0 (u - v + w)^{-1}, \\ 2u_1 + 2v_1 &= \widetilde{u}_0 (u + v + w)^{-1} + \widetilde{w}_0 (u + v - w)^{-1}. \end{aligned}$$

Она көрә дә,

$$u_1 = \frac{1}{2} \left[\widetilde{v}_0 (u - v + w)^{-1} + \widetilde{w}_0 (u + v - w)^{-1} \right], \tag{8}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \left[\widetilde{w}_0 (u + v + w)^{-1} - \widetilde{w}_0 (u + v - w)^{-1} \right], \tag{9}$$

$$w_1 = \frac{1}{2} \left[\widetilde{u}_0 (u + v + w)^{-1} - \widetilde{w}_0 (u + v - w)^{-1} \right]. \tag{10}$$

Әкәр бурада $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{v}_0$ вә $\widetilde{w}_0$-ын ифадәләрини јазсаг, онда ашағыдакы бәрабәрликләри алырыг:

$$\left.\begin{aligned} \widetilde{u}_0 &= u_0 + v_0 + w_0, \\ \widetilde{v}_0 &= u_0 + w_0 - v_0, \\ \widetilde{w}_0 &= u_0 + v_0 - w_0. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

(4) тәнлијиндән регулјар операторлу тәнлик алмаг үчүн $v_0 = w_0 = 0$ олмалыдыр. $v_0 = w_0 = 0$ оларса, онда (11)-дән

$$\widetilde{u}_0 = \widetilde{v}_0 = \widetilde{w}_0 = u_0, \tag{12}$$

онда (8), (9) вә (10)-дан

$$u_1 = \frac{u_0}{2} \left[(u - v + w)^{-1} + (u + v - w)^{-1} \right], \tag{13}$$

$$v_1 = \frac{u_0}{2} \left[(u + v + w)^{-1} - (u + v - w)^{-1} \right], \tag{14}$$

$$w_1 = \frac{u_0}{2} \left[(u - v + w)^{-1} - (u + v - w)^{-1} \right]. \tag{15}$$

(13), (14) вә (15)-дән көрүндүјү кими u_1, v_1 вә w_1 бу гајда үзрә сечиләрсә, онда (4) тәнлијиндә $v_0 = w_0 = 0$ олмагла

$$u_0x + Mx = \mathrm{T}_1y \tag{16}$$

тәнлиjи алыныр.

Тә'риф 2. *Әкәр $u + v + w$, $u - v + w$ вә $v + u - w$ елементләри регулjар оларса, онда T регулjар оператор адланыр.*

Беләликлә, биз ашағыдакы тәклифи тә'риф едә биләрик.

Әкәр T оператору нормал исә, онда T операторунун сол регулjаризатору вар. Биз сонра (16)-jа Рисс—Шаудер нәзәриjјәсини тәтбиг етмәк үчүн u_0-ын регулjар олмасыны фәрз едәчәjик. Беләликлә, (16)-дан

$$x + Lx = l, \tag{17}$$

бурада, $L = u_1^{-0}M$ вә $l = u_0^{-1}T_1y$.

u_0 истәнилән регулjар елемент оларса, (17) өдәнилир. Демәли, u_0-ын һесабына T-нин сол регулjаризатору истәнилән саjдадыр. Бу тәдгиг схеминдән көрүндүjү кими, (1) тәнлиjи мә'лум олдугда (17) тәнлиjини гурмаг олар. Әкси исә, үмумиjјәтлә, дүз деjилдир. Лакин (17)-jә уjғун еjничинсли гошма тәнлик көтүрәрәк (1) тәнлиjинин нормал һәлл олмасы үчүн зәрури вә кафи шәрт вермәк оларды вә беләликлә дә (1) тәнлиjи үчүн үмумиләшмиш Нөjтер теоремләринин исбатларындан данышмаг оларды. Үмумиләшмиш Нөjтер теоремләри З. И. Хәлиловун тәдгиг етдиjи

$$ux + vSx + Kx = y$$

тәнлиjи үчүн исбат олунмушдур. Бу көстәрилән схем еләчә дә (1) тәнлиjинә тәтбиг олар. (1) тәнлиjинин бу гаjда үзрә гурулмуш регулjаризаторун jахшы чәһәтләриндән бири одур ки, алынан тәнлик елә L регулjар операторлу тәнликдир ки, еjни һәлгәдә тәдгиг олунур. Чатмаjан чәһәти ондан ибарәтдир ки, (1) вә (17) тәнликләри арасында еквивалентлик мәсәләси һәлл олмур. Лакин (1) тәнлиjинә ардычыл олараг S вә S^2 операторлары васитәсилә тә'сир етсәjдик, онда (1) тәнлиjинә еквивалент олан

$$\omega + L_0\omega = h \tag{18}$$

тәнлиjини гаршы гоjмаг олар, бурада L_0, R^3 һәлгәсиндә тә'сир едән оператордур. (18)-ин чатмаjан чәһәти ондан ибарәтдир ки, она Рисс—Шаудер нәзәриjјәсини тәтбиг етмәк үчүн әлавә олараг регулjар операторлардан асылы олан оператор L_0 матрисиндән R^3-да регулjар олмасыны тәләб етмәк лазымдыр. Лакин әлавә олан бу регулjарлыг шәрти нәзәрә алындыгда (18) тәнлиjинин һәлли мә'лум оларса, онда (1) тәнлиjинин һәллини гурмаг олар. Бурада һәр ики регулjаризаторун гурулмасы еләчә дә аддитив сингулjар операторлар тәнликләр үчүн дә доғрудур. Белә ки, нәтичәдә алынан уjғун регулjар тәнликләр аддитив операторлу олурлар.

§ 7. БИР-БИРИЛӘ ЈЕРЛӘРИНИ ДӘЈИШМӘЈӘН МҮХТӘЛИФ СИНГУЛЈАР ОПЕРАТОРЛУ ТӘНЛИКЛӘР

Фәрз едәк ки, R Банах һәлгәсиндә

$$Tx = ux + vS_1x + wS_2x + Kx = y \qquad (1)$$

тәнлији верилмишдир. Белә ки, u, v, w вә y, R-дә верилмиш елементләр, S_1, S_2 вә K бу һәлгәдә верилмиш мәһдуд хәтти операторлар олмагла S_1 вә S_2 З. И. Хәлилов мә'нада сингулјар оператордурлар.

Биз бу фәсилдә бахдығымыз мүхтәлиф сингулјарлы оператор тәнликләрини тәдгиг едәркән $S_1S_2 = S_2S_1$ шәрти дахилиндә тәдгиг етмәклә һәмчинин дә алынан нәтиҹәләрин $S_1S_2 = S_2S_1 + P$ олан һал үчүн дә доғру олдуғуну көстәрмишдик. Белә ки, P регулјар оператордур. Көстәрилән бу шәртләри тәләб етмәдән (1) тәнлијини тәдгиг етмәк олар. Биз бу параграфда һәмин схеми шәрһ едәҹәјик. Она көрә дә әввәлҹә (1)-дән T^2x-и мүәјјән гајда үзрә чевирәк:

$$\begin{aligned} T^2x \equiv u\,[ux + vS_1x + wS_2x + Kx] + vS_1\,[ux + vS_1x + {} \\ + wS_2x + Kx] + wS_2\,[ux + vS_1x + wS_2x + Kx] + {} \\ + KTx = Ty. \end{aligned} \qquad (2)$$

Бурадан,

$$\begin{aligned} T^2x = u^2x + uvS_1x + uwS_2x + uKx + vS_1ux + vS_1vS_1x + {} \\ + vS_1wS_2x + vS_1Kx + wS_2ux + wS_2vS_1x + wS_2Kx + KTx = Ty \end{aligned}$$

вә јахуд

$$\begin{aligned} T^2x = u^2x + uvS_1x + uwS_2x + uKx + vuS_1x + P_1x + v^2x + {} \\ + P_2x + vwS_1S_2x + P_3x + vS_1Kx + wuS_2x + P_4x + wvS_2S_1x + {} \\ + P_5x + wS_2Kx + KxT = Ty. \end{aligned} \qquad (3)$$

Нәһајәт:

$$T^2x = u_1x + v_1S_1x + w_1S_2x + \delta_1S_1S_2x + t_1S_2S_1x + Hx = Ty. \quad (4)$$

Белә ки,

$$u_1 = u^2 + v^2, \; v_1 = uv + vu, \; w = uw + vw,$$

$$\delta_1 = vw, \; t_1 = wv, \; H = \sum_{j=1}^{5} P_j + vS_1K + wS_2K + K. \qquad (5)$$

(5)-ин тә'јининдән көрүндүјү кими, H регулјар оператордур (1) тәнлијинә S_1, S_2 вә S_1S_2 операторлары васитәсилә тә'сир едәк:

$$S_1\,[ux + vS_1x + wS_2x + Kx] = S_1y, \qquad (6)$$

$$S_2\,[ux + vS_1x + wS_2x + Kx] = S_2y, \qquad (7)$$

$$S_1S_2\,[ux + vS_1x + wS_2x + Kx] = S_1S_2y. \qquad (8)$$

(6), (7) вә (8)-дән

$$S_1uS_1S_1x + S_1vS_1x + S_1wS_1S_1S_2x + S_1KS_1S_1x = S_1y, \quad (9)$$

$$S_2uS_2S_2x + S_2vS_2S_2S_1x + S_2wS_2x + S_2KS_2S_2x = S_2y, \quad (10)$$

$$S_1S_2uS_2S_1S_1S_2x + S_1S_2vS_2S_1S_1S_2S_1x + \\ + S_1S_2KS_2S_1S_1S_2x = S_1S_2y. \quad (11)$$

(4) тәнлијинә S_1 оператору васитәсилә тә'сир едәк:

$$S_1u_1S_1S_1x + S_1v_1S_1x + S_1w_1S_1S_1S_2x + S_1\delta_1S_1S_2x + \\ + S_1t_1S_1S_1S_2S_1x + S_1HS_1S_1x = S_1Ty. \quad (12)$$

(1), (5), (9), (10), (11) вә (12) тәнликләрини нәзәрә алараг $x = \varphi_1$, $S_1x = \varphi_2$, $S_2x = \varphi_8$, $S_1S_2x = \varphi_4$, $S_2S_1x = \varphi_5$ вә $S_1S_2S_2x = \varphi_6$ ишарә едәк. Онда:

$$u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + K\varphi_1 = y, \quad (13)$$

$$u\varphi_1 + v_1\varphi_2 + w_1\varphi_3 + \delta_1\varphi_4 + t_1\varphi_5 + H\varphi_1 = Ty, \quad (14)$$

$$S_1uS_1\varphi_2 + S_1vS_1\varphi_1 + S_1wS_1\varphi_4 + S_1KS_1\varphi_2 = S_1y, \quad (15)$$

$$S_2uS_2\varphi_3 + S_2vS_2\varphi_5 + S_2wS_2\varphi_1 + S_2KS_2\varphi_3 = S_2y, \quad (16)$$

$$S_1S_2uS_2S_1\varphi_4 + S_1S_2vS_2S_1\varphi_6 + S_1S_2wS_2S_1\varphi_2 + \\ + S_1S_2KS_2S_1\varphi_4 = S_1S_2y, \quad (17)$$

$$S_1u_1S_1\varphi_2 + S_1v_1S_1\varphi_1 + S_1w_1S_1\varphi_4 + S_1\delta_1S_1\varphi_3 + S_1t_1S_1\varphi_6 + \\ + S_1HS_1\varphi_2 = S_1Ty. \quad (18)$$

Пуанкаре—Бертран дүстуруну нәзәрә алсаг:

$$S_1S_2w_1S_2S_1w_2 = w_1w_2 + P_{w_1}w_2.$$

Бурада P_{w_1} регулјар оператордур. Онда (13), (14), (15) 16), (17) вә (18) тәнликләри ашағыдакы кими јазылар:

$$\left.\begin{array}{l}
u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + K\varphi_1 = y, \\
u_1\varphi_1 + v_1\varphi_2 + w_1\varphi_3 + \delta_1\varphi_4 + t_1\varphi_5 + H\varphi_1 = Ty, \\
v\varphi_1 + u\varphi_2 + w\varphi_4 + Q_1\varphi_1 + Q_2\varphi_2 + Q_4\varphi_4 = S_1y, \\
w\varphi_1 + u\varphi_3 + v\varphi_5 + P_1\varphi_1 + P_3\varphi_3 + P_5\varphi_5 = S_2y, \\
w\varphi_2 + u\varphi_4 + v\varphi_6 + M_2\varphi_2 + M_4\varphi_4 + M_6\varphi_6 = S_1S_2y, \\
v_1\varphi_1 + u_1\varphi_2 + \delta_1\varphi_3 + w_1\varphi_4 + t_1\varphi_6 + N_1\varphi_1 + N_2\varphi_2 + \\
\quad + N_3\varphi_3 + N_4\varphi_4 + N_6\varphi_6 = S_1Ty.
\end{array}\right\} \quad (19)$$

Бу системә дахил олан операторлар регулјар операторлардыр. Биз бу системи тәзәдән вектор шәкилдә бир тәнлик кими јаза биләрик, беләликлә, (19)-дан

$$\tau\varphi \equiv \omega\varphi + F\varphi = h. \quad (20)$$

Бурада ω мүәјјән матрис, h мүәјјән вектор вә F, R^6-да тә'сир едән оператор олмагла (19)-а дахил олан елементләр вә операторлар васитәсилә тә'јин олунур. Биз әлавә олараг F-дән регулјарлыг шәрти тәләб едирик. ω-нын тәрси варса, онда T оператору нормал оператор адланыр. Әкәр (19)-а дахил олан u, v, δ_1, t_1 вә w_1-ин u, v вә w васитәсилә ифадәләрини нәзәрә алсаг, онда ω матриси бу елементләр васитәсилә ифадә олунараг ашағыдакы шәкилдә олар:

$$\omega = \begin{Vmatrix} u & v & w & 0 & 0 & 0 \\ v & u & 0 & w & 0 & 0 \\ w & 0 & u & 0 & v & 0 \\ 0 & w & 0 & u & wv & v \\ u^2+v^2+w^2 & uv+vu & uw+wu & uv & wv & 0 \\ uv+vu & u^2+w^2+v^2 & vw & uw+wu & 0 & vw \end{Vmatrix} \tag{21}$$

Тә'риф етдијимиз кими, T-нин регулјар олмасы үчүн белә бир матрисин тәрси олмалыдыр. Бу шәрт дахилиндә (20)-дән

$$\varphi + \omega^{-1} F\varphi = \omega^{-1} h. \tag{22}$$

$\omega^{-1}F = \Phi$ вә $\omega^{-1}h = g$ ишарә олунарса, онда (22)-дән

$$\varphi + \Phi\varphi = g \tag{23}$$

олар. Бурадан көрүндүјү кими, (1)-ин һәлли мә'лум исә, (23)-үн һәллини гурмаг олар. Лакин тәрси үмумијјәтлә дүз дејилдир. Бу мүлаһизәләр ашағыдакы кими тә'риф олар: әкәр T нормал оператор вә F регулјар оператор исә, онда (1) тәнлијинә (23) тәнлији гаршы гојулур. Белә ки, Φ, R^6-да тә'сир едән регулјар оператордур. Демәли, S_1 вә S_2 операторлары бири-бирилә јерләрини дәјишмәдикдә T операторуну бу гајда үзрә регулјаризасија етмәк олар. Белә бир үсул $S_1^p \equiv E$ вә $S_2^q = E$ типли сингулјар операторлу тәнликләр үчүн тәдбиг олуна биләр. Бурада бир нәтиҹәни гејд едәк.

Биз $T^2x = Ty$ тәнлијини көтүрмәдән (1) тәнлијинә S_1 вә S_2 оператору илә тә'сир етсәјдик онда алынан тәнликләрә S_1S_2 вә S_2S_1 дахил оларды, буну нәзәрә алараг (1) еләҹә дә S_1S_2 вә S_2S_1 операторлары васитәсилә тә'сир етсәк, алынан ифадәләрә $S_1S_2S_1$ вә $S_2S_1S_2$ операторлары дахил оларды. Сонра тәзәдән $S_1S_2S_1$ вә $S_2S_1S_2$ операторлары илә тә'сир етсәк, онда алынан ифадәләрә $S_1S_2S_1S_2$, $S_2S_1S_2S_1$ операторлары да дахил оларды. Демәли, $S_1S_2 = S_2S_1$ вә јахуд да $S_1S_2 = S_2S_1 + P$ шәрти өдәнилмәдикдә ардычыл олараг алынан мәчһулларын сајыны артырмагла сонсуз систем алынарды.

§ 8. ҺӘГИГИ АРГУМЕНТЛИ ВЕКТОР ФУНКСИЈАЛАРЫНЫН ДИФЕРЕНСИАЛЛАНМАСЫ

Фәрз едәк ки, $x(t)$ $[a, b]$ парчасында верилмиш вә гијмәтләри хәтти нормалашмыш X фәзасына дахил олан вектор функсијадыр.

Әкәр X-дә олан јығылма мә'насында

$$\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h} \tag{1}$$

варса, бу лимит $x(t)$-нин t-дә төрәмәси адланараг $x'(t)$ ишарә олунур:

$$\frac{dx(t)}{dt}=x'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{x(t+h)-x(t)}{h}. \tag{2}$$

Тә'рифдән көрүндүјү кими

$$x'(t)-\frac{x(t+h)-x(t)}{h}=\alpha(t,\ h) \tag{3}$$

шәклиндә көстәриләр. Белә ки, $\alpha(t,h)\xrightarrow[h\to 0]{}0$ олур. (3)-дән

$$x(t+h)-x(t)=hx'(t)-\alpha(t,\ h). \tag{4}$$

(4) көстәрир ки, $x(t)$-нин төрәмәси варса, онда $x(t)$ нормаја көрә кәсилмәздир. (1)-дән көрүндүјү кими, μ сабит әдәд исә, онда $(\mu x(t))'=\mu x'(t)$. $x_1(t)$ вә $x_2(t)$ функсијаларынын төрәмәләри варса, онда $(x_1(t)+x_2(t))'=x_1'(t)+x_2'(t)$. Бу гајда үзрә $x(t)$-нин јухары тәртибдән төрәмәләри анлајышыны вермәк олар.

§ 9. ФРЕШЕ ТӨРӘМӘСИ

Биз индијә гәдәр хәтти операторлар вә еләчә дә хәтти функсионалларын бир чох хассәләрини өјрәнмишдик. Бундан әлавә кениш тәтбигата малик олан кәсилмәз операторлу тәнликләрин һәлләринин тәдгигилә мәшғул олмагла бир чох спектрал мәсәләләрин мүфәссәл шәрһини вермишдик. Шүбһәсиз алынан нәтиҹәләр фактик олараг хәтти операторла әлагәдар олан мүхтәлиф мәсәләләрин мејдана чыхмасы илә бағлыдыр. Белә мәсәләләрин тәдгиг олунмасы нөгтеји-нәзәрдән хәтти операторлар вә хәтти функсионалларын структуралары вә тә'сир васитәләри фәзаларын структурларынын кениш шәкилдә өјрәнилмәсинә сәбәб олунмушдур. Лакин мүхтәлиф мүһүм мәсәләләрин һәлләри хәтти олмајан асылылыглар васитәсилә бағлыдыр ки, бунлардан бә'зиләри классик анализ васитәсилә һәлл олмур. Она көрә дә тәбии олараг функсионал анализ курсунда хәтти олмајан операторларын өјрәнилмә мәсәләсинә бөјүк еһтијаҹ вардыр. Тарихи чох олмајан бу мәсәләләр хәтти олмајан анализ тәшкил едән бир истигамәт кими тәдгиг олунараг олдугҹа гијмәтли нәтиҹәләрин алынмасына сәбәб олмушдур. Бу тип бә'зи мәсәләләрин һәлләриндә Фреше вә Гато мә'нада төрәмәләринин мүһүм ролу вардыр. Инди биз белә төрәмәләр һаггында анлајышлар верәрәк бир нечә хассәләрини көстәрәк. Фәрз едәк ки,

$\Phi(x)$ нормалашмыш X фәзасындан нормалашмыш $У$ фәзасына тә'сир едән чевирмәдир. $D(\Phi)$ илә Φ-нин тә'јин областыны ишарә едәк. Бурада $\Phi(x)$ хәтти вә һәм дә гејри-хәтти ола биләр. $x \in D(\Phi)$ вә $x+h \in D(\Phi)$ олсун.

Тә'риф 3. *Фәрз едәк ки, X-дән У-ә тә'сир едән елә хәтти A_x кәсилмәз оператору вар ки, истәнилән $\varepsilon > 0$ олдугда елә мүсбәт $\delta(\varepsilon) > 0$ әдәди вар ки, $\| h \| < \delta(\varepsilon)$ олдугда*

$$\| \Phi(x+h) - \Phi(x) - A_x h \| < \varepsilon \tag{1}$$

олур. Онда $\Phi(x)$, x нөгтәсиндә Фреше мә'нада диференсиалланан адланыр.

Бу тәрифдән көрүндүјү кими $\Phi(x)$, x-дә кәсилмәздир. X-дән $У$-ә тә'сир едән мәһдуд хәтти операторлар чохлуғуну $L(X, У)$ ишарә едәк. Онда, $A_x h \subset L(X, У)$. A_x хәтти оператору күчлү мә'нада төрәмә олмагла $F'(x)$ илә ишарә олунур. Фреше мә'нада төрәмәләрин бир нечә хассәләрини көстәрәк. $\Phi(x) \equiv \text{const}$ оларса, онда $(\Phi'(x) = 0)$ олар. Доғрудан да,

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) = 0 \tag{2}$$

олдуғундан ејнилик кими сыфыр оператору 0 ишарә етсәк онда

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) - 0 \cdot h = 0$$

олмагла (1)-ин өдәнилдији алынмагла $\Phi'(x) = 0$ олур. $\Phi_1(x)$ вә $\Phi_2(x)$ төрәмәләри варса, онда, $(\Phi_1(x) + \Phi_2(x)$-ин төрәмәси вар вә

$$[\Phi_1(x) + \Phi_2(x)]' = \Phi_1'(x) + \Phi_2'(x). \tag{3}$$

Бу бәрабәрлији исбат етмәк үчүн (1)-и ашағыдакы шәкилдә јазаг:

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) - A_x h = O(h). \tag{4}$$

$\Phi(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x)$ ишарә едәк. Беләликлә

$$\Phi_1(x+h) - \Phi_1(x) - \Phi_1'(x) h = O_1(h), \tag{5}$$

$$\Phi_2(x+h) - \Phi_2(x) - \Phi_2'(x) h = O_2(h). \tag{6}$$

Бурадан

$$(\Phi_1 + \Phi_2)(x+h) - (\Phi_1 + \Phi_2) x - [\Phi_1'(x) + \Phi_2'(x)] h = \\ = O_1(h) + O_2(h).$$

Она көрә

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) - [\Phi_1'(x) + \Phi_2'(x)] h = O(h). \tag{7}$$

Бурада

$$O(h) = O_1(h) + O_2(h),$$

$$\Phi'(x) = \Phi_1'(x) + \Phi_2'(x). \qquad (8)$$

C сабит әдәд исә, $(C\Phi(x))' = C\Phi'(x)$; бу исә,

$$C\Phi(x+h) - C\Phi(x) - C\Phi'(x) = O_3(h)$$

бәрабәрлијиндән алыныр. Бурада, $O_3(h) = CO(h)$.

Гејд. $\Phi(x) = Bx$ кәсилмәз хәтти оператор исә, онда $B'x = Bx$. Доғрудан да, $B(x+h) - Bx - Bh = 0$ олдуғуну вә B-нин кәсилмәз олмасыны нәзәрә алсаг, $B'x = Bx$ олур. Фәрз едәк ки, $X_j\,(j = \overline{1, 3})$ верилмиш нормалашмыш фәзалардыр. $x_0 \in X_1$ көтүрәрәк фәрз едәк ки, $\Phi_1(x)$ бу нөгтәнин мүәјјән δ'_{x_0} әтрафыны X_2-јә ин'икас етдирир. $y_0 = \Phi_1(x_0)$ илә ишарә едәк вә фәрз едәк ки, $\Phi_2(y)$, y_0 нөгтәсинин мүәјјән δ''_{y_0} әтрафыны X_3-ә ин'икас етдирир. Онда ашкардыр ки, $\Phi_2(\Phi_1(x)) = \Phi(x)$ олар. Онда $\Phi(x)$ δ'_{x_0}-ы X_3-ә ин'икас етдирәр.

Теорем 6. Әкәр $\Phi_1(x)$, x_0 нөгтәсиндә $\Phi_2(y)$, y_0-нөгтәсиндә диференсиалланан исә, онда исә $\Phi(x)$ исә $x = x_0$ нөгтәсиндә диференсиалланандыр вә

$$\Phi'(x_0) = \Phi_2'(y_0)\,\Phi_1'(x_0) \qquad (9)$$

өдәнилир.

Исбаты. $\Phi_1'(x_0)$ вә $\Phi_2'(y_0)$-ин варлыгларыны нәзәрә алсаг:

$$\Phi_1(x_0+h) - \Phi_0(x_0) - \Phi_1(x_0)\,h = O(h), \qquad (10)$$

$$\Phi_2(y_0+h_1) - \Phi_2(y)\Phi_2(y_0)\,h_1 = O(h_2), \qquad (11)$$

$$\Phi(x) = \Phi_1[\Phi_2(x)], \qquad (12)$$

бурадан

$$\Phi(x_0+h) = \Phi_2[\Phi_1(x_0+h)]. \qquad (13)$$

(5)-ә көрә

$$\Phi(x_0+h_1) = \Phi_2[\Phi_1(x_0) + \Phi_1'(x_0)\,h_1 + O(h_1)]. \qquad (14)$$

$\Phi_1(x_0) = y_0$ олдуғуну нәзәрә алараг вә $\Phi_1'(x_0)\,h_1 + O(h_1) = h_0$ ишарә етсәк, онда (14)-дән

$$\Phi(x_0+h_1) = \Phi_2(y_0+h_0). \qquad (15)$$

(11)-и нәзәрә алсаг:

$$\Phi_2(y_0+h_0) = \Phi_2(y_0) + \Phi_2'(y_0)\,h_0 + O(h_0), \qquad (16)$$

(15)-дән

$$\Phi(x_0+h_1) = \Phi_2[\Phi_1(x_0)] + \Phi_2'[\Phi_1(x_0)]\,h_0 + O(h_0).$$

она көрә дә

$$\Phi(x_0+h_1) = \Phi(x_0) + \Phi_2'(y_0)\,h_0 + O(h_0). \qquad (17)$$

h_0 ифадәсини нәзәрә алсаг:

$$\Phi(x_0+h_1)-\Phi(x_0)=\Phi_2'(y_0)\left[\Phi_1'(x_0)h_1+O(h_1)\right]+yO(h_2)$$

Она көрә дә

$$\Phi(x_0+h_1)-\Phi(x_0)=\Phi_2'(y_0)\,\Phi_1'(x_0)h_1+\Phi_2'(y_0)\,O(h_1)+$$

$+\Phi_1'(x_0)h_1+O(h_1)$ олар. $\Phi_1'(x_0)$ вә $\Phi_2'(y_0)$ хәтти кәсилмәз операторлар олдуғундан һәмчинин

$$O(h_1)=\Phi_2'(y_0)\,O(h_1)+\Phi_1'(x)h_1+\ O(h_1)$$

нәзәрә алынарса

$$\Phi(x_0+h_1)-\Phi(x_0)=\Phi_2'(y_0)\Phi_1'(x_0)h_1+O(h_1),$$

бу ону көстәрир ки,

$$\Phi'(x_0)=\Phi_2'(y_0)\,\Phi_1'(x_0).$$

Демәли, $[\Phi_2[\Phi_1(x_0)]]'=\Phi_2'(y_0)\,\Phi_1'(x_0)$ олур.

Әкәр $\Phi(x)$-ин јүксәк тәртибли төрәмәләри варса, ашағыдакы кими тә'риф олунур.

Фәрз едәрәк $\Phi(x)$ X-дән $У$-ә тә'сир едән диференсиалланан ин'икасдыр. Гејд етдијимиз кими, $\Phi'(x)$ хәтти кәсилмәз оператор олмагла $\Phi'(x)\in L(X,\ У)$. $\Phi'(x)$-ин тә'рифиндән көрүндүјү кими, $\Phi'(x)h'$, h-а көрә хәтти олмасына бахмајараг $\Phi'(x)$-ә көрә үмумијјәтлә, хәтти дејилдир. $\Phi'(x)$-ин төрәмәси варса, бу $\Phi''(x)$ илә ишарә олунараг $\Phi(x)$-ин икинчи төрәмәси адланыр. Бу гајда $\Phi(x)$ мүәјјән тәртибә гәдәр төрәмәси варса, ардычыл олараг тә'јин олунур. $\Phi'(x)\in L(X,\ У)$ олдуғундан $\Phi''(x)\in L[X,\ L(X,\ У)]$.

Гато төрәмәси

Фәрз едәк ки, $\Phi(x)$ нормалашмыш X фәзасындан нормалашмыш $У$ фәзасына тә'сир едән мүәјјән ин'икасдыр.

$\Phi(x)$-ин тә'јин областыны $D(\Phi)$ илә ишарә едәк. x, $x+$ $+th\in D(\Phi)$ олсун.

$$\lim_{t\to 0}\frac{\Phi(x+th)-\Phi(x)}{t} \tag{18}$$

оларса, онда бу лимит $\Phi(x)$-ин x нөгтәсиндә зәиф диференсијалы вә јахуд да Гато мә'нада диференсијалы адланыр вә ашағыдакы кими ишарә олунур:

$$D\Phi(x,\cdot h)=\frac{d}{dt}\,\Phi(x+th). \tag{19}$$

(18)-дән көрүндүјү кими, белә бир анлајыш јығылма илә әлагәдардыр. Бурада јығылма норма мә'нада баша дүшүлүр. Белә төрәмәнин тә'рифиндән көрүндүјү кими, Гато диференсијалы, јә'ни $D\Phi(x, h)$ үмумијјәтлә, хәтти дејилдир. Әкәр $D\Phi(x, h)$ хәтти оларса, јә'ни

$$D\Phi(x, h) = \Phi'_з(x)h \tag{20}$$

кими көстәриләрсә, белә ки, $\Phi'_з(x)$ хәтти оператордур, онда $\Phi'_з(x)$, $\Phi(x)$-ин зәиф вә јахуд Гато мә'нада төрәмәси адланыр.

Диференсиалланан функсионаллар

Фәрз едәк ки, $\Phi(x)$ нормалашмыш X фәзасындан $У$ әдәдләр охуна тә'сир едән ин'икасдыр. Беләликлә, $\Phi(x)$ мүәјјән функсионалдыр. Тә'рифдән көрүндүјү кими, $\Phi'(x)$, x-ин һәр бир гијмәтиндә хәтти кәсилмәз функсионал олмагла X^* фәзасына дахилдир.

H Һилберт фәзасында $\Phi(x) = \| x \|^2$ функсионалы көтүрәк.

$$\Phi(x+h) = \| x+h \|^2$$

олдуғундан:

$$\| x+h \|^2 - \| x \|^2 = 2(x, h) + \| h \|^2. \tag{21}$$

Она көрә дә,

$$\Phi'_з(x) = 2x \tag{22}$$

олур.

§ 10. СОНЛУ АРТЫМ ДҮСТУРУ

Фәрз едәк ки, $\Phi(x)$ нормалашмыш X фәзасынданны нормалашмыш $У$ фәзасына тә'сир едир. Белә ки, $D(\Phi)$, Φ-нин тә'јин областы олмагла ачыг чохлудур, $[x_0, x]$ парчасы $D(\Phi)$-јә дахилдир вә $\Phi(x)$-ин $[x_0, x]$ парчасында Гато мә'наада төрәмәси вар. $У^*$, $У$-ә ујғун гошма фәза олсун. $y^* \in У^*$ олан истәнилән функсионал фәрз едәрәк $0 \leqslant t \leqslant 1$ парчасында ашағыдакы кими тә'јин олунан скалјар функсијаны көтүрәк:

$$g(t) = y^*[\Phi(x_0 + t\Delta x]. \tag{1}$$

Белә ки, $\Delta x = x - x_0$. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $g(t)$, t-јә көрә диференсиалланан функсијадыр. (1)-дән:

$$g(t+h) = y^*[\Phi(x_0 + t\Delta x + h\Delta x)], \tag{2}$$

она көрә дә,

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \frac{y^*[\Phi(x_0 + t\Delta x + h\Delta x)] - y^*[\Phi(x_0 + t\Delta x)]}{h};$$

x^* кәсилмәз олдуғундан, бурадан

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h} = y^*\left[\lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x_0 + t\Delta x + h\Delta x) - \Phi(x_0 + t\Delta x)}{h}\right].$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x_0+t\Delta x+h\Delta x)-\Phi(x_0+t\Delta x)}{h}=$$
$$=\Phi'(x_0+t\Delta x)\,\Delta x$$

олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$g'(t)=y^*\,[\Phi'(x_0+t\Delta x)\,\Delta x]. \tag{3}$$

(3)-ә көрә $g(t)$-нин диференсиалланан олмасы алыныр. $g(t)$ үчүн [0, 1]-да сонлу артым дүстуруну јазаг:

$$g(1)-g(0)=g'(\theta)\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1. \tag{4}$$

(2) вә (3)-ү нәзәрә алсаг, онда (4)-дән:

$$y^*\,[\Phi(x)-\Phi(x_0)]=y^*\,[\Phi'(x_0+\theta\Delta x)\,\Delta x]. \tag{5}$$

$g(t)$-нин тә'јининдән көрүндүјү кими, бу функсија x^* функсионалындан асылыдыр. Она көрә (4)-ә дахил олан θ еләчә дә x^* функсионалындан асылыдыр. (5)-дән:

$$|\; y^*[\Phi(x)-\Phi(x_0)]\leqslant\| y^*\|\cdot\|\Phi'_з(x_0+\theta\Delta x)\,\Delta x\| \tag{6}$$

(6) истәнилән $0\leqslant\theta\leqslant 1$ үчүн өдәнилдијиндән, бурадан

$$\| y^*[\Phi(x)-\Phi(x_0)]\,|\leqslant\| y^*\|\sup_{0<\theta<1}\|\Phi'_з(x_0+\theta\Delta x)\|\cdot\|\Delta x\| \tag{7}$$

өдәнилир.

Хан-Банах теоремindән алдығымыз нәтичәјә көрә $\|y_0^*\|=1$ олан елә функсионал вар ки,

$$y_0^*[\Phi(x)-\Phi(x_0)]=\|\Phi(x)-\Phi(x_0)\|\,.$$

Онда (7)-дән

$$\|\Phi(x)-\Phi(x_0)\|\leqslant\sup_{0\leqslant\theta\leqslant 1}\|\Phi'_з(x_0+\theta\Delta x)\|\cdot\|\Delta x\| \tag{8}$$

бу бәрабәрсизлик $\Phi(x)$ үчүн скалјар функсијалара ујғун сонлу артым дүстурунун аналогу адланыр.

§ 11. СЫХЫЛМЫШ ИН'ИКАС ПРИНСИПИ

Фәрз едәк ки, X верилмиш метрик фәзадыр вә T, X-ә тә'сир едән мүәјјән операторудур. Әкәр елә $0<\alpha<1$ әдәди истәнилән x вә y елементләри үчүн

$$\rho(Tx,\,Ty)\leqslant\alpha\rho(x,\,y) \tag{1}$$

өдәниләрсә, онда T сыхылмыш оператор вә буна ујғун олан ин'икас сыхылмыш ин'икас адланыр. $\{x_n\}$ ардычыллығы x-ә јығылырса, (1)-ә көрә $\rho(Tx_n,\,Tx)\leqslant\alpha\rho(x_n\,,x_0)$ олдуғундан һәмчинин $\{Tx_n\}$ ардычыллығы Tx-ә јығылыр. Бу ону көстәрир ки, (1)-и өдәјән T оператору кәсилмәздир. Кениш тәтбиги олан ашағыдакы мүһүм теореми исбат едәк.

Теорем 7. *X* **там метрик фәзасында верилмиш һәр бир сыхылмыш операторун јеканә тәрпәнмәз нөгтәси вардыр. Јә'ни елә јеканә *у* нөгтәси вар ки,**

$$Ty = y \tag{2}$$

бәрабәрлијини өдәјир.

Исбаты. y_0-ы X-дән гејд олунмуш нөгтә фәрз едәрәк $y_n = Ty_{n-1} = T^n y_0$ тә'јин олунмуш $\{y_n\}$ ардычыллығыны көтүрәк. Көстәрәк ки, бу ардычыллыг фундаменталдыр. $m > n$ олдуғуну фәрз едәк. (1)-ә көрә

$$\rho(y_n, y_m) = \rho\left(TT^{n-1}y_0, TT^{m-1}y_0\right) \leqslant \alpha\rho\left(T^{n-1}y_0, T^{m-1}y_0\right)$$

олар. Бурада ардычыл олараг (1)-и $n-1$ дәфә тәтбиг етсәк, $\rho(y_n, y_m) \leqslant \alpha^n\rho\left(y_0, T^{m-n}y_0\right)$, лакин $T^{m-n}y_0 = y_{m-n}$ олдуғундан, бурадан

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \alpha^n\rho\left(y_0, y_{m-n}\right). \tag{3}$$

Үчбучаг аксиомуна көрә

$$\rho\left(y_0, y_{m-n}\right) \leqslant \rho(y_0, y_1) + \rho(y_1, y_{m-n}) \tag{4}$$

вә

$$\rho\left(y_1, y_{m-n}\right) \leqslant \rho(y_1, y_2) + \rho\left(y_2, y_{m-n}\right). \tag{5}$$

(4) вә (5) бәрабәрсизликләриндән:

$$\rho\left(y_0, y_{m-n}\right) \leqslant \rho(y_0, y_1) + \rho\left(y_2, y_{m-n}\right). \tag{6}$$

(6)-ја дахил олан $\rho\left(y_2, y_{m-n}\right)$-ә ардычыл олараг y_j ($j = \overline{3, m-n-1}$) аралыг нөгтәләрини дахил етмәклә ујғун бәрабәрсизликдән вә (3)-дән

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \alpha^n \sum_{j=0}^{m-n-1} \rho\left(y_j, y_{j+1}\right) \tag{7}$$

бәрабәрсизлијини алырыг. Дикәр тәрәфдән:

$$\rho\left(y_j, y_{j+1}\right) = \rho\left(T^j y_0, T^{j+1}y_0\right) \leqslant \alpha\rho\left(T^{j-1}y_0, T^j y_0\right) \tag{8}$$

олдуғундан:

$$\rho\left(y_j, y_{j+1}\right) \leqslant \alpha\rho\left(y_{j-1}, y_j\right) \left(j = \overline{1, m-n-1}\right), \tag{9}$$

бурадан исә,

$$\rho(y_1, y_2) \leqslant \alpha\rho(y_0, y_1), \tag{10}$$

$$\rho(y_2, y_3) \leqslant \alpha\rho(y_1, y_2) \leqslant \alpha^2\rho(y_0, y_1), \tag{11}$$

$$\rho\left(y_{m-n-1}, y_{m-n}\right) \leqslant \alpha^{m-n-1}\rho(y_0, y_1). \tag{12}$$

Бу бәрабәрсизликләрә көрә (7)-дән

$$\rho(y_n, y_m) \leqslant \alpha^n \rho(y_0, y_1) \sum_{j=0}^{m-n-1} \alpha^j, \tag{13}$$

јахуд $\alpha < 1$ олдуғундан $\sum\limits_{j=0}^{m-n-1} \alpha^j < \frac{1}{1-\alpha}$, онда

$$\rho(y_n, y_m) < \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(y_0, y_1), \tag{14}$$

$\alpha < 1$ нәзәрә алсаг, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n - 0$, беләликлә дә, (14)-дән $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(y_n, y_m) = 0$ олмагла $\{y_n\}$-нин фундаментал олдуғу алыныр. Она көрә дә елә $y_0 \in X$ вар ки,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = y. \tag{15}$$

T илә олан ин'икас кәсилмәз олдуғундан $y_n = Ty_{n-1}$-дән

$$y = Ty. \tag{16}$$

Беләликлә, тәрпәнмәз нөгтәнин варлығы исбат олунур. Инди бу нөгтәнин јеканә олдуғуну көстәрәк. Әксинә, фәрз едәк ки, $\tilde{y} \neq \tilde{y}$ елә нөгтәдир ки, (16) илә бирликдә

$$T\tilde{y} = \tilde{y}. \tag{17}$$

(11)-ә көрә $\rho(Ty, T\tilde{y}) \leqslant \alpha\rho(y, \tilde{y})$. Лакин (16) вә (17)-ни нәзә-
рә алсаг, $\rho(y, \tilde{y}) \leqslant \alpha \cdot \rho(y, \tilde{y})$, $\alpha < 1$ олдуғундан бурадан $\rho(y, \tilde{y}) \neq 0$
ола билмәз. Јә'ни $\rho(\tilde{y}, y) = 0$ олмагла $y = \tilde{y}$ олдуғу вә
беләликлә дә y_0 нөгтәсинин варлығы вә јеканәлији исбат олу-
нур. Бу теорем тәрпәнмәз нөгтә принсипи адланыр. Тәрпән-
мәз нөгтә принсипи ашағыдакы шәкилдә үмумиләшдирилир.

Теорем 8. Фәрз едәк ки, T, X там метрик фәзасыны X-ә ин'икас етдирән елә кәсилмәз оператордур ки, T^n сыхылмыш оператордур $n \geqslant 2$, онда T-нин јеканә тәрпәнмәз нөгтәси вардыр.

Исбаты. Јенә дә X-дән y_0 нөгтәсини гејд едәрәк $\{y_m\}$ ардычыллығыны көтүрәк, белә ки,

$$y_m = T^{mn} y_0 \left(y_m = T^n y_{m-1}\right).$$

Көстәрәк ки, јә'ни $\{y_m\}$ ардычыллығы јығыландыр. $T^n = T_1$
илә ишарә етсәк, исбат етдијимиз схеми тамамилә тәкрар етмәк-
лә $\{y_m\}$-ин јығылан олмасыны көстәрәрдик, беләликлә

$$y = \lim_{m\to\infty} T^{mn} y_0 \tag{18}$$

кими јаза биләрдик. Бу нөгтәнин T үчүн тәрпәнмәз олдуғуну көстәрәк. Шәртә көрә T кәсилмәз олдуғундан:

$$Ty = \lim_{m\to\infty} TT^{mn} y_0 \tag{19}$$

өдәниләр. Дикәр тәрәфдән T^n сыхылмыш оператор фәрз олундуғундан:

$$\rho\left(T^{mn} Ty_0, T^{mn} y_0\right) \leqslant \alpha\rho\left(T^{(m-1)n} Ty_0, T^{(m-1)n}\right). \tag{20}$$

(20)-нин сағ тәрәфинә ардычыл олараг belә бәрабәрсизликләри тәтбиг етмәклә

$$\rho\left(T^{mn} T y_0,\ T^{mn} y_0\right) \leqslant \alpha^{m} \rho\left(T y_0,\ y_0\right) \qquad (21)$$

бәрабәрсизлиjини алардыг. Бурадан исә $\alpha < 1$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$\lim_{m \to \infty} \rho\left(T^{mn} T y_0,\ T^{mn} y_0\right) = 0 \qquad (22)$$

бәрабәрлиjини алырыг. (18) вә (19) бәрабәрсизликләрини нәзәрә алсаг,

$$\rho(Ty,\ y) \leqslant \rho\left(Ty,\ TT^{min} y_0\right) + \rho\left(TT^{mn} y_0,\ T^{mn} y_0\right) + \rho\left(T^{mn} y_0,\ y\right)$$

бәрабәрсизлиjиндән $Ty = y$ олмагла тәрпәнмәз нөгтәнин варлығы алыныр. Инди jеканәлиjини көстәрәк: $Ty = y$-дән истәнилән k үчүн $T^{k} y = y$ олур. Jә'ни T-нин тәрпәнмәз нөгтәси T^{k} үчүн тәрпәнмәз нөгтәдир. Шәртә көрә T^{n} сыхылмыш оператор олдуғундан бу операторун тәрпәнмәз нөгтәси jеканәдир. T-нин тәрпәнмәз нөгтәси T^{n}-нин тәрпәнмәз нөгтәси олдуғундан T-нин тәрпәнмәз нөгтәси jеканә олмагла үмумиләшмиш тәрпәнмәз нөгтә принсипи исбат олунур.

§ 12. ГОШУЛМУШ МӘХСУСИ ВЕКТОРЛАР

Фәрз едәк ки, A өлчүсү n олан комплекс R фәзасында верилмиш хәтти оператордур.

$$\lambda x = Ax \qquad (1)$$

тәнлиjини көтүрәк. Гејд етдиjимиз кими, λ_0 мәхсуси әдәд исә (1)-ин елә һәлли вар ки, $x_0 \neq 0$ олар. Она көрә дә истәнилән α үчүн һәмчинин αx_0 да (1)-ин һәлли олур.

$\lambda = \lambda_0$-а уjғун (1)-и өдәjән бүтүн векторлары $M_{\lambda_0}^{(1)}$ илә ишарә едәк. A-нын хассәсиндән $M_{\lambda_0}^{(1)}$-ин алтфәза олмагла A-jа көрә инвариантдыр. $M_{\lambda_0}^{(1)}$-ин тә'jининдән көрүндүjү кими, бура $\lambda = \lambda_0$-а уjғун мәхсуси векторларынын һамысы вә сыфыр дахилдир. R-ин елә x елементи ола биләр ки, (1) тәнлиjинин һәлли олмадығы һалда

$$(\lambda_0 E - A)^2 x = 0 \qquad (2)$$

тәнлиjинин һәллидир. Бурадан көрүндүjү кими, $x' = (\lambda_0 E - A)x$ (1)-ин һәллидир. (2)-ни өдәjән x вектору $\lambda = \lambda_0$-а уjғун A операторунун биринчи тәртиб гошулмуш вектору адланыр. (2)-ни өдәjән нөгтәләр чохлуғу һәмчинин алтфәза тәшкил едир. (2)-ни өдәjән векторлар чохлуғуну $M_{\lambda_0}^{(2)}$ илә ишарә едәк. $M_{\lambda_0}^{(2)}$ дә R-ин A-jа нәзәрән инвариант алтфәзасы олар. $x' \in M_{\lambda_0}^{(2)}$ оларса, онда тә'рифә көрә

$$(\lambda_0 E - A)^2 x' = 0. \qquad (3)$$

Көстәрәк ки, бу һалда $t = Ax' \in M_{\lambda_0}^{(2)}$. Башга сөзлә,

$$(\lambda_0 E - A)^2 t = 0 \tag{4}$$

олдуғуну көстәрәк. Ашкардыр ки,

$$A(\lambda_0 E - A)^2 = (\lambda_0 E - A)^2 A, \tag{5}$$

она көрә дә

$$A(\lambda_0 E - A)^2 x' = (\lambda_0 E - A)^2 t \tag{6}$$

бәрабәрлијиндән $(\lambda_0 E - A)^2 x = 0$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$(\lambda_0 E - A)^2 t = 0$$

олмагла $t = Ax' \in M_{\lambda_0}^{(2)}$. Демәли, $M_{\lambda_0}^{(2)}$, A операторуна көрә инвариант алтфәзасыдыр. $M_{\lambda_0}^{(1)}$ вә $M_{\lambda_0}^{(2)}$-нын тә'рифләриндән көрүндүкләри кими, $M_{\lambda_0}^{(1)} \subset M_{\lambda}^{(2)}$; әкси дүз дејилдир, Јә'ни, елә $x \in M_{\lambda_0}^{(2)}$ вектор вар ки, $M_{\lambda_0}^{(1)}$-ә дахил дејилдир, јә'ни $x \in M_{\lambda_0}^{(1)}$ $M_{\lambda_0}^{(2)}$ алтфәзасыны алмаг үчүн $M_{\lambda_0}^{(1)}$-ә $\lambda = \lambda_0$ ујғун A операторунун биринчи тәртиб гошулмуш векторларыны әлавә етмәк лазымдыр. Бу гајда үзрә мүәјјән $M_{\lambda_0}^{(к)}$ типли алтфәзалар дүзәлтмәк олар. Белә ки, $M_{\lambda_0}^{(к)}$, A-нын инвариант алтфәзасы олмагла $M^{(к-1)}\lambda_0$-дан вә $\lambda = \lambda_0$ ујғун A-нын $к$-чы тәртиб гошулмуш векторларындан ибарәтдир, бунлардан әлавә

$$M_{\lambda_0}^{(к-1)} \subset M_{\lambda_0}^{(к)} \tag{7}$$

тамам кәсилмәз операторлу тәнликләрин Рисс нәзәријјәсиндә һәтта сонсуз өлчүлү фәзаларда көстәрмишдик ки, (7)-ни өдәјән алт фәзалар үчүн елә бир $\nu(\lambda_0)$ нөмрәси вар ки,

$$M_{\lambda_0}^{(\nu)} = M_{\lambda_0}^{(\nu+1)}. \tag{8}$$

Бахдығымыз фәза сонлу өлчүлү олдуғундан (7)-ни өдәјән $к$-ларын сајы сонлудур вә ејни гајда үзрә елә $\nu(\lambda_0)$ нөмрәси вар ки, (8) өдәнилир. Бу параграфда әсас мәгсәд ондан ибарәтдир ки, $\lambda = \lambda_0$ мәхсуси әдәдинә ујғун бүтүн мәхсуси вә гошулмуш мәхсуси векторлардан елә алтфәза дүзәлтмәк лазымдыр ки, A-нын инвариант алтфәзасы олсун. Гејд етдијимиз кими

$$0 \subset M_{\lambda_0}^{(1)} \subset M_{\lambda_0}^{(2)} \subset \cdots \subset M_{\lambda_0}^{(\nu)(\lambda_0)}. \tag{9}$$

(9)-а дахил олан һәр бир алтфәза $(\lambda_0 E - A)$ оператору васитәсилә бундан сонра кәлән алтфәзаја ин'икас олунур. Бурада әввәлчә садә һалы тәдгиг едәк: фәрз едәк ки, $\lambda = \lambda_0$ A-нын јеканә мәхсуси әдәддир. Көстәрәк ки,

$$R = R_1 \oplus R_2 \tag{10}$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, λ_0, A-нын R_1-дә мәхсуси әдәди олмагла бу әдәд A-нын R_2-дә мәхсуси әдәди дејилдир,

$$A_0 = \lambda_0 E - A \tag{11}$$

ишарә едәк. Онда елә $x_0 \neq 0$ вар ки, $\lambda_0 x_0 - Ax_0 = 0$ вә она көрә дә

$$A_0 x_0 = 0. \tag{12}$$

Бурадан көрүндүјү кими, x_0, A_0-ын параметрин сыфыр гијмәтинә ујғун олан мәхсуси векторудур, јә'ни

$$0 \cdot x_0 - A_0 x_0 = 0. \tag{13}$$

Бу ону көстәрир ки, үмумилији позмадан $\lambda_1 = 0$-ы A операторунун мәхсус әдәди көтүрмәк олар. Инди биз белә дә гәбул едәк, јә'ни $\lambda_1 = 0$, A-нын јеканә мәхсуси әдәди олсун. Әввәлчә фәрз едәк ки, A операторунун $\lambda_1 = 0$-а ујғун гошулмуш векторлары јохдур. Башга сөзлә, јалныз мәхсуси функсијалары вар. R_1 илә A-нын $\lambda_1 = 0$-а ујғун олан бүтүн мәхсуси векторларындан дүзәлмиш чохлуғу, R_2 илә A-нын R-дән алынан ин'икасыны ишарә едәк, јә'ни

$$AR = R_2. \tag{14}$$

Исбат едәк ки, R, (10) шәклиндә көстәрилир. Ашкардыр ки, R_1 вә R_2-нин өлчүләринин чәми n-ә бәрабәрдир.

$$R_1 \cap R_2 = \{0\} \tag{15}$$

олдуғуну көстәрсәк, онда бахдығымыз хүсуси һал үчүн (10)-нун доғру олдуғу алыныр. (15)-и көстәрмәк үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни елә $z \neq 0$ олдуғуну гәбул едәк ки, $z \in R_1$ олмагла $z \in R_2$ олсун. $z \in R_2$ олдуғундан;

$$z = Az_1 \tag{16}$$

кими көстәриләр. Белә ки, $z_1 \in R$. Сонра $z \in R_1$ олдуғундан исә

$$Az = 0. \tag{17}$$

$z \neq 0$, (16)-дан $Az = A^2 z_1$ олдуғундан, бурадан $A^2 z_1 = 0$, јә'ни

$$AAz_1 = 0. \tag{18}$$

(17) көстәрир ки, z; $\lambda_1 = 0$ мәхсуси әдәдинә ујғун A-нын мәхсуси функсијасыдыр. (18) көстәрир ки, z_1 бу мәхсуси әдәдә ујғун A операторунун биринчи тәртиб гошулмуш векторудур. Лакин биз A-нын јеканә $\lambda_1 = 0$ мәхсуси әдәди олдугда A-нын јалныз мәхсуси функсијаларынын варлығыны гәбул етмишдик. Беләликлә, зиддијјәт алыныр. $R_1 \cap R_2$-нин сыфырдан фәргли елементинин олмадығыны көстәрир вә она көрә дә R-ин R_1 вә R_2-јә көрә (10) ајрылышы алыныр. Фәрз едәк ки, $\lambda_1 = 0$ мәхсуси әдәдинә ујғун A операторунун һәм мәхсуси вә һәм дә гошулмуш векторлары вардыр. Бу һалда (10)-ун өдәнилдијини көстәрәк. Әввәлчә көстәрәк ки, R_2 дар синиф тәш-

кил едир вә әксинә R_1 исә мүәјјән мә'нада кениш синиф тәшкил едир. $\lambda_1 = 0$-а ујғун мәхсуси вә гошулмуш векторлары $M_0^{\nu(0)} = R_1'$ ишарә едәк. Беләликлә, R_1'

$$A^{\nu(0)}x = 0 \tag{19}$$

өдәјән нөгтәләр чохлуғудур. R_2' илә

$$A^{\nu(0)}R = R_2'. \tag{20}$$

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, R_2' инвариант алтфәзадыр. Она көрә фәрз едәк ки, $\omega \in R_2'$, јә'ни $\omega = A^{\nu(0)}x$ олар. Бурадан $A\omega = A^{\nu(0)+1}x$, јахуд да $A\omega = A^{\nu(0)}Ax$,

$$\omega' = A^{\nu(0)}\omega'', \tag{21}$$

belә ки, $\omega' = Ax$, онда $\omega'' = A\omega \in R_2$ олмагла R_2 инвариант алтфәза олур. Әввәлчә көстәрәк ки,

$$R_1' \cap R_2' = \{0\}. \tag{22}$$

Бунун үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни елә $z \neq 0$ елементи вар ки,

$$z \in R_1', \tag{23}$$

$$z \in R_2'. \tag{24}$$

$z \in R_1'$ олдуғундан:

$$A^{\nu(0)}z = 0 \tag{25}$$

$z \in R_2'$ олдуғундан исә

$$z = A^{\nu(0)}t, \tag{26}$$

бурада

$$A^{\nu(0)}z = A^{2\nu(0)}t$$

нәзәрә алсаг, (19)-а көрә $A^{2\nu(0)}t = 0$. (26)-ја көрә $A^{\nu(0)}t \neq 0$; дикәр тәрәфдән исә $A^{2\nu(0)}t = 0$; бу ону көстәрир ки, t, $\lambda_1 = 0$ мәхсуси әдәдинә ујғун A-нын R_1'-ә дахил олмајан гошулмуш векторудур. Лакин R_1'-ин тә'рифини нәзәрә алсаг, зиддијјәт алыныр. Бу исә (15)-нин өдәнилдијини көстәрир. Һәмчинин R_1' вә R_2'-нин өлчүләринин чәми n олдуғундан:

$$R = R_1' \oplus R_2'$$

кими көстәрилир. Инди исбат едәк ки, R_1'-дә A-нын $\lambda_1 = 0$ олан мәхсуси әдәди јохдур. Әксини фәрз едәк: $\lambda_1 = 0$, A-нын R_2'-дә мәхсуси әдәдидир. Онда $\tau \neq 0$ олан елә вектор вар ки,

$$A^{\nu(0)}\tau = 0, \tag{27}$$

бурадан $\tau \in R_1'$. Лакин биз R_1' вә R_2' чохлугларынын јалныз сыфыр үзрә кәсишдијини көстәрмишдик, она көрә дә A-нын R_2'-дә $\lambda_1=0$ мәхсуси әдәди јохдур. Бунунла биз ашағыдакы теореми тә'риф едә биләрик. $\lambda_1 = 0$, A-нын мәхсуси әдәдидирсә, онда R, инвариант R_1 вә R_2 алтфәзаларынын ҹәми кими көстәрилир:

$$R = R_1 \oplus R_1. \tag{28}$$

Беләликлә, R_1, A-нын R алтфәзасында $\lambda_1 = 0$-а ујғун мәхсуси вә гошулмуш векторлардан ибарәт олмагла R_2-дә A операторунун тәрси олмагла $\lambda_1 = 0$, бу алтфәзада A-нын мәхсуси әдәди дејилдир.

Фәрз едәк ки, λ_1, A-нын R фәзасында мәхсуси әдәдләриндән биридир. Онда көстәрдик ки,

$$R = R_1^0 \oplus R_2' \tag{29}$$

шәклиндә олар. Белә ки, R_1^0 вә R_2' инвариант алтфәзалар олмагла R_1^0-дә A-нын мәхсуси әдәди јалныз λ_1, R_2'-дә исә A-нын λ_1-дән фәргли јердә галан мәхсуси әдәдләрдир. Инди исә A-нын R_2'-дә мүәјјән λ_2 әдәдини көтүрсәк

$$R_2' = R_2^0 \oplus R_3'. \tag{30}$$

A-нын R_2^0-дән мәхсуси әдәди јалныз λ_2 олмагла A-нын R_3' алтфәзасында олан мәхсуси әдәдләри λ_2-дән фәргли олан әдәдләрдир. A-нын мәхсуси әдәдләринин сајы сонлу олдугда бу просеси сонлу давам етдирәрәк мүәјјән ајрылышы алмаг олар. Она көрә дә ашағыдакы тәклифи алырыг.

Теорем 9. $\lambda_j\ (j=\overline{1,\ m})$ **A операторунун R фәзасында мүхтәлиф мәхсуси әдәдләри исә, онда:**

$$R = \sum_{j=1}^{m} M_{\lambda_j}^{\nu(\lambda_j)}, \tag{31}$$

белә ки, $M_{\lambda_j}^{\nu(\lambda_j)}$ инвариант алтфәза олмагла бу фәза λ_j-а ујғун A операторунун јалныз мәхсуси вектору вә гошулмуш векторларындан ибарәтдир.

Бу параграфда алынан нәтиҹәләрин верилмиш матрисин нормал һала салынмасы үчүн мүһүм әһәмијјәти вардыр.

§ 13. СОНЛУ ӨЛЧҮЛҮ ФӘЗАДА ЈЕКАНӘ МӘХСУСИ ӘДӘДИ ОЛАН ХӘТТИ ОПЕРАТОРУН НОРМАЛ ШӘКЛӘ КӘТИРИЛМӘСИ

Фәрз едәк ки, n-өлчүлү R фәзасында хәтти A оператору вә

$$(\lambda E - A)x = 0 \tag{1}$$

тәнлији верилмишдир.

Мә'лумдур ки, белә фәзада тә'сир едән һәр бир хәтти A чевирмәсинә мүәјјән бир $\| a_{ij} \|$ матриси вә әксинә ујғундур. A-ја гаршы гојулмуш белә бир матрис аналитик үсулла белә операторларын структурунун өјрәнилмәсинә бөјүк имкан јарадыр. Әкәр (1) тәнлијинин мәхсуси векторлары R-ин базисини тәшкил едирсә, онда A-ја ујғун олан матрис нормал шәкилдә, јә'ни диагонал шәкилдә көстәрилир. Лакин A-нын мәхсуси векторлары верилмиш фәзанын өлчүсүндән аз исә, онда белә бир матриси нормал шәклә кәтирмәк мәсәләси чәтинләшир. A-нын нормал һала салынмасында әсас мәсәлә ондан ибарәтдир ки, базис векторлары мәхсуси векторлар көтүрүлүр. Лакин мәхсуси векторларын сајы R-ин өлчүсүндән аз олан һалда бу векторлара мүәјјән гајда үзрә башга векторлар гошулараг нәтичәдә елә базис дүзәлир ки, бунун нәтичәсиндә $\| a_{ij} \|$ матриси садә шәкил алыр. Матрисин бу шәкли Жордан *нормал формасы* адланыр. Әкәр A-нын хәтти асылы олмајан мәхсуси векторларынын сајы n-ә бәрабәр оларса, Жордан формасындан матрисин нормал-диагонал формасы алыныр.

Биз көстәрмишдик ки,

$$R = R_1 \oplus R_2 \tag{2}$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, R_1 анчаг мәхсуси вә гошулмуш векторлардан ибарәтдир.

Тә'риф 3. *R-дә верилмиш векторлар системи R_1-ә нәзәрән о заман хәтти асылы олмајан адланырлар ки, бу векторларын сыфырдан фәргли һеч бир хәтти комбинасијасы R_1-ә дахил олмасын.*

Тә'риф 4. *R-дә верилмиш хәтти асылы олмајан $e_j \; (j = \overline{1,k})$ векторлар системи R_1-ә нәзәрән о заман базис тәшкил едир ки, бу векторлара R_1-дән мүәјјән базис әлавә етдикдә R-ин базиси алыныр.*

Инди фәрз едәк ки, A-нын јеканә λ мәхсуси әдәди вар вә гејд етдијимиз кими, үмумилији позмадан бу әдәди сыфыр көтүрмәк олар. Онда R (2) шәклиндә көстәриләр. Белә ки, A-нын R_1-дә мәхсуси әдәди јалныз сыфыр олмагла сыфыр бу операторун R_2-дә мәхсуси әдәди дејилдир. Она көрә дә (1) тәнлијинин R_2-дә јалныз сыфыр һәлли вар. Она көрә дә

$$R_1 = M_0^{\nu(0)} = R. \tag{3}$$

Беләликлә, $M_0^{\nu(0)}$ алтфәзасы

$$A^{\nu(0)}x = 0 \tag{4}$$

өдәјән x нөгтәләр чохлуғундан ибарәтдир. Көстәрдијимиз кими

$$M_0^{(1)} \subset M_0^{(2)} \subset \cdots \subset M_0^{\nu(0)-1} \subset M_0^{\nu(0)} \tag{5}$$

өдәнилир.

$M_0^{\nu(0)}$-ын $M_0^{\nu(0)-1}$-ә нәзәрән максимал саjда векторларыны

$$e_j \left(j = \overline{1,\ q}\right) \tag{6}$$

илә ишарә едәк. Онда ашкардыр ки, бу векторлар $(\nu(0)-1)$-чи тәртиб гошулмуш векторлардыр. Әкәр e, $(\nu(0)-1)$-чи тәртиб гошулмуш вектор исә, онда

$$(\lambda_0 E - A)^{\nu(0)-1} e \neq 0$$

олмагла

$$(\lambda_0 E - A)^{\nu(0)} e = 0.$$

Беләликлә

$$(\lambda_0 E - A)\, M_0^{\nu(0)} = M_0^{\nu(0)-1}. \tag{7}$$

Шәртә көрә $\lambda_0 = 0$ олдуғундан, бурадан:

$$-\, A M_0^{\nu(0)} = M_0^{\nu(0)-1}. \tag{8}$$

Она көрә дә алырыг ки,

$$A e_j \left(j = \overline{1,\ q}\right) \tag{9}$$

векторлары $M_0^{\nu(0)-1}$-ә дахил олар. Инди көстәрәк ки, (9) илә тә'јин олунан векторлар $M_0^{\nu(0)-1}$-ин $M_0^{\nu(0)-2}$-јә нәзәрән хәтти олмаjан векторларыдыр, jә'ни бу векторларын сыфырдан фәргли олмаjан һеч бир комбинасиjасы $M_0^{\nu(0)-2}$-jә дахил деjилдир. Бунун үчүн әксини фәрз едәк, jә'ни һамысы бирдән сыфыр олмаjан елә $\beta_j \left(j = \overline{1,\ q}\right)$ әдәдләри вар ки,

$$e' = \sum_{j=1}^{q} \beta_j A e_j \tag{10}$$

оларса, $e' \in M_0^{\nu(0)-2}$.

Дикәр тәрәфдән

$$e' = A \sum_{j=1}^{q} \beta_j e_j \tag{11}$$

олдуғундан $e = \sum\limits_{j=1}^{q} \beta_j e_j$ вектору $M_0^{\nu(0)-1}$-ә дахил олар. Лакин биз фәрз етмишдик ки, $e_j \left(j = \overline{1,\ q}\right)$ векторлары $M_0^{\nu(0)}$-ын $M_0^{\nu(0)-1}$-ә нәзәрән максимал саjда хәтти асылы олмаjан векторларыдыр. Беләликлә, зиддиjјәт алыныр, jә'ни (9) илә тә'јин олунан векторлар $M_0^{\nu(0)-1}$-ын $M_0^{\nu(0)-2}$-а нәзәрән хәтти асылы олмаjан векторларыдыр. $M_0^{\nu(0)-1}$-ын $M_0^{\nu(0)-2}$-а нәзәрән базис векторлары ашағыдакы шәкилдә олур:

$$Ae_1,\ Ae_2, \ldots, Ae_q,\ f_1,\ f_2, \ldots, f_s. \qquad (12)$$

Еләчә дә асанлыгла көрмәк олар ки, векторлар A-нын $(\nu(0)-2)$-чи тәртиб максимал сајда хәтти асылы олмајан гошулмуш векторларыдыр.

Бу гајда үзрә $M_0^{\nu(0)-2}$-да олан вектора A илә тә'сир едәрәк алынан векторлары $M_0^{\nu(0)-3}$-а нәзәрән $M_0^{\varsigma(0)-2}$ базисинә гәдәр тамамлајаг. Нәһајәт, $M_0^{(1)}$-а чатдыгда бурада базис, максимал сајда хәтти асылы олмајан мәхсуси векторлар көтүрүлүр. Јухарыдакы кими тә'јин олунан векторлар системи ашағыдакы кими мүәјјән бир чәдвәл тәшкил едир:

$$\left.\begin{array}{l}
e_1,\ e_2, \ldots, e_q, \\
Ae_1,\ Ae_2, \ldots, Ae_q\, f_1,\ f_2, \ldots, f_s, \\
A^2e_1,\ A^2e_2, \ldots, A^2e_q,\ Af_1,\ Af_2, \ldots, Af_s, \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
A^{\nu(0)-1} c_1, \ldots, A^{\nu(0)-1}e_q\, A^{\nu(0)-2}f_1,\ A^{\nu(0)-2} f_2, \ldots, A^{\nu(0)-2}\, f_s.
\end{array}\right\} \qquad (13)$$

Бу чәдвәлдә көстәрилән векторлар системи R-дә базис тәшкил едир. Инди көстәрәк ки, A операторуна ујғун $\| a_{ij} \|$ матрисини Жордан нормал формасына кәтирмәк олар. Бу чәдвәлдә биринчи сүтуну көтүрәк:

$$e_1,\ Ae_1,\ A^2e_1, \ldots, A^{\nu(0)-1} e_1.$$

$A^{\nu(0)-1} e_1 = \overline{e_1},\ A^{\nu(0)-2} e_1 = e_2,\ \ Ae_1 = \overline{e}_{\nu(0)-1}$ илә ишарә етсәк, онда

$$\overline{A}e_p = \overline{e}_{p-1} \ .$$

e_1, $\lambda = 0$ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси вектор олдуғундан

$$A\overline{e}_1 = 0.$$

Беләликлә, A васитәсилә (13) чәдвәлинин һәр бир сүтуну өзү өзүнә ин'икас олунур. Демәли, һәр бир белә сүтуна инвариант алтфәза ујғундур. Белә ки, һәр белә инвариант алтфәзанын өлчүсү ујғун сүтунда олан векторларын сајына бәрабәр олар. (13)-ә дахил олан һәр бир базис векторларына көрә $\| a_{ij} \|$ матриси мүәјјән шәкилдә көстәрилир. Һәр бир белә матрис Жордан һүчрәси адланыр.

Шүбһәсиз белә һүчрәләрин сајы (13)-ә дахил олан сүтунларын сајы гәдәр олар. Белә сүтунларын сајыны P илә ишарә едәк. Беләликлә, P_1, $\lambda = 0$ мәхсуси әдәдинә ујғун биринчи сүтуна аид олан Жордан һүчрәсидир. Нәтичәдә, A-ја ујғун матрис R фәзасында мүәјјән бир матрис кими көстәрилир. Белә ки, бу матрисин диагоналлары Жордан һүчрәләриндән ибарәт олмагла јердә галан елементләри сыфыр олур вә һәр бир һүчрәнин өлчүсү (13)-ә дахил олан ујғун сүтунун векторлар сајына бәрабәрдир. Көстәрдијимиз гајдада дүзәлмиш матрис

A-нын Жордан *нормал формасы* адланыр. Биз бурада A-нын јалныз сыфыр мәхсуси әдәдинә ујғун олан һалы көстәрдик. Белә Жордан нормал формалар сонлу өлчүлү фәзада тә'сир едән ихтијари A хәтти оператору үчүн мүфәссәл сурәтдә верилир.

X ФӘСИЛ

БАНАХ ФӘЗАЛАРЫНДА СКАЛЈАР АРГУМЕНТЛИ ВЕКТОР ФУНКСИЈАЛАР ҮЧҮН БӘ'ЗИ МӘСӘЛӘЛӘР

§ 1. ЛАПЛАС ТӘНЛИЈИ

Фәрз едәк ки, X верилмиш инволјусијалы (B) фәзасыдыр.

$$\Delta u = 0 \tag{1}$$

тәнлијинә бахаг. Белә ки,

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{2}$$

(2)-јә дахил олан төрәмәләр гијмәти X-ә дахил олан Гато мә'нада төрәмәләрдир. Әкәр $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ кәсилмәздирләрсә, онда (1)-и өдәјән һәр бир u регулјар һәлл адланыр. (1)-ин һәлли скалјар функсија исә, онда бирдәјишәнли комплекс һоломорф функсијалар нәзәријјәси (1) илә әлагәдар олан мәсәләләрин һәлләринин еффектив шәкилдә гурулмасына имкан верир. Комплекс дәјишәнли функсијалар нәзәријјәси даһа кениш синиф тәшкил едән еллиптик тәнликләр илә әлагәдар олан мүһүм мәсәләләрин һәлләринә тәтбиг олур. Биз бу параграфда белә бир нәзәријјәнин гијмәтләри. мүәјјән инволјусијалы $X-(B)$ фәзасына дахил олан еллиптик тәнликләрлә әлагәдар олан мәсәләләрин тәдгигиндә тәтбиг олундуғуну көстәрәчәјик. Беләликлә, фәрз едәк ки, (1)-и өдәјән u функсијасы X-ә дахил олмагла (1)-ин регулјар һәллидир:

$$z = x + iy, \tag{3}$$

$$\varsigma = x - iy. \tag{4}$$

Белә ки, x вә y үмумијјәтлә, комплекс әдәдләрдир. Биз (1)-ә дахил олан төрәмәләри z вә ς дәјишәнләринә көрә јазсаг, онда (1) тәнлији

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \varsigma} = 0, \tag{5}$$

шәклиндә јазылар. (5)-и ардычыл интеграллама гла

$$u = \varphi(z) + \psi(\varsigma) \tag{6}$$

ифадәсини алырыг. Әкәр биз (1) тәнлијини контуру C олан мүәјјән бир рабитәли g областында тәдгиг едириксә, (3) вә (4) васитәсилә g областы ујғун олараг (z) вә (ς) мүстәвисинин g' вә g'' областларына, C исә C' вә C''-ә ин'икас олунар. Әкәр $\varphi(z)$ вә $\psi(\varsigma)$ ујғун олараг g' вә g'' областларында ихтијари вектор һоломорф функсијалар исә, онда (6) илә тә'јин олунан u, (1) тәнлијинин һәлли олар. Хүсуси һалда x вә y һәгиги дәјишәнләр исә, $z = x + iy$, $z = x - iy$ олмагла z вә $\overline{z}$ гаршылыглы гошма оларлар. (1) тәнлијинин регулјар ермит һәлли јә'ни

$$u = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} \tag{7}$$

васитәсилә тә'јин олунар, бурада $\overline{u}$ вә $\overline{\varphi(z)}$, u вә $\varphi(z)$-ин инволјусијаларыдыр. (7)-дән хүсуси һалда алырыг ки, әкәр u вектор функсијасы (1)-ин регулјар ермит һәлли исә, онда бу функсија x, y-ин һоломорф функсијасыдыр. (7)-дән көрүндүјү кими, һәр бир һоломорф вектор $\varphi(z)$ функсијасына мүәјјән бир u ујғундур. Әкси үмумијјәтлә дүз дејилдир. Мәсәлән, $\varphi(z)$ ихтијари вектор һоломорф функсија вә K сабит ермит елемент исә (7)-дән әлавә ејни u, һәмчинин

$$u = \varphi(z) + iK + \overline{\varphi(z) + iK} \tag{8}$$

кими көстәрилир. Верилмиш u-ја мүхтәлиф $\varphi(z)$ вә $\psi(z) = \varphi(z) + iK$ һоломорф вектор функсијалары ујғун олдуғундан u-ја көрә $\varphi(z)$-ин биргијмәтли тә'јин олмасы позулур. Лакин $\varphi(z$-дән мүәјјән нормалашма шәрти, јә'ни $\varphi(0) = 0$ олма шәрти тәләб олунарса, онда һәр бир ермит u вектор функсијасына мүәјјән бир $\varphi(z)$ вектор һоломорф функсијасы ујғундур. Доғрудан да, әкәр ејни u, $\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_2(0) = 0$ шәртләри дахилиндә

$$u = \varphi_1(z) + \overline{\varphi_1(z)}, \tag{9}$$

$$u = \varphi_2(z) + \overline{\varphi_2(z)} \tag{10}$$

шәклиндә көстәриләрсә, онда (9) вә (10)-дан

$$Re\,[\varphi_1(z) + \varphi_2(z)] = 0 \tag{11}$$

алардыг. Гејд едәк ки, әкәр һәр һансы бир $\omega(z) = u_1 + iv$ вектор һоломорф функсија исә, онда u_1 вә v_1 вектор функсијалары Коши—Риман шәртини өдәјәр, јә'ни

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial x} &= \frac{\partial v_1}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_1}{\partial x} &= -\frac{\partial u_1}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$\omega(z) = \varphi_1(z) - \varphi_2(z)$ оларса, (11)-ә көрә $u_1 = 0$ олдуғундан $v_1 = \text{const}$ олар вә она көрә дә $\varphi_1(z) - \varphi_2(z) = \text{const}$. Лакин

$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ олдуғундан бурадан $\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$ олур. Она көрә дә (7)-јә дахил олан функсијалар нормалашмыш исә, һәр бир ермит u вектор функсијасына гаршы мүәјјән вектор $\varphi(z)$ һоломорф функсијасы ујғундур, јә'ни u вә $\varphi(z)$ арасында гаршылыглы биргијмәтли ујғунлуг вар. (6) вә (7), (1) тәнлијинин үмуми *комплекс көстәрилиши* адланыр. Бу нәтичәләр ашағыдакы кими тә'риф олунур:

(6), (1) тәнлијин бүтүн регулјар һәлләринин үмуми комплекс көстәрилишидир. Еләчә дә, (7), (1) тәнлијинин бүтүн ермит һәлләринин үмуми комплекс көстәрилишидир. Бу көстәрилән һәлләр $\varphi(z)$ вә $\psi(\varsigma)$-нин ихтијари вектор һоломорф функсијалары олмасы һесабына алыныр.

Инди ваһид даирә үчүн Дирихле мәсәләсинин һәллини тәдгиг едәк. Фәрз едәк ки, δ, (z) мүстәвисинин мәркәзи координат башланғычында вә чеврәси C олан ваһид радиуслу даирәсидир.

(1) тәнлијинин елә регулјар ермит һәллини тапаг ки, C үзәриндә

$$u_{C} = f \qquad (13)$$

шәртини өдәсин. Бурада $f(t)$, C-дә верилмиш вә гијмәти $X-(B)$ фәзасына дахил олан ермит функсијадыр. Биз бу мәсәләни (1) тәнлијин һәлләринин (7) комплекс көстәрилишиндән истифадә едәрәк һәлл едәчәјик. (13) шәртинә көрә (7)-дән

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = f(t). \qquad (14)$$

Биз сонракы тәдгигаты апармаг үчүн бир нечә көмәкчи нәтичәләрин доғрулуғуну көстәрәк. Әввәлчә гејд едәк ки, $\varphi(z)$ δ дахилиндә вектор һоломорф функсија исә, онда

$$\overline{\varphi(0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z}. \qquad (15)$$

Белә ки, z, δ-ја дахил олан истәнилән нөгтәдир. Бу дүстуру исбат етмәк үчүн $\varphi(z)$-и δ даирәси дахилиндә сыраја ајырмаг кифајәтдир. Инди Һарнак теореминин доғрулуғуну көстәрәк: фәрз едәк ки, $\nu(t)$, C үзәриндә верилмиш ермит функсијадыр вә истәнилән $z \in \delta$ нөгтәсиндә

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\nu(t)\,dt}{t-z} = 0 \qquad (16)$$

олур. Онда исбат едәк ки, $\nu(t) = 0$ олур. Буну исбат етмәк үчүн X^* илә X-ин гошма фәзасыны ишарә едәк вә X^*-дан олан һәгиги функсионаллар X_0^* олсун. x^* һәгиги функсионал вә $\nu(t)$ ермит вектору олдуғундан, $x^*(\nu(t)) = \varphi(t)$ функсијасы һәгиги олар. Онда скалјар функсијалар үчүн доғру олан Һарнак теореминә көрә истәнилән $z \in \delta$ нөгтәсиндә

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi_{x^*}(t)\,dt}{t-z} = 0 \qquad (17)$$

оларса, бурадан $\varphi_{x^*}(t)=0$ олур. Белә ки, x^*, X_0^*-дан көтүрүлмүш ихтијари һәгиги функсионалдыр. Һәр бир $x^*(x)$ функсионалы

$$x^*(x) = x_1^*(x) + i x_2^*(x) \qquad (18)$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, x_1^* вә x_2^* һәгиги функсионаллардыр, јә'ни $\overline{x_1^*} = x_1^*$, $\overline{x_2^*} = x_2^*$ олур. Беләликлә $\varphi_{x^*}(t) = 0$ вә јахуд да һәр бир һәгиги X_0^*-дан олан һәр бир x^* функсионалы үчүн

$$x^*[\nu(t)] = 0 \qquad (19)$$

өдәнилир. Она көрә дә (18)-ә дахил олан x_1^* вә x_2^* һәгиги функсионаллары үчүн дә (19) өдәнилир, јә'ни

$$x_1^*[\nu(t)] = 0,$$

$$x_2^*[\nu(t)] = 0$$

Демәли, (18)-и нәзәрә алсаг, алырыг ки, истәнилән $x^* \in X^*$ функсионалы үчүн

$$x^*[\nu(t)] = 0$$

она көрә дә Хан—Банах теореминә көрә $\nu(t) = 0$ олмагла ермит $\nu(t)$ вектор функсијасы үчүн Һарнак теореминин доғрулуғу исбат олунур. (15)-и вә Һарнак теоремини нәзәрә алараг (14)-үн һәр тәрәфини $\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{t-z}$-ә вуруб, C үзрә интеграллајаг, бурада $f(t)$-нин нормача H синфиндән олдуғуну фәрз едәчәјик.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)+\overline{\varphi(t)}}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}. \qquad (20)$$

Бурадача гејд едәк ки, (20)-јә дахил олан $\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}$ вә $f(t)$ нормаја көрә кәсилмәз олдугларындан һәр бир интеграл вар. Дикәр тәрәфдән (20) ихтијари $z \in \delta$ елементи үчүн өдәнилдијиндән вә $\varphi(t) + \overline{\varphi(t)}$, $f(t)$ вектор функсијаларынын һәр бири ермит олдуғундан Һарнак теореминә көрә (20)-дән (14)-үн доғрулуғу алыныр. (20)-ни ашағыдакы кими јазаг:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z} = F(z). \qquad (21)$$

Белә ки, $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z}$, $\varphi(z)$, δ-да вектор һоломорф вә $\overline{\delta}$-да кәсилмәз олдуғундан, онда Коши дүстуруна көрә

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \qquad (22)$$

Она көрә дә (15) вә (22)-јә көрә (21)-дән

$$\varphi(z) + \overline{\varphi(0)} = F(z), \qquad (23)$$

$$\varphi(0) + \overline{\varphi(0)} = F(0). \qquad (24)$$

Демәли, бурадан $Re\,\varphi(0)$

$$2Re\,\varphi(0) = F(0) \qquad (25)$$

васитәсилә тә'јин олунур. (25)-и нәзәрә алсаг, (23)-дән

$$Re\,\varphi(z) = Re\,F(z) - Re\,\overline{\varphi(0)} \qquad (26)$$

бәрабәрлији алыныр. Бурадан исә

$$Re\,\varphi(z) = Re\,F(z) - \frac{F(0)}{2}.$$

$F(z)$-ин ифадәсини нәзәрә алсаг:

$$Re\,\varphi(z) = Re\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{4\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t}. \qquad (27)$$

Ашкардыр ки, $\frac{1}{4\pi i}\int_C \frac{f(t)\,dt}{t}$ интегралы һәгигидир. Еләчә дә $Re\,\varphi(z) = \frac{u}{2}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, (27)-дән

$$u = Re\,\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{t+z}{t-z}\,f(t)\,dt. \qquad (28)$$

Беләликлә, Дирихле мәсәләсинин һәлли (28) васитәсилә тә'јин олунур. (28) Шварс дүстуру адланыр. Бу үсул илә (1) тәнлијинин регулјар ермит һәлли үчүн Нејман мәсәләсинин ваһид даирә үчүн һәллини вермәк оларды. Әкәр верилмиш област һамар C контуру олан област исә, онда верилмиш мәсәләләр бу схем үзрә һәлл олуна билмәз. Биз бу фәсилдә сонралар көстәрәҹәјик ки, еллиптик тәнликләр үчүн гојулмуш ујғун мәсәләләрин һәлли Коши нүвәли операторлу сингулјар тәнлијин һәллинә кәтирилир.

§ 2. И. Н. ВЕКУАНЫН ИНТЕГРАЛ КӨСТӘРИЛИШИ

Скалјар функсијалар үчүн гојулмуш бир чох мәсәләләр И. Н. Векуанын H_m һоломорф функсијалар үчүн верилмиш интеграл көстәрилиши васитәсилә әлверишли һәлл олунур. Биз там исбаты олмаса да белә бир көстәрилишин H_m вектор һоломорф функсијалар үчүн доғру олдуғуну көстәрәк. Фәрз едәк ки, D—(z) мүстәвисинин һамар контуру Γ олан мәһдуд бир рабитәли областдыр. Белә ки, $0 \in D$. Бундан әлавә, $\Phi(z)$ бу областда верилмиш елә һоломорф функсијадыр ки, $\lim\limits_{z\to 1} \Phi^{(m)}(z)$, H синфинә дахилдир. Јәни $\Phi(z)$, H_m һоломорф функсијадыр. И. Н. Векуа көстәрмишдир ки, һәр бир белә $\Phi(z)$ функсијасы үчүн H-дан олан елә јеканә һәгиги $\nu(t)$ функсијасы вә јеканә олан елә K сабити вар ки,

$$\Phi(z)=\int\limits_{\Gamma}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1\right]\bar{t}\nu(t)\,dt+iK \tag{1}$$

шәклиндә көстәрилир.

Инди фәрз едәк ки, $\Phi_0(z)$, D-дә вектор һоломорф функсија олмагла $\lim\limits_{z\to t}\Phi_0(z)$ нормаја көрә H синифиндәндир. Онда елә ермит вектор $\nu_0(t)$ функсијасы вә елә K_0 сабит ермит вектору вар ки,

$$\Phi_0(z)=\int\limits_{\Gamma}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1\right]\overline{t'}\nu_0(t)\,dt+iK_0 \tag{2}$$

кими көстәрилир. Бу мәгсәдлә X^* фәзасындан x^* функсионалыны көтүрәк. Онда $x^*[\Phi_0(z)]=\Phi_{x^*}(z)$ функсијасы скалјар һоломорф олар. Бундан әлавә, $\lim\limits_{z\to t} x^*[\Phi(z)]^{(m)}$, H синфинә дахил олар.

$[x^*\Phi_0(z)]^{(m)}=x^*\left[\Phi_0^{(m)}(z)\right]$-нәзәрә алсаг t_1 вә t_2: Γ контурунун ихтијари нөгтәлри оларса:

$$x^*\left[\Phi_0^{(m)}(t_1)\right]-x^*\left[\Phi_0^{(m)}(t_2)\right]=\Phi_{x^*}(t_1)-\Phi_{x^*}(t_2),$$

бурадан исә

$$\Phi_{x^*}(t_1)-\Phi_{x^*}(t_2)=x^*\left[\Phi_0^{(m)}(t_1)-\Phi_0^{(m)}(t_2)\right].$$

Нәһајәт

$$\left\|\Phi_{x^*}(t_1)-\Phi_{x^*}(t_2)\right\|\leqslant\|x^*\|\left\|\Phi_0^{(m)}(t_1)-\Phi_0^{(m)}(t_2)\right|, \tag{3}$$

лакин

$$\left\|\Phi^{(m)}(t_1)-\Phi^{(m)}(t_2)\right\|\leqslant P\,|\,t_1-t_2\,|^{\alpha} \tag{4}$$

олдуғундан (3)-дән

$$\left\|\Phi_{x^*}(t_1)-\Phi_{x^*}(t_2)\right|<Q_{x^*}|\,t_1-t_2\,|^{\alpha}, \tag{5}$$

белә ки,

$$Q_{x^*}=\|x^*\|\cdot P.$$

Беләликлә, һәр гејд олунмуш x^* функсионалы үчүн $\Phi_{x^*}(z)=$ $=x^*[\Phi_0(z)]$ скалјар H_m һоломорф функсијадыр. Онда һәр бир белә функсија үчүн елә $\nu_{x^*}(t)$ һәгиги функсија вә елә K_{x^*} сабити вар ки:

$$\Phi_{x^*}(z) = \int_\Gamma \left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1\right] \overline{t'}\, \nu_{x^*}(t)\, dt + iK_{x^*}. \tag{6}$$

Лакин $\nu_{x^*}(t) = x^*[\nu_0(t)]$ вә $K_{x^*} = x^*[K_0]$ кими көстәриләбиләрсә, онда (6)-дан

$$x^*\left[\Phi(z) - \int_\Gamma (\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1\right] \overline{t'}\, \nu_0(t)\, dt - iK\right] = 0$$

бәрабәрлији истәнилән x^* елементи үчүн өдәнилдијиндән Хан—Банах теореминә көрә (2)-нин өдәнилдији алынарды. Лакин биз $\nu_{x^*}(t)$ вә K_{x^*}-ун јухарыдакы кими көстәришләрини һөкм едә билмәдијимизә көрә (2)-нин өдәнилмәсинин И. Н. Векуанын схеми илә билаваситә мүәјјән көмәкчи мүлаһизәләрин васитәсилә доғру олдуғуну верәк. Она көрә дә фәрз едәк ки, (2) көстәрилиши доғрудур, (2)-дән

$$\Phi_0^{(m)}(z) = (-1)^m (m-1)! \int_\Gamma \frac{\overline{t'}\, \nu_0(t)\, dt}{t^{m-1}(t-z)}. \tag{7}$$

Гејд едәк ки, (7)-нин (2)-дән алынмасы вектор һоломорф функсијалар үчүн доғрудур. Сонра исә $\nu_0(t)$-јә нәзәрән ашағыдакы кими интеграл тәнлик алыныр:

$$\nu_0(t) + \int_\Gamma Re\left[\frac{t^{m-1}\, t'}{\pi i\, t_0^{m-1}(t_0-t)}\right] \nu_0(t)\, dt = 0. \tag{8}$$

Бу интеграл тәнлијин һәлл олма мәсәләсиндән Γ үзәриндә

$$Re\left[it^{1-m}\, \omega^+(t)\right] = 0 \tag{9}$$

сәрһәд шәртини өдәјән садә мәсәлә алыныр. Әввәлҹә (9) сәрһәд мәсәләсинин һәллинә кәлинҹә гејд едәк ки, (9)-а дахил олан $\omega^+(t)$-нин мүәјјән $\omega(z)$ вектор һоломорф функсијасынын сәрһәд гијмәти олмасына бахмајараг бу мәсәлә скалјар $\alpha(t) = ti^{1-m}$ функсијалы мәсәләдир. Бу мәсәләни ја билаваситә һәлл етмәк олар вә јахуд да X^* фәзасындан истифадә едәрәк скалјар

$$it^{1-m} x^*[\omega^*(t)] - it^{1-m} x^*[\omega^+(t)] = 0$$

мәсәләсинин һәллинә кәтирмәклә (9)-ун һәллини гурмаг олар.

Инди (8) тәнлијинин вә јахуд да бу тәнлијә ујғун ејниҹинсли мәсәләнин һәлләри һаггында бир нечә гејд едәк.

Бахылан тәнлијин нүвәси скалјар функсија вә $\nu_0(t)$ исә ермит вектор функсија олдуғундан белә тәнлијә Фредһолм нәзәријјәсинин тәтбиг олунмасыны көстәрмишдик. Беләликлә истәр (9) мәсәләсинин һәлл олма гајдасы вә истәрсә дә (8) тәнлијинә Фредһолм нәзәријјәсинин тәтбиг олунмасы нәзәрә алынарса, И. Н. Векуа тәрәфиндән тәклиф олунан исбат гајдасы ејни илә вектор һоломорф функсијалара тәтбиголунур. Беләликлә, H_m вектор һоломорф функсијалары үчүн И. Н. Векуанын (2) интеграл көстәрилиши доғрудур. Скалјар һоломорф функсијалар үчүн И. Н. Векуанын интеграл көстәрилишинин бир чох нәзәри вә тәтбиги мәсәләләрдә бөјүк әһәмијјәти вардыр, ону (2)-дән истифадә едәрәк вектор һоломорф функсијалар үчүн нәзәри чәһәтдән гијмәтли олан мәсәләләрин һәллинә тәтбиг етмәк олар.

§ 3. БИҺАРМОНИК ТӘНЛИК ҮЧҮН СӘРҺӘД МӘСӘЛӘСИ

Фәрз едәк ки, бизә

$$\Delta^2 u = 0 \tag{1}$$

тәнлији верилир; belә ки, u гијмәти инволјусијалы $R-(B)$ чәбринә дахил олан вектор функсијадыр. D иләһамар L контуру вә сыфры өз дахилинә алан мәһдуд бирработәли областы ишарә едәк.

(1) тәнлијинин истәнилән регулјатор ермит һәлли

$$u = \varphi(z) + \overline{\varphi(z)} + \bar{z}\psi(z) + z\overline{\psi(z)}$$

васитәсилә тә'јин олунар, belә ки, $\varphi(z)$ вә $\psi(z)$ D-дә верилмиш ихтијари вектор һоломорф функсијалардыр. Бу көстәришдән истифадә едәрәк ашағыдакы кими сәрһәд мәсәләсинә бахаг: (1) тәнлијинин елә регулјар һәллини тапмалы ки, L үзәриндә

$$a_1(t)\,u(t) + b_1(t)\,\Delta u(t) = p_1(t) \tag{2}$$

вә

$$a_2(t)\,u(t) + b_2(t)\,\Delta u(t) = p_2(t) \tag{3}$$

сәрһәд шәртләрини өдәсин. Belә ки, $a_j(t)$, $b_j(t)\,p_j(t)$ $(j = 1, 2)$ L үзәриндә верилмиш нормала H-а дахил олан функсијалардыр. Бу мәсәләни (ε) илә ишарә едәк. (2)-дән

$$\Delta u = \psi'(z) + \overline{\psi'(z)}. \tag{4}$$

Она көрә дә (2) вә (4)-ү нәзәрә алсаг, (2) вә (3)-дән

$$a_1(t)\left[\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} + \bar{t}\psi(t) + t\overline{\psi(t)}\right] + \\ + b_1(t)\left[\psi'(t) + \overline{\psi'(t)}\right] = p_1(t) \tag{5}$$

вә

$$a_2(t)\left[\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} + t\bar{\psi}(t) + \overline{t\psi(t)}\right] + \\ + b_2(t)\left[\psi'(t) + \overline{\psi'(t)}\right] = p_2(t). \tag{6}$$

Беләликлә, u ермит вектор функсијасынын тапылма мәсәләси (5) вә (6) сәрһәд шәртләрини өдәјән $\varphi(z)$ вә $\psi(z)$ векторлар функсијаларынын тапылма мәсәләсинин һәллинә кәтирилир. $\varphi(z)$ вә $\psi(z)$ ихтијари вектор һоломорф функсијалар олдугларындан $\varphi(z)$-и нормача H синфиндән олан вектор функсија, $\psi'(z)$ исә H_1 һоломорф функсија фәрз едәчәјик.

Она көрә дә $\varphi(z)$ вә $\varphi'(z)$ үчүн И. Н. Векуанын интеграл көстәрилишиндән истифадә едәчәјик. Әввәлчә гејд едәк ки, $m = 0$ олан һалда, јә'ни $H_0 = H$ оларса,

$$\varphi(z) = \int_L \frac{\overline{tt'}\,\nu_1(t)\,dt}{t-z} + iC_1, \tag{7}$$

$$\psi(z) = \int_L \left[\ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) + 1\right]\overline{t'}\,\nu_2(t)\,dt + iC_2. \tag{8}$$

Белә ки, $\nu_1(t)$ вә $\nu_2(t)$ ермит вектор функсијалар вә C_1, C_2 исә ермит сабит векторлардыр ки, бунлар мүәјјән гајда үзрә сечилмәклә бахылан мәсәләнин һәлләринин варлығыны тә'мин едәчәкдир. (8)-дән

$$\psi'(z) = -\int_L \frac{\overline{t'}t\,\nu_2(t)\,dt}{t-z}. \tag{9}$$

(7), (8) вә (9)-дан

$$\varphi(t) = \pi i\,\overline{t'}t\,\nu_1(t) + \int_L \frac{\tau\,\overline{\tau'}\,\nu_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + iC_1, \tag{10}$$

$$\psi'(t) = -\pi i\,\overline{t'}t\,\nu_2(t) - \int_L \frac{\tau\,\overline{\tau'}\,\nu_2(\tau)\,d\tau}{\tau - t}, \tag{11}$$

$$\psi(t) = \int_L \left[\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + 1\right]\overline{\tau'}\,\nu_2(\tau)\,d\tau + iC_2. \tag{12}$$

Әввәлчә, $\overline{(\psi'(t) + \psi'(t))}$-ни тә'јин едәк:

$$\psi'(t) + \overline{\varphi'(t)} - \pi i\left(t\,\overline{t'} - t'\,\overline{t}\right)\nu_2(t) -$$
$$- \int_L \frac{\tau\,\overline{\tau'}\,\nu_2(\tau)\,d\tau}{\tau - t} - \int_L \frac{\overline{\tau}\,\tau^1\,\nu_2(\tau)\,\overline{d\gamma}}{\overline{\tau} - \overline{t}}, \tag{13}$$

$\frac{\overline{d\tau}}{\overline{\tau} - \overline{t}} = \frac{d\tau}{\tau - t} + d\ln\frac{\overline{\tau} - \overline{t}}{\tau - t}$ олдуғундан (13)-дән

$$\psi'(t) + \overline{\psi'(t)} = \pi i\left(\overline{t'}t - t'\,\overline{t}\right)\nu_2(t) -$$
$$- \int_L \frac{\tau\,\overline{\tau'} + \overline{\tau}\,\tau'}{\tau - t}\,\nu_2(\tau)\,d\tau + \int_L \overline{\tau}\,\tau'\,\nu_2(\tau)\,d\ln\frac{\overline{\tau} - \overline{t}}{\tau - t}, \tag{14}$$

бурадан

$$\psi'(t) + \overline{\psi'(t)} = \alpha_1(t)\nu_2(t) + \int\limits_L \frac{\alpha_2(\tau)}{\tau - t}\nu_2(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int\limits_L M_1(t, \tau)\nu_2(\tau)\,d\tau; \qquad (15)$$

белә ки, $\alpha_1(t) = \pi i(\overline{t}'t - t'\overline{t})$, $\alpha_2(t) = \overline{t}'t + t'\overline{t}$ вә $M_1(t, \tau) = \overline{\tau}\tau'\frac{d}{d\tau}\ln\left[\frac{\overline{\tau} - \overline{t}}{\tau - t}\right]$. Гејд едәк ки, $M_1(t, \tau)$ регулјар нүвәдир. (10) васитәсилә $(\psi(t) + \overline{\varphi(t)})$-ни тә'јин едәк

$$\varphi(t) + \overline{\varphi(t)} = -\pi i\alpha_1(t)\nu_1(t) + \int\limits_L \frac{\alpha_2(\tau)\nu_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t} -$$

$$-\int\limits_L M_1(t, \tau)\nu_1(\tau)\,d\tau. \qquad (16)$$

Нәһајәт, (12)-дән $t\overline{\psi}(t) + t\overline{\psi(t)}$ ифадәсини тә'јин едәк:

$$\overline{t}\psi(t) + t\overline{\psi(t)} = \overline{t}\int\limits_L\left[\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + 1\right]\overline{\tau}'\nu_2(\tau)\,d\tau +$$

$$+ t\int\limits_L\left[\ln\left(1 - \frac{\overline{t}}{\overline{\tau}}\right) + 1\right]\tau'\nu_2(\tau)\,\frac{d\overline{\tau}}{d\tau}\,d\tau + iC_2\overline{t} + itC_2,$$

бурада

$$\overline{t}\left[\overline{\tau}'\ln\left(1 - \frac{t}{\tau}\right) + 1\right] + t\left[\ln\left(1 - \frac{\overline{t}}{\overline{\tau}}\right) + 1\right]\tau'\frac{d\overline{\tau}}{d\tau} = M_2(t, \tau) \qquad (17)$$

оларса, онда

$$\overline{t}\psi(t) + \overline{t\psi(t)} = \int\limits_L M_2(t, \tau)\nu_2(\tau)\,d\tau. \qquad (18)$$

Беләликлә, (15), (16) вә (18)-дән истифадә едиләрәк (5) вә (6) шәртләри ашағыдакы кими јазылыр:

$$a_i(t)\left[\alpha_1(t)\nu_1(t) + \int\limits_L \frac{\alpha_2(\tau)\nu_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t} - \int\limits_L M_1(t, \tau)\nu_1(\tau)\,d\tau + \right.$$

$$\left. + \int\limits_L M_2(t, \tau)\nu_2(\tau)\,d\tau\right] + b_i(t)\left[\alpha_1(t)\nu_2(t) - \int\limits_L \frac{\alpha_2(\tau)\nu_2(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_L M_1(t, \tau)\nu_2(\tau)\,d\tau\right] = \tilde{p}_i(t), \quad (i = 1, 2). \qquad (19)$$

белә ки, $\bar{P}_i(t) = P_i(t) - C_2 i(\overline{t} - t)$,

$$a_i(t)\,\alpha_1(t) = m_i(t), \quad b_i(t)\,\alpha_1(t) = n_i(t).$$

$$\pi i a_i(t)\,\alpha_2(\tau) = K_i(t, \tau) \qquad i = 1, 2, \tag{20}$$

$$-b_i(t)\,\alpha_2(\tau) = H_i(t, \tau) \qquad i = 1, 2, \tag{21}$$

$$-a_i(t)\,M_1(t, \tau) = Q_i(t, \tau) \text{ вә } N_i(t, \tau) = a_i(t)\,M_2(t, \tau) + + b_i(t)\,M_1(t, \tau) \tag{22}$$

оларса, онда (19)-дан

$$m_1(t)\,v_1(t) + n_i(t)\,v_2(t) + \int\limits_L \frac{K_i(t, \tau)\,V_1(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \int\limits_L \frac{H_i(t, \tau)\,v_2(\tau)\,a_\vee}{\tau - t} + + \int\limits_L Q_i(t, \tau)\,v_1(\tau)\,d\varepsilon + \int\limits_L N_i(t, \tau)\,v_2(\tau)\,d\tau = \bar{P}_i(t) \tag{23}$$

бәрабәрлиjини алырыг.

(23) көстәрир ки, $\nu_1(t)$ вә $\nu_2(t)$ векторларынын тә'jини үчүн R чәбриндә Коши нүвәли сунгулjор тәнликләр системини алырыг.

(23)-үн характерик һиссәсини аjырмагла бу системи ашағыдакы кими jазмаг олар:

$$m_i(t)\,v_1(t) + n_i(t) v_2(t) + \frac{u_i(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{\nu_i(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{v_i(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{\nu_2(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + + \int\limits_L T_i(t, \tau)\,\nu_1(\tau)\,d\tau + \int\limits_L \tau_i(t_i\, \tau)\,\nu_2(\tau)\,d\tau = P(t), \tag{24}$$

(24)-ә дахил олан функсиjалар асанлыгла (23)-ә дахил олан функсиjалар васитәсилә тә'jин олунур. Нәһаjәт, (24)-ү бир вектор тәнлик шәклиндә jазмаг олар:

$$T' \mu \equiv m(t)\mu(t) + \frac{e(t)}{\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \int\limits_L T(t, \tau)\mu(\tau)\,d\tau = f(t) \tag{25}$$

белә ки,

$$m(t) = \begin{pmatrix} m_1(t) & n_1(t) \\ m_2(t) & n_2(t) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$$e(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & v_1(t) \\ u_2(t) & v_2(t) \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$K(t, \tau) = \begin{pmatrix} T_1(t, \tau) & \tau_1(t, \tau) \\ T_2(t, \tau) & \tau_2(t, \tau) \end{pmatrix}, \tag{28}$$

$$\mu(t) = (\nu_1(t)\,\nu_2(t)) \text{ вә } f(t) = (P_1(t),\ P_2(t)). \tag{29}$$

Нәтичәдә бахдығымыз сәрһәд мәсәләсинин һәлли (25) оператор тәнлијинин һәллинә кәтирилир; belә ки, бу тәнлијә дахил олан вектор функсијалар өзләри гијмәтләри R-ә дахил олан векторлардан ибарәтдир.

Башга сөзлә (25) тәнлији R^2-да тәтгиг олунур.

$$S\mu = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\tau - t} \tag{30}$$

$$T\mu = \int\limits_L T(t, \tau)\,\mu(\tau)\,d\tau \tag{31}$$

илә ишарә етсәк, (25)-дән

$$T''\mu \equiv m\mu + eS\mu + T\mu = f \tag{32}$$

оператор тәнлијини алырыг. Бахмајараг ки, (25) вә еләчә дә
(32) конкрет, Коши нүвәли сингулјар тәнликдир, лакин бу
тәнлијин классик үсулла һәлли ола билмәз. Бу мүлаһизә аша-
ғыдакы кими изаһ едилир. (25)-ин классик үсулла һәлл ол-
масы үчүн бу тәнлијин характерик һиссәсинә ујғун Һилберт
мәсәләси гаршы гојулур. Лакин белә мәсәләни R Банах чәб-
риндә һәлл етмәк мүмкүн дејилдир, даһа доғрусу, мәсәләнин
индексини тә'јин етмәк мүмкүн дејилдир. Бунлары нәзәрә ала-
раг R^2 чәбриндә (32) тәнлијини көстәрдијимиз үсуллардан
бири васитәсилә һәлл едәчәјик. Даһа доғрусу, T' үчүн екви-
валент регулјаризатор гурулмасыны кестәрәчәјик. Онун үчүн
фәрз едәк ки, T'' нормал оператордур. Јә'ни $m + e$ вә $m - e$
елементләринин регулјар олмалары фәрз олунур. (32)-јә S васи-
тәсилә тә'сир етсәк:

$$Sm\mu + SeS\mu + ST\mu = Sf \tag{33}$$

бурдан исә $S^2 = E$ олдуғуну нәзәрә алараг (33)-дән

$$SmS S\mu + SeS\mu + STSS\mu = Sf. \tag{34}$$

Бурада $\mu = \varphi_1$ вә $S\mu = \varphi_2$ оларса, онда ујғун олараг (32) вә (34)-дән

$$m\varphi_1 + e\varphi_2 + T\varphi_1 = f, \tag{35}$$

$$SmS\varphi_2 + Se\,S_1\varphi_1 + STS\varphi_2 = Sf. \tag{36}$$

Көстәрдији кими, бу систем регулјар операторлу тәнликләр системидир. (35) вә (36)-дан

$$m\varphi_1 + e\varphi_2 + T\varphi_1 = f, \tag{37}$$

$$e\varphi_1 + m\varphi_2 + P_1\varphi_1 + P_2\varphi_2 = Sf \tag{38}$$

кими көстәрирләр, belә ки, P_1, P_2 вә T регулјар операторлардыр (37), (38) R^4-дә тәдгиг олунан

$$\tau\omega = w\omega + F\omega = h \tag{39}$$

тәнлијинә кәтирилир. Бурада, әлавә F-дән регулјарлыг шәртини тәләб едирик. τ нормал оператор олдуғундан исә бурадан,

$$\omega + F_1\omega = g \tag{40}$$

тәнлијини алырыг ки, бу тәнлијә билаваситә Рисс—Шаудер нәзәријјәсини тәтбиг етмәк олар. Бүтүн бу мүлаһизәләр ону көстәрир ки, вектор функсијалы Биһормоник тәнлик үчүн гојулмуш сәрһәд мәсәләсинин һәлл олма гајдасы (40) тәнлијинин һәлл олма мәсәләси илә бағланыр. Бурада алынан нәтиҹәләр ашағыдакы кими компакт шәкилдә гејд едилә биләр. Скалјар аргументи вә гијмәтләри мүәјјән инволјусијалы $X-(B)$ фәзасына дахил олан функсијаларла әлагәдар садә еллиптик тәнликләр үчүн гојулмуш мүәјјән сәрһәд мәсәләләринин һәлләри бир тәрәфдән гијмәтләри бу фәзаја дахил олан вектор һоломорф функсијалар нәзәријјәси илә дикәр тәрәфдән исә абстракт фәзаларда верилмиш сингулјар оператор тәнликләрин нәзәријјәси илә сых бағлыдыр. Бу әлагә һәлләрин үмуми комплекс көстәрилиши васитәсилә ујғун сингулјар тәнлијә кәтирилир. Вектор һоломорф функсијаларын Коши типли интегралларла көстәрилиши чох кениш синиф тәшкил едән сәрһәд мәсәләләринин һәлләринин тәдгигинә имкан јарадыр. Хүсусән инволјусијалы фәзаларда вектор һоломорф функсијалар үчүн И. Н. Векуанын интеграл көстәрилиши еллептик тәнликләр үчүн бахылан сәрһәд мәсәләләри тәдгигинин компакт шәкилдә апарылмасына сәбәб олур.

Биз бу фәсилдә вектор һоломорф функсијалар нәзәријјәсинин бир нечә садә мәсәләләрдә тәтбигини көстәрдик. Лакин бу нәзәријјә Лаплас операторунун мүәјјән итерасијалары илә бағлы олан скалјар аргументли вә гијмәтләри исә мүәјјән мүҹәррәд фәзаја дахил олан үмумиләшмиш тәнликләрин һәлләринә вә ујғун сәрһәд мәсәләләринә тәтбиг едилә биләр.

§ 4. ВЕКТОР ҺОЛОМОРФ ФУНКСИЈАЛАР ҮЧҮН ҺИЛБЕРТ МӘСӘЛӘСИ

Фәрз едәк ки, R мүәјјән Банах ҹәбридир. D^+ илә (z) мүстәвисинин һамар контору C олан мәһдуд бир рабитәли областыны ишарә едәк. C үзәриндә нормаҹа H синфинә дахил олан вә гијмәтләри R-дән олан $A(t)$ вә $B(t)$ вектор функсијаларыны көтүрәк. $D^+ + C$-ни бүтүн мүстәвијә гәдәр тамамлајан областы D^- илә ишарә едәк. Һиссә-һиссә һоломорф олан елә вектор $\Phi(z)$ функсијасы тә'јин едәк ки, C үзәриндә

$$\Phi^+(t) - A(t)\Phi^-(t) = B(t) \tag{1}$$

шәртини өдәсин. Скалјар һоломорф функсијалар үчүн белә мәсәләнин тәдгиги $A(t)$-нин индекси васитәсилә апарылараг (1)-ин һәлл олма гајдасы, көстәрилән һәлләр, еффектив олараг мүәјјән дүстурлар васитәсилә гурулур. Скалјар һалда (1) тәнлијинин $z=\infty$-да сыфра чеврилән һәлләри даһа мараглыдыр. Белә һәлләри мә'лум олан Һилберт мәсәләси илә Кошинүвәли сингулјар тәнликләр арасында тәбии олараг мүәјјән асылылыг вардыр. Бундан әлавә (1)-ин һәлли сингулјар оператор үчүн Карлиман—Векуа регулјаризасија мәсәләсини һәлл едир. Скалјар һалда (1) индекси $A(t)\neq 0$ шәрти дахилдә тә'јин олунур. Бу һалда (1)-ә ујғун сингулјар тәнлик олдугда бу шәрт сингулјар операторун нормаллыг шәрти илә бағланыр. Лакин $A(t)$, C үзәриндә $A(t)\neq 0$ шәртини өдәјән вектор функсија исә $A(t)$-нин классик гајда үзрә индексини тә'јин етмәк олар. Бахмајараг R-дә $\ln A(t)$ функсијасынын варлығы вә бунун сонсуз гијмәти олмасы мә'лумдур. Лакин формал олараг аналожи индекс анлајышы верилдикдә онда бу индекс һәмчинин R-ин елементи олмагла $\sum\limits_{j=1}^{n}\alpha_j J_j$ кими көстәрилир; белә ки, $\alpha_j\ (j=\overline{1,\ m})$ там әдәдләр олмагла $J_j (j=\overline{1,\ n})$ идемпотент елементләрдир. $A(t)$ скалјар һал олдугда јә'ни, $A(t)=A_0(t)$ оларса, белә ки, $A_0(t)$ скалјар функсијадыр. (1) мәсәләсинин тәдгиги марагсыздыр. Доғрудан да, әкәр

$$\Phi^{+}(t)-A_0(t)\,\Phi^{-}(t)=B(t) \tag{2}$$

мәсәләсини тәдгиг едәси олсаг, онда гошма R^*-ун көмәји илә (2) скалјар һала јахын олмагла классик гајда үзрә апарылыр, она көрә фәрз едәк ки, $x^*\in R^*$ олан ихтијары функсијалардыр. x^*-илә (2)-нин һәр тәрәфинә тә'сир етсәк:

$$x^*\left[\Phi^{+}(t)\right]-A_0(t)\,x^*\left[\Phi^{-}(t)\right]=x^*\left[B(t)\right] \tag{3}$$

олар. $x^*[\Phi(z)]=\Phi_{x^*}(z)$ илә ишарә етсәк, онда $\Phi(z)$-ин һиссә-һиссә вектор һоломорф олмасындан $\Phi_{x^*}(z)$-ин һиссә-һиссә скалјар һоломорф олмасы алыныр. $A_0(t)\neq 0$ олдуғуну гәбул етмәклә скалјар һоломорф функсијалар үчүн

$$\Phi^{+}_{x^*}(t)-A_0(t)\,\Phi^{-}_{x^*}(t)=B_{x^*}(t). \tag{4}$$

$A_0(t)$-нин индекси васитәсилә мәсәләнин һәлл олма гајдалары тә'риф олмагла һәмин һәлләр мүәјјән дүстурлар васитәсилә гурулур. $\Phi^{-}_{x^*}(\infty)=0$ шәртини өдәјән һәлләрин гурулмасындан сонра Хан—Банах теореминә көрә (2)-нин һәлләри гурулур. (1)-ин һәлләринин тәдгиг үсулларындан бири (1)-ә ујғун сингулјар операторлу тәнлијин гаршы гојулмасыдыр. (1)-ин һәллини

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\nu(t)\,dt}{t-z} \tag{5}$$

шәклиндә ахтараг. $\nu(t)$ нормача Һөлдер синфиндән олдугда (5)-ин лимит гијмәтләри вар вә ашағыдакы дүстурлар васитәсилә тә'јин олунур.

$$\Phi^{+}(t)=\frac{\nu(t)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-z} \qquad (6)$$

вә

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{\nu(t)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-t}; \qquad (7)$$

(6) вә (7)-јә көрә (1)

$$\frac{\nu(t)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-t}-A(t)\left[-\frac{\nu(t)}{2}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C}\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-t}\right]=B(t) \quad (8)$$

олур. Бурадан исә

$$\frac{1}{2}\left[e+A(t)\right]\nu(t)+\frac{1}{2\pi i}\left[e-A(t)\right]\int\limits_{C}\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=B(t) \quad (9)$$

олур вә јахуд да

$$T\nu\equiv a(t)\,\nu(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{C}\frac{\nu(\tau)\,d\tau}{\tau-t}=g(t) \qquad (10)$$

белә ки, $a(t)=\frac{1}{2}\left[e+A(t)\right]$, $b(t)=\frac{1}{2}\left[e-A(t)\right]$ вә $g(t)=B(t)$. Беләликлә, (5) васитәсилә (1) мәсәләси (10) Коши нүвәли сингулјор операторлу характерик тәнлијин һәллинә кәтирилир. Әкәр R-дә (10) тәнлијинин һәлли мә'лум оларса, онда (1) тәнлијинин һәлләри (5) дүстуру васитәсилә тә'јин олунар.

(10)-на ујғун гошма тәнлији јазаг:

$$T'\nu\equiv n(t)\,\nu(t)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_{C}\frac{b(\tau)\,\nu(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=h(t). \qquad (11)$$

Әкәр (10)-ун там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы n вә еләчә дә, n' (11)-ин там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләри исә, онда $\varkappa=n-n'$ (1) мәсәләсинин индекси адланыр. Бизим гејд етдијимиз мүлаһизәләрдән ашағыдакы кими олдугча мүһүм бир нәтичә алыныр. Әкәр скалјар һалда гапалы контурлар үчүн Коши нүвәли сингулјар интеграл тәнликләрин нәзәријјәсиндә Һилберт мәсәләсинин мүһүм ролу варса, онда әксинә вектор функсијалар үчүн гојулмуш Һилберт мәсәләсинин тәдгиги мәсәләсиндә бу мәсәләјә ујғун Коши нүвәли мүчәррәд сингулјар тәнлијин тәдгигинә дә зәрури олараг еһтијачы вардыр. Белә бир чатышмамазлыг нәинки Һилберт мәсәләсинин һәллиндә һәмчинин Риман—Һилберт мәсәләсинин һәллиндә дә мејдана чыхыр. Бурада алынан нәтиҹәләр ону көстәрир ки, әкәр белә, вектор һоломорф функсијалар үчүн мүәјјән сәрһәд мәсәләси гојуларса, тәбии олараг Коши типли интеграл вә јахуд башга интеграл көстәрилишләрдән истифадә едәрәк һәмин мәсәлә үјғун оператор сингулјар тәнлијә кәтирилир.

Биз јалныз бу фәсилдә мүәјјән вектор функсијаларла бағлы олан бир нечә мәсәләләрин һәлләринин тәдгигини скалјар һала үјғун мәсәләләрин һәлләринин классик нәзәријјәси илә мүгајисә етдик. Лакин вектор функсијаларла бағлы олан аналожи мәсәләләр. Башга тоположи үсулларла тәдгиг олуна билмәклә бу саһәдә бә'зи нәзәрә чарпан нәтиҹәләр алынмышдыр.

XI ФӘСИЛ

ИНТЕГРАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Биз бу фәсилдә бир нечә синиф конкрет операторлу тәнликләрин һәлләрини тәдгиг етмәклә бир тәрәфдән белә тәнликләрин үмуми тамам кәсилмәз операторлу тәнликләрлә әлагәләрини көстәрәҹәјик. Дикәр тәрәфдән исә билаваситә аналитик үсулла һәмин тәнликләри арашдырмагла конкрет нәтиҹәләрин алындығыны гејд едәҹәјик. Интеграл тәнликләр саһәси кениш тәдгиг олундуғундан биз бә'зи мүһүм ҹәһәтләри шәрһ етмәклә, аналитик үсулла бә'зи функсијаларын тә'јин олунмасы кениш јер тутдуғундан бу функсијаларын ифадәләриндән һазыр истифадә едәҹәјик.

§ 1. ИКИНЧИ НӨВ ФРЕДҺОЛМ ТӘНЛИКЛӘРИ

Фәрз едәк ки, бизә

$$\varphi(x)+\lambda\int_a^b K(x,\ s)\ \varphi(s)\,ds=f(x) \tag{1}$$

тәнлији верилмишдир, белә ки, $K(x,\ s)$ $a\leqslant x,\ s\leqslant b$ квадратында верилмиш кәсилмәз функсија вә еләҹә дә, $f(x)$ $[a,\ b]$-дә верилмиш кәсилмәз функсијадыр. (1) тәнлији Фредһолмун икинчи нөв интеграл тәнлији адланыр. (1) тәнлији

$$\varphi-\lambda K\varphi=f \tag{2}$$

кими јазылыр, белә ки,

$$K\varphi\equiv\int_a^b K(x,\ s)\varphi(s)\,ds. \tag{3}$$

(2) тәнлијинин Банах фәзаларында тамам кәсилмәз операторлар

үчүн тәдгигини вермишдик. Әввәлчә, билаваситә Фредһолм нәзәријјәсинин бә'зи әсас ҹәһәтләрини гејд етмәдән габаг көстәрәк ки, $K(x, s)$ кәсилмәз олдугда вә $\varphi(x)$ кәсилмәз оларса, онда K, кәсилмәз функсијалар фәзасында тамам кәсилмәз оператордур.

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \tag{4}$$

ишарә едәрәк, бурадан

$$\psi(x+h) - \psi(x) = \int_a^b [K(x+h, s)] - K(x, s)]\,\varphi(s)\,ds. \tag{5}$$

Бурада $[\psi(x+h) - \psi(x)]^2$ ифадәсини гијмәтләндирмәк мәгсәдилә $\left[\int_a^b [K(x+h, s) - K(x, s)]\varphi(s)\,ds\right]^2$ интегралына Коши—Бунјаковски бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк:

$$[\psi(x+h) - \psi(x)]^2 \leqslant \int_a^b | K(x+h, s) -$$

$$- K(x, s) |^2 ds \cdot \int_a^b | \varphi(s) |^2 ds \tag{6}$$

олар. Фәрз едәк ки, $\varphi(s)$ функсијалар синфи үчүн елә мүсбәт сабит M әдәди вар ки,

$$\int_a^b | \varphi(s) |^2 ds \leqslant M^2 \tag{7}$$

өдәнилир. (4)-дә $| \psi(x) |^2$ гијмәтләндирмәк үчүн, Коши—Бунјаковски дүстуруну тәтбиг едәк, онда

$$| \psi(x) |^2 \leqslant \int_a^b | K(x, s) |^2 ds \int_a^b | \varphi(s) |^2 ds, \tag{8}$$

(7)-јә көрә, бурадан:

$$| \psi(x) |^2 \leqslant M^2 \int_a^b | K(x, s) |^2 ds. \tag{9}$$

$K(x, s)$ кәсилмәз олдугда елә мүсбәт сабит N әдәди вар ки:

$$\int_a^b | K(x, s) |^2 ds \leqslant N^2.$$

Әкәр ε ихтијари мүсбәт әдәди исә, онда елә δ мүсбәт әдәди вар ки, $| h | \leqslant \delta$ олдугда

$$\int_a^b |K(x+h,\ s)-K(x,\ s)|^2 ds \leqslant \varepsilon \qquad (10)$$

өдәнилир. (9) вә (10) көстәрир ки, бу шәртләр дахилиндә $\psi(x)$ функсијалар синфи модулча мүнтәзәм мәһдуд олмагла ејни дәрәчәдә кәсилмәздир. Онда Арсел теореминә көрә K тамам кәсилмәз оператор олар. Биз $K(x,\ s)$-ин әввәлчәдән кәсилмәз олдуғуну фәрз етмишдик. Лакин $K(x,\ s)$ нүвәси үчүн истәнилән кәсилмәз $\varphi(x)$ функсијасы үчүн $\int_a^b K(x,\ s)\cdot\varphi(s)\,ds$ кәсилмәз оларса, онда бу нүвәдән (9) вә (10) шәртләринин өдәнилмәсини тәләб етсәк, K оператору, тамам кәсилмәз олар. Она көрә дә, белә тәнликләр үчүн һәлл олма шәртләри вермәклә нормал һәлл олмалары һаггында мүәјјән теоремләр исбат олунмушдур вә спектри һаггында үмуми тәклифләр верилмишдир. Инди биз бурада гыса да олса, (1) тәнлији үчүн Фредһолм нәзәријјәсинин бә'зи мүһүм чәһәтләрини гејд едәк. λ-ны үмумијјәтлә комплекс әдәд гәбул едәрәк (1)-ин һәллинин $|\lambda|$-нын кичик гијмәтләриндә

$$\varphi(x)=\sum_{к=0}^{\infty}\varphi_к(x)\lambda^к \qquad (11)$$

шәклиндә олдуғуну көстәрәк. (11)-и (1)-ин һәлли олдуғуну гәбул едәрәк бу тәнликдә јеринә јазараг λ-нын ејни үстләринә көрә мүгајисә етсәк:

$$\varphi_0(x)=f(x), \qquad (12)$$

$$\varphi_к(x)=\int_a^b K(x,\ s)\,\varphi_{к-1}(s)\,ds. \qquad (13)$$

$f(x)$ вә $K(x,\ s)$ кәсилмәз функсијалар олдугларындан елә мүсбәт M_1 вә M_2 сабит әдәдләри вар ки, $|f(x)|\leqslant M_1$ вә $K(x,\ s)|\leqslant M_2$. (1) тәнлији илә јанашы көмәкчи

$$\varphi_0(x)=\lambda\int_a^b M_2\varphi_0(s)\,ds+M_1 \qquad (14)$$

тәнлијини көтүрәк. (14)-дән көрүндүјү кими, әкәр (14)-үн һәлли варса, онда белә һәлл сабитдир, јә'ни $\varphi_0(x)=C$ олар. Она көрә дә (14)-дән

$$C[1-\lambda(a-b)M_2]=M_1. \qquad (15)$$

Бурадан:

$$C=\frac{M_1}{1-\lambda(b-a)M_2} \qquad (16)$$

λ-лары елә сечәк ки,

$$|\lambda|(b-a)M_2<1,\tag{17}$$

олсун, јә'ни

$$|\lambda|<\frac{1}{M_2(b-a)}.\tag{18}$$

Белә λ-лар үчүн (16)-нын сағ тәрәфини $\lambda=0$ әтрафында гүввәт шәклиндә көстәрмәк олар, јә'ни

$$C=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\alpha_\kappa\lambda^\kappa.\tag{19}$$

Беләликлә, (14)-үн һәлли (18)-и өдәјән даирә дахилиндә һоломорф олар. $R=\frac{1}{M_2(b-a)}$ радиуслу даирә Нејман даирәси адланыр. Әкәр $|f(x)|\leqslant M_1$ вә $|K(x,s)|\leqslant M_2$-ни нәзәрә алараг $\varphi_0(x)$ вә $\varphi_\kappa(x)$ $\kappa\geqslant 1$ үчүн (12) вә (13)-дән гијмәтләндириләрсә, онда асанлыгла јохламаг олар ки,

$$|\varphi_\kappa(x)|<\alpha_\kappa.\tag{20}$$

Беләликлә, (19) сырасы (11)-ин можаранты олар. Гејд етдијимиз бу нәтиҹәләр ашағыдакы теорем шәклиндә тә'риф олунур. (1) тәнлијинин $|\lambda|<R$ даирәсинин истәнилән λ нөгтәсиндә ихтијари $f(x)$ үчүн јеканә һәлли вардыр. Әкәр $\varphi_\kappa(x)$-ләр $K(x,s)$ вә $f(x)$ функсијалары васитәсилә ифадә олунарса

$$\varphi_p(x)=\int_a^b K_p(x,s)f(s)\,ds \quad p\geqslant 2\tag{21}$$

көстәрилир. Бурада, $K_p(x,s)$, $K(x,s)$-ин p-чи итерасијасыдыр, јә'ни

$$\varphi_2(x)=\int_a^b K_2(x,s)f(s)\,ds,$$

$$K_2(x,s)=\int_a^b K(x,t)K(t,s)\,dt,$$

$$\varphi_3(x)=\int_a^b K_3(x,s)f(s)\,ds,$$

$$K_3(x,s)=\int_a^b K_2(x,t)K(t,s)\,dt$$

кими көстәрилир. Үмумијјәтлә асанлыгла јохламаг олар ки,

$$K_{p+q}(x,s)=\int_a^b K_p(x,t)K_q(t,s)\,dt.\tag{22}$$

$\varphi_p(x)$-ин көстәрилән бу ифадәләрини нәзәрә алсаг, (1) тәнлијинин һәлли

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s)\, ds \qquad (23)$$

шәклиндә көстәрилир. Бурада, $R(x, s, \lambda)$.

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda K_2(x, s) + \lambda^2 K_3(x, s) + \cdots (24)$$

ифадә олараг $|\lambda| < R$ даирәсиндә λ-ја көрә мүтләг вә x, s-ә көрә мүнтәзәм јығылмагла $K(x, s)$-ин резолвенти адланыр. Бурадан нәтичә кими гејд едәк ки,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = 0 \qquad (25)$$

тәнлијинин Нејман даирәсиндә јалныз сыфыр һәлли вар. Бу үсулдан бир нәтичә дә алырыг ки, Нејман даирәнин нөгтәләр чохлуғуну K-нын резолвент чохлуғудур. Бизим көстәрдијимиз бу тәдгигатдан көрүндүјү кими, Нејман даирәсинин харичиндә (1) тәнлијинин һәлләринин варлығы вә јахуд да һәллин олмамасы һаггында һеч бир мүлаһизә јүрүтмәк олмаз. Фредһолм (11) тәнлији үчүн бөјүк мәһарәтлә тамамланмыш бир нәзәријјә јаратмышдыр ки, бу нәзәријјә (λ) мүстәвисинин истәнилән нөгтәсиндә истәр (1)-ин вә истәрсә дә (25)-ин һәлләрини характеризә етмәклә алынан һәлләр мүәјјән дүстурлар васитәсилә компакт шәкилдә верилир. Биз бурада һәмин нәзәријјәни мүфәссәл шәкилдә вермәмәклә әсас теоремләрин тә'рифи илә кифајәтләнәчәјик. Онун үчүн дә $K(x, s)$ нүвәсилә әлагәдар олан детерминанты јазаг:

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ s_1, & s_2, & \ldots, & s_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, s_1) & K(x_1, s_2) \cdots & K(x_1, s_n) \\ K(x_2, s_1) & K(x_2, s_2,) \cdots & K(x_2, s_n) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ K(x_n, s_1) & K(x_n, s_2) \ldots & K(x_n, s_n \end{vmatrix} \qquad (26)$$

(26) васитәсилә $d_n\, (n = \overline{1, \infty})$ әдәдләрини дә $d_n\,(x, s$ $(n = \overline{1, \infty})$ функсијаларыны тә'јин едәк:

$$d_n = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n, \qquad (27)$$

$$d_n(x, s) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} K\begin{pmatrix} x, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ s, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n. \qquad (28)$$

Һәһајәт

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n d_n}{n!} \lambda^n \tag{29}$$

вә

$$D\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \lambda\Big) = K(x, s) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n d_n(x, s)}{n!} \lambda^n \tag{30}$$

сыраларыны көтүрәк. Исбат олунмушдур ки, (29) вә (30) сыралары (λ) мүстәвисинин истәнилән сонлу λ нөгтәсиндә јығылмагла там функсијалардыр. (25)-ә ујғун гошма тәнлијини јазаг:

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b K(s, x) \psi(s) ds = 0. \tag{31}$$

Фредһолмун әсас үч теоремини тә'риф едәк.

Теорем 1. Әкәр $D(\lambda) \neq 0$ исә, онда (1) тәнлијинин истәнилән сағ тәрәф үчүн јеканә һәлли вар вә бу һәлл

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \frac{D\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \lambda\Big)}{D(\lambda)} f(s) ds \tag{32}$$

дүстуру васитәсилә тә'јин олунур.

Беләликлә, бу һалда (25)-ин јалныз сыфыр һәлли вардыр.

Теорем 2. Әкәр $D(\lambda) = 0$ исә, онда (25) вә (31) тәнликләрини λ-ја ујғун там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләринин сајы сонлу олмагла бири-биринә бәрабәрдир.

Теорем 3. Әкәр $D(\lambda) = 0$ исә, онда (1) тәнлијинин һәлл олмасы үчүн

$$\int_a^b f(x) \psi_j(x) dx = 0 \quad (j = \overline{1, \kappa}) \tag{33}$$

шәртинин өдәнилмәси зәрури вә һәм дә кафидир. Бурада, $\psi_j(x)$ $(j = \overline{1, \kappa})$ (31)-ин там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләридир.

$$\frac{D\begin{pmatrix} x \\ s \end{pmatrix}, \lambda\Big)}{D(\lambda)} = R(x, s, \lambda) \tag{34}$$

ишарә олунараг $K(x, s)$-ин резолвенти адланыр. ($D(\lambda) \neq 0$). Беләликлә, (32) ашағыдакы шәкилдә јазылыр:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, s, \lambda) f(s)\, ds \tag{35}$$

$D(\lambda)$-нын ифадəсиндəн алырыг ки, $D(0) = 1$. Она көрə дə, $D(\lambda) \not\equiv 0$-дыр. Белəликлə, $D(\lambda)$ там функсија олдуғундан мүстəвинин сонлу һиссəсиндə $D(\lambda)$-нын сыфырларынын сајы сонсуз ола билмəз. Əкс һалда, јеканəлик теореминə көрə дə $D(\lambda) \equiv 0$ олмагла $D(0) = 1$ шəртинə зидд оларды. Бурадан алырыг ки, $D(\lambda)$-нын сыфырлары əн чоху һесаби олмагла јығылма нөгтəси сонсузлугда олар. Ејни мүлаһизəјə көрə дə $D(\lambda)$-ны сыфыр едəн һəр бир λ_0 нөгтəсинин тəртиби сонлудур. $D(\lambda) = 0$ өдəјəн һəр бир λ, (1) тəнлијинин вə јахуд да $K(x, s)$ нүвəсинин характеристик əдəди адланыр. $D(\lambda_0) = 0$ өдəјəн һəр бир нөгтəнин резолвенти үчүн полјус олдуғу исбат олунмагла $R(x, s, \lambda)$-нын мероморф функсија олдуғу көстəрилир. Көстəрилəн сыралар васитəсилə һəмчинин резолвент үчүн биринчи вə икинчи тəнлији алыныр:

$$R(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b K(x, t) R(t, s; \lambda)\, dt, \tag{36}$$

$$R(x, s; \lambda) = K(x, s) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) K(t, s)\, dt. \tag{37}$$

Нејман үсулу васитəсилə резолвент үчүн (36) вə (37) тəнликлəрини јаза билəрдик. Һəр ики үсулун мүгајисəсиндəн көрүнүр ки, Нејман үсулу васитəсилə гурулан резолвентин Нејман даирəсиндəн харичə аналитик давамы, Фредһолмун резолвентини верир. Биз һəлəлик $K(x, s)$-ин кəсилмəз олдуғуну фəрз едəрəк əсас теоремлəри тə'риф етдик. Лакин Фредһолм нəзəријјəси даһа кениш синиф тəшкил едəн нүвəлəр үчүн дə доғрудур. Фəрз едəк ки, $K(x, s)$ $0 \leqslant x,\ s \leqslant b$ квадратында сонлу сајда биринчи тип кəсилмə нөгтəлəри вə сонлу сајда биринчи нөв кəсилмə хəтлəри олан функсијадыр. Белə ки, бу хəтлəрин y-охуна паралел хəтлəрлə кəсишмəси сонлу сајда нөгтə үзрə олур. Əлавə фəрз едəк ки, $K(x, s)$ мəһдуд функсијадыр. Белə хассəли $K(x, s)$ функсијасы регулјар нүвə адланыр. Əкəр белə нүвəли тəнлијин һəлли $f(x)$ кəсилмəз олдугда кəсилмəз функсијалар синфиндəн ахтарылмагла

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \tag{38}$$

кəсилмəз функсија олар. Фредһолм нəзəријјəси белə нүвəлəр үчүн дə доғрудур. Бурада мүһүм бир гејд едəк. Əкəр $K(x,s)$ регулјар нүвəси үзəринə əлавə шəрт гојсаг, онда (1)-ин һəлли мүəјјəн бир синфə дахил олур. Мəсəлəн: $a \leqslant x,\ s \leqslant b$

квадраты дахилиндә биринчи нөв олан елә кәсилмә хәтти варса ки, бу хәтт y охуна паралелдир, онда бу хәттин абсиси

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds, \tag{39}$$

функсијасы үчүн биринчи нөв кәсилмә хәтти олар. Шүбһәсиз, биз (39)-а дахил олан $\varphi(x)$ функсијасыны кәсилмәз функсија јох, јалныз мәһдуд вә бу интегралын варлығыны тә'мин едән функсија кими фәрз едирик.

Демәли, $a \leqslant x,\ s \leqslant b$ квадраты дахилиндә әлавә y охуна паралел олан сонлу сајда биринчи нөв кәсилмә хәтләри варса, онда белә хәтләрин абсисләри (1) тәнлијин һәлләринин биринчи нөв кәсилмә нөгтәләри олур. Гејд етдијимиз мүлаһизәләрдән алырыг ки, бу, синиф нүвәләр үчүн Фредһолм нәзәријјәси өз күчүндә галмагла көстәрилән схем ејни гајда үзрә апарылыр. Јалныз (1) тәнлијинин һәлли $[a, b]$-дә биринчи нөв кәсилмә нөгтәләри олан мәһдуд функсијалар синфиндән ахтарылыр. Регулјар нүвәли интеграл тәнликләр системи белә нүвәли бир интеграл тәнлијә кәтирилдијиндән, көстәрилән интеграл тәнликләрин системинин ајрыча тәдгигинә еһтијачы јохдур. Верилән системдән бир тәнлијә кәтирилмә схемини көстәрмәк үчүн, садәлик үчүн интегралын сәрһәдини сыфырдан ваһидә гәдәр көтүрәчәјик. Беләликлә,

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 K_{ij}(x, s)\varphi_j(s)\,ds = f_i(x) \qquad \left(i = \overline{1, n}\right) \tag{40}$$

систем тәнлијини көтүрәк. Белә ки, $K_{ij}(x, s)\left(i,\ j = \overline{1, n}\right)$ $0 \leqslant x, s \leqslant 1$ квадратында верилмиш регулјар нүвәләр $f_i(x)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ исә, [0, 1]-дә верилмиш кәсилмәз функсијалардыр.

$$K(x, s) = K_{ij}(x - i + 1,\ s - j + 1), \tag{41}$$

$$i - 1 \leqslant x \leqslant i,\quad j - 1 \leqslant s \leqslant j,$$

$$F(x) = f_i(x - i + 1) \quad i - 1 \leqslant x \leqslant i, \tag{42}$$

$$\dot{\Phi}(x) = \varphi(x - i + 1) \quad i - 1 \leqslant x \leqslant i \tag{43}$$

функсијаларыны тә'јин едәк. (41), (42) вә (43)-ә көрә (40) системи ашағыдакы кими бир тәнлик шәклиндә јазылыр:

$$\Phi(x) - \lambda \int_0^n K(x, s)\Phi(s)\,ds = F(x). \tag{44}$$

$K(x, s)$ нүвәсинин тәјининдән көрүндүјү кими, $K(x, s)$ нүвәсинин $0 \leqslant x,\ s \leqslant n$ квадратында y охуна паралел олан сонлу сајда биринчи чинс кәсилмә хәтләри вардыр. Еләчә дә, $F(x)$-ин [0, 1] парчасында сонлу сајда биринчи чинс кәсилмә нөгтәләри олмагла (44)-үн һәлли белә функсијалар синфиндән ахтарылыр. Әкәр (44)-үн һәлли варса, Фредһолмун биринчи теореминә көрә бу һәлл ашағыдакы формула васитәсилә тә'јин олунур:

$$\Phi(x) = F(x) + \lambda\int_0^n R(x, s, \lambda) F(s)\, ds. \qquad (45)$$

Верилмиш системин һәллини бурадан алмаг үчүн $\Phi(x)$-и ујғун олараг [0, 1], [1, 2] вә саирә парчаларына пројексијаламаг лазымдыр. (40) системини башга үсул васитәсилә дә арашдырмаг оларды.

$$K(x, s) = \| K_{ij}(x, s) \|, \quad \overrightarrow{\varphi(x)} = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

вә

$$\overrightarrow{f(x)} = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

матрис вә векторлары дахил етмәклә (40) системини

$$\overrightarrow{\varphi(x)} - \lambda\int_0^1 K(x, s)\overrightarrow{\varphi(s)}\, ds = \overrightarrow{f(x)}$$

кими јаза биләрик. Скалјар һалда олан чәбри әмәлләри вә матрисин матрисә һасилини, матрисин вектора һасилини нәзәрә алсаг, бу гајда үзрә олан вектор интеграл тәнлијини тәдгиг етмәк оларды.

Беләликлә, (45)-дән (40) системинин һәлли

$$\varphi_i(x) = f_i(x) + \lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^1 R_{ij}(x, s, \lambda) f_i(s)\, ds$$

формулу васитәсилә тә'јин олунур. Бурада, $R_{ij}(x, s, \lambda)$, $K_{ij}(x, s)$ $(i,\ j = \overline{1, n})$ нүвәләри васитәсилә гурулур. Башга сөзлә $R_{ij}(x, s, \lambda)$, $K_{ij}(x, s)$ нүвәсинин билаваситә резолвенти дејилдир. Биз (1) тәнлијини тәдгиг едәркән $D(\lambda) \neq 0$ олдугда бу тәнлијин јеканә һәллинин резолвент васитәсилә гурулдуғуну көстәрдик. Лакин $D(\lambda) = 0$ олдугда (1) тәнлијинин һәлли варса, бу һәлл ујғун бирчинс тәнлијинин үмуми һәлли вә (1)-ин хүсуси һәлли васитәсилә гурулур. Белә хүсуси һәллин гурулма гајдасыны көстәрәк. Фәрз едәк ки, $D(\lambda_0) = 0$ олмагла мәхсуси $\lambda = \lambda_0$ әдәдинә ујғун (25) вә (31)-ин там систем тәшкил едән хәтти асылы олмајан һәлләрини ујғун олараг $\varphi_i(x)\ (i = \overline{1, m})$ вә $\psi_i(x)\ (i = \overline{1, m})$ ишарә едәк. Ашағыдакы кими көмәкчи интеграл тәнлијә бахаг:

$$\omega(x) = \lambda_0\int_a^b Q(x, s)\,\omega(s)\, ds + f(x) \qquad (46)$$

бурада,

$$Q(x, s) = K(x, s) - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)\psi_j(s). \qquad (47)$$

Асанлыгла көстәрәк ки, λ_0, $K(x, s)$ нүвәсинин характеристик әдәди олдугда λ_0, $Q(x, s)$ нүвәси үчүн регулјар әдәддир. Белә ки, (46)-нын һәр бир һәлли һәмчинин (1)-ин һәллидир. (46)-нын һәлли

$$\omega(x) = \lambda_0 \int_a^b R_1(x, s, \lambda) f(s)\, ds + f(x)$$

васитәсилә тә'јин олунур. Бурада $R_1(x, s, \lambda)$, $Q(x, s)$ нүвәсинин резолвенти вә $K(x, s)$ нүввәсинин псевдорезолвенти адланыр. Демәли, $D(\lambda_0) = 0$ олан һалда (1)-ин һәлли

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j \varphi_j(x) + \omega_0(x)$$

васитәсилә гурулур. Бурада $\omega_0(x)$ (48)-ин хүсуси һәлләриндән биридир.

Биз (1) тәнлијиндә һәм $K(x, s)$-ин вә һәм дә $f(x)$-ин һәгиги функсијалар олмасыны фәрз етмишдик. Әкәр $K(x, s)$ вә $f(x)$ һәгиги аргументли комплекс функсијалар исә ејни гајда үзрә тәдгигатлар апарылараг ујғун нәтиҹәләр алыныр. Лакин бу һалда, әкәр $D(\lambda_0) = 0$ олдугда (46)-ја ујғун тәнлик

$$\omega_1(x) = \lambda_0 \int_a^b Q_1(x, s)\,\omega_1(s)\, ds + f(x)$$

васитәсилә гурулур.

$$Q_1(x, s) = K(x, s) - \sum_{j=1}^{m} \overline{\varphi}_j(x)\overline{\psi}_j(s)$$

кими гурулур. $K(x, s)$ вә $f(x)$ комплекс гијмәтли олдугда

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x), \quad f(x) = f_1(x) + if_2(x), \quad \lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$$

вә нәһајәт, $K(x, s) = K_1(x, s) + iK_2(x, s)$ кими јазмагла φ_1 вә φ_2-јә көрә һәгиги нүвәли λ_1 вә λ_2 параметрли интеграл тәнликләр системини алырыг. Фредһолм интеграл тәнликләринин елә бир хүсуси синфи вар ки, белә тәнликләрин һәлләри хәтти ҹәбри тәнликләр системи илә әлагәдар олараг Фредһолм минорларынын гурулмасына еһтијаҹ галмыр. Онсуз да белә минорлар сонсуз сыралар васитәсилә гурулур. Белә хүсуси синиф тәшкил едән интеграл тәнликләр ҹырлашмыш нүвәли интеграл тәнликләрдир:

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n}\lambda\int_a^b a_j(x)\,b_j(s)\,\varphi(s)\,ds+f(x). \tag{48}$$

Бурада,

$$a_j(x) \text{ вә } b_j(s)\left(j=\overline{1,n}\right)$$

үјғун олараг верилмиш хәтти асылы олмајан функсијалардыр. Бу һалда (48) тәнлијинин һәллини

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,a_j(x)+f(x), \tag{49}$$

шәклиндә ахтарсаг, (49)-ы (48)-дә јеринә јазсаг:

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,a_j(x)+f(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\int_a^b\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\,a_i(s)+f(s)\right)\times$$
$$\times b_j(s)\,ds+f(x). \tag{50}$$

Бурадан исә,

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,a_j(x)=\lambda\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\sum_{i=1}^{n}\gamma_i a_i(s)\,b_j(s)\,ds+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\int_a^b b_j(s)\,f(s)\,ds. \tag{51}$$

$$\int_a^b a_i(s)\,b_j(s)\,ds=\alpha_{ij}, \tag{52}$$

ишарә етсәк

$$\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\,a_j(x)-\lambda\sum_{j=1}^{n}a_j(x)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\,\gamma_i\right)=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\,a_j(x), \tag{53}$$

белә ки, $\beta_j=\int_a^b b_j(s)\,f(s)\,ds$. Шәртә көрә $a_j(x)\left(j=\overline{1,n}\right)$ хәтти асылы олмадыгларындан, бурадан:

$$\gamma_j-\lambda\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\,\gamma_i=\beta_j\quad\left(j=\overline{1,n}\right) \tag{54}$$

мүнасибәтләрини алырыг ки, бу да $\gamma_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ сабитләринин тә'јини үчүн чәбри тәнликләр системидир. Бу системин детерминантыны $\Delta(\lambda)$ ишарә етсәк, $\Delta(\lambda)\neq 0$ олдугда $\gamma_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ бу системдән истәнилән $\beta_j\left(j=\overline{1,n}\right)$ үчүн бир гијмәтли тә'јин олунараг, (49)-да јеринә јазыларса, (48) тәнлијинин һәллини алырыг. Еләчә дә, $\Delta(\lambda) = 0$ олан һалда мүәјјән шәртләр да хилиндә һәлләр һаггында данышмаг оларды. Волтер типли интеграл тәнлик

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x)$$

шәклиндә олан тәнлик адланыр.

Бу тәнлијә ардычыллыг јахынлашма үсулу тәтбиг олундугда алыныр ки, бу тәнлијин истәнилән λ вә $f(x)$ үчүн јеканә һәлли вардыр. Бу нөгтеји-нәзәрдән бу тәнлијин тәдгиг олунмасына еһтијач галмыр.

§ 2. $L_2(a, b)$ ФӘЗАСЫНДА ФРЕДҺОЛМ ИНТЕГРАЛ ТӘНЛИКЛӘРИ

Фәрз едәк ки, бизә

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds + f(x), \tag{1}$$

тәнлији верилир белә ки, $K(x, s)$, $a \leqslant x \leqslant b$ квадратында чәмләнән олмагла L_2-јә дахилдир, јә'ни

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2\,dx\,ds < \infty \tag{2}$$

өдәнилир. Белә ки, верилмиш $f(x) \in L_2[a, b]$ олмагла (1)-ин һәлли $\varphi(x) \in L_2[a, b]$ синфиндән ахтарылыр, (2)-ни өдәјән $K(x, s)$ Һилберт—Шмидт нүвәси адланыр:

$$K\varphi \equiv \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \tag{3}$$

оларса, бурада K Һилберт—Шмидт оператору адланыр.

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \tag{4}$$

ишарә едәк. $K(x, s)$ функсијасы s-ин функсијасы кими бүтүн x-ләр үчүн $L_2[a, b]$-јә дахилдир, ашкардыр ки, $\int_a^b |K(x, s)|^2 ds$ интегралы вар. (4) илә тә'јин олунан функсија бүтүн x-ләр үчүн тә'јин олунмушдур. Инди көстәрәк ки, $\psi(x) \in L_2[a, b]$. Она көрә дә (4)-дән

$$|\psi(x)|^2 = \left| \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \right|^2 \leqslant$$

$$< \int_a^b |K(x, s)|^2 ds \cdot \int_a^b |\varphi(s)|^2 ds =$$

$$= \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(x, s)|^2 ds. \tag{5}$$

Беләликлә,

$$|\varphi(x)|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 \int_a^b |K(x, s)|^2 ds \tag{6}$$

бу бәрабәрсизлијин һәр тәрәфини интегралласаг:

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx \leqslant \|\varphi\|^2 \int_a^b dx \int_a^b |K(x, s)|^2 ds, \tag{7}$$

бурадан, $\psi(x) \in L_2[a, b]$

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx = \|\psi\|^2. \tag{8}$$

(3)-ә көрә

$$\|K\varphi\|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 \int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx\, dy,$$

$$\|K\| \leqslant \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K(x, s)|^2 dx\, dy}\ . \tag{9}$$

Инди көстәрәк ки, K оператору тамам кәсилмәздир. Фәрз едәк ки, $\{\varphi_n\} \in L_2[a, b]$ олан там ортогонал системдир. Онда $\{\varphi_m(x)\, \varphi_n(s)\}$.

$L_2([a, b] \times [a, b])$ фәзасында там систем тәшкил едир. Она көрә дә, $K(x, s)$ ашағыдакы кими јазылыр:

$$K(x, s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \alpha_{mn} \varphi_m(x)\, \varphi_n(s), \tag{10}$$

$$K_N(x, s) = \sum_{m,n=1}^{N} \alpha_{mn} \varphi_m(x)\, \varphi_n(s), \tag{11}$$

$$K_N\omega = \int_a^b K_N(x, s)\, \omega(s)\, ds \tag{12}$$

(12) операторуну тә'јин едәк. (11)-и нәзәрә алсаг, бу оператор $L_2[a, b]$ фәзасыны сонлу өлчүлү фәзаја ин'икас етдирир. Доғрудан да

$$K_N\omega = \sum_{m,n=1}^{N} \int_a^b \alpha_{mn}\psi_m(x)\varphi_n(s)\omega(s)\,ds,$$

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_{mn}\int_a^b\varphi_n(s)\omega(s)\,ds= \alpha_{mn}^{0} \qquad (13)$$

оларса:

$$K_N\omega = \sum_{m=1}^{N} \alpha_{mn}^{0}\,\varphi_m(x). \qquad (14)$$

Беләликлә, K_N-нин сонлу өлчүлү олмасы алынмагла тамам кәсилмәз олур. Бундан әлавә $K_N(x, s)$-ин тә'јининдән көрүндүјү кими, бу функсија $K(x, s)$ функсијасы үчүн Фурје сырасынын хүсуси ҹәмидир. Она көрә $N \to \infty$ олдугда

$$\int_a^b\int_a^b (K(x, s) - K_N(x, s))^2\, dx\, ds \to 0. \qquad (15)$$

(9) бәрабәрсизлијинә көрә

$$\| K - K_N \| \leqslant \sqrt{\int_a^b\int_a^b | K(x, s) - K_N(x, s) |^2\, dx ds} \qquad (16)$$

бурадан исә $N \to \infty$ олдугда

$$\| K - K_N \| \to 0. \qquad (17)$$

K јығылан $\{K_N\}$ тамам кәсилмәз операторларын лимити олдуғундан K тамам кәсилмәз олар. Она көрә дә,

$$\varphi - \lambda K\varphi = y \qquad (18)$$

тәнлијинә Рисс—Шаудер нәзәријјәсини тәтбиг етмәк олар. Гејд едәк ки, әкәр A_1 вә A_2 Һилберт—Шмидт операторларыдырса, јә'ни

$$A_1\varphi \equiv \int_a^b K_1(x, s)\, \varphi(s)\, ds, \qquad (19)$$

$$A_2\varphi \equiv \int_a^b K_2(x, s)\, \varphi(s)\, ds. \qquad (20)$$

Әкәр истәнилән $\varphi \in L_2[a, b]$ φ үчүн $A_1\varphi = A_2\varphi$ өдәниләрсә, онда $K_1(x, s) = K_2(x, s)$.

$$A_1\varphi - A_2\varphi = \int_a^b [K_1(x, s) - K_2(x, s)]\, \varphi(s)\, ds \qquad (21)$$

олдуғундан $A_1\varphi = A_2\varphi$ олдуғуну гәбул етсәк, онда

$$\int_a^b [K_1(x, s) - K_2(x, s)]\,\varphi(s)\,ds = 0 \qquad (22$$

бәрабәрлији истәнилән $\varphi \in L_2[a, b]$ олан $\varphi(x)$ үчүн өдәнилир. Ихтијари $x \in [a,b]$ олан x үчүн $\varphi(s) = \overline{\kappa_1(x, s) - \kappa_2(x, s)}$ көтүрүб

$$\int_a^b |K_1(x, s) - K_2(x, s)|^2\,ds = 0,$$

бу бәрабәрлији x-ә көрә интегралласаг:

$$\int_a^b\int_a^b |K_1(x, s) - K_2(x, s)|^2\,dx\,ds = 0.$$

Бурадан исә, санки истәнилән x, s үчүн $K_1(x,s) = K_2(x, s)$. Бурадан о нәтиҹәјә кәлирик ки, еквивалент олан функсијалар мухтәлиф көтүрүлмәдијиндән һәр бир Һилберт—Шмидт $K(x,s)$ нүвәсинә мүәјјән K Һилберт—Шмидт оператору вә әксинә һәр бир Һилберт—Шмидт K операторуна мүәјјән бир Һилберт—Шмидт $K(x, s)$ нүвәси ујғун олур. Көстәрәк ки, K Һилберт—Шмидт операторунун гошмасы $\overline{K(s, x)}$ Һилберт—Шмидт нүвәси васитәсилә тә'јин олунур. (Kf, g) скалјар һасилини тә'јин едәк. Комплекс $L_2[a, b]$ фәзасында (φ, ψ)

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(s)\,\overline{\psi}(s)\,ds$$

кими тә'јин олдуғундан

$$(Kf, g) = \int_a^b \left\{\int_a^b K(s, t)\,f(t)\,dt\right\} \overline{g(s)}\,ds. \qquad (23)$$

Фубин теореминә көрә (23)-ә дахил олан интегралларын јерини дәјишсәк:

$$(Kf, g) = \int_a^b\int_a^b K(s, t)\,f(t)\,\overline{g}(s)\,dt\,ds =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(s, t)\,\overline{g}(s)\,ds\right] f(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b f(t) \left[\overline{\int_a^b \overline{K(s, t)}\,g(s)\,ds}\right] dt = (f, K^*, g).$$

Беләликлә,

$$K^* g = \int_a^b \overline{K(s, t)}\,g(s)\,ds \qquad (24)$$

јә'ни K^*, $\overline{K(s, t)}$ васитәсилә тә'јин олунур. Бурада, ашағыдакы нәтиҹә алыныр. $K = K^*$ олмасы үчүн $\overline{K(x, s)} = K(s, x)$ олмасы зәрури вә кафи шәртдир.

Әкәр биз (1) тәнлијини $K(x, s) \in L_2[a, b]$ ҹырлашмыш нүвә васитәсилә тәдгиг етсәјдик, ејни гајда илә бу тәнлијин һәлләри мүәјјән сонлу хәтти ҹәбрин тәнликләр системинин һәлләри илә бағлы оларды. Биз көстәрдик ки, Һилберт—Шмидт оператору тамам кәсилмәз олдуғундан билдијимиз Рисс—Шаудер нәзәријјәсини билаваситә тәтбиг емәк олар. Лакин тәбии олараг белә бир мәсәлә мејдана чыхыр, кәсилмәз нүвәли интеграл тәнликләрин классик схемини, нүвәси Һилберт—Шмидт олан ејни типли интеграл тәнликләрә тәтбиг етмәк олармы? Т. Карлиман көстәрмишдир ки, белә тәнликләр үчүн дә Фредһолм минорлары јә'ни ујғун $D(\lambda)$ вә $D\left(\begin{matrix} x \\ s \end{matrix}, \lambda\right)$-нын тә'јин етмәклә һәллини резолвент васитәсилә ифадә етмәк олар.

§ 3. СИММЕТРИК НҮВӘЛИ ИНТЕГРАЛ ТӘНЛИКЛӘР

Фәрз едәк ки, бизә

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) \qquad (1)$$

тәнлији верилир. Бурада, $K(x, s)$ $a \leqslant x, s \leqslant b$ квадратында верилмиш кәсилмәз симметрик нүвәдир. Јә'ни $K(x, s) = K(s, x)$; $f(x)$ исә кәсилмәз функсијадыр. Биз тамам кәсилмәз операторлу

$$\varphi - \lambda P \varphi = h$$

тәнлијини тәдгиг етдикдә бу тәнлијин спектринин структуру һаггында мүәјјән теоремләр исбат етмишдик. Хүсуси һалда, P өз-өзүнә гошма оператор олдугда, јә'ни $P^* = P$ олдугда белә операторунун спектринә јени кејфијјәт әлавә олунур. Лакин (1) скалјар тәнликләри $K(x, s)$ симметрик олдугда бир чох мүһүм теоремләрин исбаты Һилберт тәрәфиндән вериләрәк сонралар Шмидт тәрәфиндән башга үсулла тәдгиг едилмиш, алынан нәтиҹәләр тамамланмышдыр. Симметрик нүвәләрлә верилән интеграл тәнликләрдә алынан нәтиҹәләр Һилберт—Шмидт нәзәријјәси адыны дашыјыр.

Мә'лумдур ки, әкәр $K(x, s)$ симметрик исә, онда (1)-ин ән азы бир һәгиги мәхсуси әдәди вар. Лакин мәхсуси әдәдләр сонсуз сајда олдугда бу әдәдләр һесаби сајда олмагла һәгиги ох үзәриндә јерләшир вә лимит нөгтәси сонсузлугда олур. Мәхсуси әдәдләр сонлу сајда олдугда бу әдәдләрә ујғун олан мәхсуси функсијаларда сонлу олар. Бурада гејд етмәк лазымдыр ки, һәр бир мәхсуси әдәдә сонлу сајда хәтти асылы олмајан мәхсуси функсијалар ујғундур. Әкәр ујғун мәхсуси әдәдин тәртиби нәзәрә алынмаса, мәхсуси функсијаларын үмумијјәтлә сајы мәхсуси әдәдләрдән чохдур. Лакин бу мәхсуси әдәдләринин бә'зиләрини тәкрар етмәклә елә нөмрәләмәк олар ки, һәр бир мәхсуси әдәдә мүәјјән мәхсуси функсија ујғун олсун. Инди бир нечә мүһүм теоремләрин исбатыны верәк.

Теорем 4. Әкәр һәгиги $K(x, s)$ симметрик нүвәсинин мәхсуси функсијалары сонлу исә, онда

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(s)}{\lambda_j} \qquad (2)$$

бәрабәрлији доғрудур. Бурада, $\varphi_j(x) | \lambda_j$ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси функсијадыр.

Исбаты. Бунун үчүн ашағыдакы көмәкчи нүвәни дахил едәк:

$$K_0(x, s) = K(x, s) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j(x)\,\varphi_j(s)}{\lambda_j}, \qquad (3)$$

(3)-үн тә'јининдән көрүндүјү кими $K(x, s)$ һәгиги, кәсилмәз вә симметрик олдуғундан еләчә дә, $K_0(x, s)$ һәгиги кәсилмәз симметрик нүвәдир.

$$\omega(x) - \lambda \int_a^b K_0(x, s)\,\omega(s)\,ds = 0 \qquad (4)$$

интеграл тәнлијини көтүрәк. Фәрз едәк ки, $K_0(x, s) \not\equiv 0$ онда мә'лумдур ки, (4) тәнлијинин ән азы бир $\lambda = \lambda_0$ мәхсуси әдәди вар вә буна ујғун мәхсуси функсијаны $\omega_0(x)$ илә ишарә едәк.

$$\omega_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K_0(x, s)\,\omega_0(s)\,ds = 0 \qquad (5)$$

$K_0(x, s)$-ин (3) ифадәсинә көрә бурадан

$$\omega_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\,\omega_0(s)\,ds - \lambda_0 \sum_{j=1}^{m} \frac{\varphi_j(x)}{\lambda_j} \int_a^b \varphi_j(s)\,\omega_0(s)\,ds = 0. \qquad (6)$$

Бу бәрабәрлијин һәр тәрәфини $\varphi_n(x)$ мәхсуси функсијасына вурараг a-дан b-јә гәдәр интегралласаг:

$$\int_a^b \omega_0(x)\,\varphi_n(x)\,dx = \lambda_0 \int_a^b\!\!\int_a^b K(x, s)\,\omega_0(s)\,\varphi_n(x)\,dx -$$

$$- \lambda_0 \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j} \int_a^b \varphi_n(x) \varphi_j(x) dx \int_a^b \varphi_j(s) \omega_0(s) ds = 0. \qquad (7)$$

Биз үмумилији позмадан мәхсуси функсијалары ортонормал фәрз едә биләрик. Еләчә дә, (4)-ү нәзәрә алсаг, бурадан

$$\int_a^b \omega_0(x) \varphi_n(x) dx = \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n(x) \omega_0(x) dx -$$

$$- \frac{\lambda_0}{\lambda_n} \int_a^b \varphi_n(x) \omega_0(x) dx = 0.$$

Демәли, $\int_a^b \omega_0(x) \varphi_n(x) dx = 0$ олур. Бурада, $\varphi_n(x)$ ихтијари мәхсуси функсија олдуғундан

$$\int_a^b \omega_0(x) \varphi_j(x) dx = 0 \ \left(j = \overline{1, m}\right). \qquad (8)$$

(8)-ә көрә (6)-дан

$$\omega_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s) \omega_0(s) ds = 0. \qquad (9)$$

Бурадан алырыг ки, λ_0, $K(x, s)$ нүвәсинин мәхсуси әдәди вә $\omega_0(x)$ исә, бу әдәдә ујғун мәхсуси функсијадыр. Бу һәлл $\varphi_j(x)$ $\left(j = \overline{1, m}\right)$ функсијалары васитәсилә ифадә олунар. Јә'ни

$$\omega_0(x) = \sum_{j=1}^{m} C_j \varphi_j(x), \qquad (10)$$

бу бәрабәрлијин һәр тәрәфини $\varphi_\nu(x)$-ә вурараг $[a, b]$ парчасында интеграллајаг:

$$\int_a^b \omega_0(x) \varphi_\nu(x) dx = \sum_{j=1}^{m} C_j \int_a^b \varphi_j(x) \varphi_\nu(x) dx. \qquad (11)$$

Бурадан (8)-ә көрә $C_\nu = 0$ олмагла (10)-дан $\omega_0(x) = 0$ олур. Бу исә, $\omega_0(x)$-ин мәхсуси функсија олмасына зиддир, алынан зиддијјәт көстәрир ки, јалныз $K_0(x, s) \equiv 0$. Буну нәзәрә алсаг, (3)-дән (2)-нин доғрулуғу алынмагла теорем исбат олунур.

Теорем 5. Һәгиги симметрик $K(x, s)$ нүвәсинин мәхсуси әдәдләри сонсуз исә вә бу әдәдләрә ујғун мәхсуси $\varphi_j(x)$ $\left(j = \overline{1, \infty}\right)$ функсијаларындан дүзәлмиш

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x) \varphi_j(s)}{\lambda_j} \qquad (12)$$

сырасы мүнтәзәм јығылырса. онда

$$K(x, s) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x)\varphi_j(s)}{\lambda_j} \tag{13}$$

өдәнилир.

Исбаты. Бу теоремин исбаты еjни гаjда үзрә сонлу һалда олдуғу кими апарылыр. Јә'ни

$$K_0(x, s) = К(x, s) - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j(x)\varphi_j(s)}{\lambda_j} \tag{14}$$

көмәкчи функсијасыны көтүрсәк, $K(x, s)$ һәгиги, кәсилмәз вә симметрик олдуғундан вә (13)-үн мүнтәзәм јығылмасындан $K_0(x, s)$-ин кәсилмәз, һәгиги олмасы алыныр. $K_0(x, s)$-ин симметрик олмасы илә (14)-дән ашкардыр, јени көмәкчи

$$\omega(x) - \lambda \int_a^b K_0(x, s)\,\omega(s)\,ds = 0 \tag{15}$$

тәнлијини көтүрсәк. $К_0(x, s)$ симметрик олдуғундан алырыг ки, әкәр $K_0(x, s) \not\equiv 0$ исә, онда бу нүвәнин ән азы бир λ_0 мәхсуси әдәди вә бу әдәдә ујғун мәхсуси $\omega_0(x)$ функсијасы вар. Беләликлә,

$$\omega_0(x) - \lambda_0 \int_a^b К_0(x, s)\,\omega_0(s)\,ds = 0. \tag{16}$$

$K_0(x, s)$-ин (14) ифадәсини (16)-да јеринә јазмагла алынан бәрабәрлији $\varphi_n(x)$-ә вуруб $[a, b]$ парчасында интеграллајаг. (13) мүнтәзәм јығылдыгда бу сыраны һәдбәһәд интеграллама̃г олар. Дикәр тәрәфдән $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1, n})$-ин ортонормал олдуғуну нәзәрә алсаг, онда

$$\int_a^b \omega(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \quad (n = \overline{1, \infty}). \tag{17}$$

Беләликлә, $\omega_0(x)$

$$\omega_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K(x, s)\,\omega_0(s)\,ds = 0 \tag{18}$$

тәнлијини өдәмәклә λ_0-ын $K(x, s)$ үчүн мәхсуси әдәд олмасы алыныр. $\omega_0(x)$ функсијасы онда мәхсуси $\varphi_j(x)$ функсијаларынын хәтти комбинасијасы кими тә'јин олунмалыдыр. Лакин бу ола билмәз, чүнки $\omega_0(x)$ вә $\varphi_j(x)$ системи бирликдә ортогонал систем тәшкил едир. Беләликлә, зиддијјәт алынмагла $K_0(x, s) \equiv 0$ олдуғу алыныр. Она көрә дә (14)-дән (13)-үн өдәнилдији алынараг теорем исбат олунур.

Гејд. Симметрик $K(x, s)$ нүвәси чырлашмыш исә, онда бу нүвәнин мәхсуси әдәдләри сонлу олар. Әксинә, дикәр тәрәфдән исә әкәр симметрик $K(x, s)$ -ин мәхсуси әдәдләри сонлу сајда исә, белә нүвә чырлашмышдыр. Демәли, симметрик $K(x, s)$ нүвәсинин чырлашмыш олмасы үчүн бу нүвәнин мәхсуси әдәдләринин сонлу олмасы зәрури вә кафи шәртдир. Биз исбат етдијимиз 5 теореминдән көрүндүјү кими әкәр мәхсуси әдәдләрлә әлагәдар (13) сырасы јығылырса, онда (14) өдәнилир. Беләликлә, (14) көстәрилиши бүтүн симметрик нүвәләри әһатә етмир. Лакин биз көстәрәчәјик ки, симметрик нүвәнин итерасијалары үчүн ујғун сыранын јығылмасыны тәләб етмәк лазым дејил, јә'ни бу сыралар јығылан олур.

§ 4. $K(x, s)$ СИММЕТРИК НҮВӘСИНИН ИТЕРАСИЈАЛАРЫНЫН АЈРЫЛЫШЛАРЫ

Фәрз едәк ки,

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x) \tag{1}$$

тәнлији верилир. Бурада, $K(x, s)$ кәсилмәз, һәгиги симметрик нүвәдир. (1)-ә ујғун ејничинсли тәнлији јазаг:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = 0. \tag{2}$$

Теорем 6. Әкәр $\varphi_\nu(x)$ симметрик $K(x, s)$ нүвәсинин λ_ν мәхсуси әдәдинә ујғун олан вә там ортонормал систем тәшкил едән мәхсуси функсијалар исә, онда бу функсијалар системи еләчә дә $K(x, s)$-ин n-чи итерасијасы олан $K_n(x, s)$ симметрик нүвәсинин там ортонормал тәшкил едән мәхсуси векторлары олмагла мәхсуси әдәдләр, ујғун мәхсуси әдәдләрин n-чи дәрәчәсинә бәрабәр олур.

Исбаты. Әввәлчә $K(x, s)$-ин симметрик олмасындан $K_n(x, s)$-ин симметрик олмасы асанлыгла алыныр. Инди $\varphi_\nu(x)$-и, λ_ν-јә ујғун мәхсуси әдәд фәрз едәрәк (2)-дән

$$\varphi_\nu(x) - \lambda_\nu \int_a^b K(x, s)\varphi_\nu(s)\,ds = 0. \tag{3}$$

Бурада $\varphi_\nu(x)$ әвәзинә $\lambda_\nu \int_a^b K(x, s)\varphi_\nu(s)\,ds$ јазсаг:

$$\lambda_\nu \int_a^b K(x, s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \lambda_\nu^2 \int_a^b K(x, s) \left[\int_a^b K(s, t)\,\varphi_\nu(t)\,dt \right] ds$$

бәрабәрлиіини вә іахуд да бурадан

$$\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu^2 \int_a^b K_2(x, s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \tag{4}$$

олур. Белә ки, $K_2(x, s)$, $K(x, s)$-ин 2-чи итерасијасыдыр.

Белә исбат гајдасы көстәририк ки λ_ν^n, $K_n(x, s)$ итерасијасынын мәхсуси әдәдидир вә φ_ν бу әдәдә ујғун мәхсуси функсијадыр. Инди көстәрәк ки, $K_n(x, s)$-ин бунлардан башга мәхсуси әдәдләри јохдур. Онда фәрз едәк ки, λ_0, $K_n(x, s)$-ин мәхсуси әдәдләриндән биридир. λ_0-а ујғун мәхсуси функсијаны $\varphi_0(x)$ илә ишарә етсәк:

$$\varphi_0(x) - \lambda_0 \int_a^b K_n(x, s)\,\varphi_0(s)\,ds = 0 \tag{5}$$

олар. Инди $\lambda_0 = \lambda_n^\nu$ олдуғуну көстәрәк. Ашағыдакы кими көмәкчи функсијалары тә'јин едәк:

$$n\Phi_i(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^{n-1} h_i^j \int_a^b K_j(x, s)\,\varphi_0(s)\,ds \tag{6}$$

олсун, белә ки, бурада $h_j\left(j = \overline{1, n-1}\right)$, $\sqrt[n]{\lambda_0}$-ын көкләридир. $h_j\left(j = \overline{1, n}\right)$ әдәдләринин хассәләрини нәзәрә алсаг, бурадан

$$\varphi_0(x) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j(x). \tag{7}$$

(6) бәрабәрлијин һәр тәрәфини $K(x, s)$-ә вурараг $[a, b]$-да интегралласаг, онда

$$n \int_a^b K(x, s)\,\Phi_1(s)\,ds = \int_a^b \sum_{j=1}^{n-1} \int_a^b h_i^j K(x, t)\,K_j(s, t)\,\varphi_0(t)\,dt\,ds + \\ + \int_a^b K(x, s)\,\varphi_0(s)\,ds \quad \left(i = \overline{1, n}\right). \tag{8}$$

$K(x, s)$-ин итерасијасынын тә'рифинә көрә

$$\int_a^b K(x, s)\,K_j(s, t)\,ds = K_{j+1}(x, t)$$

јахуд да

$$K_{j+1}(x, s) = \int_a^b K(x, t)\,K_j(t, s)\,dt \tag{9}$$

јаза биләрик. (8)-ин һәр тәрәфини h_i-јә вураг вә

$$h_i^n = \lambda_0$$

олдуғуну нәзәрә алсаг вә еләчә дә (9)-у нәзәрә, алсаг (8)-дән

$$nh_i \int_a^b K(x, s)\, \Phi_1(s)\, ds = \sum_{j=1}^{n-1} h_i^j \int_a^b K_j(x, s)\, \varphi_0(s)\, ds + \varphi(x); \quad (10)$$

Белә ки, $K_1(x, s) = K(x, s)$, (6)-ја көрә, бурадан

$$h_1 \int_a^b K(x, s)\, \Phi_1(s)\, ds = \Phi_i(x) \quad (11)$$

олдуғу алынар.

Фәрз едәк ки, i-нин мүәјјән гејд олунмуш гијмәтиндә $\Phi_i(x) \not\equiv 0$, онда $\Phi_i(x)$, h_i мәхсуси әдәдилә ујғун $K(x, s)$-ин мәхсуси функсијасы олар. Она көрә дә, h_1, $K(x, s)$-ин мәхсуси әдәдләриндән бири олар. Мәсәлән $h_i = \lambda_\nu$ оларса, онда $\lambda_0 = \lambda_\nu^n$ олар. Беләликлә дә, $K_n(x, s)$ нүвәсинин мәхсуси әдәдләри јалныз $K(x, s)$-ин мәхсуси әдәдләринин n-чи дәрәчәсинә бәрабәр олар.

Теорем 7. λ_ν симметрик $K(x, s)$ нүвәсинин мәхсуси әдәдләри исә, онда

$$\sum_\nu \frac{1}{\lambda_\nu^2} \quad (12)$$

сырасы јығылыр.

Исбаты. λ_ν-јә ујғун мәхсуси функсијаны φ_ν илә ишарә едәк s-и гејд олунмуш гәбул едәрәк

$$g(x) = K(x, s) \quad (13)$$

функсијасыны көтүрәк, $g(x)$ кәсилмәз функсијасы вә мүәјјән систем тәшкил едән φ_ν ортонормал функсијаларына Бессел бәрабәрсизлијини тәтбиг едәк:

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m} \int_a^b g(x)\, \varphi\ (x)\, dx\right)^2 \leqslant \int_a^b |\, g(x)\,|^2 dx \quad (14)$$

јахуд

$$\left(\sum_{\nu=1}^{m} \int_a^b K(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds\right)^2 \leqslant \int_a^b |\, K(x, t)\,|^2 dt. \quad (15)$$

$K(x, s)$ симметрик олдуғундан

$$\int_a^b K(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds = \int_a^b K(s, x)\, \varphi_\nu(s)\, ds = \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}. \quad (16)$$

$K(x, s)$, $a \leqslant x$, $s \leqslant b$-дә кәсилмәз олдуғундан елә мүсбәт әдәди вар ки,

$$| K(x, s) | < Q. \qquad (17$$

Беләликлә, (16) вә (17)-ни нәзәрә алсаг (15)-дән

$$\sum_{\nu=1}^{m} \left(\frac{\varphi_\nu (x)}{\lambda_\nu} \right)^2 \leqslant Q^2 (b - a) \qquad (18$$

өдәнилир. Бу бәрабәрсизлији $[a, b]$-да интегралласаг в $\int\limits_a^b | \varphi_\nu (x) |^2 dx = 1$ олдуғуну нәзәрә алсаг онда

$$\sum_{\nu=1}^{m} \frac{1}{\lambda_\nu^2} \leqslant Q^2 (b - a)^2, \qquad (19$$

бәрабәрсизлијини алырыг. (19)-ун алынмасындан көрүнүр ки (19) истәнилән сајда λ_ν мәхсуси әдәдләри үчүн өдәнилир. Бәләликлә, (12) сырасынын јығылан олдуғу алыныр. Биз $K_n (x, s$ үчүн мәхсуси функсијалар илә әлагәдар мүәјјән көстәри лишләрин доғрулуғуну исбат едәк.

Әввәлҹә, $K_4 (x, s)$ үчүн ашағыдакы теореми тә'риф едәк

Теорем 8.

$$\sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu (x) \varphi_\nu (s)}{\lambda_\nu^4} \qquad (20)$$

сырасы мүнтәзәм јығылмагла,

$$K_4 (x, s) = \sum_{\nu} \frac{\varphi_\nu (x) \varphi_\nu (s)}{\lambda_\nu^4} \qquad (21)$$

өдәнилир.

Исбаты. (20)-нин јығылан олмасыны көстәрмәк үчүн

$$\alpha_{n,p} = \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_\nu (x) \varphi_\nu (s)}{\lambda_\nu^4} \qquad (22)$$

илә ишарә едәк. Бурадан

$$| \alpha_{n,p} | \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{| \varphi_\nu x | \cdot | \varphi_\nu (s)}{\lambda_\nu^4} \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{| \varphi_\nu (x) |}{| \lambda_\nu |} \cdot \frac{| \varphi_\nu (s) |}{| \lambda_\nu |} \sum_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{1}{\lambda_\nu^2} . \qquad (23)$$

Шварс бәрабәрсизлијинин ҹәбри аналокијасына көрә

$$\sum_{\nu-n+1}^{n+p}\left|\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\right|\cdot\left|\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{\nu=n+1}\frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2}}\cdot\sqrt{\sum_{\nu=p+1}^{n+p}\frac{\varphi_\nu^2(s)}{\lambda_\nu^2}}. \tag{24}$$

Исбат етдијимизә көрә,

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2} \leqslant Q^2(b-a), \tag{25}$$

$$\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_\nu^2(t)}{\lambda_\nu^2} \leqslant Q^2(b-a). \tag{26}$$

$\sum\limits_{\nu}\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ сырасы јығылдығына көрә $d_{n,p}=\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p}\frac{1}{\lambda_\nu^2}$ оларса,

$$\lim_{n\to\infty} d_{n,p}=0. \tag{27}$$

(25), (26) вә (27)-ни нәзәрә алсаг, (23)-дән n-и сечмәклә

$$|\alpha_{n,p}| \leqslant Q^2(b-a)\,d_{n,p}.$$

Бу бәрабәрсизлијин сол тәрәфи x вә s-дән асылы дејилдир. Беләликлә, $\alpha_{n\text{-}p}$-нин ифадәсиндән алырыг ки, (20) сырасы мүнтәзәм јығылыр. Нәһајәт, бу сыраја дахил олан φ_ν-ләр λ_ν^4-ә ујғун $K_4(x, s)$-ин мәхсуси функсијалары олдуғундан исбат етдијимиз теоремә көрә (21)-ин өдәнилмәси алынмагла теорем исбат олунур:

Биз теореми јалныз $n=4$ һал үчүн исбат етдик. Инди көстәрәк ки, һәмин теорем истәнилән n-үчүн доғрудур. Онун үчүн дә $n \geqslant 4$ олдуғуну фәрз едәк:

$$K_n(x, s)=\sum\frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^n}. \tag{28}$$

Бу мүәјјән n-үчүн доғрудур. Белә ки, сыра мүнтәзәм јығылыр. (28)-ин һәр тәрәфини $K(z, x)$-ә вурараг $[a, b]$-да интеграллаcаг:

$$\int_a^b K(z, x)\,K_n(x, s)\,dx=\sum\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^n}\int_a^b K(z, x)\,\varphi_\nu(x)\,dx, \tag{29}$$

лакин

$$\int_a^b K(z, x)\,K_n(x, s)\,dx=K_{n+1}(z, s) \tag{30}$$

вә

$$\int_a^b K(z, x)\,\varphi_\nu(x)\,dx = \frac{\varphi_\nu(z)}{\lambda_\nu} \tag{31}$$

олдуғундан (29)-дан

$$K_{n+1}(x, s) = \sum_\nu \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^{n+1}} \tag{32}$$

өдәнилир. Бурадан о нәтиҹәјә кәлирик ки, әкәр (28) өдәнилирсә, онда һәмчинин (32) өдәнилир. Лакин биз $K_4(x, s)$ үчүн (21) өдәнилдији исбат олдуғундан ријази индуксија васитәсилә (28) истәнилән n-үчүн өдәнилдијини исбат етмиш олуруг. Инди көстәрәк ки, елә кәсилмәз функсијалар синфи вар ки, һәмән бу функсијалар $K(x, s)$ симметрик нүвәсинин мәхсуси функсијалары васитәсилә көстәрилир.

Теорем 9. $f(x)$ функсијасы

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\,g(s)\,ds) \tag{33}$$

кими ифадә олунурса, белә ки, $g(s)$, $[a, b]$-да кәсилмәз функсијадыр, онда

$$f(x) = \sum_\nu (f, \varphi_\nu)\,\varphi_\nu(x) \tag{34}$$

шәклиндә көстәрилир. Белә ки, бу сыра $[a, b]$-да мүнтәзәм јығылыр.

Исбаты. Әввәлчә (34)-ә дахил олан сыранын мүнтәзәм јығылдығыны көстәрәк, она көрә дә

$$\gamma_{n,p} = \sum_{\nu=n+1}^{n+p} (f, \varphi_\nu)\,\varphi_\nu(x) \tag{35}$$

ишарә едәк. (33)-үн һәр тәрәфини $\varphi_\nu(x)$-ә вурараг $[a, b]$-да интеграллајаг:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx = \int_a^b dx \int_a^b K(x, s)\,\varphi_\nu(x)\,g(s)\,ds, \tag{36}$$

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx = (f, \varphi_\nu) \tag{37}$$

олдуғундан

$$(f, \varphi_\nu) = \int_a^b\!\!\int_a^b K(x, s)\,\varphi_\nu(x)\,g(s)\,dx\,ds \tag{38}$$

$$\int_a^b\int_a^b K(x,s)\,\varphi_\nu(x)\,g(s)\,dx\,ds=\int_a^b g(s)\left(\int_a^b K(x,s)\,\varphi_\nu(x)\,dx\right)ds$$

олар.

$\int_a^b K(x,s)\,\varphi_\nu(x)\,dx=\frac{\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu}$ олдуғундан, бурадан вә (38)-дән

$$(f,\varphi_\nu)=\frac{1}{\lambda_\nu}(g,\varphi_\nu). \tag{39}$$

олар. $\gamma_{n,p}$-нин ифадәсиндән

$$|\gamma_{n,p}|=\sum_{\nu=n+1}^{n+p}|(f,\varphi_\nu)|\;|\varphi_\nu(x)|. \tag{40}$$

(39)-а көрә бурадан

$$|\gamma_{n,p}|<\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\left|\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\right|\cdot|(g,\varphi_\nu)| \tag{41}$$

бәрабәрсизлијини алырыг. Көстәрдијимиз кими

$$|\gamma_{n,p}|\leqslant\sum_{\nu=n+1}^{n+p}|(g,\varphi_\nu)|\;\left|\frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{n+p}(g,\varphi_\nu)^2}\cdot\sqrt{\sum_{\nu=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2}} \tag{42}$$

бәрабәрсизлији доғрудур. Әввәлчә,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}(g,\varphi_\nu)^2 \tag{43}$$

сырасынын јығылдығыны көстәрәк:

$$(g,\varphi_\nu)=\int_a^b g(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx, \tag{44}$$

олдуғундан

$$\sum_{\nu=1}^{n}(g,\varphi_\nu)^2=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\int_a^b g(x)\,\varphi_\nu(x)\,dx\right)^2, \tag{45}$$

сол тәрәфә Бессел бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк, онда

$$\sum_{\nu=1}^{n}(g,\varphi_\nu)^2\leqslant\int_a^b|g(x)|^2dx=P. \tag{46}$$

p, n-дән асылы олмаjан сабит әдәддир. Бурадан (43) сырасынын jығылдығы алыныр. Демәли,

$$d_{n,p} = \sum_{\nu=n+1}^{n+p} (g, \varphi_\nu)^2 \tag{47}$$

оларса, $\lim\limits_{n\to\infty} d_{n,p} = 0$ еләчә дә, $\sum\limits_{\nu=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_\nu^2(x)}{\lambda_\nu^2} \leqslant Q^2(b-a)$ олдуғундан (42)-дән

$$|\gamma_{n,p}| \leqslant Q\sqrt{(b-a)\,d_{n,p}}. \tag{48}$$

(48)-ин сол тәрәфи x-дән асылы деjилдир. $\lim\limits_{n\to\infty} d_{n,p} = 0$ олдуғундан $\lim\limits_{n\to\infty} |\gamma_{n,p}| = 0$ олмагла (34) сырасынын мүнтәзәм вә мүтләг jығылан көстәрилир. Инди бу сыранын чәминин $f(x)$-ә бәрабәр олдуғуну исбат едәк. Онун үчүн

$$v(x) = f(x) - \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \varphi_\nu)\, \varphi_\nu(x) \tag{49}$$

ишарә едәк, $g(x)$-ин кәсилмәз олмасындан (34)-ә көрә $f(x)$-ин кәсилмәз олмасы вә (34) мүнтәзәм jығылдығына көрә (49)-дан $v(x)$-ин кәсилмәз функсиjа олдуғу алыныр. $v(x) = 0$ олдуғуну һөкм етмәк үчүн

$$\int_a^b v^2(x)\,dx = 0 \tag{50}$$

олдуғуну көстәрәк, (49)-дан

$$(v, v) = (f, h) - \sum_\nu (f, \varphi_\nu)(\varphi_\nu, v) \tag{51}$$

еләчә дә

$$(v, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - \sum_\nu (f, \varphi_\nu)(\varphi_\nu, \varphi_n) \tag{52}$$

бәрабәрликләрини алырыг.

$$(\varphi_\nu, \varphi_n) = \begin{cases} 1, \nu = n \\ 0, \nu \neq n \end{cases}$$

олдуғуну нәзәрә алсаг, (52)-дән

$$(v, \varphi_n) = (f, \varphi_n) - (f, \varphi_n) = 0. \tag{53}$$

(51)-дән

$$(v, v) = (f, v). \tag{54}$$

Она көрә дә

$$\int_a^b v^2(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,v(x)\,dx. \qquad (55)$$

(33)-ү нәзәрә аласаг:

$$(f, v) = \int_a^b\int_a^b K(x, t)\,g(t)\,h(x)\,dt\,dx \qquad (56)$$

кими көстәрилир. (56)-нын сол тәрәфи

$$\int_a^b g(t)\left(\int_a^b K(x, t)\,v(x)\,dx\right)dt \qquad (57)$$

шәклиндә көстәрилир. (53)-дән

$$\int_a^b \varphi_n(x)\,v(x)\,dx = 0 \qquad (58)$$

олдуғуну көстәрмишдик. $\varphi_n(x)$-ләрин $K(x, s)$-ин мәхсуси функсијалары олдуғундан исбат олунур ки, (58)-дән

$$\int_a^b K(x, s)\,v(s)\,ds = 0. \qquad (59)$$

(59), (57)-ни нәзәрә алсаг, онда $(f, v) = 0$ олдуғуну, (54)-дән исә $(v, v)=0$ вә $v(x)\equiv 0$. (34) өдәнилмәклә теорем исбат олунур.

§ 5. ШМИДТ ҮСУЛУ ВАСИТӘСИЛӘ ФРЕДҺОЛМ ИНТЕГРАЛ ТӘНЛИКЛӘРИНИН ҺӘЛЛИ

Фәрз едәк ки,

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (1)$$

тәнлији верилир. Белә ки, $K(x, s)$ һәгиги кәсилмәз симметрик нүвә, $f(x)$ исә кәсилмәз функсијадыр. Биз (1) тәнлијинин кәсилмәз һәллинин варлығыны гәбул етсәк,

$$\omega(x) = \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds \qquad (2)$$

интегралыны мәхсуси функсијалар васитәсилә

$$\omega(x) = \sum_\nu (\omega, \varphi_\nu)\,\varphi_\nu(x) \qquad (3)$$

шәклиндә көстәрирләр. Белә ки, бу сыра мүнтәзәм јығылыр вә (3) ашағыдакы кими көстәрилир:

$$\omega(x) = \sum_{\nu}\frac{(\varphi, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu}\varphi_\nu(x). \qquad (4)$$

(1)-ин һәр тәрәфини $\varphi_\nu(x)$-ә вуруб $[a, b]$-да интегралласаг:

$$(f, \varphi_\nu) = (\varphi, \varphi_\nu) - \lambda\int_a^b\int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,\varphi_\nu(x)\,dx\,ds =$$

$$= (\varphi, \varphi_\nu) - \int_a^b \varphi_\nu(s)\,ds\left[\lambda\int_a^b K(x, s)\,\varphi_\nu(x)\,dx\right] =$$

$$= (\varphi, \varphi_\nu) - \lambda\int_a^b \frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi(s)}{\lambda_\nu}\,ds = (\varphi, \varphi_\nu) - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}(\varphi, \varphi_\nu).$$

Беләликлә,

$$\lambda_\nu(f, \varphi_\nu) = (\lambda_\nu - \lambda)(\varphi, \varphi_\nu). \qquad (5)$$

Бурада λ-нын мәхсуси әдәд олмадығыны фәрз етсәк, онда

$$(\varphi, \varphi_\nu) = \frac{\lambda_\nu(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda}. \qquad (6)$$

Бу ифадәни (4)-дә јеринә јазсаг:

$$\omega(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda}\varphi_\nu(x), \qquad (7)$$

$\frac{\varphi(x) - f(x)}{\lambda} = \omega(x)$ олдуғундан, бурадан

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda}\varphi_\nu(x). \qquad (8)$$

Беләликлә, биз көстәрдик ки, λ, $K(x, s)$-ин мәхсуси әдәди дејилсә, онда (1) тәнлијинин һәлли $\varphi_\nu(x)$ мәхсуси функсијалары васитәсилә (8) шәклиндә көстәрилир.

$$(f, \varphi_\nu) = \int_a^b f(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds \qquad (9)$$

олдуғундан (8) вә (9)

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\lambda_\nu - \lambda}\int_a^b f(s)\,\varphi_0(s)\,ds\right]\varphi_\nu(x) \qquad (10)$$

кими көстәрилир, әкәр $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\varphi_\nu(s)\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda}$ сырасы s-ә көрә мүнтәзәм јығылырса, онда

$$P(x, s, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(s)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \tag{11}$$

ишарә едәрәк (8)-дән

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b P(x, s, \lambda) f(s)\, ds. \tag{12}$$

(1) тәнлији һәллинин (12) шәклиндә көстәрилиши λ-ја көрә мероморф характерли олдуғуну көстәрир вә һәр бир $\lambda = \lambda_\nu$ полјусуна ујғун $P(x, s, \lambda)$-нын баш һиссәси илә ашкар шәкилдә ифадә олунур. Бу Шмидт үсулунун үстүн ҹәһәтләриндән биридир. Гејд етмәк лазымдыр ки, бу нәтиҹә билаваситә, јәни Фредһолм үсулундан алынмыр. Инди әксини көстәрәк: јә'ни һәр һансы $\varphi(x)$ функсијасы $K(x, s)$-ин мәхсуси функсијалары васитәсилә (8) шәклиндә көстәрилирсә, онда $\varphi(x)$ (1) тәнлијинин һәллидир. Онун үчүн дә тәбиидир ки, әввәлҹә

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) \tag{13}$$

сырасынын мүнтәзәм јығылдығыны көстәрәк:

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x) \tag{14}$$

сырасынын мүтләг вә мүнтәзәм јығылдығыны билирик. Бундан әлавә, λ_ν мәхсуси әдәдләринин сајы сонсуз исә, $\lambda_\nu \to \infty$. (13)-нин үмуми һәдди

$$M_\nu(x) = \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) \tag{15}$$

олсун. $M_\nu(x)$-и

$$M_\nu(x) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}} \cdot \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x)$$

шәклиндә јазаг. λ_ν сонсуз сајда оларса, $\nu \to \infty$ вә $\lambda_\nu \to \infty$ олдуғундан, $\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\lambda_\nu}} \to 1$ олур, демәли, ν-ни елә сечмәк олар ки,

$$M_\nu(x) < \frac{(f, \varphi_\nu)\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}, \tag{15}$$

олар. (14) мүнтәзәм јығылдығындан (15)-ә көрә (13) сырасы мүнтәзәм јығылыр. Инди (8) васитәсилә тә'јин олунан $\varphi(x)$-ин (1) тәнлијинин һәлли олдуғуну көстәрәк. Онун үчүн (1)-ин сол тәрәфини $\varphi(x)$-ин бу ифадәсинә көрә чевирәк:

$$J = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x) +$$

$$+ \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) \left[f(s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(s) \right] ds =$$

$$= f(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds -$$

$$- \lambda^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds.$$

Лакин $\varphi_\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b K(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$J = f(x) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds -$$

$$- \lambda^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu (\lambda_\nu - \lambda)} \varphi_\nu(x),$$

$$\lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) - \lambda^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu (\lambda_\nu - \lambda)} \varphi_\nu(x) =$$

$$= \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} (f, \varphi_\nu) \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}$$

олдуғундан

$$J = f(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x). \qquad (16)$$

Биз көстәрмишдик ки,

$$\int_a^b K(x, s) f(x)\, ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu} \varphi_\nu(x)$$

кими көстәрилир: она көрә дә, (16)-дан $J = f(x)$ олур. Бунунла да (8) васитәсилә тә'јин олунан $\varphi(x)$-ин (1) үчүн һәлл олмасы алыныр. Биз бу нәтичәләри аларкән λ-нын $K(x, s)$ үчүн мәхсуси әдәд олмадығыны фәрз етмишдик. Инди λ-нын $K(x, s)$-ин мәхсуси әдәд олдуғуну фәрз едәрәк (1) тәнлијинин һәллини арашдыраг. λ_1-ин К (x, s) үчүн рангы q олан мәхсуси әдәд олдуғунуу гәбул едәрәк (1)-ин һәллинин варлағыны фәрз едәк. Биз (5) бәрабәрлијинин доғру олмасыны λ әдәди үчүн (1)-ин һәллинин варлағындан алмышдыг. Она көрә λ-мәхсуси әдәд олдугда (5) бәрабәрлији өдәниләр. λ_1-ин рангы q олдуғундан (5) дә λ_1, q гәдәр $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_q$ шәклиндә дахил олмушдур. Она көрә дә, (5)-дә $\lambda=\lambda_\nu\left(\nu=\overline{1, q}\right)$ көтүрсәк, онда

$$(f, \varphi_\nu)=0 \quad \left(\nu=\overline{1, q}\right) \qquad (17)$$

бәрабәрлији алыныр. Демәли, рангы q олан $\lambda=\lambda_1$ мәхсуси әдәдинә ујғун (1) тәнлијинин һәлли варса, зәрури олараг (17) ортогоналлыг шәрти өдәнилир. Инди $\nu>q$ оларса, көстәрдијимиз кими, $\lambda_\nu-\lambda\neq 0$ олмагла

$$(f, \varphi_\nu)=\frac{\lambda_\nu(f, \varphi_\nu).}{\lambda_\nu-\lambda} \qquad (18)$$

Бу һалда да, $\omega(x)$-ин (7) ифадәси олдуғу кими галмагла $\nu=(\overline{1, q})$ гијмәтләриндә (7)-јә дахил олан $\frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu}$-нин әмсаллары гејри-мүәјјән олар она көрә дә $\omega(x)$

$$\omega(x)=\sum_{\nu=1}^{q} C_\nu \varphi_\nu(x)+\sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu-\lambda} \varphi\ (x) \qquad (19)$$

шәклиндә јазылар, белә ки, $C\ \left(\nu=\overline{1, q}\right)$ ихтијари сабит әдәдләрдир. $\omega(x)$-ин (19) ифадәсинә көрә (1)-ин һәлли

$$\varphi(x)=f(x) \sum_{\nu=1}^{q} C_\nu \varphi_\nu(x)+\lambda \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu-\lambda} \varphi_\nu(x) \qquad (20)$$

кими көстәрилир. Демәли, биз исбат етдик ки, әкәр $\lambda=\lambda_1$, $K(x, s)$-ин рангы q олан мәхсуси әдәд исә, онда (1) тәнлијинин һәлли $\varphi_\nu(x)$ мәхсуси әдәдләринә көрә (20) шәклиндә көстәрилир. Инди исә әксини исбат едәк. Һәр һансы $\varphi(x)$ функсијасы $\varphi_\nu(x)$ мәхсуси функсијалары васитәсилә (20) шәклиндә көстәриләрсә вә (17) өдәнилирсә, онда бу функсија (8) тәнлијинин һәлли олар. Әввәлчә гејд едәк ки, (20)-јә дахил олан сыранын јығылмасы ејни гајда үзрә алыныр. Нәһајәт, (17) өдәнилдикдә (20) илә тә'јин олунан $\varphi(x)$-ин (1) тәнлијини өдәдијини көстәрәрәк $\varphi_0(x)=\sum\limits_{\nu=1}^{q} C_\nu \varphi_\nu(x)$ функсијасынын ујғун ејничинсли тәнлијин һәлли олмасыны нәзәрә алсаг, (17) шәрти дахилиндә

$$\varphi_1(x) = f(x) + \lambda \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) \tag{21}$$

функсиjасынын (1) тәнлиjинин һәлли олмасыны көстәрмәк кифаjәтдир. Она көрә (1)-ин сол тәрәфини $\varphi_1(x)$-ин (21) ифадәсинә көрә чевирәк:

$$J_1 = \varphi_1(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi_1(s)\, ds =$$

$$= f(x) + \lambda \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \beta_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) -$$

$$- \lambda \int_a^b K(x, s) \left[f(s) + \lambda \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(s) \right] ds.$$

Бурадан

$$J_1 = f(x) + \lambda \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) - \lambda \int_a^b K(x, s) f(s)\, ds -$$

$$- \lambda^2 \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b K(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds. \tag{22}$$

$\varphi^\nu(x) = \lambda_\nu \int_a^b K(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$\lambda \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \varphi_\nu(x) - \lambda^2 \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b K(x, s)\, \varphi_\nu(s)\, ds =$$

$$= \lambda \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)}{\lambda_\nu}. \tag{23}$$

Дикәр тәрәфдән исә

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)\, \varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu} \tag{24}$$

олар, лакин (17) шәртинә көрә бурадан

$$\int_a^b K(x, s) f(s)\, ds = \sum_{\nu=q+1}^{\infty} \frac{(f, \varphi_\nu)\, \varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu}. \tag{25}$$

Она көрә дә J_1-ин сол тәрәфиндә јалныз $f(x)$ галар. Бу мүлаһизәләр ону көстәрир ки, (20) илә тә'јин олунан $\varphi(x)$ функсијасы (1) тәнлијинин һәллидир. Бир нечә гејд едәк. Биз симметрик нүвәнин итерасијаларынын мәхсуси функсијаларына көрә ајрылышыны көстәрмишдик. Дикәр тәрәфдән Нејман даирәсиндә $K(x, s)$-ин резолвентинин

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda K_2(x, s) + \lambda^2 K_3(x, s) + \cdots$$

шәклиндә көстәрилдијини алмышдыг. $K(x, s)$ симметрик олдуғундан бу нүвәнин һәр бир $K_n(x, s)$ итерасијасы да симметрик олар. Она көрә дә биз $K_n(x, s)$-ин мәхсуси функсијалара көрә ајрылышыны јазаг:

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^2} + $$

$$+ \lambda^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu^3} + \cdots \tag{26}$$

Беләки, бу сыра мүтләг јығылыр. Биз симметрик нүвәли интеграл тәнликләрин бир чох мүһүм нәтичәләрини гејд етдик. Мүәјјән синиф тәшкил едән елә нүвәләр вар ки, бунлары симметрик нүвәјә кәтирмәк олар.

(26)-нын мүтләг јығылдығыны көстәрәк. (26)-нын мүтләг гијмәтләриндән дүзәлмиш сыраны көтүрәк:

$$|K(x, s| + |\lambda| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(s)|}{\lambda_\nu^2} + |\lambda|^2 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\varphi_\nu(x)\lambda_\nu(s)|}{\lambda_3^\nu} + \cdots \tag{27}$$

Бурада, $\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(s)$ иштирак едән һәдләри бирләшдирәрәк

$$\gamma = |K(x, s)| + |\varphi_1(x)|\,|\varphi_1(s)| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^\nu}{|\lambda_1|^{\nu+1}} +$$

$$+ |\varphi_2(x)|\,|\varphi_2(s)| \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^\nu}{|\lambda_2|^{\nu+1}} + \cdots$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^\nu}{|\lambda_1|^{\nu+1}} = \frac{|\lambda|}{|\lambda_1|^2} + \frac{|\lambda|^2}{|\lambda_1|^3} + \cdots = \frac{|\lambda|}{|\lambda_1|^2}\left(1 + \frac{|\lambda|}{|\lambda_1|} + \frac{|\lambda|^2}{|\lambda_1|^2} + \ldots\right).$$

Лакин $|\lambda| < |\lambda_1|$ олдуғундан, бурадан

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^\nu}{|\lambda_1|^{\nu+1}} = \frac{|\lambda|}{|\lambda_1|} \cdot \frac{1}{|\lambda_1| - |\lambda|}.$$

$\lambda_j \left(j = \overline{2, \infty}\right)$ мәхсуси әдәдләри Нејман даирәсинин харичиндә олдуғундан истәнилән $\lambda_j \left(j = \overline{2, \infty}\right)$ үчүн, еләчә дә

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\lambda|^\nu}{|\lambda_2|^{\nu+1}} = \frac{|\lambda|}{|\lambda_2|} \cdot \frac{1}{|\lambda_2| - |\lambda|}.$$

Она көрә

$$\gamma = |K(x, s)| + \sum_{\nu=1}^{\infty} |\varphi_\nu(x)||\varphi_\nu(s)| \frac{|\lambda|}{|\lambda_\nu|(|\lambda^\nu| - |\lambda|)}. \tag{28}$$

Мә’лумдур ки,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|\varphi_\nu(x)||\varphi_\nu(s)|}{|\lambda_\nu|^2} \qquad (2\text{[illegible]})$$

сырасы мүнтәзәм јығылыр (28) вә (29) сыраларынын үмуми һәдләринин нисбәти

$$\alpha_\nu = \frac{|\lambda||\lambda_\nu|^2}{|\lambda_\nu|(|\lambda_\nu| - |\lambda|)}.$$

$\nu \to \infty$ олдугда $\alpha_\nu \to |\lambda|$ олар вә α_ν, x вә s-дән асылы дејилдир. Беләликлә, (28) мүтләг јығылыр. Бу исә (26)-нын мүтләг јығылдығыны көстәрир. Она көрә бу сыранын һәдләрини истәнилән гајда үзрә дәјишмәк олар. Онда гејд етдијимиз кими, $\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(s)$-ин әмсалларыны бирләшдирәрәк алынан ујғун сыраларын јығылдыгларыны нәзәрә алсаг:

$$R(x, s, \lambda) = K(x, s) + \lambda \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu(\lambda_\nu - \lambda)}. \tag{30}$$

Беләликлә, резолвентин мәхсуси φ_ν функсијаларына көрә ајрылышыны алырыг. Биз $K(x, s)$-ин мәхсуси функсијалары ајрылышынын

$$K(x, s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(s)}{\varphi_\nu} \tag{31}$$

шәклиндә олдуғуну көстәрмишдик. (31)-ин ифадәсини (30)-да јеринә јазсаг:

$$R(x, s, \lambda) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\,\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu - \lambda}. \tag{32}$$

(32)-нин һәр тәрәфини $\varphi_j(s)$-ә вурараг $[a, b]$-дә интеграллаасаг:

$$\int_a^b R(x, s, \lambda)\, \varphi_j(s)\, ds = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu - \lambda} \int_a^b \varphi_j(s)\, \varphi_\nu(s)\, ds. \qquad (33)$$

φ_ν ортонормал систем тәшкил етдијиндән (33)-дән

$$(\lambda_\nu - \lambda) \int_a^b R(x, s, \lambda)\, \varphi_\nu(s)\, ds = \varphi_\nu(x). \qquad (34)$$

(34) көстәрир ки, φ_ν, $R(x, s, \lambda)$-нын $(\lambda_\nu - \lambda)$ мәхсуси әдәдинә ујғун мәхсуси функсијадыр. Көстәрилир ки, $R(x, s, \lambda)$-нын $\varphi_\nu(x)$-ләрдән әлавә мәхсуси функсијалары јохдур. Бу гејд етдикләримизи нәзәрә алсаг, биз $R(x, s, \lambda)$-ја нүвә кими бахараг буна ујғун резолвентин ајрылыщцыны јаза биләрик. $R(x, s, \lambda)$ нүвәсинин резолвентини $R_0(x, s, \lambda, \mu)$ илә ишарә едәк. Билаваситә резолвентин, јә'ни $R(x. s, \lambda)$ вә $R_0(x, s, \lambda, \mu)$-нүн ифадәләрини нәзәрә алсаг, онда көстәрмәк олар ки,

$$R_0(x, s, \lambda, \mu) = R(x, s, \lambda + \mu). \qquad (35)$$

Демәли әкәр $R(x, s, \lambda)$-ә нүвә кими бахыларса, онда белә нүвәнин розелвенти, јә'ни $R(x, s, \lambda + \mu)$-нүн мәхсуси функсијалара көрә ашағыдакы кими ајрылыр:

$$R(x, s, \lambda + \mu) = K(x, s) + (\lambda + \mu) \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\varphi_\nu(s)}{\lambda_\nu[\lambda_\nu - (\lambda + \mu)]},$$

$$K_1(x, s) = K(x, s)\, p(s) \qquad (36)$$

олсун, белә ки, $K(x, s)$ симметрик вә $p(s) > 0$ шәртини өдәјир.

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K_1(x, s)\, \varphi(s)\, ds \qquad (37)$$

тәнлијинә бахаг, $K_1(x, s)$-ин ифадәсинә көрә

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, p(s)\, \varphi(s)\, ds. \qquad (38)$$

28)-ин һәр тәрәфини $\sqrt{p(x)}$-ә вурсаг:

$$\sqrt{p(x)}\, \varphi(x) = \sqrt{p(x)}\, f(x) + \lambda \int_a^b K(x, s)\, p(s) \sqrt{p(x)}\, \varphi(s) ds. \qquad (39)$$

$\sqrt{p(x)}\, \varphi(x) = \omega(x)$ ишарә етсәк, (39)-дан

$$\omega(x) = f_0(x) + \lambda \int_a^b K_0(x, s)\, \omega(s)\, ds, \qquad (40)$$

бурада

$$f_0(x) = \sqrt{p(x)}\,f(x), \tag*{(41}$$

$$K_0(x, s) = K(x, s)\sqrt{p(x)\,p(s)}. \tag{42}$$

$K_0(x, s)$-ин ифадәсиндән көрүндүјү кими, бу симметрик нүвәдир. Беләликлә, (37) интеграл тәнлији симметрик нүвәли (40) тәнлијинә кәтирилир. Ашкардыр ки, бу тәнликләрдән биринин һәлли мә'лумдурса, дикәринин һәлли гурулур. Инди ујғун ејничинсли тәнликләри көтүрәк:

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x, s)\,p(s)\,\varphi(s)\,ds = 0, \tag{43}$$

$$\omega(x) - \lambda\int_a^b K_0(x, s)\,\omega(s)\,ds = 0. \tag{44}$$

Фәрз едәк ки, $\omega_\nu(x)$ (44)-үн мәхсуси функсијалар системидир. Гејд етдијимиз кими, бу систем ортонормал фәрз олунур.

$$\int_a^b \omega_i(s)\,\omega_j(s)\,ds = \begin{cases}1, & i = j,\\ 0, & i \neq j.\end{cases}$$

$\omega_i(x) = \sqrt{p(x)}\,\varphi_i(x)$ олдуғундан, бурадан $\varphi_i(x)$ функсијалары үчүн

$$\int_b^b \varphi_i(s)\,\varphi_j(s)\,p(s)\,ds = \begin{cases}1, & i = j,\\ 0, & i \neq j.\end{cases}$$

Беләликлә, ортонормаллыг шәрти $p(s)$чәкисинә көрә өдәнилир. Биз бу вахта гәдәр һәгиги симметрик нүвәләрдән бәһс етмишдик. Әкәр верилмиш нүвә комплекс исә, бу нүвә

$$K(x, s) = \overline{K(s, x)}$$

шәртини өдәјирсә, онда $K(x, s)$ ермит нүвә адланыр. $K(x, s)$ һәгиги олдугда, бурадан $K(x, s)$-ин симметрик олдуғу алыныр. Әкәр $H(x, s)$ нүвәси

$$H(x, s) = -H(s, x)$$

шәртини өдәјирсә, онда $H(x, s)$ косисимметрик нүвә адланыр. Нәһајәт, $iH(x, s)$-ин ермит олдуғу алыныр, $K(x, s)$ ермит нүвә олдугда бу нүвәнин мәхсуси әдәдләри јенәдә һәгиги олмагла мәхсуси функсијалары үмумијјәтлә, комплекс олар. Бизм. симметрик нүвәләр үчүн исбат етдијимиз бир чох теоремлр- еләчә дә ермит нүвәләр үчүн дә ејни гајда үзрә исбат олунур. Мәсәлән, $K(x, s)$ ермит нүвә олдугда мәхсуси функсијалардан тәшкил олунмуш сыра мүнтәзәм јығылыр вә $K(x, s) = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(x)\overline{\varphi_\nu(s)}}{\lambda_\nu}$ шәклиндә көстәрилир. Еләчә дә ујғун көстәрилишләрә мәхсуси $\varphi_\nu(x)$ функсијасы илә бирликдә бу функсијанын гошмасы дахил олур.

XII ФӘСИЛ

ҮМУМИЛӘШМИШ ТӨРӘМӘЛӘР

§ 1. ҺӨЛДЕР ВӘ МИНКОВСКИ БӘРАБӘРСИЗЛИЈИ

Биз Һөлдер вә Минковски бәрабәрсизликләрини n-өлчүлү фәзада верилмиш функсијалар үчүн исбат едәҹәјик. Фәрз едәк ки, Ω, n-өлчүлү фәзада сонлу областдыр вә $F(Q)$ бу областда тә'јин олунмуш мәһдуд функсија олмагла

$$F(Q) \geqslant 0 \tag{1}$$

шәртини өдәјир. Елә p вә p' мүсбәт әдәдләрини көтүрәк ки, бу әдәдләр

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{2}$$

шәртини өдәсин, belә ки, $p > 1$, белә әдәдләр гаршылыглы гошма әдәдләр адланыр.

$$y = x^{p-1} \tag{3}$$

функсијасыны көтүрәк. (3) илә тә'јин олунан функсија (xoy) мүстәвисиндә мүәјјән C әјрисини верир. (3)-үн тәрс функсијасыны тә'јин едәк:

$$x = y^{p'-1}. \tag{4}$$

x вә y мүсбәт әдәдләрини көтүрсәк, 1-ҹи шәкилдән көрүндүјү кими

$$xy \leqslant S_1 + S_2, \tag{5}$$

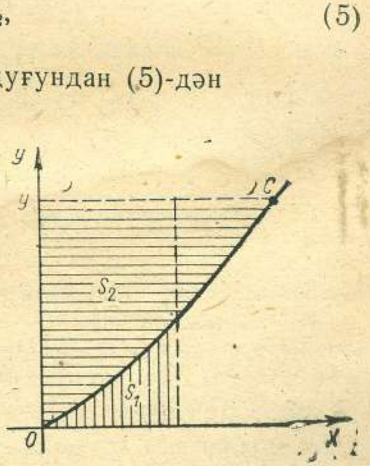
$S_1 = \int\limits_0^x x^{p-1}\,dx$ вә $S_2 = \int\limits_0^y y^{p'-1}\,dy$ олдуғундан (5)-дән

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \tag{6}$$

өдәнилир.

Беләликлә, p вә p' әдәдләри (2)-нин $p > 1$ шәртләрини өдәдикдә ихтијари ики x вә y мүсбәт әдәдләри үчүн (6) өдәнилир.

Инди фәрз едәк ки, $\varphi(Q)$ вә $\psi(Q)$ функсијалары Ω областында верилмәклә $|\varphi(Q)|^p$ вә $|\psi(Q)|^{p'}$ областда ҹәмләнәндирләр. Онда



Шәкил 1

Q-дән асылы $\varphi_1(Q)$ вә $\psi_1(Q)$ функсиjалары (6) бәрабәрсизлиjини өдәjәр:

$$|\varphi_1(Q)||\psi_1(Q)| \leqslant \frac{|\varphi_1(Q)|^p}{p} + \frac{|\psi_1(Q)|^{p'}}{p'} \tag{7}$$

белә ки,

$$\varphi_1(Q) = \frac{|\varphi(Q)|}{\left(\int\limits_\Omega F(Q)|\varphi(Q)|^p dv_Q\right)^{\frac{1}{p}}}, \tag{8}$$

$$\psi_1(Q) = \frac{|\psi(Q)|}{\left(\int\limits_\Omega F(Q)|\psi(Q)|^{p'} dv_Q\right)^{\frac{1}{p'}}}. \tag{9}$$

$F(Q)$ мәһдуд олдуғундан (8) вә (9)-а дахил олан интегралалты функсиjаларын һасили дә чәмләнән олар. (7)-нин һәр тәрәфини $F(Q)$-jә вуруб Ω областы үзрә интеграллаcаг:

$$\int\limits_\Omega F(Q)|\varphi_1(Q)||\psi_1(Q)|dv_Q \leqslant \frac{1}{p}\int\limits_\Omega F(Q)|\varphi_1(Q)|^p dv_Q +$$

$$+\frac{1}{p'}\int\limits_\Omega F(Q)|\psi_1(Q)|^{p'} dv_Q. \tag{10}$$

(8) вә (9)-дан көрүндүjү кими, (10)-ун сағ тәрәфинә дахил олан интегралларын һәр икиси ваһидә бәрабәрдир. Һәмчинин (2)-ни нәзәрә алсаг, (10)-дан

$$\int\limits_\Omega F(Q)|\varphi_1(Q)||\psi_1(Q)|dv_Q \leqslant 1. \tag{11}$$

(8) вә (9)-у нәзәрә алсаг, (11)-дән

$$\left|\int\limits_\Omega F(Q)\varphi(Q)\psi(Q)dv_Q\right| \leqslant \int\limits_\Omega F(Q)|\varphi(Q)\psi(Q)|dv_Q \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_\Omega F(Q)|\varphi(Q)|^p dv_Q\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int\limits_\Omega F(Q)|\psi(Q)|^{p'} dv_Q\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{12}$$

Бу Һөлдер бәрабәрсизлиjи адланыр.

Бу бәрабәрсизликдән алырыг ки, $|\varphi(Q)|^p$ вә $|\psi(Q)|^{p'}$ чәмләнән олдугда $\varphi(Q), \psi(Q)$-дә чәмләнән функсиjадыр. (12), икидән чох саjда функсиjалар үчүн ашағыдакы кими үмумиләшдирилир. Фәрз едәк ки, $\varphi_j(Q)$ $(j=\overline{1,n})$ Ω областында верилмиш функсиjалардыр вә белә ки, $|\varphi_j(Q)|^{\lambda_j}$ $(j=\overline{1,n})$ һәмин областда чәмләнәндирләр. Бурада, $\lambda_j > 0$ $(j=\overline{1,n})$ олмагла

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \tag{13}$$

шәртини өдәјирләр. Онда исбат едәк ки, $\omega\ (Q) = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(Q)$ функсијасы да чәмләнәндир вә ашағыдакы бәрабәрсизлик өдәнилир:

$$\left|\int\limits_{\Omega} F(Q)\prod_{j=1}^{n}\varphi_j(Q)\,dv_Q\right| \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\int\limits_{\Omega}|\varphi_j(Q)|^{\frac{1}{\lambda_j}}dv_Q\right)^{\lambda_j}. \tag{14}$$

Бу бәрабәрсизлији индуксија үсулундан истифадә едәрәк исбат едәчәјик. Фәрз едәк ки, (14) $\varphi_j(Q)$ $(j=\overline{1,к})$ функсијалары үчүн өдәнилир. Көстәрәк ки, һәмин бәрабәрсизлик $к+1$ сајда функсијалар үчүн доғрудур. $\sum\limits_{j=1}^{к+1}\lambda_j = 1$ шәртини өдәјән λ_j $(j=\overline{1,к+1})$ мүсбәт әдәдләрини көстәрәк: $p = \frac{1}{\lambda_{к+1}}$ вә $p' = \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{к}\lambda_j}$ әдәдләрини көтүрсәк

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{15}$$

өдәнилир. Онда:

$$\psi^*(Q) = \prod_{j=1}^{к}\varphi_j(Q). \tag{16}$$

$\varphi^*(Q) = \varphi_{к+1}(Q)$ функсијалары үчүн (12) бәрабәрсизлијини јазаг:

$$\left|\int\limits_{\Omega} F(Q)\,\varphi^*(Q)\,\psi^*(Q)\,dv_Q\right| \leqslant \left[\int\limits_{\Omega} F(Q)\,|\varphi^*(Q)|^{p}dv_Q\right]^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times\left[\int\limits_{\Omega} F(Q)\,|\psi^*(Q|^{p'}dv_Q\right]^{\frac{1}{p'}}. \tag{17}$$

(17)-јә дахил олан интегралы ашағыдакы кими чевирәк:

$$\left[\int\limits_{\Omega} F(Q)\,|\psi^*(Q)|^{p'}dv_Q\right]^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= \left[\int\limits_{\Omega} F(Q) \left[\prod_{j=1}^{\kappa} |\varphi_j(Q)| \right]^{\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{\kappa} \lambda j}} dv_Q \right]^{\sum\limits_{\kappa=1}^{\kappa} \lambda j}, \tag{18}$$

$$\mu_i = \frac{\lambda_j}{\sum\limits_{i=1}^{\kappa} \lambda i} \quad (j = \overline{1, \kappa}) \text{ оларса, } \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i = 1. \tag{19}$$

Шəртə көрə $\varphi_j(Q)\left(j = \overline{1, \kappa}\right)$ үчүн (14) өдəнилдијиндəн (19)-у өдəјəн $\mu_j\left(j = \overline{1, \kappa}\right)$ əдəдлəри үчүн

$$\left| \int\limits_{\Omega} F(Q) \prod_{j=1}^{\kappa} \varphi_j(Q)\, dv_Q \right| \leqslant \prod_{j=1}^{\kappa} \left[\int\limits_{\Omega} F(Q) \mid \varphi_j(Q) \mid^{\frac{1}{\mu_j}} dv_Q \right]^{\mu_j} \tag{20}$$

өдəнилир. Елəчə дə,

$$\left| \int\limits_{\Omega} F(Q) \prod_{j=1}^{\kappa} \mid \varphi_j(Q) \mid dv_Q \right| \prod_{j=1}^{\kappa} \left[\int\limits_{\Omega} F(Q) \mid \varphi_j(Q) \mid^{\frac{1}{\mu_j}} dv_Q \right]^{\frac{1}{\mu_j}} \tag{21}$$

өдəнилир. Бурадан

$$\left| \int\limits_{\Omega} F(Q) \prod_{j=1}^{\kappa} \mid \varphi_j(Q) \mid^{p'} dv_Q \right| \leqslant \left[\prod_{j=1}^{\kappa} \left[\int\limits_{\Omega} F(Q) \mid \varphi_j(Q) \mid^{\frac{p'}{\mu_j}} dv_Q \right] \right]^{\frac{1}{\mu_j}} \tag{22}$$

$\frac{p'}{\mu j} = \sum\limits_{j=1}^{1/\kappa} \lambda_i = \frac{1}{\lambda_j}$ олдуғундан (21)-дəн

$$\left| \int\limits_{\Omega} F(Q) \prod_{j=1}^{\kappa} \mid \varphi_j(Q) \mid^{p'} dv_Q \right| \leqslant \prod_{j=1}^{\kappa} \left[\int\limits_{\Omega} F(Q) \mid \varphi_j(Q) \mid^{\frac{1}{\lambda_j}} dv_Q \right]^{\frac{1}{\mu_j}}. \tag{23}$$

$\varphi^*(Q)$, p-нин ифадəлəрини вə (23)-ү нəзəрə алсаг, (17)-дəн ашағыдакы бəрабəрсизлији аларыг:

$$\left| \int\limits_{\Omega} F(Q) \prod_{j=1}^{\kappa+1} \varphi_j(Q)\, dv_Q \right| \leqslant \prod_{j=1}^{\kappa+1} \left[\int\limits_{\Omega} F(Q) \mid \varphi_j(Q) \mid^{\frac{1}{\lambda_j}} dv_Q \right]^{\lambda_j}. \tag{24}$$

Демəли, (24)-үн κ сајда функсија үчүн өдəнилдијини фəрз едəрəк $\kappa + 1$ сајда функсија үчүн дə өдəнилдијини исбат етдик. Һөлдер бəрабəрсизлији ики функсија үчүн өдəнилдијиндəн (14)-үн доғрулуғу исбат олунур. Бу үмумилəшмиш Һөлдер бəрабəрсизлији адланыр. Фəрз едəк ки, (14)-ə дахил олан функсијаларын һәр бири сонлу сајда гијмәтләр алыр. Үмумилији позмадан фәрз едәк ки, $\varphi_j(Q)$ $\left(j=\overline{1, n}\right)$ функсијаларынын һамысы ејни сајда гијмәтләр алыр. Онда (24)-ә дахил олан интеграллар ујғун сонлу чәмләрлә әвәз олунарса:

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\prod_{j=1}^{n}\sigma_j^{(i)}\right| \leqslant \left[\prod_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(\sigma_j^{(i)}\right)^{\frac{1}{\lambda_j}}\right]^{\lambda j}\right]. \tag{25}$$

(25) сонлу чәм үчүн Һөлдер бәрабәрсизлији адланыр. Хүсуси һалда, $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$ гәбул едилир; $\sigma_1^{(i)}=1$ вә $\sigma_2^{(i)}=a^{(i)}$ көтүрүләрсә, (25)-дән:

$$\sum_{i=1}^{N}a^{(i)} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{N}1^2\right)^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(a^{(i)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{N}\left[\sum_{i=1}^{N}\left(a^{(i)}\right)^2\right]^2. \tag{26}$$

Инди Минковски бәрабәрсизлијини тәдгиг едәк. Јенә дә $p>1$ гәбул едәрәк ашағыдакы бәрабәрсизлији јазаг:

$$\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)+\psi(Q)\mid^{p}dv_{Q} \leqslant \int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)\parallel\varphi(Q)+$$

$$+\psi(Q)\mid^{p-1}dv_{Q}+\int_{\Omega}F(Q)\mid\psi(Q)\parallel\varphi(Q)+\psi(Q)\mid^{p-1}dv_{Q}. \tag{27}$$

Бу бәрабәрсизлијин сағ тәрәфинә дахил олан һәр бир интеграла Һөлдер бәрабәрсизлијини тәтбиг едәк:

$$\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)\mid\ \mid\varphi(Q)+\psi(Q)\mid^{p-1}dv_{Q} \leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)^{p}dv_{Q}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q+\psi(Q)|^{p'(p+1)}dv_{Q}\right] \tag{28}$$

$$\int_{\Omega}F(Q)\mid\psi(Q)\mid\ \mid\varphi(Q)+\psi(Q)\mid^{p-1}dv_{Q} \leqslant$$

$$\leqslant\left[\int_{\Omega}F(Q)\mid\psi(Q)\mid^{p}dv_{Q}\right]^{\frac{1}{p}}\left[\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)+\right.$$

$$\left.+\psi(Q)\mid^{(p')p+1}dv_{Q}\right]. \tag{29}$$

(28) вә (29)-а көрә (23)-дән

$$\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)+\psi(Q)^{p}dv_{Q} \leqslant \left[\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)+\psi(Q)|^{p}dv_{Q}\right]^{\frac{p-1}{p}}\times$$

$$\times\left\{\left[\int_{\Omega}F(Q)\mid\varphi(Q)\mid^{p}dv_{Q}\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_{\Omega}F(Q)\mid\psi(Q)\mid^{p}dv_{Q}\right]\right\}^{\frac{1}{p}},$$

она көрә дә

$$\left[\int_{\Omega} F(Q) \mid \varphi(Q) + \psi(Q) \mid^{p} dv_{Q}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant \left[\int_{\Omega} F(Q) \mid \varphi(Q) \mid^{p} dv_{Q}\right]^{\frac{1}{p}} + \tag{30}$$

$$+ \int_{\Omega} |F(Q)| |\psi(p)|^{p} dv_{Q}\Big]^{\frac{1}{p}}$$

(30) Минковски бәрабәрсизлији адланыр. Ејни гајда үзрә үмумиләшмиш Һөлдер бәрабәрсизлијинин, јә'ни

$$\left[\int_{\Omega} \left| \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(Q) \right|^{p} F(Q)\, dv_{Q}\right]^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=f}^{n} \left[\int_{\Omega} \mid \varphi_j(Q) \mid^{p} F(Q)\, dv_{Q}\right]^{\frac{1}{p}} \tag{31}$$

мүнасибәтинин доғрулуғуну көстәрмәк олар.

Хүсуси һалда, $\varphi_j(Q)$ $(j = \overline{1, n})$ функсијаларынын һәр бири сонлу сајда гијмәтләр аларса,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \left| \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{N} a_j \mid \sigma_i \mid^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{32}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

§ 2. ТӘРС ҺӨЛДЕР ВӘ МИНКОВСКИ БӘРАБӘРСИЗЛИКЛӘРИ

Фәрз едәк ки, $p < 1$ әдәди верилир, онда $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ гәбул етсәк, $p' = \frac{p}{p-1} < 0$.

$$y = x^{p-1} \tag{1}$$

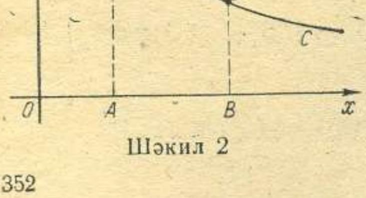
буна тәрс олан

$$x = y^{p'-1} \tag{2}$$

функсијаларыны көтүрәк. (1) *xoy* мүстәвисиндә мүәјјән C әјрисини верир.

2-чи шәкилдән көрүндүјү кими, *ONMDB* фигурунун саһәси *NP'BO* дүзбучаглысынын саһәсиндән кичик олар:

$$S_{ONMDB} < S_{NP'BO}. \tag{3}$$



Шәкил 2

K нөгтәсини елә көтүрәк ки, кафи гәдәр y-ә јахын олсун. Шәкилдән көрүндүјү кими:

$$S_{KTOAQ} - S_{KTPDQ} = S_{TOAP} - S_{PQD} \tag{4}$$

она көрә дә

$$S_{KTOAQ} - S_{KTPDQ} < S_{TOAP} \tag{5}$$

өдәниләр.

S_{OKMDB}-јә $\int\limits_0^x x^{p-1}\,dx$ вә $\int\limits_y^\infty y^{p'-1}\,dy$ саһәләринин фәрги кими бахмаг олар. Она көрә дә (3)-дән

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^{p'}}{p'} \leqslant xy \tag{6}$$

бәрабәрсизлијй өдәнилир.

Еләчә дә

$$S_{\text{KTOAQ}} = \int\limits_0^x x^p\,dx \quad \text{вә} \quad S_{\text{KTPDQ}} = \int\limits_y^\infty y^{p'-1}\,dy.$$

Беләликлә, (5)-ә көрә јенә дә (6) бәрабәрсизлији өдәнилир. Демәли, x вә y нөгтәләринин C-дән солда вә сағда көтүрүлмәсиндән асылы олмајараг $p < 1$ олдугда истәнилән x вә y мүсбәт әдәдләри үчүн (6) өдәнилир. (§ 1, 8, 9)-да $p < 1$, p'-и она гошма әдәд гәбул едәрәк (§ 1, 8, 9)-а көрә ејни схем үзрә (6)-дан $\varphi(Q) \geqslant 0$, $\psi(Q) \geqslant 0$ олдугда:

$$\int\limits_\Omega F(Q)\,\varphi(Q)\,\psi(Q)\,dv_{\text{Q}} \geqslant \left[\int\limits_\Omega F(Q)\,\varphi(Q)^{\text{p}}\;dv_{\text{Q}}\right]^{\frac{1}{\text{p}}} \times$$

$$\times \left[\int\limits_\Omega F(Q)\,\psi(Q)^{\text{p}'}\,dv_{\text{Q}}\right]^{\frac{1}{\text{p}'}} \tag{7}$$

тәрс Һөлдер бәрабәрсизлији алыныр. Нәһајәт,

$$\left[\int\limits_\Omega (\varphi(Q) + \psi(Q))^{\text{p}} F(Q)\,dv_{\text{Q}}\right]^{\frac{1}{\text{p}}} \geqslant \left[\int\limits_\Omega F(Q)\,\varphi(Q)\,dv_{\text{Q}}\right]^{\frac{1}{\text{p}}} +$$

$$+ \left[\int\limits_\Omega F(Q)\,\psi(Q)\,dv_{\text{Q}}\right]^{\frac{1}{\text{p}}}. \tag{8}$$

Тәрс Минковски бәрабәрсизлији ејни гајда үзрә исбат олунур. Еләчә дә, бу бәрабәрсизликләри икидән чох функсијалар үчүн јазмаг оларды.

§ 3. ҮМУМИЛӘШМИШ ТӨРӘМӘЛӘР

Диференсиал һесаби классик анализин ән гијмәтли шө'бәләриндән бири олмагла кениш тәдгигата маликдир. Лакин тәтбиги әһәмијјәти олан бир чох мәсәләләр, хүсусән ријази физика саһәсиндә олан мәсәләләрин тәдгиг олунмасы төрәмә анлајышынын үмумиләшмәсини тәбии олараг мејдана чыхарыр. Хүсусән, диференсиал тәнликләри вариасија үсулу илә арашдырылмасында зәиф тополокија илә верилмиш төрәмәләрин кениш тәтбигаты вардыр. Биз бу фәсилдә үмумиләшмиш төрәмә анлајышыны вермәклә бир нечә хассәләрини вә бунларла әлагәдар олан бә'зи төрәмәләрин исбатыны верәчәјик. Бу анлајышы вермәмишдән габаг садә

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = 0 \tag{1}$$

вә

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 0 \tag{2}$$

тәнликләринә бахаг. (1)-дән көрүндүјү кими, x-дән асылы һәр бир $\varphi(x)$ функсијасы (1)-ин һәллидир. Лакин (2)-дән көрүндүјү кими, бу функсијалардан еләси вар ки, (2)-нин сол тәрәфи тә'јин олунмамышдыр. Демәли, (1) вә (2) тәнликләри еквивалент дејилдир. Белә бир факт олдугча гејри тәбиидир. Һәтта бу садә мисал көстәрир ки, төрәмә анлајышынын үмумиләшмәси зәруридир. Фәрз едәк ки, D областы n-өлчүлү фәзанын һамар сәрһәдли мәһдуд ачыг бир рабитәли областыдыр. $\varphi(x)$ функсијасы D областында о заман финит функсијасы адланыр ки, D-јә тамамилә дахил олан елә D_φ областы олсун ки, бу областын харичиндә сыфра бәрабәр олсун. Инди фәрз едәк ки, u ики дәфә кәсилмәз төрәмәси олан функсијадыр. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f$ оларса, онда ики дәфә кәсилмәз төрәмәси олан финит функсијалары үчүн

$$\int_D u\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\,\partial x\,\partial y = \int_D f\varphi\,dx\,dy. \tag{3}$$

Бу мүнасибәтләрин доғрулуғуну көстәрмәк үчүн (3)-үн сол тәрәфинә дахил олан ифадәни һиссә-һиссә интегралламагла финит функсијаларынын хассәләриндән истифадә етмәк лазымдыр. Әксинә (3) гәбул олунарса, онда һәр бир u-ја гаршы (3)-ү өдәјән јеканә кәсилмәз f функсијасынын ујғун олдуғуну јохламаг олар. Доғрудан да, әкәр (3)-ү өдәјән u-ја гаршы мүхтәлиф f_1 вә f_2 кәсилмәз функсијалары олса иди, онда

$$\int_D u\,\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy = \int_D f_1\varphi\,dx\,dy, \tag{4}$$

$$\int\limits_D u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = \int\limits_D f_2 \varphi\, dx\, dy \qquad (5)$$

олмагла, бурадан

$$\int\limits_D (f_1 - f_2) \varphi\, dx\, dy = 0.$$

Лакин φ истәнилән финит функсија олдуғундан $f_1 = f_2$. Демәли, (3) истәнилән финит φ функсијасы үчүн өдәнилирсә, онда һәр бир u-ја гаршы јеканә f ујғундур. Буну нәзәрә алараг зәиф тополокија васитәсилә зәиф төрәмә белә тә'риф олунур. Әкәр верилмиш u-ја гаршы елә кәсилмәз f функсијасы варса ки, (3) истәнилән φ финит функсијасы үчүн өдәнилир, онда f, u-нын икинчи тәтбигдән зәиф төрәмәси адланыр вә $f = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ кими ишарә олунур. Беләликлә, (3) ашағыдакы кими јазылыр:

$$\int\limits_D u \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = \int\limits_D \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} dx\, dy, \qquad (6)$$

(6)-ја дахил олан $\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$ төрәмәсинин $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial x}$ хассәси көстәрир ки, зәиф төрәмәләр үчүн дә ејни мүнасибәт доғрудур, јә'ни

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}. \qquad (7)$$

Бу садә һал илә кифајәтләнәрәк үмумиләшмиш төрәмә анлајышыны даһа кениш синиф үчүн верәк. Бу анлајыш чәмләнән функсијалар үчүн вериләрәк даһа кениш синиф тәшкил едир. n-өлчүлү фәзада чәмләнән функсијалар һаггында компакт шәкилдә изаһат Соболевин „Ријази физика тәнликләри“ китабында шәрһ олунмушдур. Бурада алынан нәтичәләр нәинки сонлу областлары вә һәтта сонсуз областлары да әһатә едир. Соболев тәрәфиндән тәдгиг олан чәмләнән функсијалар, кәсилмәз функсијалар әсасында апарылыр. Белә ки, һәм ачыг вә һәм дә гапалы чохлугларын өлчүлмәси анлајышыны вермәклә чәмләнән функсијалар тә'риф олунур вә бир чох мүһүм теоремләр исбат олунур. Фәрз едәк ки, $f(x)$ функсијасы $D' \subset D$ олан истәнилән D областында чәмләнән функсијадыр. D-дә l дахил олмагла l-чи тәртибдән кәсилмәз төрәмәләри олан финит функсијалар синфини M_φ илә ишарә едәк. Әкәр $D' \subset D$ олан һәр бир D' областында елә чәмләнән ψ функсијасы варса ки, истәнилән φ үчүн $\varphi \in M_\varphi$

$$\int\limits_D \psi\varphi\, dx = (-1)^l \int\limits_D^{1} f \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dx \qquad (8)$$

өдәнилирсә, онда ψ, f-ин l-чи тәртибдән үмумиләшмиш төрәмәси адланараг

$$\psi = \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_n} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{9}$$

кими ишарә олунур. Демәли, тә'рифә көрә

$$\int\limits_D \varphi \frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_{2n}^{\alpha} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx = (-1)^l \int\limits_D f \frac{\partial^l f}{d x_1^{\alpha_1} \partial x_n^{\alpha_n} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \tag{10}$$

олур. Јенә дә бу тә'рифдән көрүндүјү кими, бу гајда илә һәр бир чәмләнән f функсијасына гаршы гојулмуш үмумиләшмиш $\frac{\partial^l f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_n} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ төрәмәси јеканәдир. Доғрудан да, әкс һалда

$$\int\limits_D (f_1 - f_2) \varphi dx = 0$$

истәнилән φ финит функсијасы үчүн өдәнилдијиндән бурадан $f_1 = f_2$ олардьı. Гејд едәк ки, үмумиләшмиш төрәмәнин чәмләнән функсијалар үчүн бу гајда үзрә үмумиләшмәси вә мүәјјән нәзәријјә кими мејдана чыхмасы Соболев тә'рифиндән верилмишдир. Хүсуси төрәмәли диференсиал тәнликләрин муасир нәзәријјәсинин инкишафында гијмәтли наилијјәтә маликдир. Сонралар бу нәзәријјә, јә'ни үмумиләшмиш төрәмәләр нәзәријјәси мүхтәлиф мүәллифләр тәрәфиндән кениш тәдгиг олунараг формалашмышдыр. Бу төрәмәләрин бир нечә садә хассәләрини гејд едәк. f-ин l-чи тәртибдән үмумиләшмиш гарышыг төрәмәләри бәрабәрдир. Бу хассә финит функсијаларын l-чи тәртиб гарышыг төрәмәләринин бәрабәрлијиндән алыныр. Әкәр f_1 вә f_2-нин l-чи тәртибдән үмумиләшмиш төрәмәси варса, c_1 вә c_2 ихтијари сабит әдәдләр исә, онда һәмчинин $c_1 f_1 + c_2 f_2$-нин l-чи тәртибдән үмумиләшмиш төрәмәси вар:

$$\frac{\partial^l (c_1 f_1 + c_2 f^l)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_2^{\alpha_2}} = c_1 \frac{\partial^1 f_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^l f_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \tag{11}$$

$$\int\limits_D \varphi \frac{\partial^l f_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx = (-1)^l \int\limits_D f_1 \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx, \tag{12}$$

$$\int\limits_D \varphi \frac{\partial^l f_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx = (-1)^1 \int\limits_D f_2 \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx \tag{13}$$

сонунчу бәрабәрликләрдән

$$\int\limits_D \varphi \left[c_1 \frac{\partial^l f_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} + c_2 \frac{\partial^l f_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right] dx =$$

$$= (-1)^l \int\limits_D (c_1 f_1 + c_2 f_2) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx \tag{14}$$

бәрабәрлијиндән (11)-ин өдәнилдији алыныр. Гејд етмәк лазымдыр ки, мүтләг кәсилмәз функсијаларла үмумиләшмиш төрәмәси олан функсијалар арасында мүәјјән бир мүнасибәт вар ки, белә мүнасибәт үмумиләшмиш төрәмәси олан функсијаларын даһа башга хассәләрини тә'јин едир. Һәләлик фәрз едәк ки, [0,1] парчасында мүтләг кәсилмәз $f(x)$ функсијасы верилир. Онда мә'лумдур ки, бу функсијанын [0, 1] парчасында санки һәр јердә төрәмәси вар вә $f'(x)$ чәмләнән функсијадыр. $\varphi(x)$, истәнилән һамар финит функсија исә, онда

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx \tag{15}$$

интегралыны һиссә-һиссә интеграллaмагла

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 f'(x)\,\varphi(x)\,dx. \tag{16}$$

Бурадан алырыг ки, $f'(x)$, $f(x)$-ин үмумиләшмиш төрәмәсидир. Инди фәрз едәк ки, $f(x)$ вә $\frac{df(x)}{dx}$ үмумиләшмиш төрәмәси $L^{[0,1]}$-ә дахилдир. Онда көстәрәк ки, $f(x)$, [0, 1] парчасында мүтләг кәсилмәз мүәјјән $f_0(x)$ функсијасына еквивалентдир.

$$f_1(x) = \int_0^x \frac{df(t)}{dt}\,dt \tag{17}$$

ишарә едәк. $f_1(x)$ мүтләг кәсилмәз олмагла төрәмәси, јә'ни $f_1'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$-ә еквивалентдир. (17)-дән истифадә едәрәк асанлыгла көстәрилир ки,

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \frac{df(t)}{dt}\,dt. \tag{18}$$

Бу гејд етдикләримиздән белә бир нәтичә алыныр ки, $f(x)$-ин үмумиләшмиш төрәмәсинин варлығы бу функсијанын мүтләг кәсилмәмәзлијинә еквивалентдир. Еләчә дә, белә бир нәтичә чохдәјишәнли функсијалара аиддир. Әкәр $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функсијасынын $g = \{0 < x_k < 1\}$ областында $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ үмумиләшмиш төрәмәси варса, белә ки, f, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ L_p-јә $(p \geqslant 1)$ дахилдир. Онда g-дән санки истәнилән $(x_2, x_3, \dots, x_n)$ нөгтәләри үчүн $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$-дә мүтләг кәсилмәз олмагла $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ нөгтәләри үчүн

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(0, x_2, \dots, x_n) + \int_0^{x_1} \frac{\partial f(t_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial t}\,dt \tag{19}$$

олар. Көстәрилән (18) вә (19) бәрабәрликләри өлчүсү сыфра бәрабәр олан чохлуглар мүстәсна олмагла өдәнилир. Мүтләг кәсилмәз функсијалар вә үмумиләшмиш төрәмәси олан функсијалар арасында олан бу мүнасибәтдән истифадә едәрәк белә бир мисал көстәрәк, јә'ни елә $f(x_1, x_2)$ функсијасы көстәрәк ки, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ вә $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ үмумиләшмиш төрәмәләрин олмамасына бахмајараг $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}$-нин үмумиләшмиш төрәмәси вар.

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \tag{20}$$

олсун. Белә ки, $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$ вә $0 \leqslant x_2 \leqslant 1$. $f_1(x_1)$ вә $f_2(x_2)$ көстәрилән парчаларда кәсилмәз функсијалардыр. Көстәрдијимиз кими, $f_1(x_1)$ вә $f_2(x_2)$ мүтләг кәсилмәз олмадыгларындан $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ вә $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ үмумиләшмиш төрәмәләри јохдур. Инди көстәрәк ки, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}$ үмумиләшмиш төрәмәси вар вә сыфра бәрабәрдир.

Онун үчүн фәрз едәк ки, $\varphi(x_1, x_2)$ истәнилән һамар финит функсијадыр. Ашкардыр ки,

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 f(x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = \int_0^1 dx_1 \int_0^1 \frac{\left[f_1(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right]}{\partial x_2}\, dx_2 =$$

$$= \int_0^1 dx_1 \left[f_1(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right]_0^1.$$

φ финит функсија олдуғуна көрә $\left[f_1(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right]_0^1 = 0$ вә она көрә дә

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 f_1(x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = 0$$

еләчә дә

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 f_2(x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = 0$$

олмагла бу бәрабәрликләрдән истәнилән финит $\varphi(x_1, x_2)$ функсијасы үчүн

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 [f(x_1) + f(x_2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2}\, dx_1\, dx_2 = 0,$$

бурадан алырыг ки, $f(x_1, x_2)$ функсиjасынын $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ үмумиләшмиш төрәмәси вар вә сыфра бәрабәрдир.

§ 4. ОРТАЛАШДЫРЫЧЫ ФУНКСИЈАЛАР ВӘ БУНЛАРЫН ХАССӘЛӘРИ

$$\omega(Q, h) = \begin{cases} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}; & r < h, \\ 0; & r \geqslant h \end{cases}$$

функсиjасыны тә'jин едәк. Беләки, $r = | P - Q |$. Бу функсиjанын тә'jин олунмасындан көрүндүjү кими $\omega(Q, h)$ вә бу функсиjанын бүтүн төрәмәләри кәсилмәздир. $| Q - p | < r$ күрәнин сәрһәдиндә $\omega(Q, h) = 0$, еләчә дә бу функсиjанын истәнилән төрәмәси $h \to 0$ олдугда сыфра jахынлашыр. Бу хассәни билаваситә төрәмә алмагла jохламаг олар.

$$\varkappa = \int\limits_{r<1} e^{\frac{r^2}{r^2-1}} dv$$

оларса, $\varkappa' = \int\limits_{r<h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} dv$ интегралында $\frac{r}{h} = r'$ илә әвәз етсәк, $\varkappa' = \varkappa h^n$ олдуғу алынар. Бурада n верилмиш фәзанын өлчүсүдүр. $\omega(Q, h)$ функсиjасы һәм бахдығымыз сферанын үзәриндә вә һәм дә харичиндә сыфыр олдуғундан $\varkappa'$ илә тә'jин олан интеграл һәмин сфераны дахилинә алан истәнилән област үзрә көстәриләбиләр:

$$\varkappa' = \int e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}} dv$$

$\omega(Q, h)$ функсиjасы васитәсилә

$$\varphi_h(p) = \frac{1}{\varkappa h^n} \int \omega(p - p_1, h) \varphi(p_1) dv_{p_1} \qquad (1)$$

интегралыны көтүрәк. Белә ки, бурада $\varphi(p_1)$ мүәjjән областда верилмиш чәмләнән функсиjадыр.

(1) шәклиндә олан $\varphi_h(p)$ функсиjасы $\varphi(p)$-нин орталашдырычы функсиjасы адланыр. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\varphi_h(p)$ вә бу функсиjанын истәнилән тәртибдән хүсуси төрәмәләри вар. Көстәрәк ки, D областында $f(p) \in L_p$ исә вә $f_h(p)$ бу функсиjанын орталашдырычы функсиjасы олдугда

$$\| f_h - f \|_{L_p} \to 0 \qquad (2)$$

өдәнилир, jә'ни $h \to 0$ олдугда

$$\int\limits_D | f_h(p) - f(p) |^{p'} dv_p \to 0.$$

$$\frac{1}{\varkappa h^n}\int\limits_{r\leqslant h} e^{\frac{r^2}{r^2-h^2}}\, dv_{p_1}=1 \tag{3}$$

олдуғундан $\delta = \| f - f_h \|_{L_{p'}}$ оларса,

$$\delta^{p'}=\iint\limits_{D}\left| f(p) - \frac{1}{\varkappa h^n}\int\limits_{r\leqslant h}\omega_h(p-p_1, h) f(p_1)\, dv_{p_1}\right|^{p'} dv_p =$$

$$=\iint\limits_{D}\left[\frac{1}{\varkappa h^n}\int\limits_{r\leqslant h} | f(p)-f(p_1) | \,\omega_h(p-p_1)\, dv_{p_1}\right]^{p'} dv_p \tag{4}$$

кими көстәрилир. $p-p_1=Q$ илә ишарә едәрәк

$$\frac{1}{\varkappa h^n}\int\limits_{r\leqslant h} | f(p)-f(p_1) | \,\omega_h(p-p_1, h)\, dv_p,$$

интегралына Һөлдер бәрабәрсизлиіини тәтбиг етсәк, онда

$$\int\limits_{|Q|\leqslant h} | f(p_1+Q)-f(p_1) | \,\omega_h(Q, h)\, dv_Q \leqslant$$

$$\leqslant\left[\int\limits_{|Q|\leqslant h} | \omega_h(Q, h) |^{q'} dv_Q\right]^{\frac{1}{q'}}\times$$

$$\times\left[\int\limits_{|Q|\leqslant h} | f(p_1+Q)-f(p_1)|^{p'} dv_Q\right]^{\frac{1}{p'}}$$

бурада $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1.$

$\omega(Q, h)$, $|Q|\leqslant r$ областында кәсилмәз олдуғундан елә сабит $M>0$ әдәди вар ки,

$$|\omega(Q, h)|^{q'}\leqslant M \tag{5}$$

олур. Она көрә дә,

$$\delta^{p'}\leqslant\frac{1}{\varkappa^{p'}}\cdot\left(h^{-n}\cdot M^{\frac{1}{q'}}\cdot h^{\frac{n}{q'}}\right)^{p'}\cdot\iint\limits_{D\,|Q|\leqslant h}|f(p_1+Q)-f(p_1)|^{p'} dv_Q\, dv_{p_1}. \tag{6}$$

$$h^{-n\left(1-\frac{1}{q_1}\right)p^1}=h^{-n} \tag{7}$$

олдуғундан

$$\delta^{p'}\leqslant N h^{-h}\iint\limits_{D\,|Q|\leqslant h}|f(p_1+Q)-f(p_1)|^{p_1} dv_Q dv_{p_1},$$

белә ки,

$$N=\frac{1}{\varkappa^{p_1}}\cdot M^{\frac{p'}{q'}}. \tag{8}$$

$f(p)$ орта мә'нада кәсилмәз олдуғундан верилмиш мүсбәт ε-на көрә елә $\delta(\varepsilon)$ әдәди вар ки, $|Q|<\delta(\varepsilon)$ олдугда

$$\left\{\int\limits_{D}|f(p^1+Q)-f(p_1)|^{p'} dv_{p'}\right\}^{\frac{1}{p^1}}<\varepsilon \tag{9}$$

өдәнилир. Она көрә дә (7)-дән

$$\delta^{p'} \leqslant Nh^{-n} \cdot \varepsilon^{p'} \int\limits_{|Q|<h} dv_Q = L\varepsilon^{p'}, \tag{10}$$

бурада L—сабит әдәд олмагла h-дан асылы дејилир. беләликлә

$$\delta^{p'} \leqslant L\varepsilon^{p'}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир.

Бурада ε истәнилән мүсбәт әдәд олдуғундан $\varepsilon \to 0$ олдугда $\delta \to 0$, јәни $\|f_h - f\|_{L_p \to 0}$ өдәнилир вә теорем исбат олунур. Бир чох мүһүм теоремләрин исбатында бу тәклифдән чидди истифадә олунур.

Теорем 1. Орталашмыш функсијанын төрәмәси үмумиләшмиш төрәмәнин орталашмыш функсијасына бәрабәрдир, јә'ни

$$\frac{\partial^\alpha f_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \left[\frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]_h. \tag{11}$$

Исбаты. $f_h(P)$-дән төрәмә алмаг үчүн $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вә $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ олсун. (11)-дән:

$$\frac{\partial^\alpha fh}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{1}{\varkappa h^n} \int f(p_1) \frac{\partial^\alpha wh(P_1 - P)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} dv_{P_1} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\varkappa h^n} \int f(P_1) \frac{\partial^\alpha w_h(P_1 - P)}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \ldots \partial y_n^{\alpha n}} dv_{P_1}. \tag{12}$$

$w_h(P_1 - P)$ функсијаларынын тә'јининдән көрүндүјү кими $w_n(P_1 - P)$ финит функсијаларыдыр, она көрә дә

$$w_h(P_1 - P) = \varphi \tag{13}$$

ишарә етсәк:

$$\frac{\partial^\alpha f_h}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{(-1)^n}{\varkappa h^n} \int f(P_1) \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} dv_{p_1} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa h^n} \int \varphi \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial y_1^{\alpha_1} \partial y_2^{\alpha_2} \ldots \partial y_n^{\alpha_n}} dv_{P_1} = \left[\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right]_h.$$

Бунунла теорем исбат олунур. Бурадан нәтичә кими алырыг ки, әкәр φ чәмләнән функсија олмагла

$$\frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L_{p'}$$

[illegible]

[illegible] исә,

исә, онда $L_{p'}$-дә $\dfrac{\partial^{\alpha}\varphi_h}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}\to\dfrac{\partial^{\alpha}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Биз үмумиләшмиш төрәмәси олан функсиjаларын диференсиjаланмасы үчүн бир нечә хассәсини көстәрмишдик, инди даһа бә'зи хассәләрини гејд едәк. Әкәр f-ин тәртиби α олан үмумиләшмиш төрәмәси варса вә $\dfrac{\partial^{\alpha} f}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}=f^*$ олдугда, еләчә дә f^*-ин тәртиби β олан үмумиләшмиш төрәмәси варса, онда f^{**}, f-ин $\alpha+\beta$ тәртибдән үмумиләшмиш төрәмәсидир вә

$$f^{**}=\frac{\partial^{\beta} f^*}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\dots\partial x_n^{\beta_n}}=\frac{\partial^{\alpha+\beta} f}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1}\partial x_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n+\beta_n}}\tag{14}$$

бәрабәрлиjи өдәнилир. Буну исбат етмәк үчүн елә финит функсиjалары көтүрәк ки, $(\alpha+\beta)$-ја дахил олмаг шәртилә $\alpha+\beta$ тәртибә гәдәр кәсилмәз төрәмәләри олсун.

f^{**}, f^*-ын β тәртибдән үмумиләшмиш төрәмәси олдуғундан

$$\int_D f^{**}\varphi\,dv=(-1)^{\beta}\int_D f^*\frac{\partial^{\beta}\varphi}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\dots\partial x_n^{\beta_n}}\,dv=$$
$$=(-1)^{\beta}\int_D \omega\,\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}\,dv\tag{15}$$

олар; бурада $\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}=\dfrac{\partial^{\beta}\varphi}{\partial x_1^{\beta_1}\partial x_2^{\beta_2}\dots\partial x_n^{\beta_n}}$

$\psi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}$-нин тә'јининдән көрүндүјү кими, α дахил олмаг шәрти илә α-ја гәдәр хүсуси төрәмәли олан финит функсиjалардыр f^*, f-ин α тәртибдән үмумиләшмиш төрәмәси олдуғундан

$$(-1)^{\beta}\int_D \omega\varphi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}\,dv=(-1)^{\alpha+\beta}\int_D f\frac{d^{\alpha}\psi_{\beta_1\beta_2\dots\beta_n}}{dx_1^{\alpha_1}dx_2^{\alpha_2}\dots dx_n^{\alpha_n}}\,dv=$$
$$=(-1)^{\alpha+\beta}\int_D f\frac{\partial^{\alpha+\beta}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n+\beta_n}}\,dv.\tag{16}$$

(15) вә(16)-дан алырыг ки,

$$\int_D f^{**}\varphi\,dv=(-1)^{\alpha+\beta}\int_D f\frac{\partial^{\alpha_1+\beta}\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1+\beta_1}\partial x_2^{\alpha_2+\beta_2}\dots\partial x_n^{\alpha_n+\beta_n}}\,dv.\tag{17}$$

Бу бәрабәрлик көстәрир ки, f^{**}, φ-нин $\alpha+\beta$ тәртибдән үмумиләшмиш төрәмәсидир.

Теорем 2. Әкәр f_1 вә $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \in L_{p'}$-ә f_2 вә $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \in L_{q'}$ оларса, белә ки, $\frac{1}{p'}+\frac{1}{q'}=1$, онда

$$\frac{\partial f_1 f_2}{\partial x_1} = f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1} + f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1} \tag{18}$$

өдәниләр.

Исбаты. $f_1 \in L_{p'}$, $f_2 \in L_{q'}$ олдуғундан $f_1 f_2$ чәмләнән функсијадыр, елә она көрә дә $f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$, $f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ вә $f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ функсијалары да чәмләнән олар. f_1 вә f_2 функсијаларынын орталашдырычы функсијаларыны f_{1h} вә f_{2h} илә ишарә едәк. Бу функсијаларын хассәләринә көрә

$$L_{p'}\text{-дә } f_{1h}\to f_1,\ \frac{\partial f_{1h}}{\partial x_1}\to\frac{\partial f_1}{\partial x_1}$$

вә

$$L_{q'}\text{-дә } f_{2h}\to f_2,\ \frac{\partial f_{2h}}{\partial x_1}\to\frac{\partial f_2}{\partial x_1}.$$

Фәрз едәк ки, φ биринчи тәртибдән кәсилмәз төрәмәси олан истәнилән финит функсијасыдыр.

Әкәр $|\varphi| < M$ вә $\left|\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right| < M$ оларса, онда

$$\left|\int_D (f_{1h}f_{2h} - f_1f_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dv\right| \leqslant M\int_D |f_{1h}f_{2h}-f_1f_2|\,dv \tag{19}$$

олар.

$$\int_D |f_{1h}f_{2h}-f_1f_2|\,dv \tag{20}$$

интегралыны гијмәтләндирәк:

$$\int_D |f_{1h}f_{2h}-f_1f_2|\,dv = \int |f_{1h}f_{2h}-f_{1h}f_2+f_{1h}f_2-f_1f_2|\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \int_D |f_{2h}-f_2||f_{2h}|\,dv + \int_D |f_2||f_{1h}-f_1|\,dv. \tag{21}$$

Бу интеграллара Һөлдер бәрабәрсизликләрини тәтбиг едәк:

$$\int_D |f_{2h}-f_2||f_{1h}|\,dv \leqslant \left[\int_D|f_{2h}-f_2|^{q'}dv\right]^{\frac{1}{q'}}\left[\int_D|f_{1h}|^{p'}dv\right]^{\frac{1}{p'}},$$

$$\int_D |f_2||f_{1h}-f_1|\,dv \leqslant \left[\int_D|f_{1h}-f_1|^{p'}dv\right]^{\frac{1}{p'}}\left[\int_D|f_2|^{q'}dv\right]^{\frac{1}{q'}}.$$

Она көрә дә бу бәрабәрсизликләр ашағыдакы кими јазылыр:

$$\int\limits_D |f_{2h}-f_2||f_{1h}|\,dv \leqslant \|f_{2h}-f_2\|_{L_{q'}}\cdot\|f_{1h}\|_{L_{p'}}, \tag{22}$$

$$\int\limits_D |f_2||f_{1h}-f_1|\,dv \leqslant \|f_{1h}-f_1\|_{L_{p'}}\cdot\|f_2\|_{L_{q'}}. \tag{23}$$

(22) вә (23) бәрабәрсизликләринә көрә (19)-дан

$$\left|\int\limits_D f_{1h}f_{2h}-f_1f_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dv\right| \leqslant M\|f_{2h}-f_2\|_{L_{q'}}\cdot\|f_{1h}\|_{L_{p'}} + \\ + M\ f_{1h}-f_1\|_{L_{p'}}\cdot\|f_2\|_{L_{q'}} \tag{24}$$

бурада

$$\|f_{2h}-f_2\|\xrightarrow[h\to 0]{}0 \text{ вә } \|f_{1h}-f_1\|\xrightarrow[h\to 0]{}0$$

олдуғундан

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_D f_{1h}f_{2h}-f_1f_2)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dv=0$$

вә она көрә дә

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_D f_{1h}f_{2h}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dv=\int\limits_D f_1f_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dv \tag{25}$$

олар. Ејни гајда үзрә

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_D\left(f_{1h}\frac{\partial f_{2h}}{\partial x_1}+f_{2h}\frac{\partial f_{1h}}{\partial x_1}\right)\varphi\,dv=\int\limits_D\left(f_1\frac{\partial f_2}{\partial x_1}+f_2\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)\varphi\,dv$$

олдуғуну көстәрмәк олар.

$$\int\limits_D f_{1h}f_{2h}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dv=\int\limits_D\varphi\,\frac{\partial f_{1h}\partial f_{2h}}{\partial x_1}\,dv= \\ =-\int\limits_D\varphi f_{2h}\frac{\partial f_{1h}}{\partial x_1}\,dv-\int\limits_D\varphi f_{1h}\frac{\partial f_{2h}}{\partial x_1}\,dv. \tag{26}$$

(25) вә (26) бәрабәрликләрини нәзәрә алсаг, онда бурадан (18)-ин өдәнилмәси алынмагла тео- $h\to 0$ олмагла лимит алсаг, рем исбат олунур.

§ 5. ПОТЕНСИАЛ ТИПЛИ ИНТЕГРАЛЫН ХАССӘЛӘРИ

Фәрзедәк ки, D—n-өлчүлү R-фәзасынын мәһдуд биррабитәли областыдыр. Бу областда тә'јин олунан $f \in L_p$ функсијасыны көтүрәк. D-дән харичдә $f=0$ көтүрмәклә f-и R-дә вермәк олар.

$$u(Q)=\int\limits_{r\leqslant R} r^{-\lambda} f(p)\,dp \tag{1}$$

интегралына бахаг. Бурада, $0<\lambda<n$ олан әдәддир. (1)-дә көстәрилән $r\leqslant R$ күрәси D-јә дахилдир. Белә интеграл потенсиал типли интеграл адланыр. $W_p^{(l)}$, $L_p^{(l)}$ фәзалары илә әлагәдар олан бир чох мәсәләләрин һәлләриндә, хүсусән дахил олма теоремләр нәзәријјәсиндә (1)-ә дахил олан интегралын олдугча кениш тәтбигаты вардыр. Бу интегралла әлагәдар олан ашағыдакы тәклифин доғрулуғуну көстәрәк.

Теорем 3. Әкәр $\lambda<\frac{n}{p'}$ исә, белә ки, $\frac{1}{p}+\frac{1}{'}=1$, онда $u(Q)$ мәһдуд вә кәсилмәз олмагла

$$|u(Q)|\leqslant M\|f\|_{L_p} \tag{2}$$

бәрабәрсизлији өдәнилир. M сабит әдәддир.

Исбаты.

$$\alpha=\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda p'}\,dv_Q \tag{3}$$

интегралынын $h\to 0$ олдугда сыфра јахынлашдығыны көстәрмәк үчүн $\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda p'}\,dv_Q$ интегралыны полјар координатлара көрә чевирмәклә гијмәтләндирсәк,

$$|\alpha|<Kh^{n-\lambda p'} \tag{4}$$

бәрабәрсизлији алынмагла $h\to 0$ олдугда $\alpha\to 0$ олур. Инди (1)-ә дахил олан интегралы гијмәтләндирәк. Һөлдер бәрабәрсизлијинә көрә

$$\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda} f(p)dv_p\Bigg|\leqslant\Bigg\{\int\limits_{r\leqslant h}|f|^p\,dv_p\Bigg\}^{\frac{1}{p}}\cdot\Bigg\{\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda p'}\,dv_p\Bigg\}^{\frac{1}{p'}},$$

$$\int\limits_{r<h}|f|^p d\,v_p\leqslant\|f\|_{L_p}. \tag{5}$$

$h\to 0$ олдугда

$$\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda p'}\,dv_p<\varepsilon \tag{6}$$

олдуғундан (5) вә (6) бәрабәрсизликләринә көрә

$$\Bigg|\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda}\backslash f(p)\,dv_p\Bigg|\leqslant\varepsilon\|f\|_{L_p}, \tag{7}$$

$$u(Q)=\int\limits_{h<r<R} r^{-\lambda}f(p)\,dv_p+\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda}f(p)\,dv_p. \tag{8}$$

Бура дахил олан функсијаларын һәр бири кәсилмәз олдуғундан $u(Q)$ кәсилмәздир. $\int\limits_{r\leqslant h} r^{-\lambda}f(p)\,dv_p$-нин кәсилмәз олмасы ашкардыр. С. Л. Соболев ријази физика тәникләри китабынын VI фәслиндә n-өлчүлү фәзада чәмләнән функсијалар үчүн интеграл анлајышыны кәсилмәз функсијалар васитәсилә вермишдир вә она көрә дә көстәрмәк олур ки, (8)-ә дахил олан биринчи интеграл мүнтәзәм кәсилмәз функсијаларын лимитидир. $u(Q)$-нүн кәсилмәзлијиндән сонра Һелдер бәрабәрсизлијинә көрә ејни гајда үзрә

$$|u(Q)| \leqslant \|f\|_{L_p} \cdot \left(\int\limits_{r \leqslant R} r^{-\lambda p'} \, dv_p \right)^{\frac{1}{p'}}$$

олмагла $M = \left(\int\limits_{r \leqslant R} r^{-\lambda p'} \, dv_p \right)^{\frac{1}{p'}}$ илә ишарә етсәк, (2) бәрабәрсизлијинин өдәнилдији алынмагла теорем исбат олунур.

Теорем 4. $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ **олдугда** $\lambda \geqslant \frac{n}{p'}$ **вә** $\frac{s}{p} > \lambda - \frac{n}{p'}$ **оларса,** L_s **мүстәвиси үзәриндә истәнилән мәһдуд** D_s **областында** $u(Q_s)$ **функсијасы** q^* **дәрәчәдән чәмләнәр вә**

$$\| u(Q_s) \|_{L_{q^*}} \leqslant C \| f \|_{L_p} \tag{9}$$

бәрабәрсизлији өдәниләр. Белә ки, $q^* < q$, $\frac{s}{q} = \lambda - \frac{n}{p'}$.

Исбаты. $q^* < q$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$\varepsilon > \frac{S}{q}\left(\frac{1}{q^*} - \frac{1}{q}\right) > s$$

әдәдини сечәк.

$$\lambda = \frac{n}{p'} + \frac{s}{q^*} - 2\varepsilon$$

олсун.

$$\lambda_1 = \frac{1}{q^*}, \ + \lambda_2 = \frac{q^* - q}{q^* p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}, \qquad \lambda_3 = \frac{1}{p'}$$

оларса,

$$\sum_{j=1}^{3} \lambda_j = 1.$$

$$u(Q) = \int\limits_{r < R} r^{-\gamma} f(p) \, dv_p = \int\limits_{r \leqslant R} r^{2\varepsilon - \frac{n}{p'} - \frac{s}{q^*}} f(p) \, dv_p =$$

$$= \int \left[f^{\frac{p}{q^*} r - \frac{s}{q^*} + \varepsilon} \right] \left[f^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}\right)} \right] r^{-\frac{n}{p'} + \varepsilon} \, dv_p$$

олдуғундан

$$|u(Q)| \leqslant \int\limits_{r \leqslant R} \left[|f|^{\frac{p}{q^*}} x r^{-\frac{s}{q^*} + \varepsilon} \right] \left[|f|^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}\right)} \right] r^{-\frac{n}{p'} + \varepsilon} \, dv_p. \tag{3}$$

$$f_1 = |f|^{\frac{p}{q^*}} r^{-\frac{S}{q^*} + \varepsilon}$$

$$f_2 = |f|^{p\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}\right)},$$

$$f_3 = r^{-\frac{n}{p'} + \varepsilon}$$

ишарә едәрәк вә $\sum_{j=1}^{3} \lambda_j = 1$ олдуғуну нәзәрә алараг

$$\int\limits_{r \leqslant R} f_1 f_2 f_3 \, dv_p$$

интегралына Һөлдер бәрабәрсизлијини тәтбиг едәк:

$$\int\limits_{r \leqslant R} f_1 f_2 f_3 \, dv_p \leqslant \left[\int\limits_{r \leqslant R} f_1^{\frac{1}{\lambda_1}} dv_p \right]^{\lambda_1} \left[\int\limits_{r \leqslant R} f_2^{\frac{1}{\lambda_2}} dv_p \right]^{\lambda_2} \left[\int\limits_{r \leqslant R} f_3^{\frac{1}{\lambda_3}} dv_p \right]^{\lambda_3},$$

$\lambda_j \ (j = \overline{1,3})$ ифадәләрини нәзәрә алсаг, онда

$$u|(Q)| \leqslant \left[\int\limits_{r \leqslant R} |f^p| r^{-S + q^* \varepsilon} dv_p \right]^{\frac{1}{q^*}} \left[\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p \, dv_p \right]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q^*}} \times$$

$$\times \left[\int\limits_{r \leqslant R} r^{-n + p'\varepsilon} \, dv_p \right]^{\frac{1}{p'}}. \qquad (10)$$

(10)-а дахил олан $C_1 = \int\limits_{r \leqslant R} r^{-n + p'\varepsilon} dv_p$ интегралы $n > n - \varepsilon p'$ олдуғуна көрә јығылыр.

$\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p \, dv_p = \| f \|^p_{L_p}$ олдуғуну нәзәрә алсаг, онда

$$|u(Q)| \leqslant C_2 \| f \|_{L_p}^{1 - \frac{p}{q^*}} \cdot \left[\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p r^{-S + \varepsilon q^*} \, dv_p \right]^{\frac{1}{q^*}}. \qquad (11)$$

бурада $C_2 = C_1^{\frac{1}{p'}}$.

Бу бәрабәрсизликдә $y_j = 0 \ (j = \overline{s+1, n})$ гәбул едәрәк q^* дәрәчәдән интегралламагла, Фубин теореминә көрә лазым олан интегралларын јерини дәјишәчәјик.

Беләликлә, (11)-дән $y_j = 0 (j = \overline{s+1, n})$ гәбул едәрәк q^* дәрәчәдән интеграл алсаг:

$$\int\limits_{D_S} |u(Q_s)|^{q^*} dv_{Q_s} \leqslant C_2 \|f\|^{q^* - p} \int\limits_{r \leqslant R} |f|^p \left[\int\limits_{D_S} r^{-s + \varepsilon q^*} dv_{Q_s} \right] dv_p$$

олар. Гејд етдијимиз кими, полјар координатлара кечмәклә

$$\int\limits_{r \leqslant R} r^{-s + \varepsilon q^*} dv_Q^{\,S}$$

интегралынын вә беләликлә дә, $\int\limits_{D_S} r^{-s+\varepsilon q^*} dv_{Q_S}$ интегралынын мәһдуд олдуғуну көстәрмәк олар.

$$\int\limits_{D_s} r^{s+\varepsilon q^*} \; dv_{Q_S} = C_3$$

илә ишарә етсәк,

$$\int\limits_{D_S} |u(Q_s)|^{q^*} dv_{Q_S} \leqslant C_2 \|f\|^{q^*-p} C_3 \int\limits_{r \leqslant R} |f|^p \; dv_p.$$

$\int\limits_{r \leqslant R} |f|^p \; dv_p = \|f\|^p$ олдуғундан $C = C_2 C_3$ ишарә етсәк (9) бәрабәрсизлиjинин доғру олдуғу алыныр.

§ 6. $L_p^{(l)}$ ВӘ $W_p^{(l)}$ ФӘЗАЛАРЫ

Фәрз едәк ки, D, n-өлчүлү R фәзасынын мәһдуд әлагәли областыдыр.

Тә'риф. *D-дә чәмләнән, бүтүн l-чи тәртиб үмумиләшмиш төрәмәләри олан вә p-чи тәртибдән чәмләнән $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x^n)$ функсиjалар синфини $W_p^{(1)}$ илә ишарә едәк.*

Беләликлә, тә'рифдән көрүндүjү кими D областында

$$\frac{\partial l_\varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \in L_p. \text{ Белә ки, } \sum_{l=1}^{n} \alpha_j = l.$$

$W_p^{(1)}$ фәзасында елә чәмләнән $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функсиjалары вар ки, бунларын үмумиләшмиш төрәмәләри бәрабәрдир. Беләликлә, $W_p^{(1)}$ фәзасыны еквивалент синифләрә аjырмаг олар. $W_p^{(1)}$-дә үмумиләшмиш төрәмәләри бәрабәр олан функсиjалары мүәjjән синфә дахил едәрәк ψ илә ишарә едәк. Демәли, $\varphi_1, \varphi_2 \in \psi$ исә D областында санки

$$\frac{\partial^l \varphi_1}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^l \varphi_2}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_j = l$$

олар. Бу гаjда үзрә тә'jин олунмуш ψ кими функсиjалар синфини $L_p^{(1)}$ илә ишарә едәк. $W_v^{(1)}$, $L_p^{(1)}$ фәзалары Соболев фәзалары адланыр. Бу фәзаларын бир нечә хассәсини көстәрмәдән габаг гејд едәк ки, бу фәзалар хүсуси төрәмәли диференсиал тәнликләрин мүасир нәзәриjjәсиндә кениш тәтбигаты маликдир.

$L_p^{(1)}$ фәзасынын тә'jининдән көрүндүjү кими, әкәр $\psi_1 \in L_p^{(1)}$ вә $\psi_2 \in L_p^{(1)}$ исә, бунларын чәми дә $L_p^{(1)}$-ә дахил олар. Еләчә дә $\psi \in L_p^{(1)}$ исә вә λ ихтиjари һәгиги әдәддирсә, онда $\lambda\psi \in L_p^{(1)}$ олар. $\lambda\psi$ синфи λ-нын ψ-дән олан һәр бир функсиjаjа вурулмасы кими баша дүшүлүр, еләчә дә $\psi_1 + \psi_2$ чәми ψ_1 вә ψ_2-jә дахил олан функсијаларынын гаршылыглы чәмләриндән тәшкил олунур. Демәли $L_p^{(l)}$ хәтти фәзадыр.

$\psi \in L_p^{(l)}$ — олдугда бу функсијанын нормасы ашағыдакы кими тә'јин олунур.

$$\|\psi|_{L_p^{(l)}} = \left\{\int_D \sum_{P_1,P_l\,..\,P_l=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_l}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} dv\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (1)$$

ја да $x_1, x_2, \dots, x_n$ координатларына көрә симметрик олараг:

$$\|\psi\|_{L_p^{(l)}} = \left\{\int_D \sum_{\sum\limits_{\alpha=1}^{n} p_\alpha = l} \left[\frac{l!}{P_1!P_2!\dots P_n!}\left(\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} dv\right\}^{\frac{1}{p}} \qquad (2)$$

шәкилдә јазылыр. ψ синфинә дахил олан функсијалар еквивалент олдуғундан ψ-дән мүәјјән бир φ көтүрәрәк

$$\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} = \left\{\int_D \sum_{P_1,P_2,\dots,P_l=1}^{n} \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}} dv\right\}^{\frac{1}{p}}$$

кими јазаг. Бу гајда илә тә'јин олунмуш нормаја көрә $L_p^{(l)}$-нин нормалашмыш фәза олдуғуну көстәрәк. λ истәнилән һәгиги әдәддирсә, онда $\|\lambda\varphi\|$-нин тә'јининдән $\|\lambda\varphi\| = |\lambda|\cdot\|\varphi\|$ олмасы ашкардыр. $\|\varphi\| = 0$ олдугда φ-нин сыфра еквивалент олмасыны көстәрәк. Әкәр тәртиби $l-1$-дән чох олмајан полиномлар чохлуғуну S_l илә ишарә етсәк, онда ашкардыр ки, S_l, $L_p^{(l)}$-нин сыфры олар.

$P \in S_l$ оларса, бу полином ашағыдакы кими тә'јин олунур:

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{l-1} \sum_{\Sigma P_j = k} \alpha_{p_1,p_2,\dots,p_n l}\, x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_{nn}^{p}. \qquad (3)$$

S_l-ин тә'јининдән көрүндүјү кими, $\|S_l\|$ нормасы вә јахуд бу синфин бир елементи кими $\|\varphi\| = 0$ олар. Инди әксинә, көстәрәк ки, $\|\varphi\| = 0$ оларса, φ сыфра еквивалент олмагла $\varphi = 0$ олар.

$\|\varphi\|$-нин тә'јининдән көрүндүјү кими $\|\varphi\| = 0$ оларса, онда $\|\varphi\|$-нин ифадәсинә дахил олан бүтүн l-чи тәртиб үмумиләшмиш төрәмәләр сыфыр олар. Дикәр тәрәфдән билирик ки, орталашдырылмыш функсијаларын l-инчи тәртиб хүсуси төрәмәләри l-инчи тәртиб үмумиләшмиш хүсуси төрәмәләринин орталашдырылмыш функсиjаларына бәрабәр олар. φ-нин l-чи тәртиб хүсуси төрәмәләринин сыфыр олмасындан φ-нин орталашдырылмыш функсиjаларынын l-инчи тәртиб хүсуси төрәмәләри сыфыр олмагла белә функсиjа jә'ни, φ_h типли олар. $\|\varphi\|=0$-ы өдәjән функсиjа белә функсиjаларынын лимити кими тә'jин олундуғундан лимит функсиjада дәрәчәси $l-1$-дән чох олмаjан полином олар. Jә'ни $\|\varphi\|=0$ олдугда $\varphi=0$ олар. Бу мүлаһизәләрдән алырыг ки, $\|\varphi\|=0$ олмасы үчүн $\varphi=0$ олмасы зәрури вә кафидир.

Инди үчбучаг аксиомунун өдәнилдиjини көстәрәк. Онун үчүн әввәлчә Минковски бәрабәрсизлиjини тәтбиг едәк:

$$\sqrt{\sum\left(\frac{\partial^l\varphi_1}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}+\frac{\partial^l\varphi_2}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}\right)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum\left(\frac{\partial^l\varphi_1}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}\right)^2}+\sqrt{\sum\left(\frac{\partial l\varphi_2}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}\right)^2}. \tag{4}$$

Бу бәрабәрсизлиjә дахил олан чәмләр $\sum=\sum\limits_{P_1,P_2,\ldots,P_l=1}^{n}$ кими баша дүшүлүр. Бу бәрабәрсизлиjи нәзәрә алсаг:

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L_p^{(l)}}=\left\{\int\limits_D\left[\sum_{P_1,P_2\ldots,P_l=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}+\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\partial^2\varphi^2}{\partial x_{p_1}\partial x_{p^2}\ldots\partial x_{pl}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}dv\right\}^{\frac{1}{p}}\leqslant$$

$$\leqslant\left\{\int\limits_D\left[\sqrt{\sum\frac{\partial l\varphi_1}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}\right)^2}+\right.$$

$$\left.\left.+\sqrt{\frac{\partial l\,\varphi_2}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}\right)^2}\right]^p dv\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

олар. Биз jухарыда Минковски бәрабәрсизлиjини $p=2$ үчүн тәтбиг етмишдик. Инди (5) бәрабәрсизлиjинә p үчүн Минковски бәрабәрсизлиjини тәтбиг едәк. Беләликлә,

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L_p^{(l)}}\leqslant\left\{\int\limits_D\left[\sum_{p_1p_2,\ldots,P_l=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial^l\varphi_1}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}dv\right\}^{\frac{1}{p}}+$$

$$+\left\{\int\limits_D\left[\sum_{p_1,p_2\ldots p_l=1}^{n}\left(\frac{\partial^l\varphi_2}{\partial x_{p_1}\partial x_{p_2}\ldots\partial x_{p_l}}\right)^2\right]^{\frac{p}{2}}dv\right\}^{\frac{1}{p}} \tag{6}$$

нәтичәдә,

$$\|\varphi_1+\varphi_2\|_{L_p^{(l)}}\leqslant\|\varphi_1\|_{L_p^{(l)}}+\|\varphi_2\|_{L_p^{(l)}} \tag{7}$$

олмагла үчбучаг аксиомунун өдәнилдији көстәрилмәклә $L_p^{(l)}$-нин нормалашмыш фәза олдуғу алыны.

Инди исә $W_p^{(l)}$-ин нормалашма гајдасыны көстәрәк. Дәрәчәси $l-1$-дән чох олмајан полиномлар чохлуғуну S_l илә ишарә едәк. Ашкардыр ки, S_l $W_p^{(l)}$-нин алтфәзасыдыр. Фәрз едәк Q, $W_p^{(l)}$-дә верилмиш проjексиjалаjычы оператордур, jә'ни $\varphi\in W_p^{(l)}$ олан истәнилән елемент олдугда $Q^2\varphi=Q\varphi$ олур. Фәрз едәк ки, Q елә проjексиjалаjычы оператордур ки, Q $W_p^{(l)}$-ни S-ә проjексиjалаjыр. S_l $W_p^{(l)}$-ин алтфәзасы олдуғундан ашкардыр ки, Q оператору S_l үзәриндә өзүнү еjнилик оператор кими апарыр. $\varphi\in W_p^{(l)}$ фәрз едәрәк Q васитәсилә Q_1 операторуну тә'јин едәк; белә ки,

$$Q_1\varphi=\varphi-Q\varphi. \tag{8}$$

$Q^2=Q$ олдуғундан еләчә дә, $Q_1^2=Q_1$ олдуғу алынмагла Q_1-дә проjектор олур. Биз $W_p^{(l)}$-нин хәтти фәза олдуғуну көстәрмишик, еләчәдә $Q\varphi$ полином олдуғундан алырыг ки, $Q_1\varphi$ елементләр чохлуғу алтфәза тәшкил един. (8)-дән көрүндүјү кими әкәр $\varphi_0\in S_l$ оларса, онда

$$Q_1\,\varphi_0=\varphi_0-Q\,\varphi_0=\varphi_0-\varphi_0=0$$

олар. Бу она көстәрир ки, $L_p^{(i)}$ илә L_{pl} хәтти изоморфдурлар бурада L_{pl}, $Q_1\,\varphi$-шәклиндә олан елементләр чохлуғундан ибарәт олан фәза тәшкил един.

S_l-алтфәзасында ашағыдакы кими норма тә'јин едәк. Әкәр $P\in S_l$ оларса вә (3) бәрабәрлији кими тә'јин олунарса:

$$\|P\|_{S_l}^{p}=\sum_{k=0}^{l-1}\left\{\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n}p_j=k}\alpha^2_{p_1,p_2,\ldots,p_n}\frac{k!}{p_1!p_2!\ldots p_n!}\right\}^{\frac{p}{2}}. \tag{9}$$

Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $\|P\|$ норма аксиомларыны өдәјир. Доғрудан да λ истәнилән һәгиги әдәд олдугда $\|\lambda P\|=|\lambda|\;\|P\|$ олдуғу алыныр. $P=0$ олдугда әмсаллары сыфыр олмагла $\|P\|=0$ олур вә әксинә $\|P\|=0$ оларса, (9)-дан көрүндүјү кими,

$\beta_{p_1,p_2,..,p_n}$ әмсаллар сыфыр олмагла $P=0$ олур. Инди үчбучаг аксиомунун өдәнилдијини јохлајаг онун үчүн $P_1, P_2 \in S_l$ олсун; белә ки,

$$P_1=\sum_{k=0}^{l-1}\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=\kappa} \alpha^{(1)}_{p_1,p_2,..,p_n} x_1^{p_1} x_{p_2}^{p_2}\dots x_n^{p_n},$$

$$P_2=\sum_{\kappa=0}^{l-1}\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_{j}=\kappa} \alpha^{(2)}_{p_1p_2\dots p_n} x_1^{p_1} x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}.$$

Онда

$$\|P_1+P_2\|^p=\left\{\sum_{k=0}^{l-1}\left\{\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=k}\frac{k!}{p_1!,p_2!\dots p_n}\left[\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_n}+\alpha_{p_1p_2\dots p_n}\right]^2\right.\right\}^{\frac{p}{2}}$$

олар.

$\nu_\kappa=\dfrac{\kappa!}{p_1!p_2!\dots p_n!}$ чәкисинә көрә Минковски бәрабәрлији доғрудур. Она көрә дә

$$\|P_1+P_2\|^p\leqslant\sum_{\kappa=0}^{l-1}\left\{\left[\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=\kappa}\frac{\kappa!}{p_1!p_2!\dots p_n!}\left(\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{\kappa=0}^{l-1}\left\{\left[\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=\kappa}\frac{\kappa!}{p_1!p_2!\dots p_n!}\left(\alpha^{(?)}_{p_1p_2\dots p_n}{}^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^p.\right.$$

Бурадан исә,

$$\|P_1+P_2\|\leqslant\left\{\sum_{\kappa=0}^{l-1}\left[\left[\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=\kappa}\frac{\kappa!}{p_1!p_2!\dots p_n!}\left(\alpha^{(1)}_{p_1p_2\dots p_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left[\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=\kappa}\frac{\kappa!}{p_1!p_2!\dots p_n!}\left(\alpha^{(2)}_{p_1p_2\dots p_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right]^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Бу бәрабәрсизлијә $\nu_к$-чәкисинә көрә тәкрар Минковски бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк:

$$\|P_1+P_2\| \leqslant \left\{\sum_{к=0}^{n-1}\left[\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=к} \nu_к\left(\alpha^{(1)}_{p_1 p_2\ldots p_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\left\{\sum_{к=0}^{n-1}\left[\sum_{\sum\limits_{j=1}^{n} p_j=к} \nu_к\left(\alpha^{(2)}_{p_1\cdot p_2\cdot\cdot p_n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\right\}^{\frac{1}{p}}$$

олмагла

$$\|P_1+P_2\| \leqslant \|P_1\|+\|P_2\|$$

олдуғу алыныр. Беләликлә, S_l белә нормаја көрә нормалашмыш фәзадыр. Биз көстәрдик ки, $\varphi \in W_p^{(l)}$ һәр бир елемент

$$\varphi = Q\varphi + Q_1\varphi \tag{10}$$

шәклиндә көстәрилир, белә ки, $Q\varphi$ S_l-дән олмагла $Q_1\varphi$-јә $L_p^{(l)}$-дән ујғун елемент вардыр. Һәм $L_p^{(l)}$ вә һәм дә S_l нормалашмыш олдуғундан тәбии олараг $W_p^{(l)}$ фәзасында норма тә'јин етмәк олар, јә'ни $\varphi \in W_p^{(l)}$ олдугда,

$$\|\varphi\|^p_{W_p^{(l)}} = \|Q\varphi\|^p_{S_l} + \|Q_1\varphi\|^p_{L_p^{(l)}}$$

вә јахуд

$$\|\varphi\|^p_{W_p^{(l)}} = \|Q\varphi\|^p_{S_l} + \|\varphi\|^p_{L_p^{(l)}}.$$

$W_p^{(l)}$ бу гајда үзрә норма тәјин етдикдә $\|\cdot\|_{S_l}$ вә $\|\ \|_{L_p^{(l)}}$ нормаларынын хассәләриндән $\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}$ норма аксиомларыны өдәмәклә $W_p^{(l)}$ нормалашмыш фәза олар.

$W_p^{(l)}$-дә норма Q пројектору васитәсилә тә'јин олунмушдур; она көрә, бу норма Q пројекторундан асылы олур.

§ 7. ЕКВИВАЛЕНТ НОРМАЛАР

Фәрз едәк ки, Q' вә Q'' $W_p^{(l)}$-и S_l-ә ин'икас етдирән пројекторлардыр. Көстәрдијимиз кими, бу пројекторлар васитәсилә $W_p^{(l)}$-и нормалашдырмаг олар. Бу нормалары ујғун олараг $\|\varphi\|_1$ вә $\|\varphi\|_2$ илә ишарә едәк.

Тә'риф 1. $\|\varphi\|_1$ *вә* $\|\varphi\|_2$ *нормалары о заман еквивалент* *адланыр ки, елә сабит M_1 вә M_2 әдәдләри олсун ки, истәнилән $\varphi \in W_p^{(l)}$ φ функсијасы үчүн*

$$M_1 \leqslant \frac{\|\varphi\|_1}{\|\varphi\|_2} \leqslant M_2 \tag{1}$$

өдәнилсин.

$$Q\varphi = Q'\varphi - Q''\varphi \tag{2}$$

ишарә едәк.

$$Q_1\varphi = \varphi - Q'\varphi, \tag{3}$$

$$Q_2'\varphi = \varphi - Q''\varphi, \tag{4}$$

бурадан

$$Q'\varphi - Q''\varphi = \left(Q_2' - Q_1'\right)\varphi \tag{5}$$

$s \in S_l$ оларса,

$$Q_s = 0 \tag{6}$$

јә'ни, $s \in S_l$ олдугда

$$Q's = Q''s = s. \tag{7}$$

Бу ону көстәрир ки, Q васитәсилә $L_p^{(l)}$-дән олан мүәјјән синфин бүтүн функсијаларына гаршы S_l-дән ејни полинома гаршы гојулур. Еләчә дә, Q-нин тә'рифиндән

$$Q^2\varphi = 0 \tag{8}$$

олмасы ашкардыр. Доғрудан да $Q\varphi = s$.
Лакин $Qs = 0$ олдуғундан (8) өдәнилир.

Теорем 5. Q' вә Q'' проjекторлары васитәсилә тә'јин олунан $\|\varphi\|_1$ вә $\|\varphi\|_2$ нормаларынын еквивалент олмасы үчүн истәнилән $\varphi \in W_p^{(l)}$ функсијасы үчүн

$$\|Q\varphi\|_{S_l} \leqslant \mathbf{M}\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \tag{9}$$

өдәнилмәси зәрури вә һәм дә кафи шәртдир. Бурада М сабит әдәддир.

Исбаты. Шәртин зәрурилији. Исбат үчүн әксини фәрз едәк, јә'ни нормалар еквивалент олдуғу һалда (9) өдәнилмир. Онда $W_p^{(l)}$-јә дахил олан $\{\varphi_\text{к}\}$ сонсуз ардычыллығы вар ки,

$$\|Q\varphi_\text{к}\|_{S_l} > K\|\varphi_\text{к}\|_{L_p^{(l)}} \tag{10}$$

олар. Әкс һалда (9) өдәниләрди.

Үмумилији позмадан $\|\varphi_\text{к}\|_{L_p^{(l)}} = 1$ көтүрмәк олар. Она көрә дә

$$\|Q\varphi_\text{к}\|_{S_l} > K \tag{11}$$

олар.

$$w_\text{к} = \varphi_\text{к} - Q'\varphi_\text{к} \tag{12}$$

ишарә едәк. $w_\text{к}$-нын Q' васитәсилә нормасыны тә'јин едәк:

$$\|w_{к}\|_1^p = \|Q'\varphi_{к}\|_{S_l}^p + \|\varphi_{к}\|_{L_p^{(l)}}^p,$$

$$Q'w_{к} = Q'\varphi_{к} - Q'^2\varphi_{к} = 0.$$

Она көрә дә

$$\|w_{к}\|_1 = \|\varphi_{к}\|_{L_p^{(l)}}. \tag{13}$$

$$Q'\varphi_{к} = s, \quad Q''s = s$$

олдуғуна көрә

$$Q''Q'\varphi_{к} = Q'\varphi_{к}. \tag{14}$$

Инди $w_{к}$-нын Q'' васитәсилә нормасыны тә'јин едәк.

$$\|w_{к}\|_2 = \|Q''w_{к}\|_{S_l} + \|\varphi_{к}\|_{L_p^{(l)}} = \|Q''w_{к}\|_{S_l} + 1.$$

Бурада, $w_{к}$-нын (12) ифадәсини јазсаг

$$\|w_{к}\|_2 = 1 + \|Q'\varphi_{к} - Q''Q'\varphi_{к}\|_{S_l} \tag{15}$$

олар. Лакин (14) бәрабәрлијинә көрә, еләчә дә (2)-јә көрә

$$\|w_{к}\|_2 = 1 + \|Q''\varphi_{к} - Q\varphi_{к}\|_{S_l} = 1 + \|Q\varphi_{к}\|_{S_l}.$$

Нәһајәт (11)-ә көрә

$$\|w_{к}\|_2 > 1 + к$$

өдәнилир. $\|w_{к}\|_1 = 1$ олдуғуна көрә $к \to \infty$ олдугда

$$\frac{\|w_{к}\|_2}{\|w_{к}\|_1} \longrightarrow \infty,$$

бу исә нормаларын еквивалент олмасына зидд олмагла (9)-ун өдәнилдијини көстәрир.

Шәртин кафилији. (9) өдәнилдијини фәрз едәрәк (1) өдәнилмәсини исбат едәк. Әввәлчә, $\|\varphi\|_1$-и, $\|\varphi\|_2$-јә көрә гијмәтләндирәк:

$$\|\varphi\|_1 = \|Q'\varphi\|_{S_l} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} = \|Q'\varphi - Q''\varphi + Q''\varphi\|_{S_l} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant$$
$$\leqslant \|Q'\varphi - Q''\varphi\|_{S_l} + \|Q''\varphi\|_{S_l} + \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}.$$

(9) бәрабәрсизлијинә көрә, бурадан

$$\|\varphi\|_1 \leqslant \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} + \|Q''\varphi\|_{S_l} + M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} =$$
$$= (M+1)\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} + \|Q''\varphi\|_{S_l}$$

она көрә дә,

$$\|\varphi\|_1 \leqslant (M+1)\left[\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} + \|Q''\varphi\|_{S_l}\right]$$

$$\|\varphi\|_2 = \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} + \|Q''\varphi\|_{S_l}$$

олдуғундан сонунчу ифадәдән

$$\|\varphi\|_1 \leqslant (M+1)\|\varphi\|_2. \qquad (16)$$

Еіни гаіда үзрә

$$\|\varphi\|_2 < (M+1)\|\varphi\|_1 \qquad (17)$$

олдуғу көстәриләр. Бу ики бәрабәрсизликдән $\|\varphi\|_1$ вә $\|\varphi\|_2$ нормаларынын еквивалент олмалары алынмагла кафи шәрт вә теорем исбат олунур.

Q операторуну ашағыдакы кими чевирәк:

$$Q\varphi = Q'\varphi - Q''\varphi = Q'\varphi - QQ'\varphi = Q'(\varphi - Q''\varphi) = Q'Q_2'\varphi.$$

Демәли

$$Q\varphi = Q'Q_2'\varphi. \qquad (18)$$

Еләчә дә

$$Q\varphi = Q''Q_1'\varphi \qquad (19)$$

олдуғуну көстәрмәк олар.

Нәтичә. $\|\varphi\|_1$ вә $\|\varphi\|_2$ нормаларынын еквивалент олмасы үчүн $\varphi \in W_p^{(l)}$ олан истәнилән φ үчүн

$$\|Q\varphi\|_{S_l} \leqslant M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}},$$

$$\|Q'Q_2'\varphi\|_{S_l} \leqslant M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}},$$

$$\|Q''Q_1'\varphi\| \leqslant M\|\varphi\|_{L_p^{(l)}}$$

шәртләринин һәр һансы биринин өдәнилмәси зәрури вә кафидир.

§ 8. $W_p^{(l)}$ ФӘЗАСЫНЫН ХҮСУСИ КӨСТӘРИЛИШИ

Соболев $W_p^{(l)}$ фәзасынын хүсуси интеграл көстәрилишини вермишдир ки, бир чох мүһүм мәсәләләрин һәллиндә кениш тәтбигата маликдир. $W_p^{(l)}$-ин бу чүр көстәрилиши мүәјјән проіексијалајычы оператор илә әлагәдардыр. Биз бу параграфда $W_p^{(l)}$-ин гејд етдијимиз интегралла көстәрилишини верәчәјик.

Фәрз едәк ки, D, n-өлчүлү фәзада верилмиш мәһдуд бир әлагәли областдыр. Белә ки, D-нин дахилиндә мәркәзи координат башланғычы вә радиусу R олан елә S_R күрәси вар ки, һәмин област бу күрәнин истәнилән нөгтәсинә көрә улдузваридир, јә'ни $M \in S_R$ оларса, бу нөгтәдән кечән һәр бир дүз хәтт D-нин сәрһәди илә бир нөгтәдә кәсишир. P вә Q-нү D-нин ихтијари ики нөгтәсини көтүрәрәк $\vec{e}$ ваһид векторуну тә'јин едәк:

$$\vec{e} = \frac{\vec{Q} - \vec{P}}{r}. \qquad (1)$$

Белә ки, $r = |\vec{Q} - \vec{P}|$. Әкәр $w(\vec{P}, \vec{Q})$, D областында верилмиш функсија исә, онда (1)-дән $\vec{Q} = \vec{P} + r\vec{e}$ олмагла $w(\vec{P}, \vec{Q})$-нү ашағыдакы кими јазмаг олар:

$$w(\vec{P}, \vec{Q}) = w(\vec{P}, \vec{P} + r\vec{e}) = w_1(r, \vec{e}, \vec{P}). \tag{2}$$

Бурадан көрүндүјү кими, $w(\vec{P}, \vec{Q})$ функсијасы $w_1(r, \vec{e}, \vec{P})$ шәклиндә вә әксинә көстәрмәк олар. Ашағыдакы функсијаны тә'јин едәк:

$$v(\vec{Q}) = \begin{cases} e^{\frac{R_1^2}{R_1^2 - R^2}} & R_1 < R \text{ олдугда,} \\ 0 & R_1 \geqslant R \text{ олдугда.} \end{cases}$$

Белә ки, R_1, 0 илә Q арасында олан мәсафәдир. Бу функсијанын тә'јининдән көрүндүјү кими, $v(\vec{Q})$-нүн истәнилән тәртибдән кәсилмәз төрәмәләри олмагла, јалныз S_R-ин дахилиндә сыфырдан фәрглидир. $\vec{P}$ вә $\vec{Q}$ нөгтәләриндән асылы вә ашағыдакы бәрабәрликлә тә'јин олунан функсијаны көтүрәк:

$$U(r, \vec{e}, \vec{p}) = -\int_r^\infty v(r_1, \vec{e}, \vec{p}) r_1^{n-1}\, dr_1, \tag{3}$$

бурада U вә v функсијалары $\vec{P}$ вә $\vec{Q}$-нин функсијалары олмагла $\vec{Q} = \vec{p} + r\vec{e}$ илә әвәз олмагла (3)-ә дахил олан шәкилдә ифадә олунмушдур. (3)-ә дахил олан интеграл нәтичәдә сонлу област васитәсилә ифадә олунур. Бу v-нин хассәсиндән ашкардыр. P-ни D-нин гејд олунмуш нөгтәси гәбул едәрәк, тәпәси бу нөгтәдә вә S_R-ә тохунан конусу K_p илә ишарә едәк. Гејд едәк ки, D-нин S_R-ә көрә улдузварилик хассәсиндән алырыг ки, K_p тамамилә D-јә дахил олар. Асанлыгла көстәрмәк олар ки, $U(r, \vec{e}, \vec{p})$ јалныз K_p-нин дахилиндә сыфырдан фәрглидир. Әкәр һәр һансы бир истигамәт күрәни кәсмирсә, онда бу истигамәт үзрә $v = 0$ олдуғундан $U(r, \vec{e}, \vec{p}) = 0$ олар. Әкәр Q, S_R-дән харичдә олмагла K_p үзәриндә олан мүәјјән истигамәт үзәриндә олан нөгтә исә, $r_1 > r$-олдугда, јенә дә $v = 0$ олмасындан вә һәмчинин $v(\vec{Q})$-нүн истәнилән тәртибдән кәсилмәз хүсуси төрәмәләри олдуғундан $U(r, \vec{e}, \vec{p})$, функсијасы ејни хассәјә маликдир. Инди $U(r, \vec{e}, \vec{p})$ функсијасы васитәсилә $W(r, \vec{e}, \vec{p})$ функсијасыны тә'јин едәк:

$$W(r, \vec{e}, \vec{p}) = \frac{1}{(l-1)!} r^{l-1} U(r, \vec{e}, \vec{p}). \tag{4}$$

Фәрз едәк ки, $\varphi(Q)$, D областында l тәртибә гәдәр l дахил олмаг шәртилә кәсилмәз төрәмәләри олан функсијадыр. $\varphi(\overrightarrow{Q})=\varphi(r,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})$ вә $W(r,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})$ функсијалары васитәсилә

$$\Phi(r,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})=\sum_{k=0}^{l-1}(-1)^k\frac{\partial^k\varphi}{\partial r^k}\cdot\frac{\partial^{l-1-k}W}{\partial r^{l-1-k}} \tag{5}$$

функсијасыны тә'јин едәк. Бу бәрабәрликдән ашкардыр ки,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\varphi\frac{\partial^l W}{\partial r^l}+(-1)^{l-1}W\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l} \tag{6}$$

олар. (4) ифадәсинә r^{l-1} вуруғунун һесабына

$$\left(\frac{\partial^j W}{\partial r^j}\right)_{r=0}=0 \qquad (j=\overline{0,\ l-2}) \tag{7}$$

бәрабәрликләри өдәниләр. W-нин $r=0$ олдугда $l-1$ тәртибдән төрәмәсини алсаг, (7) бәрабәрликләринә көрә

$$\frac{\partial^{l-1}W}{\partial r^{l-1}}=U(0,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p},) \tag{8}$$

олар. Лакин (1)-дән

$$U(0,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})=-\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})r_1^{n-1}\,dr_1 \tag{9}$$

олдуғундан (8) вә (9)-а көрә

$$\left(\frac{\partial^{l-1}W}{\partial r^{l-1}}\right)_{r=0}=-\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})r_1^{n-1}\,dr_1 \tag{10}$$

(5)-дән

$$\Phi(0,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})=\varphi(\overrightarrow{p})\left[\frac{\partial^{l-1}W}{\partial r^{l-1}}\right]_{r=0} \tag{11}$$

олдуғундан исә (10) вә (11)-дән

$$\Phi(0,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})=-\varphi(\overrightarrow{p})\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})r_1^{n-1}dr_1. \tag{12}$$

(7)-јә көрә, һәмчинин $\Phi(\infty,\overrightarrow{e},\overrightarrow{p})=0$ олмагла (12) алыныр. (6) бәрабәрлијинин һәр тәрәфини 0-дан ∞-а гәдәр интеграллајаг:

$$\int_0^\infty\frac{\partial\Phi}{\partial r}\,dr=\int_0^\infty\left[\varphi\frac{\partial^l W}{\partial r^l}+(-1)^{l-1}W\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l}\right]dr. \tag{13}$$

(12) вә (13)-ү нәзәрә алсаг, бурадан

$$\varphi(\vec{p})\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e,p})r_l^{n-1}\,dr_1=\int_0^\infty\left[\varphi\frac{\partial^l W}{\partial r^l}+(-1)^{l-1}W\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l}\right]dr. \qquad (14)$$

(13)-үн һәр тәрәфини $dw_{\vec{l}}$-јә вурараг ваһид радиуслу σ-сферасы үзрә интеграллајаг:

$$\varphi(\vec{p})\int_\sigma dw_{\vec{l}}\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e,p})r_l^{n-1}\,dr_1=\int_\sigma dw_{\vec{l}}\int_0^\infty\left[\varphi\frac{\partial^l W}{\partial r^l}+\right.$$

$$\left.+(-1)^{l-1}W\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l}\right]dr, \qquad (15)$$

$r_1^{n-1}dr_1dw_{\vec{l}}=dv_{\vec{Q}}$ олдуғундан бурадан

$$\int_\sigma dw_{\vec{l}}\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e,p})\,r_l^{n-1}\,dr_1=\int_{R_1\leqslant R}v(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}}. \qquad (16)$$

$$\int_{R_1\leqslant R}u(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}}=\varkappa \qquad (17)$$

ишарә етсәк, онда (15)-дән

$$\varphi(\vec{p})=\frac{1}{\varkappa}\int_\sigma dw_{\vec{l}}\int_0^\infty\left[\varphi\frac{\partial^l W}{\partial r^l}+(-1)^{l-1}W\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l}\right]dr \qquad (18)$$

вә јахуд да, бурадан

$$\varphi(\vec{p})=\frac{1}{\varkappa}\int_D\varphi\frac{\partial^l W}{\partial r^l}+\frac{(-1)^{l-1}}{\varkappa}\int_D W\frac{\partial^l\varphi}{\partial r^l}\frac{1}{r^{n-1}}\,dv_{\vec{Q}}\cdot \qquad (19)$$

Демәли, биз нәтичәдә көстәрдик ки, $l-1$ дахил олмаг шәртилә $\varphi(\vec{p})$-нин $l-1$ тәртибә гәдәр кәсилмәз хүсуси төрәмәләри варса, онда $\varphi(\vec{p})$ (19) шәклиндә көстәрилир. Инди (19)-а дахил олан интегралларын бир нечә хассәләрини гејд едәк. Әввәлчә (19)-а дахил олан биринчи интегралын $\vec{p}$-нин $x_j(j=\overline{1,n})$ координатларына көрә $(l-1)$ дәрәчәдән полином олдуғуну көстәрәк. (3) вә (4) ифадәләринә көрә $\frac{\partial^l W}{\partial r^l}$ төрәмәсини һесабласаг, онда

$$\frac{\partial^l W}{\partial r^l}=-\sum_{\kappa=1}^{l}\alpha_\kappa\frac{\partial^{l-\kappa}r^{l-1}}{\partial r^{1-\kappa}}\cdot\frac{\partial^\kappa}{\partial r^\kappa}\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e,p})r_1^{n-1}\,dr_1. \qquad (20)$$

Лакин

$$\frac{\partial}{\partial r}\int_0^\infty v(r_1,\overrightarrow{e,p})\,r_1^{n-1}\,dr_1=\left[v(r_1,\overrightarrow{e,p})\,r_1^{n-1}\right]_r^\infty=$$

$$= - v(r, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{p}) r^{n-1}, \tag{21}$$

$$\alpha^{\kappa} \frac{\partial^{l-\kappa} r^{l-1}}{\partial r^{l-\kappa}} = \beta_{\kappa} r^{\kappa-1} \tag{22}$$

олдуғундан

$$\frac{\partial^l W}{\partial r^l} = \sum_{\kappa=1}^{l} \beta_{\kappa} r^{\kappa-1} \frac{\partial^{\kappa-1}}{\partial r^{\kappa-1}} \left[r^{n-1} v(r, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{p}) \right], \tag{23}$$

нәһајәт,

$$\frac{\partial^l W}{\partial r^l} = \sum_{\kappa=1}^{l} \sum_{j=1}^{\kappa-1} \gamma_{\kappa,j} r^{n-1+j} \frac{\partial^j v(r, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{p})}{dr^j} \tag{24}$$

олар. Белә ки, α_{κ}, β_{κ}, $\gamma_{\kappa,j}$ көстәрилән индексләрә көрә мүәјјән сабит әдәдләрдир. $\overrightarrow{Q}$-нүн координатлары $y_j (j = \overline{1,n})$ оларса вә $v(r, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{p}) = v(\overrightarrow{Q})$ олдуғуну нәзәрә алсаг:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial y_j} \frac{y_j - x_j}{r} \tag{25}$$

олар. Бурадан ардычыл төрәмәләр алмагла асанлыгла көстәрмәк олар ки:

$$\frac{\partial^j v}{\partial r^j} = \sum_{P_1, P_2, \ldots, P_j = 1}^{n} \frac{\partial^j v}{\partial y_{p_1} \partial y_{p_2} \ldots \partial y_{pj}} \sigma_{p_1} \cdot \sigma_{p_2} \cdot \ldots \sigma_j . \tag{26}$$

Белә ки,

$$\sigma_{pj} = \frac{y_{p_j} - x_{p_j}}{r} \tag{27}$$

вә јахуд да, (26)-дан

$$\frac{\partial^j v}{\partial r^j} = \sum_{\Sigma P j = j} \mu_{p_1, p_2, \ldots, p_n} \frac{\partial^j v}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \ldots \partial y_n^{p_n}} (y_1 - x_1)^{p} (y_2 - x_2)^{p_2} \ldots \times$$

$$\times \ldots (y_n - x_n)^{P_n} . \tag{28}$$

(26)-ја көрә (24)-дән

$$\frac{\partial^l W}{\partial r l} = r^{n-1} \sum_{\Sigma P_j \leqslant l-1} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} f_{p_1 p_2 \ldots, p_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{29}$$

олдуғу алыныр. Белә ки, $f_{p_1, p_2, \ldots, p_n}(y_1, y_2, \ldots y_n)$ мүәјјән кәсилмәз вә мәһдуд функсијалардыр. Она көрә дә,

$$\frac{1}{\varkappa}\int\limits_D \varphi \frac{{}^l W}{\partial r l} \frac{1 \cdot \varkappa}{r^{n-1}} dv_{Q} = \frac{1}{x}\int\limits_D \varphi(\vec{Q}) \left(\sum_{\Sigma p_j \leqslant l-1} x_{1l}^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n} \underset{p_1 p_2 \dots p_n}{f(\vec{Q})} \right) dv_{\vec{Q}} =$$

$$= \sum_{\Sigma p_j \leqslant l-1} m_{p_1,\, p_2 \dots p_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$$

белә ки,

$$m_{p_1, p_2, \dots, p_n} = \frac{1}{\varkappa} \int\limits_D \varphi(\vec{Q}) \underset{p_1, p_2 \dots p_n}{f(\vec{Q})}\, dv_{\vec{Q}}.$$

Беләликлә,

$$\frac{1}{\varkappa}\int\limits_D \varphi \frac{\partial^l W}{\partial r^l} \cdot \frac{1}{r^{n-1}}\, dv_{\vec{Q}} = \sum_{\Sigma p_l \leqslant l-1} m_{p_1, p_2, \dots, p_n} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \tag{30}$$

олмагла бу интегралын $l-1$ дәрәчәдән полином олдуғу көстәрилир:

$$Q\varphi = \frac{1}{\varkappa}\int\limits_D \varphi \frac{\partial^l W}{\partial r^l} r^{n-1} dv_{\vec{Q}}. \tag{31}$$

Әкәр (19)-а дахил олан φ-нин әвәзинә дәрәчәси $l-1$ олан полином исә, онда бу бәрабәрлијә дахил олан икинчи интеграл сыфыр олар. Она көрә дә Q оператору дәрәчәси $l-1$ олан һәр бир полиному өзү-өзүнә чевирир. Демәли, Q пројексијалајычы оператордур. Инди (19)-а дахил олан икинчи интегралы тәдгиг едәк. $\frac{\partial v}{\partial r}$-ин төрәмәләрини $y_j (j = 1,n)$ аргументләринә көрә тә'јин етдијимиз гајда үзрә

$$\frac{\partial_l \varphi}{\partial r^l} = \sum_{\Sigma p_j \leqslant l} d_{p_1, p_2, \dots, p_n} \frac{(y_1 - x_1)^{p_1} (y_2 - x_2)^{p_2} (y_n - x_n)^{p_n}}{r^l} \cdot \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \dots \partial y_n^{p_n}}. \tag{32}$$

Она көрә дә, $\frac{1}{r^{n-1}} W \frac{\partial^l \varphi}{\partial r^l}$ ашағыдакы кими јазылар:

$$\frac{1}{r^{n-1}} W \frac{\partial^l \varphi}{\partial r^l} \doteq \sum_{\Sigma p_j \leqslant l} a_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\vec{Q}, \vec{p}) \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \dots \partial y_n^{p_n}}. \tag{33}$$

Белә ки,

$$a_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\vec{Q}, \vec{P}) = \frac{1}{r^{n-l}} \left[b_{p_1, p_2, \dots, p_n} \partial_1^{p_1} \partial_2^{p_2} \dots \partial_n^{p_n} v(r, \vec{e}, \vec{p}) \right].$$

Бурада, $b_{p_1, p_2, \dots, p_n}$ мүәјјән сабит әдәдләрдир вә јахуд да,

$$a_{p_1, p_2, \dots, p_n}(\vec{Q}, \vec{P}) = \frac{1}{r^{n-l}} T_{p_1, p_2, \dots, p_n}(r, \vec{e}, \vec{p}) \tag{34}$$

кими көстәриләр.

Бура дахил олан $T_{p_1, p_2, \dots, p_n}(r, \vec{e}, \vec{p})$ функсијалары өз аргументләринә көрә, јә'ни P вә Q-јә көрә истәнилән тәртибдән төрәмәләри олан мәһдуд функсијалардыр. Беләликлә, (19)-а дахил олан икинчи интегралы $Q_1 \varphi$ илә ишарә етсәк, јә'ни

$$Q_1\varphi = \frac{(-1)^{l-1}}{\varkappa} \int\limits_D W \frac{\partial^l \varphi}{\partial r^l} \cdot \frac{1}{r^{n-1}} \, dv_{\vec{Q}};$$

вә јахуд

$$Q_1 \varphi = \int\limits_D \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma P_1 \leqslant l} T_{p_1 . p_2, \ldots p_n}(\vec{Q}, \vec{P}) \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \ldots \partial x_n^{p_n}} \, dv_{\vec{Q}}.$$

Әкәр $\frac{1}{\varkappa}$-ны $f_{p_1 p_2 .. p_n}(\vec{Q})$ функсијасына вурараг $\xi_{p_1 p_2 ,, p_n}(\vec{Q})$ илә ишарә етсәк, еләчә дә $\frac{(-1)^{l-1}}{\varkappa}$-ны $T_{p_1 p_2 .. p_n}(\vec{Q}, \vec{P})$-јә вурараг $W_{p_1 p_2 \ldots p_n}(\vec{Q}, \vec{p})$ ишарә етсәк:

$$\varphi(p) = Q\varphi + Q_1\varphi \tag{35}$$

вә јахуд да,

$$\varphi(p) = \sum_{\Sigma p_j \leqslant l-1} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \int\limits_D \xi_{p_1 p_2 .. p_n}(\vec{Q}) \varphi(\vec{Q}) \, d_{\vec{Q}} +$$

$$+ \int\limits_D \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma P_j \leqslant l} W_{p_1 p_2 .. p_n}(\vec{Q}, \vec{P}) \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} .. \partial y_n^{p_n}} \, dv_{\vec{Q}}. \tag{36}$$

Апарылан тәдгигат нәтичәсиндә ашағыдакы нәтичәни алырыг Әкәр $\varphi(Q)$, D областында $l-1$ дахил олмагла $l-1$ гәдәр кәсилмәз төрәмәләри олан функсија исә, онда $\varphi(Q)$ (36) шәклиндә көстәриләр. Белә ки, $Q\varphi$, x_j $(j = \overline{1,n})$ координатларына көрә $l-1$ дәрәчәдән полином олмагла, Q-пројексијалајычы оператордур. $Q_1\varphi$-интеграл оператор олмагла $W_{p_1 p_2 \ldots p_n}(\vec{Q}, \vec{P})$ истәнилән тәртибдән хүсуси төрәмәләри олан мәһдуд функсијалардыр. Инди (36)-нын $\varphi \in W_p^{(l)}$ олан истәнилән функсија үчүн өдәнилдијини көстәрәк. Онун үчүн φ-нин орталашдырычы функсијасыны φ_h илә ишарә едәк. Онда бу функсија үчүн (36) доғру олар, јә'ни

$$\varphi_h(p) = \sum_{\Sigma P_j \leqslant l-1} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \int\limits_D \xi_{p_1 p_2 \ldots p_n}(\vec{Q}) \varphi_h(\vec{Q}) \, dv_{\vec{Q}} +$$

$$+ \int\limits_D \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma P_j = l} W_{p_1 p_2 \ldots p_n}(\vec{Q}, \vec{P}) \frac{\partial^t \varphi h}{\partial y_1^{p} \, \partial y_2^{p_2} \ldots \partial y_n^{p_n}} \, dv_{\vec{Q}} \tag{37}$$

олар.

Исбат етдијимиз кими $h \longrightarrow 0$ олдугда

$$\left\| \frac{\partial^t \varphi h}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \ldots \partial y_n^{p_n}} - \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \ldots \partial y_n^{p_n}} \right\|_{L_p} \to 0$$

еләчә дә, $h \to 0$ олдугда $\int\limits_D \xi_{p_1p_2\ldots p_n}(\vec{Q})\varphi_h(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}}$ интегралы мүнтәзәм олараг $\int\limits_D \xi_{p_1p_2\ldots p_n}(\vec{Q})\varphi(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}}$ интегралына јығылыр.

$\lambda = n - l$ илә ишарә едәк. $lp > n$ оларса, $\lambda < n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ олар. Онда көстәрмишдик ки, (37)-ин сағ тәрәфинә дахил олан икинчи интеграл кәсилмәз олмагла $h \to 0$ олдугда

$$\int\limits_D \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma p_1 = l} W_{p_1p_2\ldots p_n}(\vec{Q}, \vec{P}) \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \ldots \partial y_n^{p_n}}\, dv_{\vec{Q}}$$

интегралына мүнтәзәм јығылыр. Онда $\varphi_h \to \varphi$ кәсилмәз олмагла

$$\varphi = \sum_{\Sigma p_j \leqslant l-1} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n} \int\limits_D \xi_{p_1p_2\ldots p_n}(\vec{Q})\, \varphi(\vec{Q})\, dv_{\vec{Q}} +$$

$$+ \int\limits_D \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma p_j = l} W_{p_1p_2\ldots p_n}(\vec{Q}), \vec{p}) \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \ldots \partial y_n^{p_n}}\, dv_{\vec{Q}} \qquad (38)$$

D областынын истәнилән нөгтәсиндә өдәнилир. Әкәр $l_p < n$ оларса, онда $\lambda = n - l > n\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ олмагла $s > n - lp$ оларса, онда

$$\int\limits_D \frac{1}{r^{n-l}} \sum_{\Sigma p_j = l} W_{p_1p_2\ldots p_n}(\vec{Q}, \vec{P}) \frac{\partial^l \varphi}{\partial y_1^{p_1} \partial y_2^{p_2} \ldots \partial y_n^{p_n}} \qquad (39)$$

L_{q^*}-јә дахил олар. Белә ки, $q^* < \frac{sp}{n - lp}$ әлавә олараг (37)-нин сағ тәрәфинә дахил олан икинчи интеграл D областында (39)-а јығылыр. Беләликлә, (38) илә тә'јин олунан $\varphi \in L_{q^*}$ олмагла (38) D-нин санки бүтүн нөгтәләриндә өдәнилир.

Бу гејд етдикләримиздән алырыг ки, (38) $\varphi \in W_p^{(l)}$ олан истәнилән φ үчүн өдәнилир. Бу бәрабәрликдән истифадә едәрәк ики тәклифин доғрулуғуну көстәрәк.

§ 9. ДАХИЛ ОЛМА ТЕОРЕМЛӘРИ

$W_p^{(l)}$-нин C-јә дахил олмасы ашағыдакы кими тә'риф олунур.

Теорем 6. $\varphi \in W_p^{(l)}$ исә вә $n < lp$ өдәнилирсә, онда φ кәсилмәз олмагла

$$\|\varphi\| \leqslant M \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \qquad (1)$$

өдәнилир.

Исбаты. $n < lp$ олдугда φ-нин кәсилмәз олдуғуну көстәрмишдик. Инди (1)-ин өдәнилдијини исбат едәк. D областы мәһдуд олдуғундан max $|x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}| = M_1$ олсун $\Sigma p_j \leqslant l-1$ нәзәрә алараг $(x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n})$-ин сајыны M_2 илә ишарә едәк вә нәһајәт,

$$a_{p_1p_2\dots p_n} = \int_D \xi_{p_1p_2\dots p_n}(\vec{Q})\varphi(\vec{Q})\,dv_{\vec{Q}}$$

ишарә едәрәк

$$S = \sum_{\Sigma p_j\leqslant l} a_{p_1p_2\dots p_n}\, x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}\text{-ни гијмәтләндирәк.}$$

$|S|\leqslant M_1\sum_{\nu-0}^{j-1}\sum_{\Sigma p_j=j} |a_{p_1p_2\dots p_n}|$ олдуғундан Һөлдер бәрабәрсизлијини тәтбиг етсәк:

$$|S|\leqslant A\sum_{\nu=0}^{l-1}\sum_{\Sigma p_j=0}\left(\frac{\nu!}{p_1!\,p_2!\dots p_n^!}\right)^{\frac{1}{2}}|a_{p_1p_2\dots p_n}|\leqslant$$

$$\leqslant M_1\sqrt{M_2}\sum_{\nu=0}^{l-1}\left(\sum_{\Sigma p_j=\nu}\frac{\nu!}{p_1!\,p_2!\dots p_n^!}|a_{p_1p_2\dots p^!}|^2\right)^{\frac{1}{2}} < C_1\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}.$$

Беләликлә,

$$|S| < C_1\,|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \tag{2}$$

олур. Еләчә дә, max $|W_{p_1p_2\dots p_n}| = M_3$ ишарә едәрәк

$$J = \int_D \frac{1}{r^{n-l}}\sum_{\Sigma p_j=l} W_{p_1p_2\dots p_n}(\vec{Q},\vec{P})\,\frac{\partial^l\varphi}{\partial y_1^{p_1}\,\partial y_2^{p_2}\dots\partial y_n^{p_n}}\,dv_{\vec{Q}}$$

интегралыны гијмәтләндирәк.

$\frac{d^l\varphi}{\partial y_1^{p_1}\,\partial y_2^{p_2}\dots\partial y_n^{p_n}}\in L_p$ олдуғундан потенсиал типли интегралын хассәсинә көрә

$$|J|\leqslant C_2C_3\|\sum_{\Sigma p_j=l}\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}\Big\|_{L_p^{(l)}}$$

бурадан исә,

$$|J|\leqslant C_2C_3\sum_{\Sigma p_j=l}\left\|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{p_1}\,\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}\right\|_{L_p^{(1)}}.$$

Лакин

$$\left\|\frac{\partial l\varphi}{\partial x_2^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}\right\|_{L_p^{(l)}} \leqslant \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \text{ олдуғундан}$$

$$|J| \leqslant C_4\|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \tag{3}$$

олар. C_i $(i = \overline{1,4})$ сабит мүсбәт әдәдләрдир.

(2) вә (3)-дән (1)-ин өдәнилдији алыныр.

$W_p^{(l)}$-ин L_{q^*}-јә дахил олмасы ашағыдакы кими тә'риф олунур.

Теорем 7. $\varphi \in W_p^{(l)}$, $n \geqslant lp$ оларса, өлчүсү $s > n - lp$ олан бәрабәрсизлијини өдәјән истәнилән һипермүстәвидә $\varphi \in L_{q^*}$ олгр. Белә ки, $q^* < q = \frac{sp}{n-lp}$ вә

$$\|\varphi\|_{L_{q^*}} \leqslant M\|\varphi\|_{W_p^{(l)}} \tag{4}$$

бәрабәрсизлији өдәниләр.

Исбаты. Биз $n \geqslant lp$ шәрти дахилиндә φ-нин L_{q^*}-јә дахил олмасыны көстәрмишдик. Инди (4)-үн өдәнилдијини көстәрәк. (38)-јә дахил олан интеграллары ујғун олараг J_1 вә J_2 илә ишарә етсәк.

$$\varphi = J_1 + J_2 \tag{5}$$

олар. Бурадан,

$$\|\varphi\|_{L_{q^*}} \leqslant \|J_1\|_{L_{q^*}} + \|J_2\|_{L_{q^*}}. \tag{6}$$

Еләчә дә, D-нин мәһдуд олдуғуну нәзәрә алсаг,

$$N = \max\|x_1^{p_1}x_2^{p_2}\dots x_n^{p_n}\|_{L_{q^*}} \tag{7}$$

ишарә едәк. Бундан габагкы теоремин исбатында олдуғу кими

$$\|J_1\|_{L_{q^*}} \leqslant C_5\|\varphi\|_{W_p^{(l)}}. \tag{8}$$

Инди $\max|W_{p_1p_2\dots p_n}| = C_6$ илә ишарә едәк.

$\lambda = n - l$ гәбул едәк. J_2-нин интегралыны гијмәтләндирәк:

$$\|J_2\|_{L_{q^*}} \leqslant C_6\sum_{\Sigma p_j = l}\left\|\int_D \frac{1}{r^{n-l}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_2^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}\right| dv_p\right\|_{L_{q^*}},$$

потенсиал типли интегралын хассәсинә көрә

$$\left\|\int_D \frac{1}{r^{n-l}}\left|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots\partial x_n^{p_n}}\right| dv_Q\right\| \leqslant$$

$$\leqslant C_7\cdot\left\|\frac{\partial^l\varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2}\dots,\partial x_n^{p_n}}\right\|_{L_p^{(l)}}.$$

Она көрә дә,

$$\|J_2\|_{L_{q^*}} \leqslant C_6 C_7 \sum_{\Sigma p_j - l} \left\| \frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{p_1}\, \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right\|_{L_p^{(l)}}.$$

Бурадан, $\frac{\partial^l \varphi}{\partial x_1^{p_1}\, \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}$ төрәмәләринин сајы сонлу олдуғундан вә

$$\left\| \frac{\partial \varphi,}{\partial x_1^{p_1}\, \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}} \right\|_{L_d^{(l)}} \leqslant \|\varphi\|_{L_p^{(l)}}$$

бәрабәрсизлијини нәзәрә алсаг

$$\|J_2\| \leqslant C_8 \|\varphi\|_{L_p^{(l)}} \leqslant C_8 \|\varphi|_{W_p^{(l)}}. \tag{9}$$

(8) вә (9) бәрабәрсизликләринә көрә (6)-дан

$$|\varphi\|_{L_{q^*}} \leqslant C_5 \|\varphi\|_{W_p^{(l)}} + C_8 \|\varphi\|_{W_p^{(l)}}$$

вә јахуд да $C_5 + C_8 = M$ ишарә етсәк, (4)-үн өдәнилдији алынмагла теорем исбат олунур.

Бу фәсил бу теоремләрлә тамамланыр. Үмумиләшмиш төрәмәләр нәзәријјәси хүсусән дахил олма теоремләри истәр даһа мүрәккәб типли областлар вә истәрсә дә кениш синиф тәшкил едән функсијалар үчүн үмумиләшдириләрәк, олдугча гијмәтли нәтичәләр алынмышдыр.

ӘДӘБИЈЈАТ

1. Гельфанд И. М. Лекции по линейной алгебре. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1971.

2. Данфорд Н., Шварц Дж. Г. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.

3. Данфорд Н., Шварц Дж. Г. Линейные операторы. Спектральная теория. «Мир», 1966.

4. Иосида К. Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.

5. Контарович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа, М., «Наука», 1972.

7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.

8. Ловитт У. В. Линейные интегральные уравнения. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957.

9. Наймарк М. А. Нормирование кольца. М., «Наука», 1968.

10. Плеснер А. И. Спектральная теория линейных операторов. М., «Наука», 1965.

11. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., ИЛ, 1954.

12. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издательство Сибирского отделения АН СССР, 1962.

13. Смирнов В. И. Курс высшей математики, том V, М., Физматгиз, 1959.

14. Хилле К., Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. М., ИЛ, 1962.

15. Халилов З. И. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Баку, 1949.

16. Хермандер Л. Линейные дифференциальные операторы, с частными производными. М., «Мир», 1965.

ӘЛАВӘ МӘГАЛӘЛӘР

1. Абдуллаев Ф. С. Сингулярное уравнение в нормированных кольцах с оператором алгебраического характера. Ученые записки АГУ, 1972.

2. Габиб-заде А. Ш. Некоторые свойства аддитивных операторов, обладающих вещественной однородностью. Ученые записки АГУ, № 2, 1963.

3. Габиб-заде А. Ш. О регуляторах, сохраняющих разрешимость для некоторых классов сингулярных операторов. Ученые записки АГУ, № 5, 1968.

4. Салимов Я. Ш. Об одной регуляризации сингулярного уравнения с различными сингулярными операторами, действующими в нормированном кольце. Ученые записки АГУ, № 2, 1970.

МҮНДӘРИЧАТ

I фәсил. **Тоположи фәзалар**

II фәсил. **Хәтти фәзалар.**

III фәсил. **Хәтти функсионаллар вә хәтти операторлар**

IV фәсил. **Һилберт фәзасында хәтти операторлар һаггында**

V фәсил. **Хәтти операторларын Банах фәзасында спектрал нәзәријјәси**

VI фәсил. **Тамам кәсилмәз операторлу тәнликләр вә онларын спектрал нәзәријјәси**

VII фәсил. **Банах ҹәбрләри**

VIII фәсил. Банах фәзаларында вә Банах ҹәбрләриндә регулјар вә сингулјар операторлу тәнликләрин нормал һәлл олунмасы

IX фәсил. Мүҹәррәд сингулјар операторлу тәнликләр вә бә'зи әсас анлајышлар

X фәсил. Банах фәзаларында скалјар аргументли вектор функсијалар үчүн бә'зи мәсәләләр

XI фәсил. Интеграл тәнликләр

XII фәсил. Үмумиләшмиш төрәмәләр.

Редактору *И. Әлијев.*
Ҹилдинин рәссамы *С. Гаспаров.*
Бәдии редактору *А. Әләкбәров.*
Техники редактору *Ә. Ағајев.*
Корректорлары *С. Гасымова, З. Султанов*

ИБ—137

Јығылмаға верилмиш 19/VIII 1977-ҹи ил. Чапа имзаланмыш 30/III 1978-ҹи ил. Кағыз форматы $60\times90^1/_{16}$. Кағыз № 3. Физики вә шәрти ч. в. 24,5 Учот нәшр. вәрәги 20. Сифариш № 72415. Тиражы 10000. Ҹилддә гијмәти 1 ман. 25 гәп.

Азәрбајҹан ССР Назирләр Совети Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин «Маариф» Нәшријјаты, Бакы, Ә. Тағызадә күчәси, № 4.

Азәрбајҹан ССР Назирләр Совети Дөвләт Нәшријјат, Полиграфија вә Китаб Тиҹарәти Ишләри Комитәсинин Јени Китаб мәтбәәси, Бакы, Ә. Тағызада күчәси, № 4.

Амир Шамиль оглы Габибзаде
проф., доктор физико-математических наук

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
учебник
(на азербайджанском языке)

Азербайджанское государственное издательство
учебно-педагогической литературы „Маариф"
Баку—1978